

# 確率微分方程式を用いた 単一亀裂透水特性の推定

井上純哉<sup>1</sup>・杉田博章<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 工学博士 東京大学講師 大学院工学系研究科社会基盤工学専攻 (〒 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

<sup>2</sup>正会員 工学修士 国土交通省 港湾局・民間活力推進室 (〒 100-0000 東京都千代田区霞が関 2-1-3)

高レベル廃棄物の地層処分の安全性評価のためには、処分場掘削に伴う応力開放が個々の亀裂に及ぼす影響を評価出来ることが望まれる。本研究ではそのような評価の前段階として、亀裂がせん断変形により生じると考えられる亀裂開口幅分布の変化に着目し、そのような変化が単一亀裂内の透水特性にどのような影響を与えるかを明らかにすることを目的とした。本研究ではまず、亀裂の透水性を支配する開口幅分布のパラメータとして、平均や分散に加え亀裂開口幅分布の自己相関関数を考慮し、数値解析により亀裂開口分布の変化が透水性に大きな影響を及ぼしうたことを示す。次に、亀裂内の透水の支配方程式である Reynolds 方程式を確率微分方程式として解くことにより、解析的な 4 次までの近似解を導出し、亀裂開口幅分布の変化が及ぼす影響を明確に示す。

**Key Words** : single rock joint, permeability, correlation function, Reynolds equation

## 1. はじめに

岩盤内の水理問題は、岩盤工学の様々な分野で取り上げられている。中でも、原子力発電における使用済み燃料の再処理過程で発生する、高レベル放射性廃棄物の地層処分の安全性を評価する上で重要な問題となっている<sup>1)</sup>。一般に高レベル放射性廃棄物の地層処分の安全性評価においては、処分場に埋設された汚染物質が時間の経過と共に格納容器から漏洩し、最終的にはその様な汚染物質の溶解した地下水が周辺岩盤内の亀裂ネットワークを通じて生態圏に到達すると考えられている。そのため、処分場周辺から漏洩した汚染した地下水が、生態圏に到達するまでの時間を予測することが重要な課題となっている。そのような亀裂ネットワーク内を浸透する地下水の到達時間を予測するためには、亀裂ネットワークの構成要素である単一亀裂の透水性を把握することが不可欠である。

単一亀裂内の透水係数を予測する手法は様々に提案されており、多くは単一亀裂を二枚の滑らかで平行な平板間と仮定することにより得られる、いわゆる三乗則と呼ばれる式：

$$Q = -L \frac{d^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1)$$

を修正して、最適な開口幅  $d$  の定義を求めることが目的となっている。ここで、式(1)において、 $Q$  は流量であり、 $L$  は透水方向に垂直方向の亀裂幅であり、 $\frac{dp}{dx}$  が亀裂内の圧力勾配である。また、 $\mu$  は亀裂を流れる流体の粘性係数である。この式で用いられる開口幅  $d$  は

水理開口幅と呼ばれ、実際の亀裂の開口幅とは異なる。水理的に等価な開口幅と実際の亀裂の開口幅が異なるのは、実際の亀裂は滑らかではなく表面に凹凸があるために、複数の点でお互いに接触し、亀裂内には様々なチャンネルと呼ばれる水路が形成されていることに起因しており、この様な水路特性が亀裂の透水性に大きく影響することは、Tsang<sup>2)</sup>によって示されている。

こうした事に関連し、Iwai<sup>3)</sup>は低応力下における亀裂を対象とした透水実験を行っている。その結果をもとに、Witherspoon ら<sup>4)</sup>は三乗則の妥当性を検証している。一方で、Tsang・Witherspoon<sup>5)</sup>は、亀裂の透水が直応力の影響を大きく受けることを示すとともに、修正三乗則を提案している。また、Walsh<sup>6)</sup>は、実際の亀裂の接触領域の割合を考慮し、三乗則を修正する手法を提案している。Brown<sup>7)</sup>は、水理解析の結果から数値的に経験則を導いている。しかし、これらの研究は特定の亀裂形状に対する実験結果や解析結果であるため、いかなる場合にも適用できるわけではない。解析的には Zimmerman・Bodvarsson<sup>8)</sup>が正規対数分布を持つ等方な亀裂に対し、Raynolds 方程式の 2 次までの近似解を求め、Hakami・Barton<sup>9)</sup>による実験データと比較し良好な結果を得ているものの、開口幅分布が異方性を持った場合の透水特性は未だ明らかになっていない。

一方で、岩盤掘削などによる応力解放の影響により、岩盤内の亀裂には大きなせん断変形が生じる事が知られており、このようなせん断変形は掘削影響領域における単一亀裂の透水特性に大きな影響を与えると考えられる。そのため、岩盤掘削に伴う地層処分の安全性

評価においては、亀裂のせん断変形に伴ない様々に変化する亀裂開口幅分布に対し、透水特性を予測しうる手法が必要となる。しかし、この様なせん断変形に伴う単一亀裂の透水特性<sup>10)</sup>やその異方性の変化<sup>11),12)</sup>を実験的に計測する事は非常に困難である為、実験的な試みはなされているものの未だ不明な点は多い。

そこで、本研究では応力変化に伴う単一亀裂の透水性の変化を評価するための前段階として、まず開口幅分布の統計的パラメータのうち特に亀裂の開口幅における異方性に着目し、開口幅分布の異方性が亀裂の透水特性に与える影響を解析的に明らかにすることを目的とする。

第2章においては、平均・分散・自己相関関数を用い、ランダムに作成した開口幅分布に対して水理解析を行うことにより、開口幅分布と亀裂の透水性との関係を数値的に示す。第3章においては、亀裂内の透水を確率微分方程式として解き、異方性を持った開口幅分布に対する亀裂の透水特性を解析的に4次までの近似解を求める事で、開口幅分布の諸統計量が亀裂の透水特性に及ぼす影響を明確化する。

## 2. 単一亀裂の開口幅分布と透水性

本章では、単一亀裂の開口幅分布の平均、分散、自己相関関数といった統計量を変化させたときの開口幅分布と透水性の関係を調べる。既往の研究においては、平均、分散といったスカラー量と透水性の関係が明らかにされているが、本研究では異方性を示すベクトル関数として自己相関関数を導入し、透水性との関係を明らかにする。ここでは、自己相関関数を変化させてランダムに作成した開口幅分布に対し、Reynolds 方程式を用いて水理解析を行った結果を示す。

### (1) 開口幅分布と自己相関関数

二次元の開口幅分布が  $A(x, y)$  で与えられるとき、開口幅分布の自己相関関数  $C(r, s)$  は次のように与えられる。

$$C(r, s) = E[A(x, y) \times A(x+r, y+s)] \quad (2)$$

ここで、 $E$  は期待値を表す。

自己相関関数は、与えられた関数  $A(x, y)$  における二点の相関の平均であり、二点間を結ぶベクトルのベクトル関数となる。自己相関関数は一般に二点間の距離がゼロのとき、すなわち関数  $A(x, y)$  の自乗となったときに最大値となり、開口幅分布が周期的ならば、自己相関関数も同じ周期でピークを示す。また、ランダムな分布においては、変化がゆっくりならば自己相関関数におけるピークもなだらかになり、変化が細かいときはピークも鋭くなる。

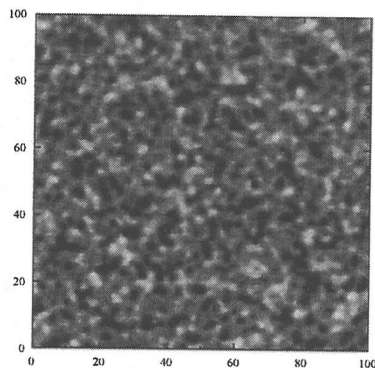


図-1 開口幅分布図 ( $\lambda_x = \frac{10}{2\pi}, \lambda_y = \frac{10}{2\pi}$ )

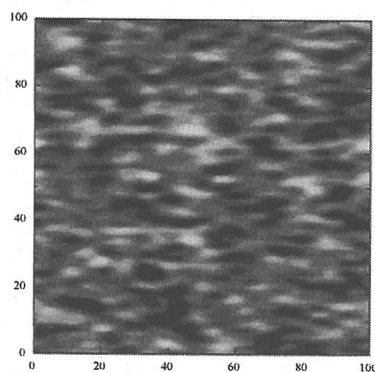


図-2 開口幅分布図 ( $\lambda_x = \frac{30}{2\pi}, \lambda_y = \frac{10}{2\pi}$ )

本研究では簡単のため、開口幅分布の自己相関関数として以下の関数を用いる。

$$C(x, y) = \sigma^2 \times \exp \left\{ - \left( \frac{x}{\lambda_x} \right)^2 - \left( \frac{y}{\lambda_y} \right)^2 \right\} \quad (3)$$

ここで、 $\sigma^2$  は開口幅分布の分散を表す。自己相関関数として式 (3) を用いることで、自己相関関数は2つの特性パラメータ  $\lambda_x, \lambda_y$  の関数として一意的に定義できる。ここで、 $\lambda_x, \lambda_y$  を相関長と呼び、それぞれ  $x$  方向および  $y$  方向の特性を表すパラメータとなり、それぞれの方向における自己相関関数の変化の程度を表す指標となる。すなわち、相関長が小さいときは自己相関関数の変化が大きく、急速にゼロに漸近するのに対して、相関長が大きいときは自己相関関数の変化は小さく、緩やかにゼロに漸近する。

図-1・2・3は、確率密度関数として正規分布を用い、開口幅分布の平均  $\bar{A}$ 、分散  $\sigma$  および  $y$  方向の相関長  $\lambda_y$  を固定し、 $x$  方向の相関長  $\lambda_x$  のみを変化させることにより得られた開口幅分布図である。図中の単位は mm

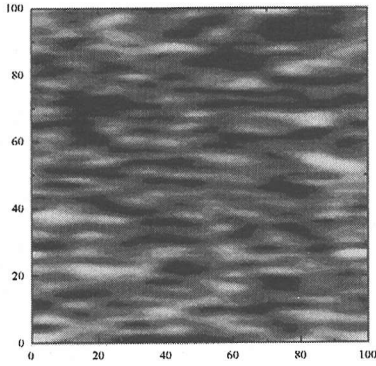


図-3 開口幅分布図 ( $\lambda_x = \frac{50}{2\pi}, \lambda_y = \frac{10}{2\pi}$ )

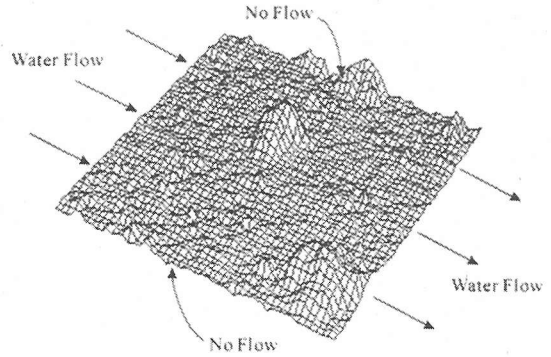


図-4 水理解析の境界条件

である。開口幅分布図においては、白い部分が開口幅が開いている場所を、黒い部分が閉じている場所を示している。図-1・2・3 から分かるように、相関長に異方性を持たせることで、開口幅分布に偏在性が生じることが理解できる。

## (2) 水理解析

一般に深層地下における亀裂性岩盤内の亀裂内の流速は  $5 - 50\text{m/year}^{13}$  と非常に遅く、その様な条件下における亀裂内の水の流動には、以下の仮定を設けることが可能である。

- (a) ニュートン流体である (流体の粘性は一定)。
- (b) 高さ方向への圧力勾配が存在しない (流体に働く重力は無視できる)。
- (c) 層流である (流速が十分遅い)。
- (d) 慣性力は無視できる (慣性力に対して粘性力は十分大きい)。
- (e) 非圧縮流体である (流体の密度は一定)。
- (f) 温度は一定である。

そこで本研究では、亀裂内流れの支配方程式として Navier-Stokes 方程式を簡略化した Reynolds 方程式を用いることとする<sup>14)</sup>。

$$\nabla \left\{ \frac{\rho g A(x, y)^3}{12\mu} \nabla H(x, y) \right\} = 0 \quad (4)$$

ここで、 $\rho$  は水の密度、 $\mu$  は水の粘性、 $g$  は重力加速度である。また、 $A(x, y)$  は開口幅分布を表し、 $H(x, y)$  は圧力水頭分布を表す。

単一亀裂の亀裂面形状として、簡単のため図-4 に示すような正方形の領域を考える。境界条件としては、正方形格子上の四境界のうち向かい合う一対の境界に対してのみ、水頭差が生じるように水圧を与える。もう一対の境界は、面外方向への流量がないという条件を与える。本研究では、正方形領域の大きさ、開口幅分布の

表-1 水理解析に用いた亀裂形状に関するパラメータ

解析領域	100(mm) × 100(mm)
平均開口幅	1.0(mm)
開口幅の分散	0.25(mm)

平均・分散をそれぞれ表-1 のように与え、 $x$  方向・ $y$  方向の相関長  $\lambda_x, \lambda_y$  を変化させることにより、相関長と単一亀裂における透水係数及び異方性の関係を調べる。

以上のような解析条件を用いた解析例を、図-5 および図-6 に示す。図-5 は、 $\lambda_x$  と  $\lambda_y$  が同じで開口幅分布が等方な場合、図-6 は  $\lambda_x$  が  $\lambda_y$  の 4 倍で開口幅分布に異方性がある場合を示す。また、それぞれの図において、左図が  $x$  方向に水を流した場合の流速分布であり、右図が  $y$  方向に水を流した場合の流速分布である。図-5 と図-6 の比較から、開口幅分布の異方性は流量の異方性に影響を与えていることが理解できる。すなわち、開口幅分布の異方性が大きくなると、相関長のより大きな方向の流量が多くなり、相関長の小さな方向の流量は少なくなる。

以上の変化を、相関長の変化と透水量係数の変化の関係で示した図が、図-7 および図-8 である。なおここでは、透水量係数は単位幅当りの流量のことである。図-7 は  $x$  方向の、図-8 は  $y$  方向の相関長比と透水量係数の関係を示した図である。これらの図より、相関長の変化とともに、相関長が増加する方向では流量が増加するのに対し、相関長が減少する方向では流量が減少していることが分かる。また、 $x$  方向と  $y$  方向の相関長比と流量比の関係を図-9 に示す。流量比は透水の異方性を示すパラメータであり、相関長比と透水の異方性との間には強い相関があることが分かる。すなわち、自

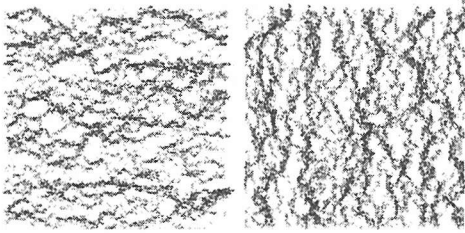


図-5 流速分布図 ( $\lambda_x = \frac{10}{2\pi}, \lambda_y = \frac{10}{2\pi}$ )

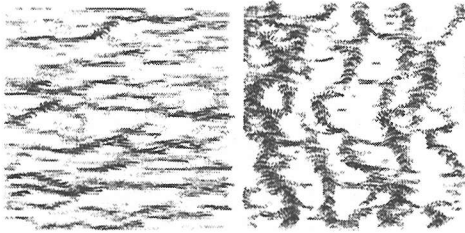


図-6 流速分布図 ( $\lambda_x = \frac{40}{2\pi}, \lambda_y = \frac{10}{2\pi}$ )

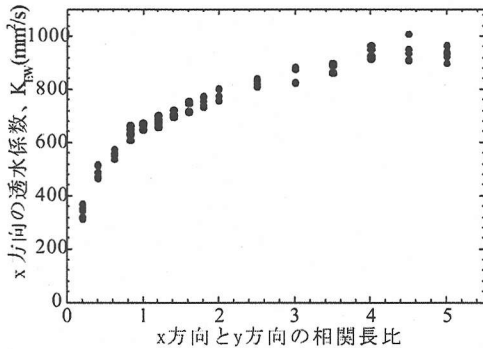


図-7 相関長比と  $x$  方向の透水係数の関係

自己相関関数を用いることにより、平均や分散といったスカラー量では表現することのできなかった透水の異方性も表現できることを示している。

以上の結果から、単一亀裂内の透水特性を評価するためには、既往の研究において検討されてきた開口幅分布の平均や分散といったスカラー量だけでなく、ベクトル関数である自己相関関数も考慮しなければならないと考えられる。

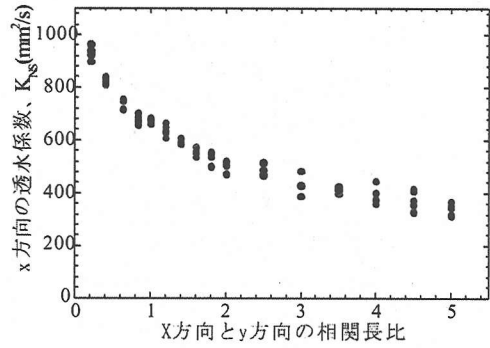


図-8 相関長比と  $y$  方向の透水係数の関係

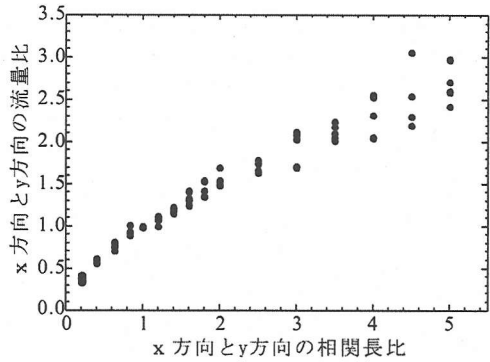


図-9 相関長比と流量比の関係

### 3. 確率微分方程式による計算

前節では数値解析により限られた範囲における異方性の影響を明らかにしたが、より広範な領域における単一亀裂内の開口幅分布の平均、分散および自己相関関数の変化が与える単一亀裂内の透水の流量や異方性に対する影響を明確にするため、ここでは亀裂内の透水の支配方程式である Reynolds 方程式を確率微分方程式として解き、高次の近似解を与えることを考える。

#### (1) 確率微分方程式

ここでは、 $A(x)$ 、 $H(x)$  はそれぞれ座標  $x$  における開口幅および圧力水頭を表し、ある確率密度分布を持って空間的に分布しているとする。開口幅分布の確率密度分布は様々に仮定されているが、ここでは正規分布の場合についての定式化を示す。

##### a) 平均流量ベクトル

確率密度関数が正規分布の場合、亀裂面全体の開口幅と圧力水頭の平均値をそれぞれ  $\overline{A(x)}$ 、 $\overline{H(x)}$  とし、各点  $x$  における開口幅および圧力水頭の平均値からの攪

乱を、それぞれ  $A'(x)$ ,  $H'(x)$  とすると、 $A(x)$  および  $H(x)$  は以下のように分解できる。

$$A(x) = \overline{A(x)} + A'(x) \quad (5)$$

$$H(x) = \overline{H(x)} + H'(x) \quad (6)$$

ここで、 $\overline{A'(x)} = \overline{H'(x)} = 0$  である。このとき、 $\overline{A(x)}$  および  $\overline{H(x)}$  は亀裂全体の平均値であり、以下の条件を満たすとす。ここで、 $C$  は定数である。

$$\overline{A(x)} = C_1 \quad (7)$$

$$\overline{H(x)} = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

1 番目の条件は開口幅の平均値が亀裂全域で均一であることを示し、2 番目の条件は勾配が一定であることを示している。以降、簡単のため  $\overline{A(x)} = \overline{A}$ ,  $A'(x) = A'$ ,  $\overline{H(x)} = \overline{H}$ ,  $H'(x) = H'$  とする。

亀裂内の平均流量ベクトル  $\overline{q}$  は、Reynolds 方程式導出時の仮定を用いることで

$$\overline{q} = \frac{\rho g A(x)^3}{12\mu} \overline{\nabla H(x)} \quad (9)$$

で与えられる。これより、式 (9)、式 (5) および式 (6) より、亀裂内の平均流量ベクトルは、

$$\overline{q} = \frac{\rho g}{12\mu} \left\{ \overline{\nabla H} \left[ \overline{A}^3 + 3\overline{A}\sigma^2 \right] + 3\overline{A}^2 \overline{[\nabla H']A'} + 3\overline{A} \overline{[\nabla H']A'^2} + \overline{[\nabla H']A'^3} \right\} \quad (10)$$

と表される。従って、平均流量ベクトル  $\overline{q}$  を得るには未知の 3 つのモーメント  $\overline{H'A'}$ ,  $\overline{H'A'A'}$  および  $\overline{H'A'A'A'}$  が求まれば良いことが分かる。これらのモーメントは Reynolds 方程式を解くことにより求まる。

#### b) モーメント微分方程式

Reynolds 方程式を解くにあたり、ここでは攪乱  $H'(x)$  をさらに以下のように展開し、各オーダーの関数  $H^{(k)}(x)$  を求める事を考える：

$$H'(x) = \sum H^{(k)}(x), \quad H^{(n)}(x) = O\left\{\sigma^n/\overline{A}^n\right\} \quad (11)$$

ここで、 $H^{(n)}$  は  $\sigma^n/\overline{A}^n$  と同じオーダーの関数である。同じオーダーの項を取り出すことにより、Reynolds 方程式は次式のように変形できる：

$$1 \text{ 次: } \nabla^2 H^{(1)}(x) = -\frac{3}{\overline{A}} \overline{\nabla H} \cdot \nabla A'(x) \quad (12)$$

$$2 \text{ 次: } \nabla^2 H^{(2)}(x) = \frac{3}{\overline{A}^2} \overline{\nabla H} \cdot \nabla A'(x) A'(x_1) \Big|_{x_1=x}$$

$$-\frac{3}{\overline{A}} \nabla_x \cdot \nabla_{x_1} \overline{H^{(1)}(x) A'(x_1)} \Big|_{x_1=x} \quad (13)$$

$$3 \text{ 次: } \nabla^2 H^{(3)}(x) =$$

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{\overline{A}^3} \overline{\nabla H} \cdot \nabla A'(x) A'(x_1) A'(x_2) \Big|_{x_1, x_2=x} \\ & + \frac{3}{\overline{A}^2} \nabla_x \cdot \nabla_{x_1} \overline{H^{(1)}(x) A'(x_1) A'(x_2)} \Big|_{x_1, x_2=x} \\ & - \frac{3}{\overline{A}} \nabla_x \cdot \nabla_{x_1} \overline{H^{(2)}(x) A'(x_1)} \Big|_{x_1=x} \\ & \dots \end{aligned} \quad (14)$$

既知の量は開口分布に関する各種モーメントだけであるため、上式はそのままでは解くことが出来ない。そこで、ここでは上式に  $M(3, n) = A'(x_3) A'(x_4) \cdots A'(x_n)$  をかけ空間的な平均をとることでモーメントに関する微分方程式を求める。

以下に得られたモーメント微分方程式の一例を示す。

1 次 :

$$\nabla^2 \overline{H^{(1)}(x) A'(x_3)} = -\frac{3}{\overline{A}} \overline{\nabla H} \cdot \nabla \overline{A'(x) A'(x_3)} \quad (15)$$

2 次 :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \overline{H^{(2)}(x) A'(x_3)} = & \frac{3}{\overline{A}^2} \overline{\nabla H} \cdot \nabla \overline{A'(x) A'(x_1) A'(x_3)} \Big|_{x_1=x} \\ & - \frac{3}{\overline{A}} \nabla_x \cdot \nabla_{x_1} \overline{H^{(1)}(x) A'(x_1) A'(x_3)} \Big|_{x_1=x} \end{aligned} \quad (16)$$

3 次 :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \overline{H^{(3)}(x) A'(x_3)} = & -\frac{3}{\overline{A}^3} \overline{\nabla H} \cdot \nabla \overline{A'(x) A'(x_1) A'(x_2) A'(x_3)} \Big|_{x_1, x_2=x} \\ & + \frac{3}{\overline{A}^2} \nabla_x \cdot \nabla_{x_1} \overline{H^{(1)}(x) A'(x_1) A'(x_2) A'(x_3)} \Big|_{x_1, x_2=x} \\ & - \frac{3}{\overline{A}} \nabla_x \cdot \nabla_{x_1} \overline{H^{(2)}(x) A'(x_1) A'(x_3)} \Big|_{x_1=x} \end{aligned} \quad (17)$$

平均流量ベクトルを求める為に必要なモーメントは、以上のモーメント微分方程式を 1 次の項から順に解くことにより得られるモーメントを用いて以下のように与えられる。

$$\overline{H'(x) A'(x_1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\nabla H^{(i)}(x) A'(x_1)} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \overline{H'(x) A'(x_1) A'(x_2)} = & \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\nabla H^{(i)}(x) A'(x_1) A'(x_2)} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \overline{H'(x) A'(x_1) A'(x_2) A'(x_3)} = & \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\nabla H^{(i)}(x) A'(x_1) A'(x_2) A'(x_3)} \end{aligned} \quad (20)$$

c) モーメント 微分方程式の解

自己相関関数が 2 点間の距離の関数として表された場合、各オーダーのモーメント微分方程式をフーリエ変換を用いて解くと、各モーメントは以下のように求まる:

1 次:

$$\overline{[\nabla H^{(1)}(x)]A'(x)} = -\frac{3\sigma^2}{A} \nabla \bar{H} \cdot \alpha \quad (21)$$

$$\overline{[\nabla H^{(1)}(x)]A'(x)^2} = 0 \quad (22)$$

$$\overline{[\nabla H^{(1)}(x)]A'(x)^3} = -\frac{9\sigma^4}{A} \nabla \bar{H} \cdot \alpha \quad (23)$$

2 次:

$$\overline{[\nabla H^{(2)}(x)]A'(x)} = 0 \quad (24)$$

$$\overline{[\nabla H^{(2)}(x)]A'(x)^2} = \frac{3\sigma^4}{A^2} \nabla \bar{H} \cdot (\alpha + 6\beta^0) \quad (25)$$

3 次:

$$\overline{[\nabla H^{(3)}(x)]A'(x)} = \frac{3\sigma^4}{A^3} \nabla \bar{H} \cdot (-\alpha - 3\alpha^2 + 3\beta^0 + 9\beta^1 + 9\beta^2) \quad (26)$$

ここで、 $\alpha, \beta^i$  はそれぞれ以下により与えられる:

$$\alpha_i = \int \frac{du}{(2\pi)^2} \hat{\theta}(u) \frac{u_i^2}{u^2} \quad (27)$$

$$\beta_i^0 = \int \frac{dudv}{(2\pi)^4} \hat{\theta}(u) \hat{\theta}(v) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} u_i (u_i + v_i)}{u^2 v^2 (u+v)^2} \quad (28)$$

$$\beta_i^1 = \int \frac{dudv}{(2\pi)^4} \hat{\theta}(u) \hat{\theta}(v) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) u_i v_i}{u^2 v^2 (u+v)^2} \quad (29)$$

$$\beta_i^2 = \int \frac{dudv}{(2\pi)^4} \hat{\theta}(u) \hat{\theta}(v) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) u_i u_i}{u^4 (u+v)^2} \quad (30)$$

また、 $\hat{\theta}(u)$  は自己相関関数のフーリエ変換である。

d) 単一亀裂の実効透水量係数

単一亀裂の実効透水量係数を  $K^{\text{eff}}$  と表すと、平均流量ベクトルは平均勾配を用いて

$$\bar{q} = K^{\text{eff}} \cdot \nabla \bar{H} \quad (31)$$

と表される。よって、式(10)、式(18)-(20)、式(21)-(26)より、開口分布幅が正規分布に近似できる時の単一亀裂の実効透水量係数は

$$K_{ii}^{\text{eff}} = \frac{\rho g}{12\mu} \bar{A}^3 \left[ 1 + 3(1 - 3\alpha_i)\eta^2 + 9(\alpha_i - 3\alpha_i^2 + 9\gamma_i)\eta^4 + \dots \right] \quad (32)$$

となる。ここで、 $\gamma_i = \beta_i^0 + \beta_i^1 + \beta_i^2$ 、 $\eta = \sigma/\bar{A}$  とした。等方な自己相関関数に対しては、 $\alpha$  は簡単な計算により

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2} \quad (33)$$

となる事が分かる。このとき、式(32)で与えられる実効透水量係数は、Zimmerman・Bodvarsson<sup>8)</sup>によって

求められた 2 次までの近似解:

$$K^{\text{eff}} = \frac{\rho g}{12\mu} \bar{A}^3 \left[ 1 - \frac{3\sigma^2}{2\bar{A}^2} + \dots \right] \quad (34)$$

と一致していることが分かる。

(2) 数値解析との比較

乱数を用いて作成された亀裂開口幅分布に対する数値計算においては、ガウス型の自己相関関数を用いているが、ガウス型の自己相関関数に対する  $\alpha_i$  および  $\gamma_i$  はそれぞれ以下のように与えられる:

$$\alpha_1 = \frac{1}{1+f}, \quad \alpha_2 = 1 - \alpha_1 \quad (35)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} [\alpha_1^2 + \gamma(f)], \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} [\alpha_2^2 - \gamma(f)] \quad (36)$$

ここで、 $\gamma(f)$  は以下で与えられる関数である。

$$p > 1: \gamma(f) = \frac{(f^2 - 1)}{8\sqrt{2}f} \left\{ 2 \frac{4p^2 - 1}{(p^2 - 1)^{5/2}} \arctan \left[ (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{p-1}{p+1}} \right] - 3p \frac{\sqrt{2}p - 1}{(p^2 - 1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{(p^2 - 1)} \right\} \quad (37)$$

$$p < 1: \gamma(f) = \frac{(f^2 - 1)}{8\sqrt{2}f} \left\{ \frac{4p^2 - 1}{(1 - p^2)^{5/2}} \log \frac{\sqrt{1+p} + (\sqrt{2} - 1)\sqrt{1-p}}{\sqrt{1-p} - (\sqrt{2} - 1)\sqrt{1-p}} - 3p \frac{\sqrt{2}p - 1}{(p^2 - 1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{(p^2 - 1)} \right\} \quad (38)$$

$$p = \frac{1+f^2}{\sqrt{8}f} \quad (39)$$

式の導出は Spector・Indelman<sup>15)</sup>に従った。ここで、 $f$  は相関長の比 ( $\lambda_x/\lambda_y$ ) である。

図-10・11 に相関長比を変化させたときの x 方向の透水量係数の変化を示す。なお、透水量係数は開口幅が平均亀裂開口幅と同じ平行平板間の透水量係数  $K^m$  で正規化されている。また、図中のエラーバーは数値解析 500 回の平均及び分散を表している。また、図-12・13 に透水量係数の比を示す。図-10・12 は標準偏差が 0.3 の時の変化、図-11・13 は標準偏差が 0.4 の時の変化を示している。ただし、図中の  $K_{11}$ 、 $K_{22}$  はそれぞれ x 軸方向及び y 軸方向の実効透水量係数を表している。図から判断できるように、数値解析で用いた相関長比の範囲  $f \in [0.2, 5.0]$  においては、4 次の近似解は良好な近似を与えていることが分かる。一方、2 次までの近似解は等方な開口幅分布 ( $f = 1.0$  近傍) においては良好な近似を与えるものの、開口幅分布の異方性が大きくなるに従い、誤差が大きくなっている事が理解できる。

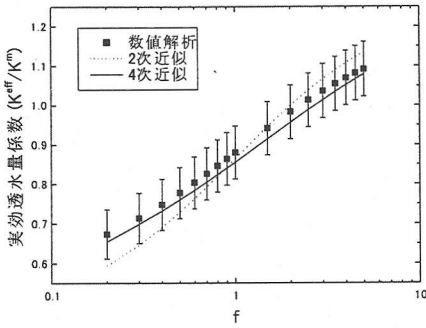


図-10 数値解と解析解の比較 (相関長比と透水量係数, 標準偏差=0.3) 破線:2次近似解, 実線:4次近似解, エラーバー:数値解

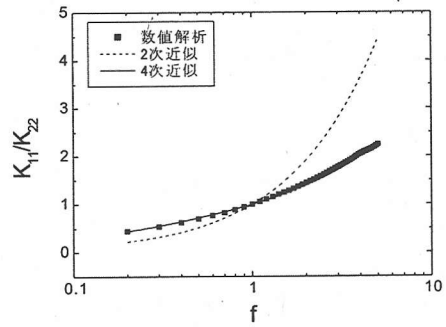


図-13 数値解と解析解の比較 (相関長比と透水量係数比, 標準偏差=0.4) 破線:2次近似解, 実線:4次近似解, 点:数値解

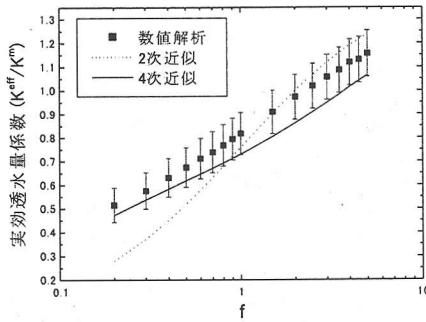


図-11 数値解と解析解の比較 (相関長比と透水量係数, 標準偏差=0.4) 破線:2次近似解, 実線:4次近似解, エラーバー:数値解

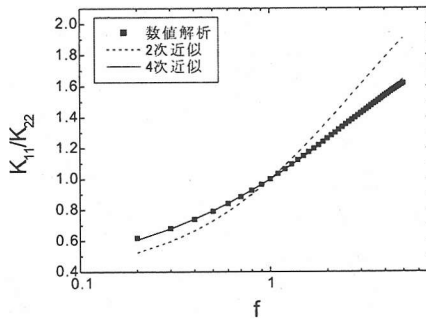


図-12 数値解と解析解の比較 (相関長比と透水量係数比, 標準偏差=0.3) 破線:2次近似解, 実線:4次近似解, 点:数値解

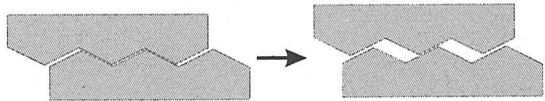


図-14 せん断を受けた亀裂の変形イメージ

相関長比  $f$  を  $10^{-5}$  から  $10^4$  まで変化させた時の  $x$  方向の透水量係数を図-15・16に, 透水量係数比を図-17・18に示す. 図-15・17は標準偏差が0.3の場合, 図-16・18は標準偏差が0.4の場合の変化を示している. 図から理解できるように, 相関長比が等方状態から変化するに従い  $x$  方向への透水量係数・透水量係数比共に大きく変化しているものの, その変化は  $|\log_{10} f| < 2$  程度でほぼ収束しており, 標準偏差が0.4の場合に最小透水量係数は等方の場合の0.2倍程度, 最大透水量係数は1.5倍程度にとどまり, 透水量係数比で最大10倍程度の差になる事が理解できる. 一方, せん断により生じる開口によって平均的な透水量係数は1~2桁程度増大すると言う報告<sup>10)</sup>があることから, 異方性の変化は透水量係数の絶対量の変化に比べれば小さいものの, 無視できない領域にあると考えられる. しかし厳密には, この様な単一亀裂の透水特性における異方性の影響は, 透水特性に異方性を含んだ形で構築された亀裂ネットワークを用いて評価されるべきであるため, ここではこれ以上の議論を差し控える.

### (3) 開口幅分布の異方性の影響

次いで, 相関長比が大きく等方からずれた時の透水量係数の変化に対する考察を行った. これは異方性のある表面形状を持った亀裂がせん断を受けた場合, 亀裂はせん断に従いお互いに凸である部分に乗り上げ, 開口の断面は図-14の様な形になり, せん断方向へは透水量が極端に減り, せん断方向と直行方向への透水量は大きく増加すると思われるからである.

## 4. 結論

本研究では, 外部の応力が変化する時に単一亀裂が持ちうる透水特性を明らかにするために, まず亀裂の開口幅分布の統計的特性とそれに対応する透水特性の相関を明らかにする事を目的とした. 本研究では特に, 開口幅分布に存在する異方性の単一亀裂の透水量係数に対する影響を評価する事を目標にした. 解析は乱数を用いて生成した亀裂開口幅分布を用いた数値解析, 及

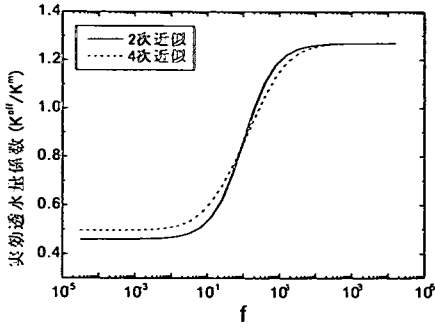


図-15 相関長比と透水量係数, 標準偏差=0.3 直線:2次近似解, 破線:4次近似解

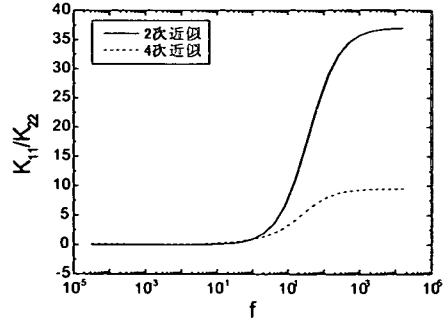


図-18 相関長比と透水量係数比, 標準偏差=0.4 直線:2次近似解, 破線:4次近似解

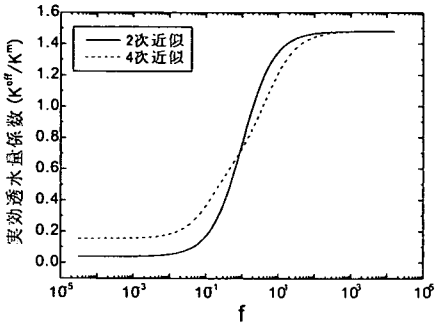


図-16 相関長比と透水量係数, 標準偏差=0.4 直線:2次近似解, 破線:4次近似解

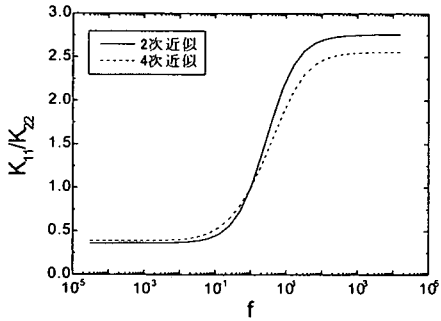


図-17 相関長比と透水量係数比, 標準偏差=0.3 直線:2次近似解, 破線:4次近似解

び Reynolds 方程式を確率微分方程式として解析に解くことで得られる 4 次近似解を用いて行った。

モンテカルロシミュレーションの結果, 単一亀裂の透水量係数は一般に良く用いられる開口幅分布の平均や分散<sup>8)</sup>といった低次のモーメントだけではなく, 自己相関関数の様な高次のモーメントに大きな影響を受けることが示された (図 7-9)。また, 自己相関関数の異方性と透水特性の異方性には, 大きな相関があることも示された (図 9)。次に, 亀裂内の透水の支配方程式である Reynolds 方程式を確率微分方程式として解くことにより実効透水量係数に対する 4 次近似解を得た (式

(32))。この様にして得られた 4 次近似解は, 2 次までの近似解と比べモンテカルロシミュレーションとのより良好な一致を示すものの (図 15-18), 開口幅の標準偏差が 0.4 となる場合は流量の予測において若干の誤差が見られた。これは標準偏差が大きくなるに従い, 5 次や 6 次の項の影響が無視できなくなることに起因していると考えられ, 標準偏差が 0.4 以上の領域における 4 次近似解の適用は不適当と考えられる。最後に, 4 次近似解を用い開口幅分布の異方性を様々に変化させることで, せん断変形等により生じる透水能における異方性の変化は, 開口幅分布の異方性  $f$  が  $|\log_{10} f| < 2$  の範囲では大きく変化するものの,  $|\log_{10} f| > 2$  の範囲では急激に収束し, 亀裂開口幅分布の標準偏差が 0.4 の時に透水量係数の異方性は平均として 10 倍程度にしかならないことが示された。せん断変形により生じる透水量係数の絶対値の変化 (1-2 桁増加) に比べ小さいものの, 完全に無視はできないレベルであることが示された。

本研究では, せん断変形によって亀裂の開口幅分布に異方性が生じると言う仮定のもとに, 亀裂開口幅分布の異方性  $f$  をパラメータとして単一亀裂の透水量係数を表現し, その性質を議論した。しかし, せん断変形により亀裂の開口幅分布の異方性がどのように変化するかは必ずしも自明ではないため, 今後亀裂に作用する応力変化に伴う単一亀裂の透水特性を予測していくためには, せん断変形と開口幅分布の変化を明らかにする必要がある。

#### 参考文献

- 1) 核燃料サイクル開発機構:わが国における高レベル放射性廃棄物地層処分の技術的信頼性,1999
- 2) Tsang, Y.W., and Tsang, C.F.: Channel model of flow through fractured media, *Water Resour. Res.*, Vol.23, No.3, pp.467-479, 1987.
- 3) Iwai, K.: Fundamental studies of the fluid flow through a single fracture, Ph.D. thesis, Univ. of Calif., Berkeley, 1976.
- 4) Witherspoon, P.A., Wang, J.S.Y., Iwai, K., and Gale,



- J.E.: Validity of cubic law for fluid flow in a deformable rock fracture, *Water Resour. Res.*, Vol.16, pp.1016-1024, 1980.
- 5) Tsang, Y.W., and Witherspoon, P.A.: Hydromechanical behavior of a deformable rock fracture subject to normal stress, *J. Geophys. Res.*, vol.86, pp.9287-9298, 1981.
  - 6) Walsh, J.B.: Effect of pore pressure and confining pressure on fracture permeability, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, vol.18, pp.429-435, 1980.
  - 7) Brown, S.R.: Fluid flow through rock joints, The effect of surface roughness, *J. Geophys. Res.*, Vol.92, pp.1337-1347, 1987.
  - 8) Zimmerman, R., and Bodvarsson, G.: Hydraulic conductivity of rock fractures, *Transport in Porous Media*, Vol.23, pp.1-30, 1996.
  - 9) Hakami, E., and Barton, N.: Aperture measurements and flow experiments using transparent replicas of rock joints, in *Rock Joints: Proceedings of the International Symposium on Rock Joints*, pp.383-390, 1990.
  - 10) Esaki, T., Du, S., Mitani, Y., Ikusada, K., and Jing, L.: Development of a shear-flow test apparatus and determination of coupled properties for a single rock joint, *Int. J. Rock Mech. and Min. Sci.*, Vol.36, pp.641-650, 1999.
  - 11) Yeo, I. W., M.H. de Freitas, and R.W. Zimmerman: Effect of shear displacement on the aperture and permeability of a rock fracture, *Int. J. Rock Mech. and Min. Sci.*, Vol.35, pp.1051-1070, 1998.
  - 12) Chen, Z., Narayan, S.P., Yang, Z., Rahman, S.S.: An experimental investigation of hydraulic behavior of fractures and joints in granitic rock, *Int. J. Rock Mech. and Min. Sci.*, Vol.37, pp.1061-1071, 2000.
  - 13) 日比谷啓介, 稲葉武史, 塩釜幸弘, 山本拓治, 升本一彦, 古市光昭: わが国の地下水流動特性に関する研究, 核燃料サイクル開発機構研究報告書, PNC ZJ1100 97-005, 1997.
  - 14) Pinkus, O. and Sternlicht, B.: *Theory of Hydrodynamics Lubrication*, McGraw-Hill, New York, 1961
  - 15) Spector, M., and Indelman, P.: On second-order correction to the effective conductivity of two-dimensional anisotropic media, *Water Resources Research*, Vol.34, pp.1357-1359, 1998.

(2002.7.8 受付)

## ESTIMATION OF THE TRANSMISSIVITY OF A SINGLE ROCK JOINT BY USING STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION METHOD

Junya INOUE and Hiroaki SUGITA

Method of estimating the permeability of a single rock joint is needed to evaluate the safety of the disposal of the high level radioactive waste. In this paper, we derive an analytical solution to fourth order approximation in order to estimate the permeability of a single rock joint. First, we introduced correlation function of aperture distribution as a parameter to affect the permeability, and to express the anisotropy of fluid flow. Then, we solved Reynolds equation as a stochastic differential equation, and clarified the relation between the characteristic parameters of the aperture distribution and the permeability.