

砂の平面ひずみせん断形態の幾何学的考察

池田清宏¹・山川優樹²・櫻庭嗣大³・須藤良清⁴

¹正会員 Ph.D. 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉)

²正会員 工修 長岡技術科学大学環境・建設系 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

³東北大学工学部土木工学科 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉)

⁴正会員 東北大学工学部土木工学科 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉)

供試体寸法・端面摩擦の有無・載荷速度等の各種実験条件を変化させた豊浦砂の平面ひずみ圧縮せん断試験を数多く行い、その変形形態を観察した。この観察結果を「せん断帯分岐」、「低周波の拡散型分岐」、「高周波の拡散型分岐」という3つの視点に基づいて分類した結果、供試体寸法・端面摩擦の有無・載荷速度等の各種実験条件の違いが、分岐モードを変化させることにより、多様な変形形態を生み出していることを明らかにした。また、3種類の分岐が混在していることが、供試体のせん断挙動を非常に複雑にしていることを示した。

Key Words : bifurcation, plane-strain compression test, sand, shear band

1. 序論

土質材料の平面ひずみせん断試験は広範に行われており^{1),2),3),4),5),6),7),8)}, 1本の斜めのせん断帯²⁾, 共役な2本のせん断帯³⁾, 周期的なせん断帯⁷⁾等, 多岐にわたるせん断形態が観察されている。また, 土質材料の2次元長方形領域の変形分岐解析が, 平面ひずみ試験や三軸圧縮試験における挙動のシミュレーションとして盛んに行われている^{9),10),11),12),13),14),15),16)}。

このように, 数多くの研究が行われているが, その殆どがこの種の現象の力学的な側面に力点を置いており, その幾何学的なメカニズムに関しては不明な点が多い。そこで, 本研究では, そのメカニズムの解明の一步として, 豊浦砂の平面ひずみ圧縮せん断試験を行い, 供試体のせん断形態の幾何学的な観察を行う。この観察において, 図-1に示す

- せん断帯分岐
- 低周波の拡散型分岐
- 高周波の拡散型分岐

という3つの視点をを用いることとする。ここに, 拡散型とは harmonic or diffuse mode の意味である。

第一の視点であるせん断帯分岐は, せん断帯の形成により, 不連続なひずみ・変位場を生み出すものであり, 「局所的な材料不安定 (local material instability)」と言うべきものである。材料がその変形過程においてひずみ場, あるいは変位場の連続性を持続できる限界点と解釈できる。そのメカニズムは, 塑性分岐の研究により明らかにされている^{17),18)}。一樣な応力状態の均質材料に材料不安定が発生する時には, 多くの部分が同時に分岐を起こす可能性があり, どのように破壊 (せん断帯・すべり面の形成) が進展して行くかは, 次に述べる対称性破壊分岐をきっかけとする変形の局所化に支配される。

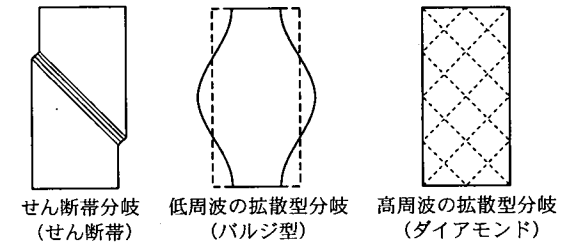


図-1 供試体の変形形態のメカニズムの分類

低周波と高周波の拡散型分岐は, いわゆる拡散型分岐モードの波数の違いによるものであり, いずれも幾何学的不安定性により生じるものである。対称性の低下を伴うことから, 非線形数学の分野では「対称性破壊分岐」と呼ばれており, そのメカニズムは, 群論的分岐理論^{19),20)}により明らかにされており, 土の三軸圧縮試験の結果の記述にも用いられている^{21),22),23),24)}。

第二の視点である低周波の拡散型分岐は, 供試体の形状を変化させるものである。例えば, 円柱供試体には, 「袈裟切り型」, 「バルジ型」, 「下膨れ型」等の低周波の分岐モードがよく観察されており, その分岐解析も行われている^{10),12),13),16)}。

第三の視点である高周波の拡散型分岐は, ダイヤモンドパターンのような幾何学模様 (高周波のパターン) を生み出すものである。このような幾何学模様は, 対称性が高く, なおかつ境界の影響が少ない時に, 分岐により発生するものである²⁴⁾。Ikedaら²¹⁾は, 砂や粘土

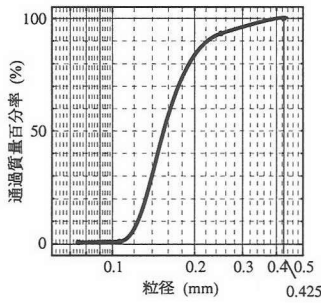


図-2 粒径加積曲線

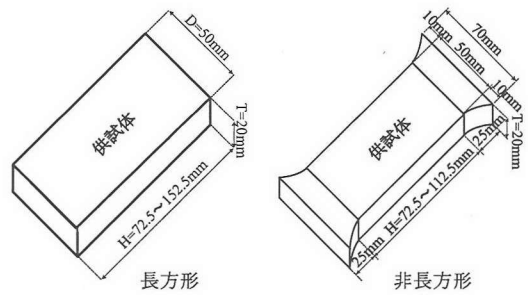


図-3 供試体形状

の円柱供試体に現れる縞状やダイヤモンド状のせん断帯が分岐により発生するメカニズムを、群論的分岐理論により明らかにしている。Petryk and Thermann²⁵⁾は、多結晶質金属の塑性変形解析により、せん断帯が周期的に発生する状況をシミュレートしている。また、小林¹⁵⁾は、土/水連成有限要素解析を行い、各種のダイヤモンドパターンが発生し、いくつかのすべり線へと収斂していく様子をシミュレートしている。

せん断帯分岐と低周波と高周波の拡散型の対称性破壊分岐は、個別に発生する現象ではなく、供試体の変形過程に見られる局所変形やせん断帯、すべり面の形成は、この3種類の分岐が相互に影響した現象である。

本研究では、供試体形状および形状比・端面摩擦の有無・载荷速度等の各種条件を変化させた豊浦砂の平面ひずみ圧縮せん断試験を行い、せん断帯の発現形態を観察する。前述の3種類の分岐に基づき、砂の供試体の破壊形態(分岐モード)を分類することで、せん断帯形成のメカニズムを幾何学的な視点から明らかにする。

2. 砂の平面ひずみ圧縮せん断試験法

(1) 供試体の作成

実験に用いた豊浦砂の密度は $\rho_s = 2.648 \text{ g/cm}^3$ であり、最大及び最小密度は、それぞれ $e_{\max} = 0.979$, $e_{\min} = 0.619$ であった。粒度分布を、図-2 に示す。豊浦砂を水で洗浄し、余分な細粒分を取り除いた後に炉乾燥したものを試料とした。

供試体は、相対密度を $85 \pm 2\%$ の範囲内、すなわち、比較的密になるように管理した、できるだけ均質にするために、試料は供試体の高さに合わせて厚さ方向に何層かに分割し、気中落下法により、各層で落下高さ 40 cm が一定となるように供試体を作成した。

供試体形状としては、図-3 に示すような長方形と非長方形の2種類を用いた(厳密には、直方体と非直方体と呼ぶべきであるが、平面ひずみの条件が保たれるので、このように呼ぶこととする)。非長方形供試体

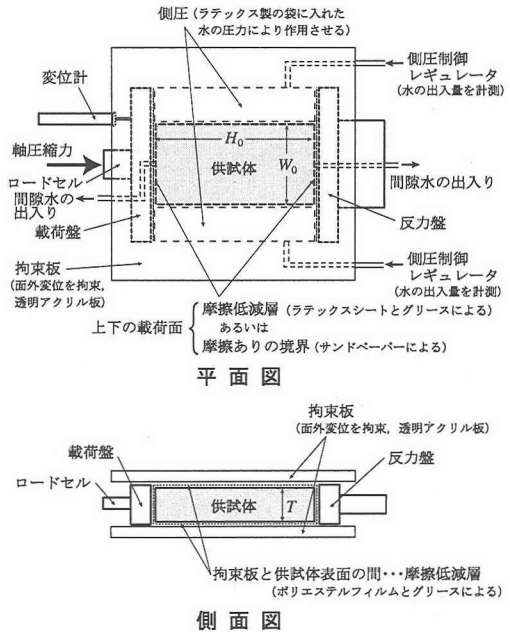


図-4 実験装置概略

の目的は、供試体の高さ方向への周期対称性の有無による、分岐特性の変化を調べることにある(4.(2)節参照)。寸法は、幅 $D = 50 \text{ mm}$ 、厚さ $T = 20 \text{ mm}$ で一定とし、高さを $H = 72.5 \sim 152.5 \text{ mm}$ の範囲内で変化させた。供試体作製後、間隙を水で飽和させ、その後、 $-20 \text{ }^\circ\text{C}$ で凍結させ、凍結状態で実験装置に設置した。

(2) 実験装置

実験装置は、一面せん断試験機を改良したものをを用いた。実験装置の概略図を図-4 に示す。透明なアクリル板2枚を水平に設置し、これらの間に 20 mm の間隔を常時保つように、アクリル板の間に金属棒を挟んで固定した。モーターを一定速度で稼働させてロードセルと载荷盤を押すことにより供試体の高さ方向に軸ひずみを与えた。ちなみに、供試体のロードセル側の部分を上部と、反力盤側の部分を下部と呼ぶこととする。

(3) 試験・測定方法

側圧はゴム袋に入った水の圧力で与え、その圧力はレギュレータで 73.5 kPa とするよう制御した。ゴム袋はラテックスラバー製で薄く伸縮性のあるもので、供試体の角部にも十分密着して側圧をくまなく作用させることができるものである。供試体の体積変化の計測は、通常のように間隙水の出入量を計測するのではなく、側圧用ゴム袋からの水の出入量を計測する間接的方法を用いた。水の出入量の計測には二重管ビューレットと差圧計を用いた通常の方法を用いている。

せん断ひずみ速度は、土質試験の方法と解説²⁶⁾の変位速度制御の砂のせん断速度標準値に従って、 $\dot{\epsilon} = 0.25\%/min, 0.5\%/min$ の 2 種類を用いた。

供試体のひずみ集中域の挙動を明確に観察するために、供試体の表面に 2.5mm×2.5mm の基盤の目を書いたポリエステルフィルムをかぶせ、これをアクリル板で挟むように設置する。供試体表面部におけるアクリル板との摩擦を低減するために、アクリル板との間にポリエステルフィルムを挟み、シリコンオイルをその表面に塗った。供試体の載荷部分にあたる上下端面の摩擦の条件については、端面摩擦なしの条件では、シリコングリースとラテックスラバーシートを用いた lubrication layer を設置することで、供試体上下の端面摩擦を低減した。端面摩擦ありの条件では、供試体上下の端面にサンドペーパーを挟んだ。

凍結した供試体をセットし、載荷盤が適度に可動する範囲でボルトを締め、アクリル板を固定する。側圧が供試体に均等に行き渡るように水圧を 29.4~49 kPa に徐々に上げ、供試体が溶けるのを待つ。その後側圧を 73.5 kPa に設定し、軸圧縮(せん断)を開始する。軸ひずみ 20%までは 1%間隔で、それ以降 30%までは 2%間隔で写真を撮影する。

3. 実験結果

この章では、供試体形状および形状比、端面摩擦の有無、載荷速度等の各種実験条件を変化させて行った豊浦砂の平面ひずみ圧縮せん断試験結果をまとめる。

(1) 供試体の種類

表-1 に示す、各ケース 2~10 本からなるケース 1~6 の供試体を用いた。ケース 1, 2 は、載荷速度 $\dot{\epsilon} = 0.5\%/min$ を、ケース 3~6 は、載荷速度 $\dot{\epsilon} = 0.25\%/min$ を用いた。ケース 1, 3, 5 は、端面摩擦なし、ケース 2, 4, 6 は、端面摩擦ありの場合に相当する。ケース 1~4 は、長方形供試体、ケース 5, 6 は、非長方形供試体である。以下、ケース i の j 番目の寸法の供試体を供試体 $i-j$ と呼ぶ。さらに、全く同一の条件・寸法の供

試体を $i-j-a, i-j-b, i-j-c, i-j-d$ と呼ぶこととする。ケース 5 は、 $H = 112.5\text{ mm}$ (形状比 $H/D = 2.25$) のみとしたが、その他のケースでは、高さを $H = 72.5 \sim 152.5\text{ mm}$ (形状比 $H/D = 1.45 \sim 3.05$) の範囲で変化させた。

(2) 応力ひずみ曲線

応力ひずみ曲線の一例を図-5 に示す。いずれも軸ひずみ 5~8%付近で、軸差応力がピークを迎えた後に、急速に低下している。その後、軸差応力が増加に転じるが、端面摩擦ありで高さが低い供試体ほど増加の割合が大きく、端部の変位拘束の影響を示している。

(3) 変形モードの観察

供試体のせん断変形の発現形態について、写真-1 (長方形供試体) と写真-2 (非長方形供試体) を参照しながらまとめる。ここでは現象学的な視点により観察し、第 5 章では分岐という視点により再度考察する。

a) ケース 1 ($\dot{\epsilon} = 0.5\%/min$, 端面摩擦なし, 長方形)

ケース 1 の供試体の上部には、せん断帯が平行に発生することにより、ダイヤモンドパターンやストライブパターンなどの高周波モードが形成された。上部のみに高周波モードが発生した原因として、何らかの理由により、上下端に若干の違いがあり、上下対称性が損なわれていたのではないかと考えられる。このケースの特徴的な例として、下記の 2 供試体を取り上げる。

- No.1-1-c ($H = 102.5\text{ mm}$, 写真-1(a))

せん断帯が共役な 2 方向にバランスよく発達することにより、上部のみに、ダイヤモンドパターンを形成している。

- No.1-2-a ($H = 112.5\text{ mm}$, 写真-1(b))

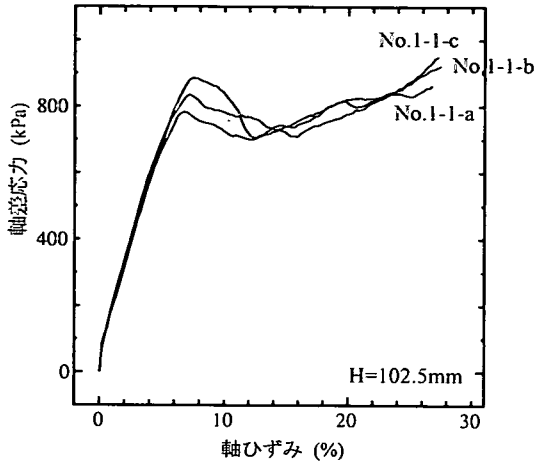
共役な 2 方向の内、一方向のせん断帯が卓越することにより、上部のみに、ストライブパターンを形成している。

b) ケース 2 ($\dot{\epsilon} = 0.5\%/min$, 端面摩擦あり, 長方形)

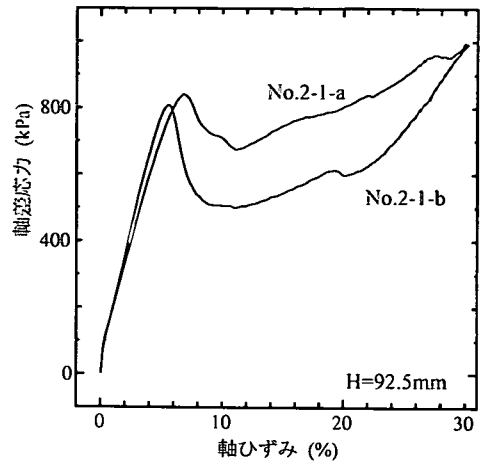
高さが低い場合 ($H = 92.5\text{ mm}$) には、供試体全体にせん断帯が発生し、高さが高い場合 ($H = 152.5\text{ mm}$) には、供試体の上部にだけせん断帯が発生した。

- No.2-1-b ($H = 92.5\text{ mm}$, 写真-1(c))

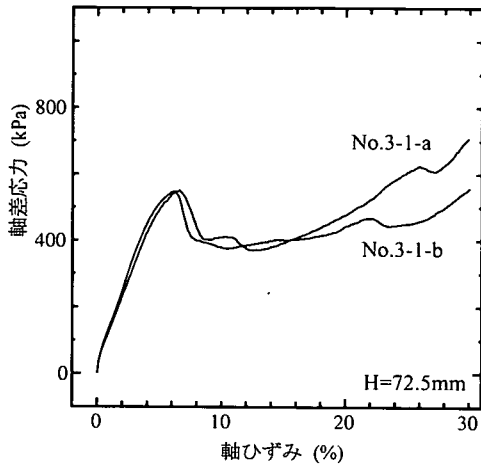
軸ひずみ $\epsilon = 8\%$ で、×状のせん断帯が入った。このとき、上端部ではせん断帯の端部と供試体の端部とが一致していたが、下端部では、せん断帯の端部は供試体の端部よりも上にずれていた。 $\epsilon = 15\%$ で×状のせん断帯の中央部が徐々にずれている。 $\epsilon = 24\%$ では、対角線の 1 方向だけが 2 重になっている。



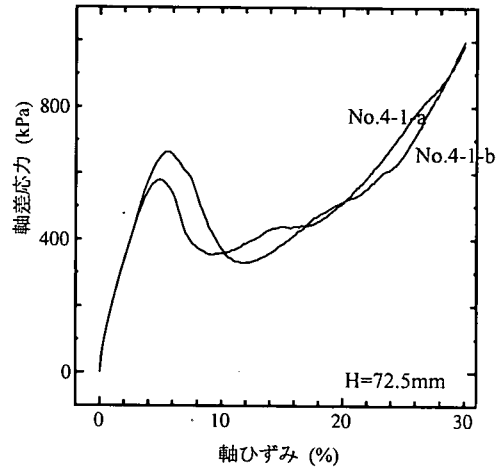
(a) ケース 1 ($\dot{\epsilon} = 0.5\%/min$, 端面摩擦なし, 長方形)



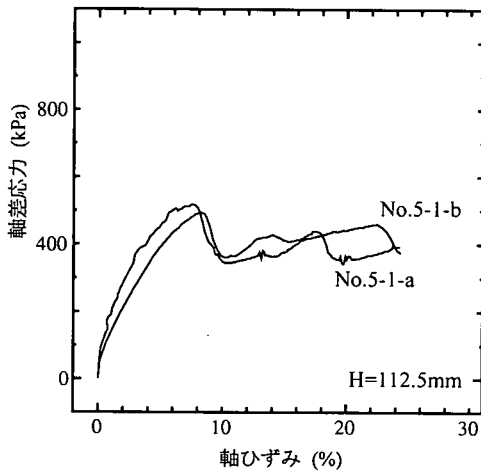
(b) ケース 2 ($\dot{\epsilon} = 0.5\%/min$, 端面摩擦あり, 長方形)



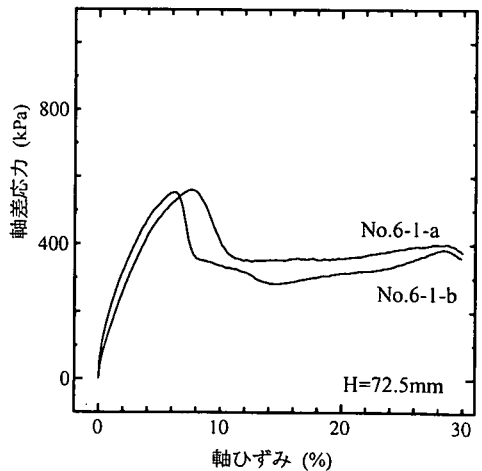
(c) ケース 3 ($\dot{\epsilon} = 0.25\%/min$, 端面摩擦なし, 長方形)



(d) ケース 4 ($\dot{\epsilon} = 0.25\%/min$, 端面摩擦あり, 長方形)

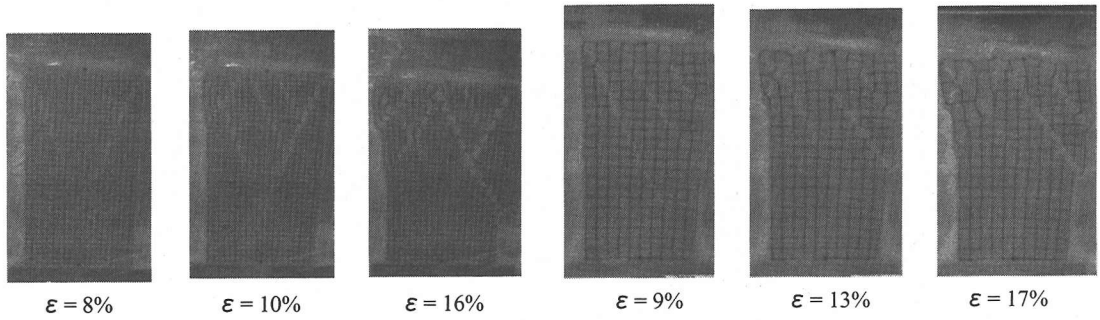


(e) ケース 5 ($\dot{\epsilon} = 0.25\%/min$, 端面摩擦なし, 非長方形)



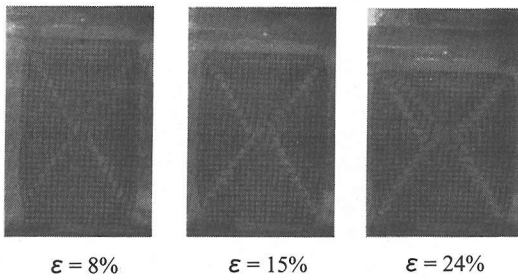
(f) ケース 6 ($\dot{\epsilon} = 0.25\%/min$, 端面摩擦あり, 非長方形)

図-5 応力ひずみ曲線

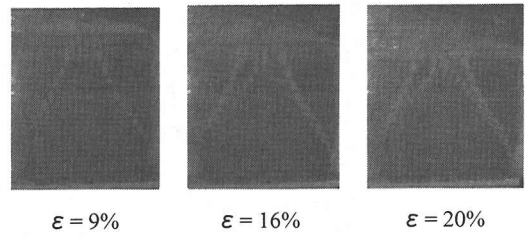


(a) No.1-1-c ($\dot{\epsilon} = 0.5\%/min$, 端面摩擦なし, 長方形, $H = 102.5\text{ mm}$)

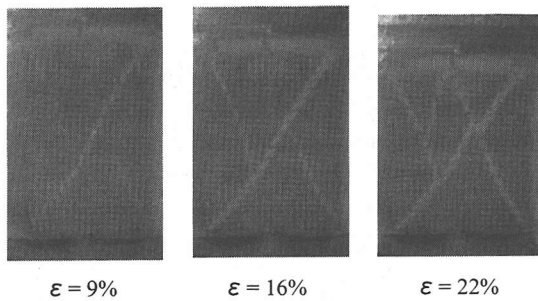
(b) No.1-2-a ($\dot{\epsilon} = 0.5\%/min$, 端面摩擦なし, 長方形, $H = 112.5\text{ mm}$)



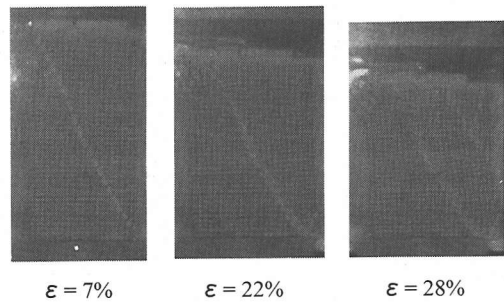
(c) No.2-1-b ($\dot{\epsilon} = 0.5\%/min$, 端面摩擦あり, 長方形, $H = 92.5\text{ mm}$)



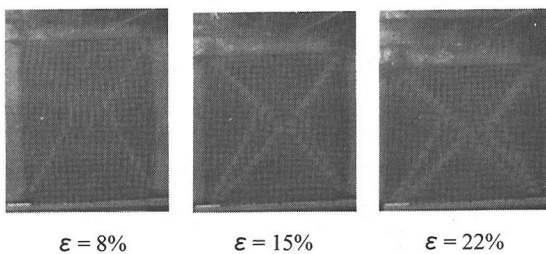
(d) No.3-1-b ($\dot{\epsilon} = 0.25\%/min$, 端面摩擦なし, 長方形, $H = 72.5\text{ mm}$)



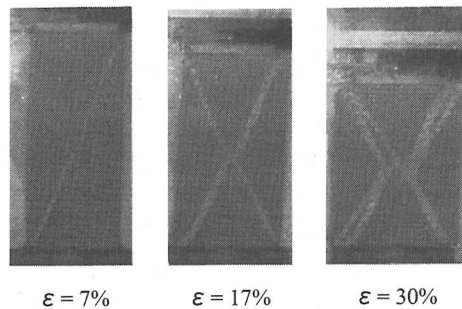
(e) No.3-2-a ($\dot{\epsilon} = 0.25\%/min$, 端面摩擦なし, 長方形, $H = 92.5\text{ mm}$)



(f) No.3-3-b ($\dot{\epsilon} = 0.25\%/min$, 端面摩擦なし, 長方形, $H = 112.5\text{ mm}$)



(g) No.4-1-a ($\dot{\epsilon} = 0.25\%/min$, 端面摩擦あり, 長方形, $H = 72.5\text{ mm}$)



(h) No.4-4-c ($\dot{\epsilon} = 0.25\%/min$, 端面摩擦あり, 長方形, $H = 132.5\text{ mm}$)

写真-1 長方形供試体の変形挙動

表-1 供試体データ

ケース	高さ (mm)	形状比	本数	载荷速度 (%/min)	端面摩擦	形状
1-1	102.5	2.05	3	0.5	無	長方形
1-2	112.5	2.25	3		有	
2-1	92.5	1.85	2			
2-2	152.5	3.05	1			
3-1	72.5	1.45	2	0.25	無	
3-2	92.5	1.85	2			
3-3	112.5	2.25	2			
4-1	72.5	1.45	2			
4-2	92.5	1.85	1		有	
4-3	112.5	2.25	2			
4-4	132.5	2.65	4			
4-5	152.5	3.05	1			
5-1	112.5	2.25	2			無
6-1	72.5	1.45	2			
6-2	92.5	1.85	2			
6-3	112.5	2.25	2	有	非長方形	

c) ケース3 ($\dot{\epsilon} = 0.25\%/min$, 端面摩擦なし, 長方形)

摩擦ありのケースに比較して, 多様な変形形態が観察された。これは, 後述するように, 端面拘束がないために, 分岐モードの種類が増えるためであると思われる。例えば, 高さが低い供試体 ($H = 72.5\text{ mm}$) に対しては, V字型のせん断帯が, 下部 (No.3-1-a) または上部 (No.3-1-b) に発生した。高さが高い供試体 ($H = 92.5, 112.5\text{ mm}$) に対しては, 対角方向にせん断帯が発生した場合と, 上部にV字型のせん断帯が発生した場合とがあり, 同一の高さの供試体でも異なる変形形態を示した。

• No.3-1-b ($H = 72.5\text{ mm}$, 写真-1(d))

軸ひずみ $\epsilon = 9\%$ において, 左右対称な逆V字型のせん断帯が上部に入った。軸ひずみ $\epsilon = 16\%$ では2重のせん断帯による逆V字型になる。

• No.3-2-a ($H = 92.5\text{ mm}$, 写真-1(e))

$\epsilon = 9\%$ において, やや幅を持った, はっきりとした斜めのせん断帯と, その対角の方向に細いせん断帯が2本発生している。 $\epsilon = 16\%$ において, やや幅を持ったせん断帯がさらに顕著になり, 上から下に向かって進展し, 供試体の左側の側面に達している。このように, このせん断帯は, 厳密な対角線とはなっていない。 $\epsilon = 22\%$ において, 領域を分割, 再分割する形で, 複雑なせん断帯が発生している。

• No.3-3-b ($H = 112.5\text{ mm}$, 写真-1(f))

$\epsilon = 7\%$ において, せん断帯が対角線状に一本伸びている。 $\epsilon = 22\%$ において, そのせん断帯が卓越している。 $\epsilon = 28\%$ において, 対角線状のせん断帯と平行なせん断帯とその共役な方向のせん断帯が領域を分割, 再分割している。

d) ケース4 ($\dot{\epsilon} = 0.25\%/min$, 端面摩擦あり, 長方形)

高さが低い供試体 ($H = 72.5, 92.5\text{ mm}$) に対しては, 4隅からほとんど同時にせん断帯が発生し, X状になっているが, 中央部で互い違いになり, きれいな対角線を形成していない。一方, 高さが高い供試体 ($H = 112.5, 132.5, 152.5\text{ mm}$) に対しては, 最初に対角線方向にせん断帯が1本発生し, その後に逆方向のせん断帯が発生している。

• No.4-1-a ($H=72.5\text{ mm}$, 写真-1(g))

$\epsilon = 8\%$ において, せん断帯が対角線とずれた方向に入るが, このせん断帯の進展は途中で止まってしまっている。 $\epsilon = 15\%$ において, せん断帯がきれいに対角線状に発生している。このせん断帯は, 最初に入ったせん断帯とは異なる方向に入っており, 2重のせん断帯を形成している。

• No.4-4-c ($H = 132.5\text{ mm}$, 写真-1(h)) $\epsilon = 7\%$ において,

せん断帯が斜めに1本入り, $\epsilon = 17\%$ において, X状にもう1本入り, きれいな対角線になる。 $\epsilon = 30\%$ において, 対角線方向に複数のせん断帯が入り, 複雑化している。

e) ケース5 ($\dot{\epsilon} = 0.25\%/min$, 端面摩擦なし, 非長方形)

不規則なV字型の割れが発生し, 他のケースよりもせん断帯が不規則であった。この理由としては, 端部が広がっているために, 供試体の対称性を保つことが困難であったことが挙げられる。

• No.5-1-b ($H = 112.5\text{ mm}$, 写真-2(a))

$\epsilon = 11\%$ において, 斜め方向のせん断帯が1本入り, $\epsilon = 17\%$ において, その共役な方向に短いせん断帯が1本入った。

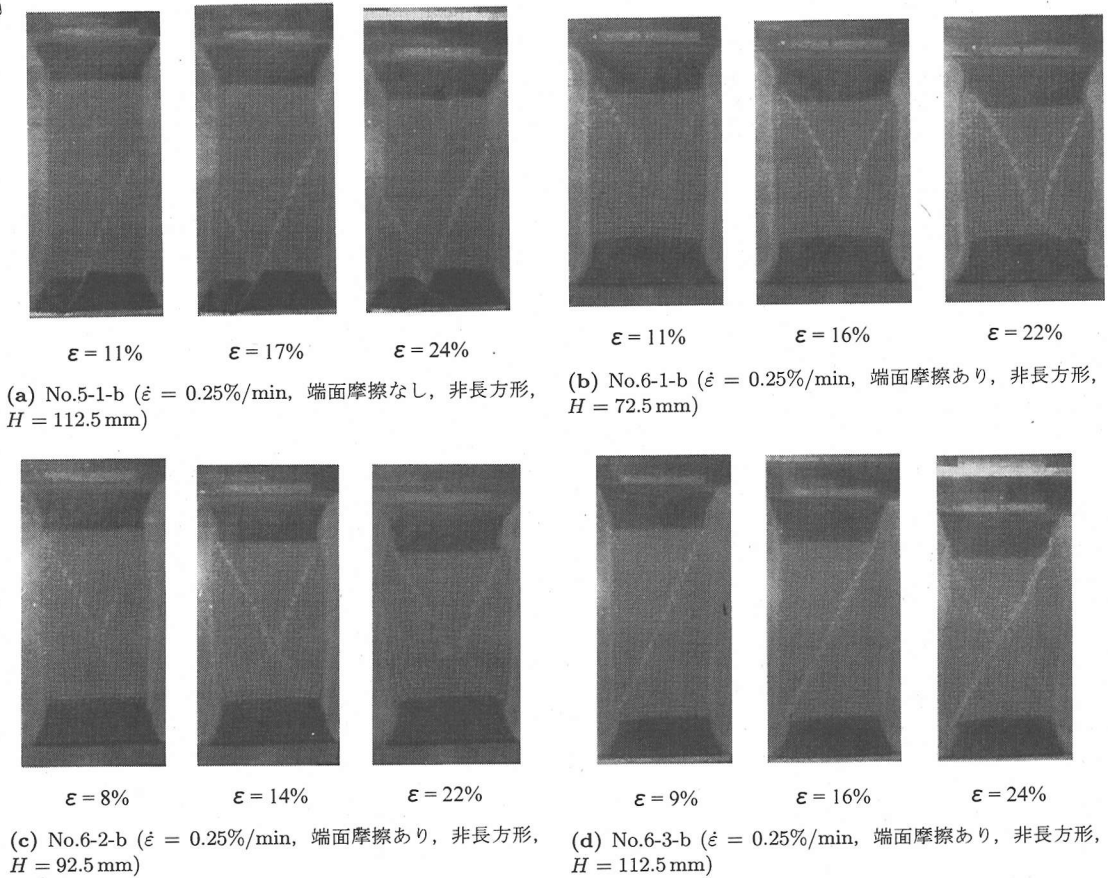


写真-2 非長方形供試体の変形挙動

f) ケース 6 ($\dot{\epsilon} = 0.25\%/min$, 端面摩擦あり, 非長方形)

不規則な V 字型, ×型, その中間等, 多岐にわたるモードが観察されたが, ケース 1~4 よりもせん断帯が不規則であった。これは, ケース 5 と同様の理由によるものと思われる。ただし, 高さが高い供試体ほど, せん断帯の形態が規則的であった。

- No.6-1-b ($H = 72.5\text{ mm}$, 写真-2(b))
 $\epsilon = 11\%$ において, V 字型のせん断帯が上部に入り, $\epsilon = 22\%$ において, 右下部に数本のせん断帯が入っている。
- No.6-2-b ($H = 92.5\text{ mm}$, 写真-2(c))
 $\epsilon = 8\%$ において, V 字型のせん断帯が上部に入り, $\epsilon = 22\%$ において, 逆 V 字型のせん断帯が下部に入っている。
- No.6-3-b ($H = 112.5\text{ mm}$, 写真-2(d))
 $\epsilon = 9\%$ において, 対角方向のせん断帯が 1 本入り, $\epsilon = 24\%$ において, 逆対角方向に S 字型のせん断帯が入っている。

(4) 考察

変形形態の観察の結果, 下記の考察が得られた。

- ダイヤモンドパターンやストライプパターンなどの高周波モードが, 載荷速度が速く, 端面摩擦がないケース 1 の供試体に観察された。しかし, これらのパターンが観察されたのは, 供試体の上部のみであり, 三軸圧縮試験のように全断面にわたるパターンを観察することはできなかった。
- 高さが小さい供試体 ($H = 72.5, 92.5\text{ mm}$) には, V 字型や×状のせん断帯が発生するケースが多く, 高さが大きい供試体 ($H = 112.5, 132.5\text{ mm}$) には, 対角方向のせん断帯が発生するケースが多かった。
- 端面摩擦がない場合には, 多様な形態のせん断帯が観察され, 端面摩擦がある場合には, ×状や対角方向のせん断帯が観察された。
- 非長方形供試体には, 長方形供試体よりも不規則なせん断帯が発生した。これは, 端面摩擦あり, なしの場合を含めて, 長方形供試体と比べて, 変形の初期から不均一な応力・ひずみ分布となるためと考えられる。

4. 分岐という視点

この章では、分岐という視点により、実験結果を分析する手法を提案する。せん断帯分岐に関しては、簡単にふれるにとどめ、低周波と高周波の拡散型の対称性破壊分岐を中心にまとめる。

(1) 長方形領域の対称性破壊分岐

直交座標の原点に位置する長方形領域

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{L_x}{2} \leq x \leq \frac{L_x}{2}, -\frac{L_y}{2} \leq y \leq \frac{L_y}{2} \right\} \quad (1)$$

を考え、その分岐の仕組みについてまとめることとする。ここで、 L_x, L_y は、それぞれ x, y 方向の領域の長さを表す。

a) 幾何学的対称性

式 (1) の長方形領域の幾何学的対称性は、次の 4 つの幾何学操作により表される。

$$e, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_x\sigma_y \quad (2)$$

ここで、 e は恒等操作、 σ_x, σ_y はそれぞれ yz, zx 平面についての鏡映

$$\sigma_x : x \mapsto -x, \quad \sigma_y : y \mapsto -y,$$

であり、 $\sigma_x\sigma_y$ は z 軸についての π 回転を表している。また、 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = e$ である。

長方形領域の変形後の対称性は、

- 上下左右対称モード : $\{e, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_x\sigma_y\}$
- 左右対称モード : $\{e, \sigma_x\}$
- 上下対称モード $\{e, \sigma_y\}$
- π 回転対称モード : $\{e, \sigma_x\sigma_y\}$
- 非対称モード : $\{e\}$

という 5 種類に分類できる。ここに、 $\{\cdot\}$ は、括弧内の変換からなる、対称性を表す群である。

b) 周期対称性

境界の影響を除くため、周期境界の仮定を設ける。すなわち、長方形領域の上下端と左右端はそれぞれ周期的な境界により滑らかにつながっていると仮定する。このとき、この領域は並進変換

$$\begin{aligned} t_x(l_x) : x &\rightarrow x + l_x & 0 \leq l_x \leq L_x \\ t_y(l_y) : y &\rightarrow y + l_y & 0 \leq l_y \leq L_y \end{aligned} \quad (3)$$

に関して不変である。ここに、 $t_x(l_x), t_y(l_y)$ はそれぞれ x, y 軸方向への長さ l_x, l_y の並進変換を表す。

c) 低周波の拡散型分岐

幾何学的対称性 (2) だけを持つ長方形領域に関する分岐の仕組みを図-6 に示す。この図は、「上下左右対称モード」から「左右対称モード」、「上下対称モード」、

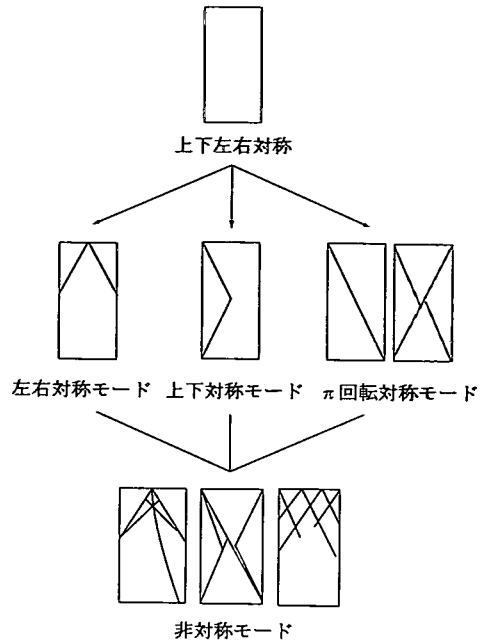


図-6 長方形領域の低周波の拡散型分岐

「 π 回転対称モード」の内いずれかの状態に移行し、さらに、もう一回の分岐により非対称モードになるとい、対称性の低下の仕組みを表している。また、「非対称モード」は、「上下左右対称モード」から直接発生することはなく、必ず「左右対称モード」、「上下対称モード」、「 π 回転対称モード」の内のいずれかの状態を経て、発現する。

d) 高周波の拡散型分岐

幾何学的対称性 (2) と並進対称性 (3) を持つ長方形領域に関する分岐の仕組みは、Ikeda 他^{(11), (24)}により求められており、図-7 に示すような、ダイヤモンドパターンやストライプパターンなどの高周波の分岐解が存在することが明らかにされている。ストライプパターンは、周期境界条件という理想的な状況においてのみ存在する分岐解であり、実験などでは、領域の一部にしか観察されないことが多い。

一方、ダイヤモンドパターンは現実的な実験や数値解析における境界条件 (全てではない) とも整合する解であり、土のせん断帯分岐解析でも求められている^{(15), (16)}。バルジ型 (上下左右対称モード) は最も簡単 (低周波) なダイヤモンドパターンである。バルジ型に変形した後は図-6 の分岐の仕組みに従う。

e) Harmonic 分岐モードの対称性

平面ひずみ矩形供試体の分岐解析を行うと、拡散型分岐モードの一種である、Harmonic の分岐モードが発生する場合がある^{(15), (16)}。

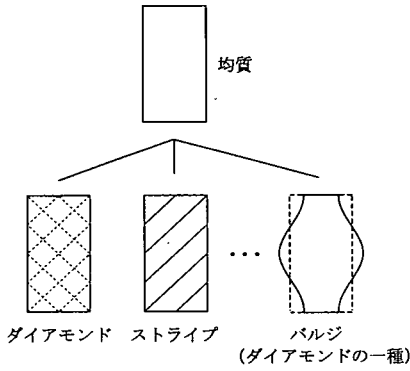


図-7 長方形領域の高周波の拡散型分岐

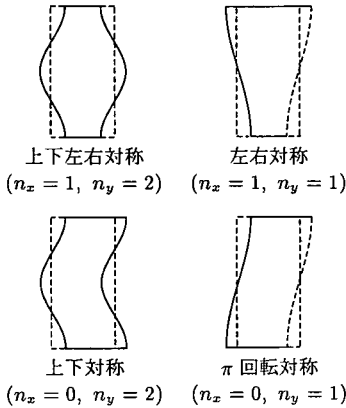


図-8 低次の harmonic モード

例えば、 x 方向変位だけを考えて、harmonic モードの対称性は、

$$\begin{cases} \sin \pi n_x x / L_x \cdot \cos \pi n_y y / L_y & \text{上下左右対称} \\ \sin \pi n_x x / L_x \cdot \sin \pi n_y y / L_y & \text{左右対称} \\ \cos \pi n_x x / L_x \cdot \cos \pi n_y y / L_y & \text{上下対称} \\ \cos \pi n_x x / L_x \cdot \sin \pi n_y y / L_y & \pi \text{回転対称} \end{cases} \quad (4)$$

($n_x, n_y = 0, 1, \dots$) と分類される。図-8に、低次の harmonic モードを示す。

本研究の長方形供試体では、端面摩擦なしの場合には、長方形を保ったまま変形でき、均質な状態を保てることから、harmonic モードが分岐モードとなる。このため、均質な状態から図-8に示すような拡散型モードへの移行も分岐により引き起こされる。すなわち、バルジ型の変形も分岐により発生する。

一方、端面摩擦ありの場合には harmonic モードは分岐モードとならず、分岐する以前から長方形が崩れてしまい、例えば、バルジ型の変形が分岐を経ずに直接発生する。

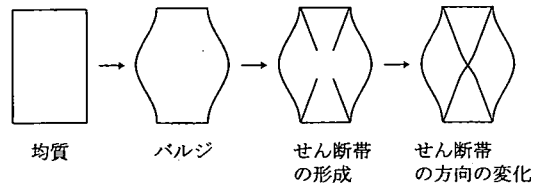


図-9 低周波の拡散型分岐とせん断帯分岐による複雑なせん断形態

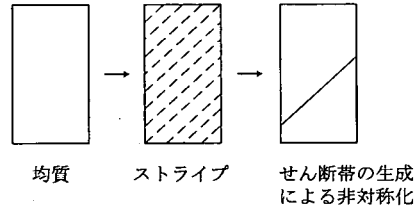


図-10 せん断帯分岐による突然の非対称化

(2) 非長方形領域の対称性破壊分岐

非長方形領域は、幾何学的対称性(2)だけを持ち、その分岐の仕組みは図-6により与えられる。端面摩擦の有無を問わず、非長方形領域の中央の長方形部分に対しても、harmonic モードは分岐モードとならず、分岐する以前から長方形が崩れてしまう。

(3) せん断帯分岐と対称性

せん断帯分岐によるせん断帯は、ダイヤモンドパターンやストライブパターンを形成するものであり、高周波の分岐による幾何学パターンとせん断帯分岐によるせん断帯の方向とは整合するものである。

一方、低周波の拡散型分岐が産み出す幾何学パターンは、せん断帯分岐によるせん断帯の方向とは必ずしも整合せず、複雑なせん断形態を生み出す。一例として、図-9は、低周波の分岐により引き起こされたせん断帯の方向と供試体の対角方向とが一致しないために、中央部においてS字状に曲がる状況を示している。

図-10に示すように、点線で示す一連のせん断帯が同時に発生しようとする状況を考える。このとき、さらに、ある種の初期不整などにより、ある1本のせん断帯が進展し、他のせん断帯が除荷される場合には、図-10の右側に示すように、非対称なせん断形態が発生する。このせん断帯の形成による突然の非対称化のメカニズムは、Weibull の weakest link theory²⁸⁾では、「同じ強度の部品からなるチェーンを引張るときの破壊では、チェーンのどの部分が破壊するかは不確定となる」と説明されている。この種の分岐は、低周波と高周波の拡散型の対称性破壊分岐とは異なるメカニズムを持つ。

表-2 供試体の変形の進行の分類

端面摩擦の有無	変形の進行の分類	供試体番号
なし	均質→高周波モード→非対称	1-1-a~c, 1-2-a
	均質→左右対称→非対称	3-1-b, 3-2-b,
	均質→ π 回転対称→非対称	1-2-b, 3-2-a, 3-3-a, 3-3-b
	均質→非対称	3-1-a, 5-1-a,b
あり	上下左右対称→左右対称→非対称	4-1-a, 6-1-b, 6-2-a,b
	上下左右対称→ π 回転対称→非対称	2-1-a,b, 4-1-b, 4-2, 4-3-a,b 4-4-a~d, 4-5, 6-3-a,b
	上下左右対称→非対称	2-2, 6-1-a

5. 供試体の形態変化の幾何学的分類

第3章では、実験結果を現象学的な視点により観察した。ここでは、前章で導入した分岐という視点に基づいて、第3章の実験結果を分類・考察する。

(1) 変形形態の分類

本実験において、供試体の変形モードを観察した結果

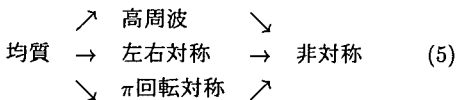
- 均質モード
- 部分的なダイヤモンドパターン
- 部分的なストライプパターン
- 上下左右対称モード
- 左右対称モード
- π 回転対称モード
- 非対称モード

という7種類の変形形態が観察された。

図-6と図-7に示す分岐の仕組みをもとに、供試体の変形の進行状況(写真-1と写真-2参照)を観察した結果、表-2に示す7種類に分類できた。以下、長方形、非長方形と摩擦あり、なしという分類毎にまとめる。

(2) 長方形, 摩擦なし

端面摩擦がない長方形供試体は、表-2に示すように、



という形態変化により、均質な状態から、高周波モード、左右対称モード、 π 回転対称モードのいずれかに移行し、その後非対称化していた。式(5)の形態変化は、図-6と図-7に示す低周波と高周波の拡散型分岐の仕組みに従っており、端面摩擦がない長方形供試体にはこの2種類の分岐が混在することを示している。ただし、供試体 No.3-1-a では、例外的に、均質→非対称と、直接非対称化していた。以下、ケース毎にまとめる。

a) 均質→高周波モード→非対称

載荷速度が $\dot{\epsilon}_a = 0.50 \text{ \%}/\text{min}$ と速い供試体 No.1-1-c には、ダイヤモンドパターン、供試体 No.1-2-a には、ストライプパターンがそれぞれ発生した。この場合の変形の進行のメカニズムとしては、目には見えない形でダイヤモンドパターンまたはストライプパターンを形成する高周波の拡散型分岐が起こり、その後上部が膨れ、下部がしばむ低周波の拡散型分岐が起こったために、上部のパターンのみが強調されたことが考えられる。

b) 均質→左右対称→非対称

供試体 No.3-1-b は、写真-1(d)の $\epsilon = 9\%$ では、上部に逆V字型のせん断帯が発生することにより、左右対称モードとなり、 $\epsilon = 20\%$ では、複雑なせん断帯が発生することにより非対称モードとなっている。逆V字型のせん断帯形成の形成メカニズムとしては、図-8の左右対称モードに示すような、供試体の上部が膨らみ下部がしばむ分岐が発生し、この変形により共役なせん断帯が誘発されたことが考えられる。

c) 均質→ π 回転対称→非対称

このタイプの変形は、本実験で最も多く見られたケースである。供試体 No.3-2-a は、写真-1(e)の $\epsilon = 16\%$ で、供試体 No.3-3-b は、写真-1(f)の $\epsilon = 7\%$ で、ともに π 回転対称モードとなっている。前者は対角2方向のせん断帯、後者は対角1方向のせん断帯と、せん断形態は大きく異なるが、その対称性としては同一である。その後、ともに領域を分割・再分割するせん断帯により非対称化している。

d) 均質→非対称

供試体 No.3-1-a は、写真-3の $\epsilon = 9\%$ では、供試体下部でせん断帯がぶつかって、跳ね返っているように見え、供試体は対称性を完全に失っている。これは、対称性破壊分岐では説明できないものであり、せん断帯分岐による突然の非対称化であると思われる(第4.(3)節の図-10参照)。

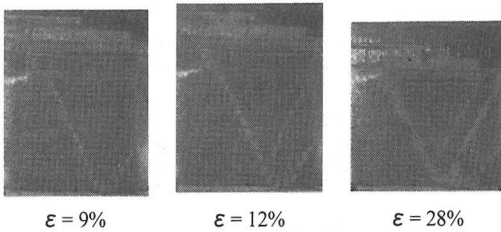


写真-3 供試体 No.3-1-a ($\dot{\epsilon} = 0.25\%/min$, 端面摩擦なし, 長方形, $H = 72.5\text{mm}$)

(3) 長方形, 摩擦あり

端面摩擦がある長方形供試体には, 表-2 に示す,

上下左右対称 \rightarrow 左右対称 \rightarrow 非対称
 \searrow π 回転対称 \nearrow (6)

という形態変化により, 均質な状態から左右対称モードと π 回転対称モードのいずれかに移行し, その後に非対称化していた。ただし, 左右対称モードと π 回転対称モードの差は微妙であった。式 (6) の形態変化は, 図-6 に示す低周波の拡散型分岐の仕組みに従っている。また, 供試体 No.2-2 では, 均質 \rightarrow 非対称と直接非対称化しており, せん断帯分岐による突然の非対称化が起こっていると思われる (第 4.(3) 節の図-10 参照)。以下, ケース毎にまとめる。

a) 上下左右対称 \rightarrow 左右対称 \rightarrow 非対称

供試体 No.4-1-a は, 写真-1(g) の $\epsilon = 8\%$ では, 左右対称モードとなり, $\epsilon = 22\%$ では, やや非対称なモードになっている。4 隅から発生したせん断帯の方向と供試体の対角方向とが異なっており, $\epsilon = 8\%$ では, 中央部でせん断帯の方向が食い違っている。この食い違いは, 第 4.(3) 節の図-10 のせん断帯分岐と低周波の拡散型分岐の混在による複雑な変形であると思われる。

b) 上下左右対称 \rightarrow π 回転対称 \rightarrow 非対称

供試体 No.2-1-b は, 写真-1(c) の $\epsilon = 15\%$ において, π 回転対称モードとなり, $\epsilon = 24\%$ において, 対角方向にせん断帯が入ることにより, π 回転対称性は完全に失われ, 非対称化している。

供試体 No.4-4-c は, 写真-1(h) の $\epsilon = 7\%$ では, 斜めのせん断帯の発生により, きれいな π 回転対称モードとなり, $\epsilon = 30\%$ では, 2 本のせん断帯が顕著になり, ずれてしまうことで, π 回転対称を喪失し, 非対称化している。

(4) 非長方形

非長方形の供試体の対称性は, 端面摩擦の有無を問わず, 長方形の供試体の対称性と同一であることから, 両者ともに同一の分岐の仕組み, すなわち, 図-6 に示す低周波の拡散型分岐に従うことが理論的に予測され

る。実際, 表-2 に示すように,

上下左右対称 \rightarrow 左右対称 \rightarrow 非対称
 \searrow π 回転対称 \nearrow

という形態変化が起こっており, この理論予測を裏付けている。高さが高い供試体ほど, せん断帯の形態が規則的であり, より対称性が高い状態となっている。

(5) 考察

変形形態を対称性という視点から観察した結果, 下記の考察が得られた。

- 端面摩擦なしの長方形供試体は, 他の場合よりも, はるかに多くの種類の分岐モードと変形形態を示した。例えば, 高周波の分岐モードや領域を分割・再分割するせん断帯は, この種の供試体だけに見られた。
- 端面摩擦がある長方形供試体と非長方形供試体は, 見かけは大きく異なるが, 同一の対称性破壊分岐の仕組みに従っていた。
- せん断帯分岐と低周波と高周波の拡散型の対称性破壊分岐とが混在することが, 供試体のせん断形態を非常に複雑にしている。
- 高さが低い供試体の方が左右対称モードが発現しやすく, 高い方が π 回転対称モードが発現しやすい傾向があった。これは, 供試体の高さが高い方が倒れる分岐モードが発現しやすいためである。

6. 結論

本研究では, 供試体寸法・端面摩擦の有無・載荷速度等の各種実験条件の違いが, 分岐モードを変化させることにより供試体の変形形態を変化させていることを明らかにした。また, 対称性破壊分岐とせん断帯を形成するせん断帯分岐とが混在していることが, 供試体のせん断挙動を非常に複雑にしていることを示した。土の物性を調べる試験に際し, 供試体の形状が分岐により崩れてしまうことが, 供試体の平均的な応力-ひずみ関係を調べる際の障壁になっている。

端面摩擦なしの長方形供試体の試験では, 均質状態から低次や高次モードによる各種分岐による変形を調べており, 端面摩擦ありの長方形供試体の試験では, バルジ状態から \times 状のせん断帯を形成して行く変形過程を調べていると解釈することができる。要素試験としては, できる限り端部の拘束を排除した, より多くの種類の分岐モードを許容し得る端面摩擦なしの試験の方が望ましいと言えよう。また, アクリル板と供試体との摩擦もできる限り排除すべきである。

現行の試験においては, 供試体の力学的挙動の観察に力点が置かれている。しかし, 本研究により明らかに

されたように、分岐により引きおこされる供試体の変形やせん断帯の形成が、供試体の力学的挙動にも大きな影響を与えている。土の実験やその数値シミュレーションにおいては、分岐による対称性の変化という定性的な視点を踏まえ、結果を理解することが望ましい。

参考文献

- 1) Oda, M., Koishikawa, I. and Higuchi, T.: Experimental study on anisotropic shear strength of sand by plane strain test, *Soils and Foundations*, Vol. 18(1), pp. 1-18, 1978.
- 2) Vardoulakis, I., Goldscheider, M., and Gudehus, G.: Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem, *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 2, pp. 99-128, 1978.
- 3) Han, C. and Vardoulakis, I.: Plane-strain compression experiments on water-saturated fine-grained sand, *Géotechnique*, Vol. 41(1), pp. 49-78, 1991.
- 4) Kuntsche, K.: Materialverhalten von wasser-gesättigten Ton bei ebenen und zylindrischen Verformungen, *Dissertation Univ. Karlsruhe*, 1982.
- 5) Tatsuoka, F., Sakamoto, M., Kawamura, T., and Fukushima, S.: Strength and deformation characteristics of sand in plane strain compression at extremely low pressures, *Soils and Foundations*, Vol. 26(1), pp. 65-84, 1986.
- 6) Chu, J., Lo, S.-C.R., and Lee, I.K.: Strain softening and shear band formation of sand in multi-axial testing, *Géotechnique*, Vol. 46(1), pp. 63-82, 1996.
- 7) Finno, R.J., Harris, W.W., Mooney, M.A., and Viggiani, G.: Shear bands in plane strain compression of loose sand, *Géotechnique*, Vol. 47(1), pp. 149-165, 1997.
- 8) 三田地 利之, 工藤 豊, 遠藤 大輔: 有効応力による一軸試験結果の評価と q_u 値の補正, 土木学会論文集, No. 589/III-42, pp. 231-237, 1998.
- 9) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A., and Sano, I.: Shear bands formation numerically simulated by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol. 29(4), pp. 1-13, 1989.
- 10) Vardoulakis, I. and Sulem, J.: *Bifurcation Analysis in Geomechanics*, Blackie Academic & Professional, Glasgow, UK, 1995.
- 11) 野田 利弘: 限界状態における粘土の弾塑性挙動と、水～土骨格連成有限変形解析に関する研究, 名古屋大学博士論文, 1994.
- 12) Asaoka, A. and Noda, T.: Imperfection-sensitive bifurcation of Cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries. *Soils and Foundations*, Vol. 35(1), pp. 83-100, 1995.
- 13) Sabatini, P.J. and Finno, R.: Effect of consolidation on strain localization of soft clays, *Computers and Geotechniques*, Vol. 18(4), pp. 311-339, 1996.
- 14) Saada, A.S., Liang, L., Figueroa, J.L., and Cope, C.T.: Bifurcation and shear band propagation in sands, *Géotechnique*, Vol. 49(3), pp. 367-385, 1999.
- 15) 小林 一三, 飯塚 敦, 太田 秀樹: 正規粘土供試体せん断時における局所変形の遷移, 土木学会論文集, No. 617/III-46, pp. 1-18, 1999.
- 16) 山川 優樹, 寺田 賢二郎, 池田 清宏, 鳥居 邦夫: 圧縮場における弾塑性体の分岐解析とパスジャンプ挙動. 土木学会論文集, No. 701/III-58, pp. 73-86, 2002.
- 17) Hill, R. and Hutchinson, J.W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *J. of Mech. and Phys. of Solids*, Vol. 23, pp. 239-264, 1975.
- 18) Steinmann, P., Larsson, R., and Runesson, K.: On the localization properties of multiplicative hyperelasto-plastic continua with strong discontinuities, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 34(8), pp. 969-990, 1997.
- 19) Sattinger, D.H.: Group theoretic methods in bifurcation theory. *Lecture Notes in Mathematics* 762, 1979.
- 20) Golubitsky, M., Stewart, I. and Schaeffer, D.G.: *Singularities and Groups in Bifurcation Theory 2*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- 21) Ikeda, K., Murota, K., and Nakano, M.: Echelon modes in uniform materials, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 31(19), pp. 2709-2733, 1994.
- 22) Ikeda, K., Murota, K., Yamakawa, Y. and Yanagisawa, E.: Mode switching and recursive bifurcation in granular materials, *J. of Mech. and Phys. of Solids*, Vol. 45(11/12), pp. 1929-1953, 1997.
- 23) Ikeda, K. and Murota, K.: Recursive bifurcation as sources of complexity in soil shearing behavior. *Soils Foundations*, Vol. 37(3), pp. 17-29, 1997.
- 24) K. Ikeda and K. Murota: *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials*, Springer, New York, 2002.
- 25) Petryk, H., Thermann, K.: Post-critical deformation pattern in plane strain plastic flow with yield-surface vertex effect, *Int. J. of Mech. Sciences*, Vol. 42, pp. 2133-2146, 2000.
- 26) 土質試験の方法と解説, 地盤工学会, 1999.
- 27) 佐藤 啓介, 山川 優樹, 池田 清宏, 鳥居 邦夫: 地盤材料供試体の分岐局所化現象に対する形状効果の数値解析, 投稿中.
- 28) Weibull, W.: A statistical theory of the strength of materials, *Roy. Swedish Inst. of Engrg. Res.*, Proc. 151, 1939.

(2001. 5. 7 受付)

GEOMETRICAL INVESTIGATION OF DEFORMATION PATTERNS OF SAND SPECIMENS UNDER PLANE-STRAIN COMPRESSION

Kiyohiro IKEDA, Yuki YAMAKAWA, Tsuguhiko SAKURABA and Yoshikiyo SUDO

A number of plane-strain compression tests are conducted on sand specimens by varying (1) size and shape, (2) end conditions, and (3) strain rate of loading. The deformation patterns of the specimens are investigated based on the viewpoints of three kinds of bifurcation modes: discontinuous shear band mode, lower order harmonic (diffuse) mode, and higher order harmonic (diffuse) mode. As a result, the difference in those conditions has activated different bifurcation modes to entail diversified deformation patterns. The mixed presence of those three kinds of bifurcations is found to create such diversity.