

等価周波数応答法に基づく *Kinematic wave* モデルの集中化に関する基礎的研究

藤田睦博¹・Surakha WANPHEN²・田中岳³・清水康行⁴

¹フェロー会員 工博 北海道大学教授 工学研究科環境資源工学専攻
(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

²学生会員 北海道大学工学部工学研究科環境資源工学専攻

³正会員 工博 北海道大学助手 工学研究科環境資源工学専攻

⁴正会員 工博 北海道大学助教授 工学研究科環境資源工学専攻

ルアイ・藤田らは、山腹斜面の流出に関して種々の非線形分布定数系のモデルを用いて、降雨量と斜面末端からの流出量間の等価周波数伝達関数を求める手法を提案している。本研究は、この手法を発展させ、kinematic wave 式を基本モデルとして任意のマグニチュードの河道網流域において、流域への入力である降雨量と流域全体からの流出量間の等価周波数伝達関数を求める手法を示している。得られた等価伝達関数を規定しているパラメータは、平均降雨量に関する斜面域、河道域の到達時間になっていることを明らかにした。さらに、得られた等価周波数伝達関数が、2~3次遅れ系で近似できることを示した。遅れ系のパラメータを等価周波数伝達関数より求め、これらが河道網の構造に依存していることを明らかにした。

Key Words : *lumping process, equivalent frequency response method, kinematic wave model, river network, second and third order delay system, gain characteristics, time lag characteristics*

1. はじめに

線形系において、伝達関数や周波数伝達関数の手法が系の動特性を記述するために広く用いられている。しかし、非線形系になると線形系の解析に威力を発揮したこれらの手法は、全く無力である。藤田らは^{1)・2)}、かなり早い時期に流出解析に周波数伝達関数の応用を指摘していた。その後の研究としては、嵯峨^{3)・4)}による遅延要素を考慮した貯留関数法への周波数応答の適用に関する研究を挙げることができる。しかし、基本的には線形流出系を仮定しているので、その理論に限界があった。また、kinematic wave モデルや貯留関数法などの非線形流出モデルに周波数応答法を適用した例として藤田、田中ら^{5)・6)}の研究を挙げることができるが、周波数伝達関数を導出するまでに到っていない。

一方、制御工学の分野ではシステム内の不動常要素、飽和要素や履歴要素などの非線形要素の動特性

を解析するために、等価周波数伝達関数を用いている。これは、入力信号を周期関数に限定して得られた出力信号を介して、非線形要素の特性を記述するものである。藤田、ルアイら^{7)・8)}は、等価周波数伝達関数の概念を拡張して降雨~流出系を記述する各種の非線形分布定数系の微分方程式の等価周波数伝達関数を求める手法を提示している。彼らが対象とした流出モデル式を表-1に示す。ルアイ、藤田らは、これらのモデル式を単一の斜面域に適用している。したがって、入力関数である降雨量と斜面末端からの流出量間の等価周波数伝達関数を求めていることになる。任意の時間関数がフーリエ級数展開できることを考慮すると、得られた等価周波数伝達関数は任意の降雨波形にも適用できることを指摘している。

一方、流域は斜面と河道要素より構成され、各要素の等価周波数伝達関数が求まるならば、流域全体として、降雨量~流域末端からの流出量間の等価周波数伝達関数が得られることになる。すなわち斜面、

表-1 ルアイ, 藤田らが採用した流出モデル

集中定数系モデル	分布定数系モデル
非線形貯留関数法	Saint Venant 式 Diffusion Wave 式 Gravity Wave 式 Kinematic Wave 式

面や河道などの各要素は表-1に示す分布定数系のモデルを採用し, 流域全体に関して集中定数系の流出モデルの導出が可能となる。

本研究は, 山地流域を対象に斜面域, 河道域ともに kinematic wave モデルを採用し, 斜面域, 河道域の等価周波数伝達関数を合成して流域全体のこれを求める手法を示した。得られた流域全体の等価周波数伝達関数は, kinematic wave 式を基本とする流出モデルを周波数領域で集中化したものと考えることができる。集中化によって得られた集中定数系のモデルは, 対象とした分布定数系のモデルより計算が容易で, かつ, 計算時間も短時間である利点の他に次のような利点を挙げるができる。すなわち, 集中化にともない分布定数系のモデルに含まれるパラメータも集約化され, 流域特性を容易に把握できることなる。本論文では, 斜面域, 河道域ともに平均降雨量に関する到達時間が支配的なパラメータになっていることを明らかにしている。

このような観点から, 多くの研究者によって分布定数系の流出モデルの集中化が研究されている。kinematic wave 式を集中化した藤田⁹⁾, 平野¹⁰⁾, 星, 山岡¹¹⁾, 高棹, 椎葉¹²⁾, 市川ら¹³⁾等の研究, 不飽和浸透流式を集中化した松林, 高木ら¹⁴⁾, Siamak, 藤田¹⁵⁾, 八田, 藤田¹⁶⁾等の研究を挙げるができる。これらの研究の多くは, 単一の斜面域や2斜面1河道域を対象とした集中化問題を取り扱っており, 市川ら¹³⁾の研究を除いて流域全体にわたる集中化までに到っていない。本論文では, さらに, 得られた流域全体の等価周波数伝達関数が2~3次遅れ系で近似できることを示している。得られた流域全体の等価周波数伝達関数より, 遅れ系のパラメータを同定する手法を提案している。得られたパラメータが, 流域の河道網構造に強く依存していることを明らか

にした。

2. 斜面流出量の等価周波数伝達関数

一様勾配斜面上の kinematic wave 式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r \quad 0 \leq x \leq l \quad (1)$$

$$q = \alpha h^{p_s} \quad (2)$$

t : 時間 x : 斜面に沿う距離

h : 水深 q : 単位幅流量

α, p_s : 定数 l : 斜面長

r : 有効雨量

境界条件, 初期条件として式(3),(4)を与える。

$$q(t, 0) = 0 \quad h(t, 0) = 0 \quad (3)$$

$$q(0, x) = 0 \quad h(0, x) = 0 \quad (4)$$

式(1)で入力を $r(t)$, 出力を $q(t, l)$ としたとき, 入出間の等価周波数伝達関数を求める。式(5)~(7)を設定する。

$$r(t) = \bar{r} + A e^{j\omega t} \quad (5)$$

$$h(t, x) = \bar{h}(x) + B(x) e^{j\omega t} \quad (6)$$

$$q(t, x) = \bar{q}(x) + C(x) e^{j\omega t} \quad (7)$$

j : 虚数単位 ω : 周波数

A は実定数, $B(x), C(x)$ は未知の複素関数である。 $\bar{r}, \bar{h}(x), \bar{q}(x)$ は, 定常状態における降雨量, 水深, 単位幅流量を示している。式(3),(7)を考慮すると次式を得る。

$$\bar{q}(0) = 0 \quad C(0) = 0 \quad (8)$$

式(5)~(7)を式(1)に代入し, 両辺を比較することにより式(9),(10)を得る。

$$\frac{dC}{dx} + j\omega B = A \quad (9)$$

$$\frac{d\bar{q}}{dx} = \bar{r} \quad (10)$$

また, 式(6),(7)を式(2)に代入し, テーラー展開しその第2項まで採用し, 式(11),(12)を得る。

$$\bar{q}(x) = \alpha \bar{h}^{p_s} \quad (11)$$

$$C(x) = \alpha p_s \bar{h}^{p_s-1} B(x) \quad (12)$$

式(9)~(12)より, 式(13)を誘導できる。

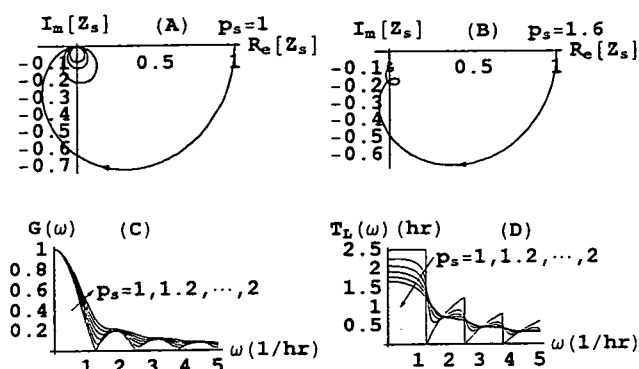


図-1 $Z_s(j\omega)$ の周波数特性 ($t_s = 5$ hr)

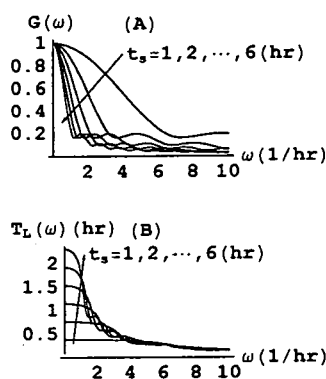


図-2 $Z_s(j\omega)$ の周波数特性 ($p_s = 1.6$)

$$\frac{dC}{dx} + \frac{j\omega\lambda_1}{p_s} x^{(1-p_s)/p_s} C = A \quad (13)$$

$$\lambda_1 = \frac{r^{-(1-p_s)/p_s}}{\alpha^{1/p_s}} \quad (14)$$

式(8)を考慮して式(13)を解く。

$$C(x) = A e^{-j\omega\lambda_1 x^{1/p_s}} \int_0^x e^{j\omega\lambda_1 y^{1/p_s}} dy \quad (15)$$

$r(t) \sim q(t, l)$ 間の等価周波数伝達関数、 $Z_s(j\omega)$ は、式(16)のように定義できる。

$$Z_s(j\omega) = \frac{C(l)}{Al} \quad (16)$$

式(16)の右辺の分母に斜面長 l が表れているのは、 $q(t, l)$ を流出高に書き改めていることを意味している。式(15)、(16)より、式(17)を得る。

$$Z_s(j\omega) = e^{-j\omega t_s} \int_0^1 e^{j\omega t_s y^{1/p_s}} dy \\ = e^{-j\omega t_s} {}_1F_1(p_s, p_s+1, j\omega t_s) \quad (17)$$

ここに、 ${}_1F_1(p, p+1, a)$ は、次式で定義される Kummer の合流型超幾何関数である。

$${}_1F_1(a, b, c) = 1 + \frac{ac}{b} + \frac{a(a+1)c^2}{2!b(b+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)c^3}{3!b(b+1)(b+2)} + \dots \quad (18)$$

また、式(17)に含まれる t_s は次式で定義され、これは、斜面における \bar{r} の到達時間になっている。

$$t_s = \left\{ \frac{(\bar{r})^{1-p_s} l}{\alpha} \right\}^{1/p_s} \quad (19)$$

式(17)の $Z_s(j\omega)$ を規定するパラメータは、 p_s と t_s の2個である。 $p_s \neq 1$ ならば平均降雨量 \bar{r} の値によって t_s の値が変化する。すなわち、降雨の規模によって $Z_s(j\omega)$ が変化することになり、非線形流出系の特

徴になっている。本論文では、ベクトル軌跡、ゲイン $G(\omega)$ 、時間遅れ $T_L(\omega)$ を介して等価周波数伝達関数を評価する。 $T_L(\omega)$ は、次式によって定義される。

$$T_L(\omega) = \frac{-1}{\omega} \tan^{-1} \left\{ \frac{I_m[Z]}{R_e[Z]} \right\} \quad (20)$$

$R_e[Z]$ 、 $I_m[Z]$ は、等価周波数伝達関数 $Z(j\omega)$ の実部と虚部を表している。

図-1 は、 $t_s = 5$ (hr) として、 p_s を変化させたときの $Z_s(j\omega)$ の周波数特性を示したものである。(A)、(B) はベクトル軌跡を示し(C)、(D) はゲインと時間遅れを表している。(A)、(B) における矢印は、周波数 ω が増加する方向を示している。図-1 より、式(1)、(2)は、低域フィルターの特性を有していることが分かるが、 $p_s = 1$ と $p_s \neq 1$ の場合では、周波数特性が異なっている。すなわち、ゲインと時間遅れで特定の周波数ごとにこれらの値が0になっている。これについては、6節で触れる。図-2 は、 $p_s = 1.6$ として、 t_s を変化させたときのゲインと時間遅れを示している。 t_s の値が増加するとゲインが減少し、時間遅れが増加している。

3. マグニチュード1の河道網流域の等価周波数伝達関数

本論文では、リンク～マグニチュード方式に基づいて河道網を識別するものとする。図-3は、河道網における最上流端の2斜面1河道からなる最も単純なマグニチュード1の河道網流域を示している。左右の斜面流出に関しては、式(1)、(2)が成立している

ものとする。

$$\frac{\partial h_{s,i}}{\partial t} + \frac{\partial q_{s,i}}{\partial x} = r \quad 0 \leq x \leq l_{s,i} \quad (21)$$

$$q_{s,i} = \alpha_i h_{s,i}^{p_s} \quad i = 1, 2 \quad (22)$$

α_i, p_s : 定数 $l_{s,i}$: 左右岸の斜面長

添え字の s は斜面を意味し, $i = 1, 2$ は左右岸斜面を示すものとする。また, 式(21)の境界条件, 初期条件は, 式(3),(4)と同様にすべて 0 とする。

一方, 河道についても kinematic wave 式が適用できるものとする。

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial q_c}{\partial y} = q_{s,1}(t, l_{s,1}) + q_{s,2}(t, l_{s,2}) \quad 0 \leq y \leq l_c \quad (23)$$

$$a = \beta q_c^{p_c} \quad (24)$$

a : 流積 y : 河道に沿う距離

$q_{s,1}(t, l_{s,1}), q_{s,2}(t, l_{s,2})$: 左右斜面からの横流入量

β, p_c : 定数 l_c : 河道長

境界条件, 初期条件として式(25),(26)を与える。

$$q_c(t, 0) = 0 \quad (25)$$

$$q_c(0, y) = 0 \quad (26)$$

$r(t) \sim q_{s,i}(t, l_{s,i}), i = 1, 2$ 間の等価周波数伝達関数は, 式(17),(19)で $\alpha = \alpha_1, \alpha_2$ $l = l_{s,1}, l_{s,2}$ と置換するとよく, これらを $Z_{s,1}(j\omega), Z_{s,2}(j\omega)$ とする。

次に, $r(t) \sim q_c(t, l_c)$ 間の等価周波数伝達関数であるが, 基本的には前節の手法を利用するとよい。左右斜面からの横流入量に関して, 式(7)の記述に従い次のように与える。

$$q_{s,i}(t, l_{s,i}) = \bar{q}_{s,i}(l_{s,i}) + C_{s,i}(l_{s,i})e^{j\omega t} \quad i = 1, 2 \quad (27)$$

式(27)の右辺第 1 項は, 定常状態における左右斜面末端の流量である。また, $C_{s,i}(l_{s,i})$ は, 式(15)で $\alpha = \alpha_1, \alpha_2$, $l = l_{s,1}, l_{s,2}$ と置くことによって求まる。式(27)を用いて式(23)の右辺を式(28)のように書き改める。

$$q_{s,1}(t, l_{s,1}) + q_{s,2}(t, l_{s,2}) = \bar{q}_s + A_s e^{j\omega t} \quad (28)$$

$$\bar{q}_s = \bar{q}_{s,1}(l_{s,1}) + \bar{q}_{s,2}(l_{s,2}) = \bar{r}(l_{s,1} + l_{s,2}) \quad (29)$$

$$A_s = C_{s,1}(l_{s,1}) + C_{s,2}(l_{s,2}) \quad (30)$$

次に, a, q_c についても式(6),(7)と同様に, 次式を設定する。

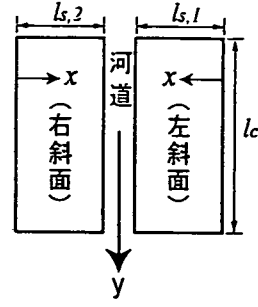


図-3 マグニチュード1の河道網流域

$$a(t, y) = \bar{a}(y) + B_c(y)e^{j\omega t} \quad (31)$$

$$q_c(t, y) = \bar{q}_c(y) + C_c(y)e^{j\omega t} \quad (32)$$

ここに, 添え字の c は河道を意味している。 $\bar{a}(y), \bar{q}_c(y)$ は, 定常状態における流積, 河道流量を示す。 $B_c(y), C_c(y)$ は, 式(6),(7)と同様に未知の複素関数である。式(28)(31),(32)を式(23),(24)に代入して, 次式を得る。

$$\frac{dC_c}{dy} + \frac{j\omega\lambda_2}{p_c} y^{(1-p_c)/p_c} C_c = A_s \quad (33)$$

$$\lambda_2 = \frac{\bar{q}_s^{(1-p_c)/p_c}}{\beta^{1/p_c}} \quad (34)$$

式(25),(32)より, 式(35)が得られる。

$$C_c(0) = 0 \quad (35)$$

したがって, 式(33)の解は次のように与えられる。

$$C_c(y) = A_s e^{-j\omega\lambda_2 y^{1/p_c}} \int_0^y e^{j\omega\lambda_2 y_1^{1/p_c}} dy_1 \quad (36)$$

式(16)を参照すると, 式(30)に関して次式を得る。

$$C_{s,i}(l_{s,i}) = A l_{s,i} Z_{s,i}(j\omega) \quad i = 1, 2 \quad (37)$$

$r(t) \sim q_c(t, l_c)$ 間の等価周波数伝達関数 $Z_1(j\omega)$ は, 式(38)によって定義できる。

$$Z_1(j\omega) = \frac{C_c(l_c)}{A A_r} \quad (38)$$

$$A_r = l_c(l_{s,1} + l_{s,2}) \quad (39)$$

したがって, 式(36)~(38)を用いて次式を得る。

$$Z_1(j\omega) = \frac{1}{A_r} \left\{ l_{sr} Z_{s,1}(j\omega) + l_{sl} Z_{s,2}(j\omega) \right\} \times l_c e^{-j\omega t_c} \int_0^1 e^{j\omega t_c y_1^{1/p_c}} dy_1 \quad (40)$$

式(40)の t_c は次式で定義され, これは定常状態における河道への横流入量 $\bar{r}(l_{s,1} + l_{s,2})$ の到達時間になっている。

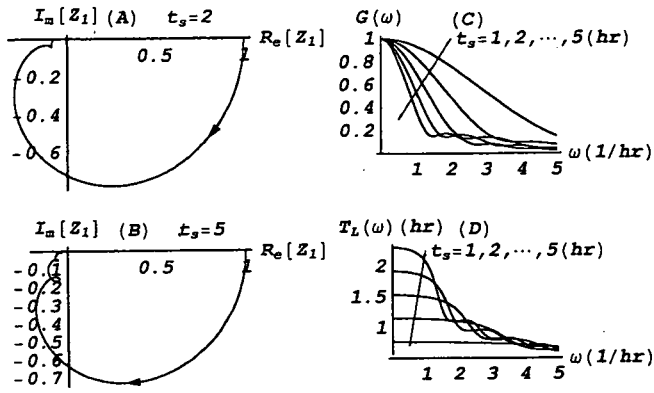


図-4 式(45)の $Z_1(j\omega)$ 周波数特性

$$(t_c = 1 \text{ hr}, p_s = p_c = 1.6)$$

$$t_c = \left[\frac{\{r(l_{s,1} + l_{s,2})\}^{1-p_c} l_c}{\beta} \right]^{1/p_c} \quad (41)$$

一方、河道への入力量とその出力間、すなわち、 $q_{s,1}(t, l_{s,1}) + q_{s,2}(t, l_{s,2}) \sim q_c(t, l_c)$ 間の等価周波数伝達関数 $Z_c(j\omega)$ は、次式によって定義できる。

$$Z_c(j\omega) = \frac{C_c(l_c)}{l_c A_s} \quad (42)$$

したがって、式(36),(40),(42)より次式を誘導できる。

$$Z_1(j\omega) = \frac{Z_c(j\omega)}{l_{s,1} + l_{s,2}} \{l_{s,1} Z_{s,1}(j\omega) + l_{s,2} Z_{s,2}(j\omega)\} \quad (43)$$

$$Z_c(j\omega) = e^{-j\omega t_c} {}_1F_1(p_c, p_c + 1, j\omega t_c) \quad (44)$$

式(43)からわかるように、 $Z_1(j\omega)$ は左右斜面の等価周波数伝達関数の斜面長による重み付平均値と河道自身の等価周波数伝達関数の積として表わされている。

$$l_{s,1} = l_{s,2} \quad \alpha_1 = \alpha_2 \quad (45)$$

とするならば、式(43)を次のように簡略化できる。

$$Z_1(j\omega) = Z_s(j\omega) Z_c(j\omega) \quad (46)$$

式(43)を規定しているパラメータは、左右斜面の到達時間と式(41)の t_c および p_s, p_c の5個である。図-4は、式(46)で定義される $Z_1(j\omega)$ の周波数特性を示している。図-2と比較すると河道が加わったことにより、時間遅れが大きくなっている。図-1(A),(B),図-4(A),(B)に示すベクトル軌跡の高周波数領域におけるループ形状が、ゲイン、時間遅れの波形状に対応していることがわかる。

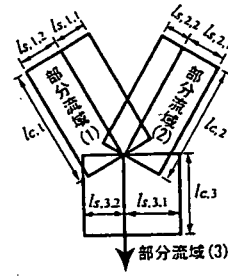


図-5 マグニチュード2の河道網流域

4. マグニチュード2の河道網流域における等価周波数伝達関数

図-5は、マグニチュード2の河道網流域を示している。この流域の河道末端からの流出量を求めようとする、次の微分方程式を計算しなければならない。

$$\frac{\partial h_{s,k,i}}{\partial t} + \frac{\partial q_{s,k,i}}{\partial x} = r \quad 0 \leq x \leq l_{s,k,i} \quad (47)$$

$$q_{s,k,i} = \alpha_{k,i} h_{s,k,i}^{p_s} \quad (48)$$

$$q_{s,k,i}(t, 0) = 0 \quad (49)$$

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + \frac{\partial q_{c,k}}{\partial y} = q_{s,k,1}(t, l_{s,k,1}) + q_{s,k,2}(t, l_{s,k,2}) \quad 0 \leq y \leq l_{c,k} \quad (50)$$

$$q_{c,k} = \beta_k a_k^{p_c} \quad (51)$$

$$q_{c,k}(t, 0) = \begin{cases} 0 & k=1,2 \\ q_{c,1}(t, l_{c,1}) + q_{c,2}(t, l_{c,2}) & k=3 \end{cases} \quad (52)$$

$$k=1,2,3 \quad i=1,2$$

k は図-5の部分流域番号を表し、 i は左右の斜面を表している。したがって、 $l_{s,k,i}$ は部分流域(k)の左右岸の斜面長を示し、 $l_{c,k}$ は部分流域(k)の河道長を示す。式(47)~(49)が斜面域における流出を示し、(50)~(52)が河道域の流出を表している。部分流域(3)における左右斜面からの河道流入量 $q_{s,3,i}(t, l_{s,3,i})$ は、式

(7)を参照すると次のように与えることができる。

$$q_{s,3,i}(t, l_{s,3,i}) = \bar{q}_{s,3,i}(l_{s,3,i}) + C_{s,3,i}(l_{s,3,i})e^{j\omega t} \quad (53)$$

$\bar{q}_{s,3,i}(l_{s,3,i})$ は、定常状態における左右岸からの横流入量を表わしている。 $C_{s,3,i}(l_{s,3,i})$ は、式(15)において、 $\alpha = \alpha_{s,3,i}$, $x = l_{s,3,i}$ $i = 1, 2$ を代入することによって求めることができる。式(53)を用いて、次式を得る。

$$q_{s,3,1}(t, l_{s,3,1}) + q_{s,3,2}(t, l_{s,3,2}) = \bar{q}_{s3} + A_{s3}e^{j\omega t} \quad (54)$$

$$\bar{q}_{s3} = \bar{r}(l_{s,3,1} + l_{s,3,2}) \quad (55)$$

$$A_{s3} = C_{s,3,1}(l_{s,3,1}) + C_{s,3,2}(l_{s,3,2}) \quad (56)$$

$a_3, q_{c,3}$ に関して、式(6),(7)と同様に

$$a_3(t, y) = \bar{a}_3(y) + B_{c,3}(y)e^{j\omega t} \quad (57)$$

$$q_{c,3}(t, y) = \bar{q}_{c,3}(y) + C_{c,3}(y)e^{j\omega t} \quad (58)$$

を与える。 $\bar{a}_3(y), \bar{q}_{c,3}(y)$ は、定常状態における部分流域(3)の河道の流積、流量を示す。 $B_{c,3}, C_{c,3}$ は未知の複素関数である。式(54),(57)を式(50),(51)($k=3$)に代入し、両辺を比較することによって、次式を得る。

$$\frac{d\bar{q}_{c,3}}{dy} = -\bar{q}_{s3} \quad (59)$$

$$\frac{dC_{c,3}}{dy} + j\omega B_{c,3} = A_{s3} \quad (60)$$

$$\bar{q}_{c,3} = \beta_3 \bar{a}_3^{-p_c} \quad (61)$$

$$C_{c,3} = \beta_3 p_c \bar{a}_3^{-p_c-1} B_{c,3} \quad (62)$$

次に、境界条件式(52)($k=3$)は、式(58)の記述に従い次のように表すことができる。

$$q_{c,1}(t, l_{c,1}) = \bar{q}_{c,1}(l_{c,1}) + C_{c,1}(l_{c,1})e^{j\omega t} \quad (63)$$

$$q_{c,2}(t, l_{c,2}) = \bar{q}_{c,2}(l_{c,2}) + C_{c,2}(l_{c,2})e^{j\omega t} \quad (64)$$

式(52)($k=3$),(58),(62),(63)より、次式を得る。

$$\bar{q}_{c,3}(0) = \bar{q}_{c,1}(l_{c,1}) + \bar{q}_{c,2}(l_{c,2}) \quad (65)$$

$$C_{c,3}(0) = C_{c,1}(l_{c,1}) + C_{c,2}(l_{c,2}) \quad (66)$$

$\bar{q}_{c,k}(l_{c,i})$ $k=1, 2$ は、定常状態における部分流域(1),(2)の河道末端からの流出量なので、式(65)を次のように記述できる。

$$\bar{q}_{c,3}(0) = \bar{r}(A_1 + A_2) \quad (67)$$

$$A_k = l_{c,k}(l_{s,k,1} + l_{s,k,2}) \quad k=1, 2, 3 \quad (68)$$

式(59),(67)より

$$\bar{q}_{c,3}(y) = \bar{q}_{s3}y + \bar{r}(A_1 + A_2) \quad (69)$$

が得られる。式(59)~(62),(69)より、式(70)を誘導できる。

$$\frac{dC_{c,3}}{dy} + \frac{j\omega}{p_c} \left\{ \frac{1}{\beta_3} (\bar{q}_{s3}y + D)^{1-p_c} \right\}^{1/p_c} C_{c,3} = A_{s3} \quad (70)$$

$$D = \bar{r}(A_1 + A_2) \quad (71)$$

一方、部分流域(3)で $r(t) \sim q_{s,3,i}(t, l_{s,3,i})$ $i=1, 2$ 間の等価周波数伝達関数 $Z_{s,i}(j\omega)$ $i=1, 2$ は、式(16)の定義式を用いて、次のように表すことができる。

$$Z_{s,i}(j\omega) = \frac{C_{s,3,i}(l_{s,3,i})}{A_{l_{s,3,i}}} \quad i=1, 2 \quad (72)$$

式(56),(72)より次式を得る。

$$A_{s,3} = A \{ l_{s,3,1} Z_{s,1}(j\omega) + l_{s,3,2} Z_{s,2}(j\omega) \} \quad (73)$$

部分流域(1),(2)において、 $r(t) \sim q_{c,k}(t, l_{c,k})$ $k=1, 2$ 間の等価周波数伝達関数 $Z_{1,k}(j\omega)$ は、式(38)の定義式に従い次のようになる。

$$Z_{1,k}(j\omega) = \frac{C_{c,k}(l_{c,k})}{AA_k} \quad k=1, 2 \quad (74)$$

式(66),(74)より次式を誘導できる。

$$C_{c,3}(0) = A \{ A_1 Z_{1,1}(j\omega) + A_2 Z_{1,2}(j\omega) \} \quad (75)$$

また、 $r(t) \sim q_{c,3}(t, l_{c,3})$ 間の等価周波数伝達関数 $Z_2(j\omega)$ は、次式によって定義できる。

$$Z_2(j\omega) = \frac{C_3(l_{c,3})}{AA_r} \quad (76)$$

$$A_r = \sum_{k=1}^3 A_k \quad (77)$$

式(55),(73),(75)を考慮して式(70)を解いて、その結果を式(76)に代入し $Z_2(j\omega)$ を得る。

$$Z_2(j\omega) = \frac{1}{A_r} \left\{ A_1 Z_{1,1}(j\omega) + A_2 Z_{1,2}(j\omega) \right\} e^{-j\omega t_{c3}} + \frac{e^{-j\omega t_{c31}}}{l_{s,3,1} + l_{s,3,2}} \left\{ l_{s,3,1} Z_{s,3,1}(j\omega) + l_{s,3,2} Z_{s,3,2}(j\omega) \right\} \times \left\{ A_r {}_1F_1[p_c, p_c + 1, j\omega t_{c31}] - (A_1 + A_2) {}_1F_1[p_c, p_c + 1, j\omega t_{c32}] \right\} \quad (78)$$

$$t_{c3} = t_{c31} - t_{c32} \quad (79)$$

$$t_{c31} = \frac{1}{r(l_{s,3,1} + l_{s,3,2})} \left\{ \frac{\bar{r}A_r}{\beta_3} \right\}^{1/p_c} \quad (80)$$

$$t_{c32} = \frac{1}{r(l_{s,3,1} + l_{s,3,2})} \left\{ \frac{\bar{r}(A_1 + A_2)}{\beta_3} \right\}^{1/p_c} \quad (81)$$

t_{c3} は、河道上流端からの流入量が $\bar{r}(A_1 + A_2)$ で、河道への横流入量が $\bar{r}(l_{s,3,1} + l_{s,3,2})$ のときの河道における到達時間になっている。 $Z_{s,3,i}(j\omega), Z_{1,i}(j\omega), i=1,2$ は、図-5 の部分流域(3)の両斜面および部分流域(1),(2)の等価周波数伝達関数である。これらは、式(17),(43)を用いて計算できる。式(78)の右辺第1項は、図-5 の部分流域(3)への上流端からの流入量より派生し、第2項は部分流域(3)の左右岸斜面からの横流入量の河道流下より派生している。

式(78)を規定しているパラメータは、図-5 における部分流域(1),(2)の4個の斜面の到達時間、2個の河道の到達時間さらに部分流域(3)の左右斜面の2つの到達時間、式(80),(81)の到達時間と p_c, p_s の合計12個になっている。

5. 高マグニチュード河道網流域における等価周波数伝達関数

任意の河道網流域の等価周波数伝達関数を求めるには、式(78)を繰り返し用いることによって得られる。図-6(1)に示すマグニチュード5の流域を例に説明しよう。河道の最下流の合流点で河道網を2分し、マグニチュード3,2の部分流域(A),(B)を得る。図-6(2)は、部分流域(A)を示している。部分流域(A)においても、最下流の合流点で河道網を2分し、マグニチュード1,2の部分流域(1),(2)が得られる。部分流域(1),(2)の等価周波数伝達関数 $Z_1(j\omega), Z_2(j\omega)$ は、式(43),(78)に与えられているので、部分流域(A)の等価周波数伝達関数 $Z_3(j\omega)$ は、次式で与えられる。

$$Z_3(j\omega) = \frac{1}{A_{rA}} \left\{ A_1 Z_1(j\omega) + A_2 Z_2(j\omega) \right\} e^{-j\omega t_{c3}} \\ + \frac{e^{-j\omega t_{c31}}}{l_{s,A,1} + l_{s,A,2}} \left\{ l_{s,A,1} Z_{s,A,1}(j\omega) + l_{s,A,2} Z_{s,A,2}(j\omega) \right\} \\ \times \left\{ A_{rA} {}_1F_1[p_c, p_c + 1, j\omega t_{c31}] \right. \\ \left. - (A_{rA} + A_{rB}) {}_1F_1[p_c, p_c + 1, j\omega t_{c32}] \right\} \quad (82)$$

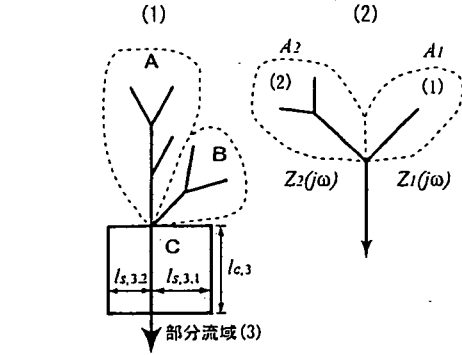


図-6 マグニチュード5の河道網流域

$-(A_1 + A_2) {}_1F_1[p_c, p_c + 1, j\omega t_{c32}] \right\} \quad (82)$
 A_1, A_2 は図-6(2)の部分流域(1),(2)の流域面積、 A_{rA} は部分流域(A)の流域面積を示している。また、 $l_{s,A,i}, Z_{s,A,i}, i=1,2$ は、部分流域(A)の最下流の左右岸斜面長、等価周波数伝達関数である。 t_{c3i} は、式(80),(81)において $l_{s,3,i} = l_{s,A,i}, i=1,2$ として計算できる。式(82)を用いて、次のように図-6(1)のマグニチュード5の河道網流域の等価周波数伝達関数 $Z_5(j\omega)$ を誘導できる。

$$Z_5(j\omega) = \frac{1}{A_r} \left\{ A_{rA} Z_3(j\omega) + A_{rB} Z_2(j\omega) \right\} e^{-j\omega t_{c5}} \\ + \frac{e^{-j\omega t_{c31}}}{l_{s,3,1} + l_{s,3,2}} \left\{ l_{s,3,1} Z_{s,3,1}(j\omega) + l_{s,3,2} Z_{s,3,2}(j\omega) \right\} \\ \times \left\{ A_r {}_1F_1[p_c, p_c + 1, j\omega t_{c31}] \right. \\ \left. - (A_{rA} + A_{rB}) {}_1F_1[p_c, p_c + 1, j\omega t_{c32}] \right\} \quad (83)$$

A_r, A_{rB} は、図-6(1)の全流域面積、部分流域(B)の流域面積である。 $Z_{s,3,i}$ は、部分流域(C)の左右斜面の等価周波数伝達関数を示している。このように、河道網の上流から下流へと河道網の連結状況に応じて、任意のマグニチュードの河道網流域の等価周波数伝達関数を計算できる。

6. インパルス応答と矩形パルス応答

式(17),(43),(78),(83)などの等価周波数伝達関数は、kinematic wave 式を基本とする流出モデルを周波数領域で集中化した結果と考えることができる。時間領域で考えるならば、等価周波数伝達関数 $Z(j\omega)$ より得られるインパルス応答関数 $z(t)$ を計算するとよいことになる。 $z(t)$ は因果性関数なので、次式より

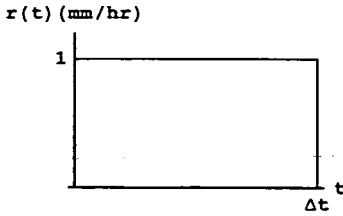


図-7 矩形降雨

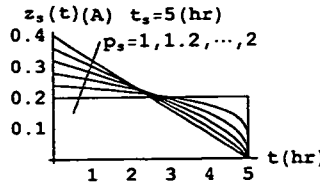


図-8 $Z_s(j\omega)$ のインパルス応答

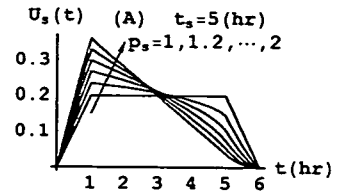
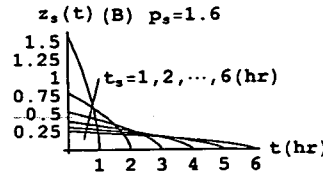
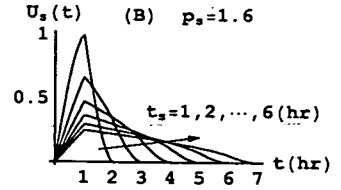


図-9 $Z_s(j\omega)$ の矩形パルス応答



計算できる。

$$z(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_s[Z(j\omega)] \cos(\omega t) d\omega \quad (84)$$

実際に流量を計算しようとするとき、図-7に示す降雨に対応する矩形パルス応答 $U_z(t)$ を用意しておくことと便利である。

$$U_z(t) = J(t) - U(t - \Delta t)J(t - \Delta t) \quad (85)$$

$$J(t) = \int_0^{\infty} z(\tau) d\tau \quad (86)$$

$U(t)$: 単位ステップ関数

式(85)に与えられる $U_z(t)$ は、単位図に相当している。

図-8は、 $Z_s(j\omega)$ のインパルス応答 $z_s(t)$ を示している。(A)は、 $t_s = 5$ (hr) として p_s を変化させた場合、(B)は $p_s = 1.6$ として t_s を変化させた場合のインパルス応答を示している。インパルス応答の継続時間が、到達時間 t_s に等しくなっている。 $p_s = 1$ の場合、斜面域のインパルス応答関数 $z_s(t)$ は、式(17)、(84)より次式で表される。

$$z_s(t) = \frac{1}{t_s} \{U(t) - U(t - t_s)\} \quad (87)$$

式(87)を用いて流出量を計算する場合を考える。

$$q(t) = \int_0^t r(\tau) z_s(t - \tau) d\tau \quad (88)$$

式(88)の計算は $r(t)$ の区間 $[0, t_s]$ の移動平均値に相当している。したがって、 $r(t)$ に t_s の整数倍の周期成分が含まれているとこの周期成分に関する式(88)の $q(t)$ が 0 になる。このために、図-1(C)、(D)において、 $p_s = 1$ のときゲインや時間遅れが 0 となる周波

数 $\omega = 2n\pi/t_s$ が存在している。

図-9は、図-7で $\Delta t = 1$ (hr) としたときの $Z_s(j\omega)$ の矩形パルス応答を示している。(A)は、 $t_s = 5$ (hr) として p_s を変化させた場合、(B)は $p_s = 1.6$ として t_s を変化させた場合の矩形パルス応答を示している。矩形パルス応答の継続時間は、 $t_s + \Delta t$ になっている。

図-10(A)、(B)は、 $p_s = p_c = 1$ としたとき式(46)の $Z_1(j\omega)$ のインパルス応答を示している。これは、台形になっており、その継続時間は斜面と河道の到達時間の和になっている。(C)は、 $t_c = 1$ (hr)、 $t_s = 5$ (hr)、 $p_s = p_c = 1$ の場合で $\Delta t = 1$ (hr) としたときの矩形パルス応答を示している。矩形パルス応答の継続時間は、 $t_s + t_c + \Delta t$ になっている。図-11は $t_c = 1$ (hr)、 $p_s = p_c = 1.6$ として、 t_s の値を変化させた場合のインパルス応答 $z_1(t)$ と矩形パルス応答 ($\Delta t = 1$ hr) $U_{z1}(t)$ を示している。インパルス応答、矩形パルス応答の継続時間は、それぞれ $t_s + t_c$ 、 $t_s + t_c + \Delta t$ になっている。図-10、11は、式(46)の $Z_1(j\omega)$ を対象にしたものであるが、式(43)の $Z_1(j\omega)$ を対象としたときには、インパルス応答と矩形パルス応答の継続時間は、 $t_c + \text{Max}\{t_{s,1}, t_{s,2}\}$ 、 $t_c + \text{Max}\{t_{s,1}, t_{s,2}\} + \Delta t$ になっている。 $t_{s,1}$ 、 $t_{s,2}$ は、左右斜面の到達時間である。なお、 $\text{Max}\{A, B\}$ は、 A, B の大きいほうを採用するものとする。

インパルス応答や矩形パルス応答が、斜面や河道の到達時間に密接に関係していることが分かった。式(88)で計算される $q(t)$ は、 $r(t)$ の重みつき移動平均を求めていると解釈できる。到達時間の増大にとも

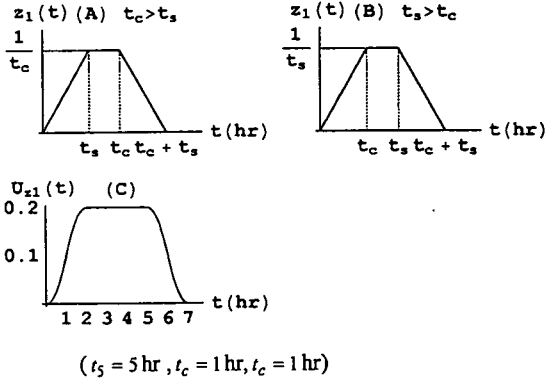


図-10 式(46)の $Z_1(j\omega)$ のインパルス応答と
矩形パルス応答 ($p_s = p_c = 1$)

ないインパルス応答の継続時間も増大して、平均化時間が大きくなる。したがって、到達時間の増大にともない平均の効果が強くなり、このことが図-2,4の到達時間の増大にともなうゲインの低下を引き起こしている。

マグニチュード2以上の河道網流域になると、インパルス応答の継続時間は、式(78)を参照すると、 $\text{Max}\{t_{c3} + \text{Max}\{T_1, T_2\}, t_{c31} + T_{s,1}, t_{c31} + T_{s,2}\}$ となる。 T_1, T_2 は上流側2つの流域(図-5の部分流域(1),(2)に対応している)のインパルス応答関数の継続時間で、 $T_{s,1}, T_{s,2}$ は、最下流斜面のインパルス応答関数の継続時間である。

7. シミュレーション法による理論式の検討

式(17),(43),(78)などは、式(2)をテーラー展開してその第2項まで採用して得られたものである。別な表現をするならば、非線形システムに生じる高調波成分を無視して、基本波成分のみに着目した解析になっている。ここでは、得られた等価周波数伝達関数の近似度を確認する。

対象とした流域は、図-5に示すマグニチュード2の河道網流域とした。使用した地形データは、留萌川流域の国土数値情報を用いて作成した。斜面は、全て矩形としている。

$$L_1 = (1486, 1007, 10256)$$

$$L_2 = (976, 1188, 7547)$$

$$L_3 = (567, 167, 1373)$$

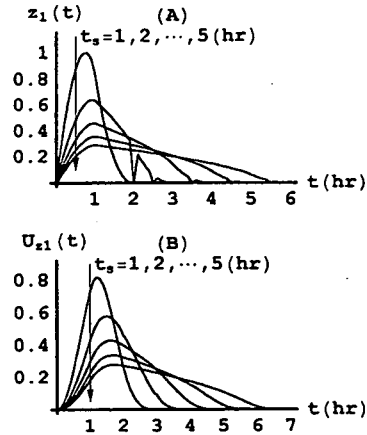


図-11 式(46)の $Z_1(j\omega)$ のインパルス応答と
矩形パルス応答 ($t_c = 1 \text{ hr}, p_s = p_c = 1.6$)

$$\theta_1 = (0.067, 0.113, 0.007)$$

$$\theta_2 = (0.143, 0.087, 0.020)$$

$$\theta_3 = (0.072, 0.202, 0.004) \quad (89)$$

L_k, θ_k $k=1,2,3$ は図-5の部分流域 k の斜面長(m)、河道長(m)および斜面、河道の傾斜角度(ラジアン)を示している。()内の数字の並びは、(左斜面, 右斜面, 河道)となっている。河道断面に関しては、全て頂角120度の三角形断面とした。粗度係数は、 $n_s = 0.5$ (斜面)、 $n_c = 0.07$ (河道)(m, sec)とし、 $p_s = 5/3, p_c = 4/3$ となっている。次に、降雨量として式(90)を与えた。

$$r(t) = \bar{r} + A \sin(\omega t) \quad \bar{r} > A \quad (90)$$

\bar{r}, A : 定数

式(89),(90)を基礎式に与え、数値計算によって斜面流出量、河道流出量を求めた。

図-12は、周期的降雨量とその流出量の間を模式的に表現したものである。周期降雨量と流出量間のゲイン $G(\omega)$ は、次式によって定義できる。

$$G(\omega) = \frac{B}{AM} \quad (91)$$

式(91)の A, B は、図-12の振幅を表す。また、 M は斜面流出量を対象にしているときにはその斜面長、河道流出量を対象にしているときには流域面積をとるものとする。時間遅れ $T_L(\omega)$ に関しては、図-12に示すように降雨量と流出量のピーク時間差で定義した。

図-13は、数値計算の結果と理論式を比較している。計算では、式(90)で $\bar{r} = 1$ (mm/hr)、 $A = 0.1$ (mm/hr)

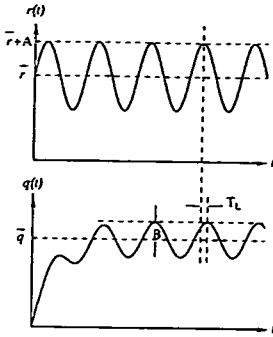


図-12 周期的降雨量とその流出量の概念図

としている。図-13(A),(B)は、ゲインと時間遅れを示しているが、太実線、細実線、点線は、それぞれ $Z_2(j\omega)$, $Z_{1,1}(j\omega)$ および $Z_{1,2}(j\omega)$ に対応している。黒丸は、数値計算より得られた結果を示している。図-13(C)~(E)は、 $Z_2(j\omega)$, $Z_{1,1}(j\omega)$ および $Z_{1,2}(j\omega)$ のベクトル軌跡を示している。黒丸は、数値計算より得られた結果を示している。(A),(B)ともに両者はよく一致している。

8. 等価周波数伝達関数の近似

式(78)を繰り返し用いることによって、任意マグニチュードの河道網流域の等価周波数伝達関数を誘導できることを先に述べたが、マグニチュードの増大にともない、当然、パラメータも多くなる。マグニチュード m の河道網流域の場合、外部リンクの数が m 個、内部リンクの数が $(m-1)$ 個なので合計 $(2m-1)$ 個の到達時間とこの他に p_s, p_c の 2 個のパラメータが表われる。したがって、流域全体の等価周波数伝達関数が求まり、これによってインパルス応答、矩形パルス応答が計算できたとしても、これらに含まれるパラメータ数は $2m-2$ 個となっている。流域全体の特性を把握するためには、これらのパラメータをさらに集約する必要がある。

ここでは、図-1,4,13 に示すベクトル軌跡が 2,3 次遅れ系、すなわち、2,3 階の常微分方程式のこれに類似していることに着目して、等価周波数伝達関数を近似する手法について述べる。今、式(92)を仮定する。

$$G_2 \frac{d^2 q}{dt^2} + G_3 \frac{dq}{dt} + q = r \quad (92)$$

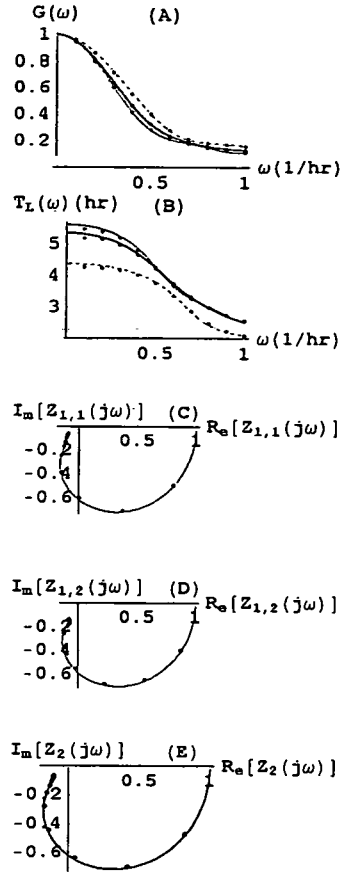


図-13 理論値とシュミレーション値の比較

黒丸：シュミレーション値
細実線： $Z_{1,1}(j\omega)$ 破線： $Z_{1,2}(j\omega)$
太実線： $Z_2(j\omega)$

$$q(0) = 0 \quad \left[\frac{dq}{dt} \right]_{t=0} = 0 \quad (93)$$

G_2, G_3 は、未知定数である。式(92)の周波数伝達関数 $Z_{q2}(j\omega)$ は、式(94)で与えられる。

$$Z_{q2}(j\omega) = \frac{1}{1 - G_2 \omega^2 + j\omega G_3} \quad (94)$$

$Z_{q2}(j\omega)$ が他の等価周波数伝達関数 $Z(j\omega)$ を近似しているとするならば、次の関係式が得られる。

$$G_2 = \frac{1}{\omega^2} \left\{ 1 - \frac{R_e[Z]}{R_e^2[Z] + I_m^2[Z]} \right\} \quad (95)$$

$$G_3 = - \frac{I_m[Z]}{\omega(I_m^2[Z] + R_e^2[Z])} \quad (96)$$

図-14 は、図-13 の $Z_2(j\omega)$ を用いて、式(95),(96)

の $G_2, G_3 \sim \omega$ の関係をプロットしたものである。式(94)が $Z_2(j\omega)$ を完全に表現しているならば、 G_2, G_3 の値は ω に独立である。 $\omega \leq 0.5$ (1/hr) の低周波数領域ではほぼ一定値となっているが、高周波数領域では大きく変化している。一方、図-13(A)で $Z_2(j\omega)$ のゲイン $G(\omega)$ は、 $\omega > 0.5$ (1/hr) の周波数帯では急激に低下しており、実用的には式(92)の近似式を利用できることを示唆している。しかし、どのような ω の値を用いてパラメータ G_2, G_3 を同定するかが問題となる。実流域での解析を考えると、 G_2, G_3 がほぼ一定値をとる低周波数領域は、流域によっても、また、降雨規模によっても変化する可能性がある。ここでは、 $\omega \rightarrow 0$ の極値で式(95),(96)の G_2, G_3 を同定する。

$$G_2 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ \frac{I_m^2[z] + R_e^2[z] - R_e[z]}{\omega^2 (I_m^2[z] + R_e^2[z])} \right\} \quad (97)$$

$$G_3 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ -\frac{I_m[z]}{\omega (I_m^2[z] + R_e^2[z])} \right\} \quad (98)$$

式(97),(98)より次式を得る。

$$G_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 R_e[z]}{d\omega^2} + 2 \left(\frac{dI_m[z]}{d\omega} \right)^2 \right]_{\omega=0} \quad (99)$$

$$G_3 = \left[-\frac{dI_m[z]}{d\omega} \right]_{\omega=0} \quad (100)$$

式(92)の代わりに、次式を採用すると

$$G_1 \frac{d^3 q}{dt^3} + G_2 \frac{d^2 q}{dt^2} + G_3 \frac{dq}{dt} + q = r \quad (101)$$

$$\left[\frac{d^2 q}{dt^2} \right]_{\omega=0} = 0 \quad \left[\frac{dq}{dt} \right]_{\omega=0} = 0 \quad q(0) = 0 \quad (102)$$

式(101)の周波数伝達関数 $Z_{q3}(j\omega)$ は、次式で与えられる。

$$Z_{q3}(j\omega) = \frac{1}{1 - G_2 \omega^2 - j\omega(G_1 \omega^2 - G_3)} \quad (103)$$

$Z_{q3}(j\omega)$ が、他の周波数伝達関数 $Z(j\omega)$ を近似していると考えると次の関係式が得られる。

$$G_1 = \frac{1}{\omega^3} \left\{ G_3 \omega + \frac{I_m[Z]}{R_e^2[Z] + I_m^2[Z]} \right\} \quad (104)$$

この他に式(95)と同一の式を誘導できる。 G_1 の $\omega \rightarrow 0$ における極限值が存在する条件として、式(96)が必要になる。式(104)の極限計算より、次式を得る。

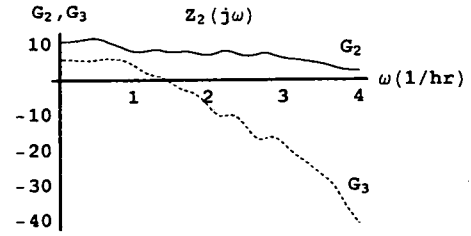


図-14 $G_2, G_3 \sim \omega$ の関係

$$G_1 = \frac{1}{6} \left\{ \frac{d^3 I_m[Z]}{d\omega^3} - 6 \left(\frac{dI_m[Z]}{d\omega} \right)^3 - 6 \frac{dI_m[Z]}{d\omega} \frac{d^2 R_e[Z]}{d\omega^2} \right\}_{\omega=0} \quad (105)$$

G_2, G_3 は、式(99),(100)と同一である。

次に、式(99),(100),(105)によって同定される G_2, G_3, G_1 の時間領域における特性を検討してみよう。 $Z_{q3}(j\omega)$ が他の等価周波数伝達関数 $Z(j\omega)$ に近似しているということは、時間領域において $Z_{q3}(j\omega)$ のインパルス応答関数 $z_{q3}(t)$ が $Z(j\omega)$ のインパルス応答関数 $z(t)$ に近似していることに相当している。6. 節に示すようにインパルス応答関数は正值で、その区間 $[0, \infty]$ の時間に関する積分値は1になっている。すなわち、インパルス応答関数を確率密度関数に置換して考えることができる。したがって、 $z_{q3}(t)$ を $z(t)$ に近似させるためには、両者のモーメントを一致させるとよいことになる。いま、周波数伝達関数に $Y(j\omega)$ にモーメント定理¹⁷⁾を適用して次式を得る。

$$\left[\frac{d^n Y(j\omega)}{d\omega^n} \right]_{\omega=0} = (-j)^n m_n \quad (106)$$

$$m_n = \int_0^{\infty} t^n y(t) dt \quad (107)$$

$y(t)$ は $Y(j\omega)$ のインパルス応答関数である。 $Y(j\omega) = Z_{q3}(j\omega)$ とするならば、次式を得る。

$$m_1 = G_3 \quad (108)$$

$$m_2 = 2(G_3^2 - G_2) \quad (109)$$

$$m_3 = 6(G_1 - 2G_2 G_3 + G_3^3) \quad (110)$$

$m_i, i=1,2,3$ は、 $z_{q3}(t)$ の原点の回りの i 次モーメントを表している。次に、 $Y(j\omega) = Z(j\omega)$ とすると、 $z(t)$ の1~3次モーメントが得られる。これらのモーメントを式(106)を用いて $d^i Z/d\omega^i$ で表し、式(108)~(110)に代入して式(99),(100),(105)を誘導できる。すなわち、

これらの式は二つのインパルス応答関数の3次モーメントまでを等値していることに符合している。

また、式(20)の極限計算を行い次式を得る。

$$T_L(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{\omega} \tan^{-1} \left\{ \frac{I_m[Z]}{R_e[Z]} \right\} \right] = \left[-\frac{dI_m[Z]}{d\omega} \right]_{\omega=0} \quad (111)$$

したがって、 G_3 は $\omega=0$ における時間遅れにもなっている。

次に、係数 G_1, G_2, G_3 と到達時間の関係を調べてみよう。ここで、次の変数を定義する。

$$V = \left[\frac{d^2 R_e[Z]}{d\omega^2} \right]_{\omega=0} \quad (112)$$

$$W = \left[\frac{d^3 I_m[Z]}{d\omega^3} \right]_{\omega=0} \quad (113)$$

式(112),(113)を用いると、式(99),(105)を次のように表すことができる。

$$G_2 = \frac{1}{2}(V + 2G_3) \quad (114)$$

$$G_1 = \frac{1}{6}(W + 6G_3^2 + 6G_3V) \quad (115)$$

式(17)および式(100),(112),(113)を用いて次式を得る。

$$V_s = -\frac{2t_s^2}{(1+p_s)(2+p_s)} \quad (116)$$

$$W_s = \frac{6t_s^3}{(1+p_s)(2+p_s)(3+p_s)} \quad (117)$$

$$G_{3,s} = \frac{t_s}{1+p_s} \quad (118)$$

式(116)~(118)を式(114),(115)に代入して、斜面域における $G_{1,s}, G_{2,s}$ を誘導できる。

さらに、式(43)を式(100),(112),(113)に代入して、マグニチュード1の河道網流域の $G_{3,1}, V_1, W_1$ を計算できる。

$$V_1 = \frac{-2t_c^2}{(1+p_c)(2+p_c)} - \frac{2t_c(l_{s,1}t_{s,1} + l_{s,2}t_{s,2})}{(1+p_c)(1+p_s)(l_{s,1} + l_{s,2})} - \frac{2(l_{s,1}t_{s,1}^2 + l_{s,2}t_{s,2}^2)}{(1+p_s)(2+p_s)(l_{s,1} + l_{s,2})} \quad (119)$$

$$W_1 = \frac{6t_c^3}{(1+p_c)(2+p_c)(3+p_c)} + \frac{6t_c^2(l_{s,1}t_{s,1} + l_{s,2}t_{s,2})}{(1+p_c)(2+p_c)(1+p_s)(l_{s,1} + l_{s,2})}$$

$$+ \frac{6t_c(l_{s,1}t_{s,1}^2 + l_{s,2}t_{s,2}^2)}{(1+p_c)(1+p_s)(2+p_s)(l_{s,1} + l_{s,2})} + \frac{6(l_{s,1}t_{s,1}^3 + l_{s,2}t_{s,2}^3)}{(1+p_s)(2+p_s)(3+p_s)(l_{s,1} + l_{s,2})} \quad (120)$$

$$G_{3,1} = \frac{t_c}{1+p_c} + \frac{l_{s,1}t_{s,1} + l_{s,2}t_{s,2}}{(1+p_s)(l_{s,1} + l_{s,2})} \quad (121)$$

式(119)~(121)の $t_{s,1}, t_{s,2}$ は、左右斜面の到達時間である。式(119)~(121)を(114),(115)に代入して、マグニチュード1の河道網流域の $G_{1,1}, G_{2,1}$ を得る。

マグニチュードが2の河道網流域になると、式(78)を用いて計算できる。式(78)を式(100)に代入して次式を得る。

$$G_{3,2} = \frac{1}{A_r} [A_1 G_{3,1,1} + A_2 G_{3,2,1} + \frac{A_3}{(l_{s,3,1} + l_{s,3,2})} (l_{s,3,1} G_{3,s,1} + l_{s,3,2} G_{3,s,2}) + \frac{1}{1+p_c} \times \{A_r t_{c31} - (A_1 + A_2) t_{c32}\}] \quad (122)$$

式中の $G_{3,i,m}$ は、図-5の部分流域(i)のマグニチュードが m であるときの G_3 の値を示しておる。図-5の部分流域(1),(2)は、いずれもマグニチュード1の流域なので式(121)を用いて計算できる。また、 $G_{3,s,i}$ $i=1,2$ は、部分流域(3)の左右斜面の G_3 の値を示し、これらは式(118)より求まる。式(78)の $Z_2(j\omega)$ を式(112),(113)に代入してマグニチュード2の河道網流域の V_2, W_2 を誘導できる。

$$V_2 = \frac{1}{A_r} \left[A_1 (V_{1,1} - 2G_{3,1,1} t_{c3}) + A_2 (V_{2,1} - 2G_{3,2,1} t_{c3} - t_{c3}^2) - A_3 t_{c3}^2 + \frac{A_3}{l_{s,3,1} + l_{s,3,2}} (l_{s,3,1} V_{s,3,1} + l_{s,3,2} V_{s,3,2}) + \frac{2(l_{s,3,1} G_{3,s,1} + l_{s,3,2} G_{3,s,2})}{l_{s,3,1} + l_{s,3,2}} \left\{ \frac{p_c}{1+p_c} (A_r t_{c31} - (A_1 + A_2) \times t_{c32}) - A_3 t_{c31} \right\} \right] \quad (123)$$

$$W_2 = \frac{1}{A_r} \left[A_1 (W_{1,1} - 3t_{c3} V_{1,1} + 3t_{c3}^2 G_{3,1,1}) + A_2 (W_{2,1} - 3t_{c3} V_{2,1} + 3t_{c3}^2 G_{3,2,1} + t_{c3}^3) + \frac{A_3 (l_{s,3,1} W_{s,3,1} + l_{s,3,2} W_{s,3,2})}{l_{s,3,1} + l_{s,3,2}} + \frac{3(l_{s,3,1} V_{s,3,1} + l_{s,3,2} V_{s,3,2})}{l_{s,3,1} + l_{s,3,2}} \left\{ \frac{p_c}{1+p_c} (A_r t_{c31} - (A_1 + A_2) t_{c32}) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -A_3 t_{c31} \left\} + \frac{3(l_{s,3,1} G_{s,3,1} + l_{s,3,2} G_{s,3,2})}{l_{s,3,1} + l_{s,3,2}} \left\{ A_3 t_{c31}^2 - \frac{2\rho_c t_{c3}}{1 + \rho_c} \right. \right. \\
& \times (A_r t_{c31} - (A_1 + A_2) t_{c32}) + \frac{\rho_c}{2 + \rho_c} (A_r t_{c31}^2 - (A_1 + A_2) t_{c32}^2) \left. \right\} \\
& - \frac{3\rho_c t_{c31}^2}{1 + \rho_c} \left\{ A_r t_{c31} - (A_1 + A_2) t_{c32} \right\} + \frac{3\rho_c t_{c31}}{2 + \rho_c} \left\{ A_r t_{c31}^2 \right. \\
& \left. - (A_1 + A_2) t_{c32}^2 \right\} - \frac{\rho_c}{3 + \rho_c} \left\{ A_r t_{c31}^3 - (A_1 + A_2) t_{c32}^3 \right\} \quad (124)
\end{aligned}$$

$V_{i,m}, W_{i,m}$ は、図-5の部分流域(i)のマグニチュードが m であるとき、式(112),(113)で定義される V, W の値を示している。 $V_{s,3,i}, W_{s,3,i}$ $i=1,2$ は、部分流域(3)の左右斜面の V, W である。 $G_{3,2}, V_2, W_2$ を式(114),(115)の G_3, V, W に代入することによって、 $G_{1,2}, G_{2,2}$ を求めることができる。

図-13で与えられる $Z_2(j\omega)$ を用いて G_1, G_2, G_3 を計算したところ、以下のようになった。

$$G_1 = 3.9(\text{hr}^3) \quad G_2 = 10.8(\text{hr}^2) \quad G_3 = 5.7(\text{hr}) \quad (125)$$

これらの値を、式(94),(103)に与えて、周波数特性を求めた結果を図-15に示す。図中の太実線は、図-13の $Z_2(j\omega)$ の周波数特性を示し、破線、細実線は式(94),(103)の周波数特性を示している。 $Z_2(j\omega)$ は、式(94)の周波数特性で充分近似できることを示している。

上述したように、 G_1, G_2, G_3 には等価周波数伝達関数の全てのパラメータが集約されている。逆に言えば、これらを流域特性の指標として利用できる可能性がある。

9. 高マグニチュード河道網流域における応用

実河川の河道網は、それぞれの河川で固有の形状をしている。8節で得られる係数 G_1, G_2, G_3 は、河道網の形状に強く依存しているはずである。ここでは、リンク~マグニチュード方式による河道網区分に基づいて、河道網の連結構造と G_1, G_2, G_3 の関係を検討する。

図-16は、リンク~マグニチュード方式に基づく河道網パターンを示している。 m はマグニチュードを示している。()内の数値は河道網パターンの生起確率である。マグニチュードが $m \geq 4$ となると、複

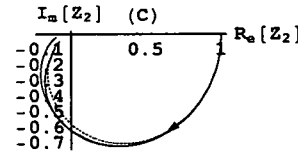
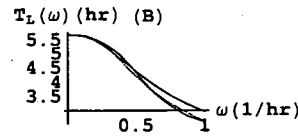
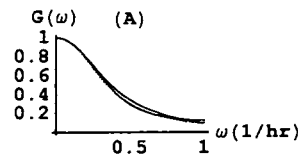


図-15 $Z_2(j\omega)$ と近似周波数伝達関数

太実線：図-13の $Z_2(j\omega)$

破線：式(94) 細実線：式(103)

数個の河道網パターンが存在する。マグニチュード m の河道網パターン数を S_m とすると式(126)を誘導できる^{18,19)}。

$$S_m = \begin{cases} \sum_{i=1}^{[m/2]} S_i S_{m-i} & m \neq 2n \\ \sum_{i=1}^{[m/2]-1} S_i S_{m-i} + \frac{1}{2} S_{[m/2]} (1 + S_{[m/2]}) & m = 2n \end{cases}$$

$$S_1 = S_2 = S_3 = 1 \quad m \geq 4 \quad [] : \text{ガウス記号} \quad (126)$$

表-2は、マグニチュードとその河道網のパターン数の計算例である。マグニチュードが増加するにともない、その河道網のパターン数が幾何級数的に増加することがわかる。この河道網のパターン数と等価周波数伝達関数に含まれるパラメータ数を考慮すると、実流域での流出解析において河道網を簡略化せざるを得ない。ここでは、全ての斜面長、河道長(リンク長)は等しいとする次式を仮定する。

$$l_{s,k,1} = l_{s,k,2} = l_s \quad (127)$$

$$l_{c,k} = l_{c,k} = l_c \quad (128)$$

$$\alpha_{k,1} = \alpha_{k,2} = \alpha \quad (129)$$

$$\beta_k = \beta \quad (130)$$

マグニチュード m の河道網における等価周波数伝達関数を $Z_m(j\omega)$ とする。式(126)を参照すると、 $Z_m(j\omega)$ の要素を次のように表すことができる。

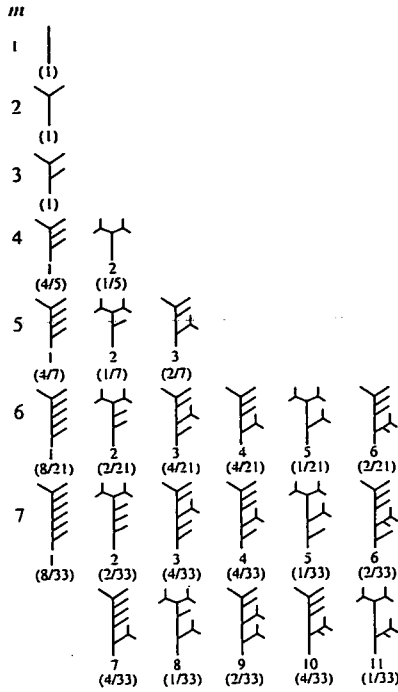


図-16 マグニチュードと河道網パターン

$$\mathbf{Z}_m(j\omega) = [Z_{m,1}, Z_{m,2}, \dots, Z_{m,S_m}] \quad (131)$$

図-17 に示すように、マグニチュード m の河道網において最下流の合流点で河道網を2分し、マグニチュード $i, m-i$ の2個の河道網を得る。それぞれの河道網流域の等価周波数伝達関数を $\mathbf{Z}_i(j\omega), \mathbf{Z}_{m-i}(j\omega)$ とすならば、式(78)を参照して次式を誘導できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_m(j\omega) = & \frac{1}{A_r} \left[(A_{m-i} \mathbf{Z}_{m-i}(j\omega) + A_i \mathbf{Z}_i(j\omega)) e^{-j\omega t_{c3}} \right. \\ & + e^{-j\omega t_{c31}} \mathbf{Z}_s(j\omega) \{ A_{r1} F_1[p_c, 1+p_c, j\omega t_{c31}] \\ & \left. - (A_i + A_{m-i}) F_1[p_c, 1+p_c, j\omega t_{c32}] \right] \quad (132) \\ & m \geq 2 \quad 1 \leq i \leq [m/2] \end{aligned}$$

マグニチュード m の河道網流域は $(2m-1)$ 個の部分流域より構成されているので、式(127),(128)を用いて次式を得る。

$$A_i = 2(2i-1)l_c l_s \quad (133)$$

$$A_{m-i} = 2(2m-2i-1)l_c l_s \quad (134)$$

$$A_r = 2(2m-1)l_c l_s \quad (135)$$

式(133)~(135)を式(132)に代入して次式を誘導できる。

表-2 マグニチュードと河道網のパターン数

マグニチュード	河道網のパターン数
10	98
15	4850
20	293547
25	19680277
30	1406818759

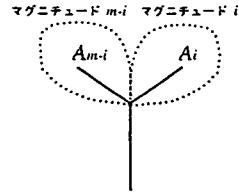


図-17 河道網の分割

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_m(j\omega) = & \frac{1}{2m-1} \left[\{ (2m-2i-1) \mathbf{Z}_{m-i}(j\omega) + (2i-1) \right. \\ & \left. \times \mathbf{Z}_i(j\omega) \} e^{-j\omega t_{c3}} + e^{-j\omega t_{c31}} \mathbf{Z}_s(j\omega) \{ (2m-1) \right. \\ & \left. \times F_1[p_c, 1+p_c, j\omega t_{c31}] - (2m-2) F_1[p_c, 1+p_c, j\omega t_{c32}] \right] \quad (136) \end{aligned}$$

式(136)の $\mathbf{Z}_s(j\omega)$ は、式(17)より計算できる。また、式(136)の t_{c31}, t_{c32} を式(80),(81),(133)~(135)を用いて次のように書き改めることができる。

$$t_{c31} = (2m-1)^{1/p_c} t_c \quad (137)$$

$$t_{c32} = (2m-2)^{1/p_c} t_c \quad (138)$$

$$t_c = \left\{ \frac{(2r l_s)^{1-p_c} l_c}{\beta} \right\}^{1/p_c} \quad (139)$$

t_{c3} は、式(79)より計算できる。式(136)を規定するパラメータは、 t_s, t_c, p_s, p_c の4個である。また、式(136)の初期値は、式(46)より得られる。

$$\mathbf{Z}_{1,1}(j\omega) = \mathbf{Z}_1(j\omega) \quad (140)$$

マグニチュード m の河道網における等価周波数伝達関数 \mathbf{Z}_m が得られたので、式(99),(100),(105)を用いて G_1, G_2, G_3 を計算できる。マグニチュード m の河道網流域において、 G_3 および式(112),(113)で定義される v, w に関して、式(131)と同様に次式を定義する。

$$\mathbf{G}_{3,m} = [G_{3,m,1}, G_{3,m,2}, \dots, G_{3,m,S_m}] \quad (141)$$

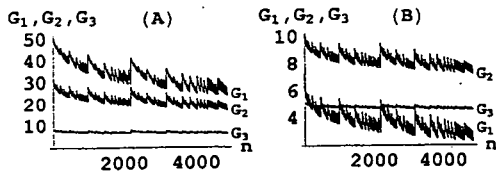


図-18 河道網パターンと係数 G_1, G_2, G_3 の関係

(マグニチュード 15)

A: $p_s = 5/3$ $p_c = 4/3$ $t_s = 6$ hr $t_c = 2$ hr

B: $p_s = 5/3$ $p_c = 4/3$ $t_s = 10$ hr $t_c = 0.5$ hr

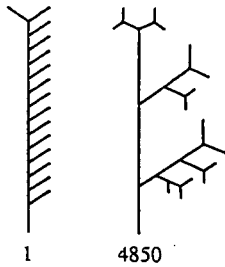


図-19 マグニチュード 15 の河道網における

パターン番号 1,4850 の河道

$$V_m = [V_{m,1}, V_{m,2}, \dots, V_{m,s_m}] \quad (142)$$

$$W_m = [W_{m,1}, W_{m,2}, \dots, W_{m,s_m}] \quad (143)$$

式(141)~(143)の各要素の計算は、付録(1)に示している。式(114),(115)を用いると次式を得る。

$$G_{1,m} = \frac{1}{6} (W_m + 6G_{3,m} V_m + 6G_{3,m}^3) \quad (144)$$

$$G_{2,m} = \frac{1}{2} (V_m + 2G_{3,m}^2) \quad (145)$$

次に、具体的に G_1, G_2, G_3 の値を計算してみよう。

図-18 は、マグニチュード $m=15$ の河道網を対象に G_1, G_2, G_3 を求めた結果を示している。横軸は河道網パターン番号になっている。 $m=15$ のとき表-2 によると河道網の総パターン数は 4850 になっている。図-18 では、パターン番号が増加すると G_1, G_2, G_3 ともに振動しながらその値が減少している。図-16 に示す河道網パターン番号は、パターンの識別を容易に付したものであるが、パターン番号が増加すると、河道網が最下流の合流点に集中する傾向を示している。図-16 のパターン番号順では、一様に最下流の

表-3 G_1, G_2, G_3 の値

パターン番号	G_1 (hr ³)	G_2 (hr ²)	G_3 (hr)
1	49.79	31.95	8.93
4850	23.95	17.04	6.32

(A) ($m=15, \text{No. } 1$)

(B) ($m=15, \text{No. } 4850$)

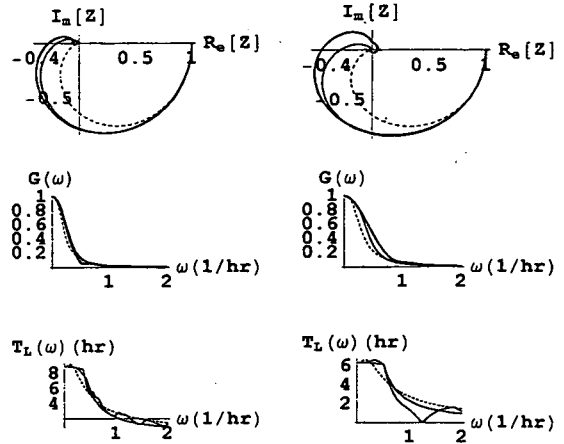


図-20 マグニチュード 15 の河道網における

周波数特性の比較

太実線: $Z_{15,1}(j\omega), Z_{15,4850}$

点線: 式(94) 細実線: 式(103)

合流点に河道網が集中していないので、図-18 に示すような振動が生じている。 $m=15$ のとき、1 番目のパターンの河道網と最後の 4850 番目のパターンの河道網を図-19 に示している。最後の河道網パターンになると、河道網が最下流の合流点に集中する程度がよく分かる。

一方、式(136)を用いるとマグニチュード $m=15$ のとき、4850 個の等価周波数伝達関数を計算できる。これらの等価周波数伝達関数が、どの程度式(94)や(103)の周波数伝達関数によって近似できているかを確認しておこう。ここでは、図-19 に示す 1,4850 番目の河道網パターンについて考える。図-18(A)の計算条件を用いたとき、式(141),(144),(145)より得られる G_3, G_1, G_2 の値は表-3 のようになっている。図-20(A),(B)は、式(136)より求まる $Z_{15,1}(j\omega)$ および $Z_{15,4850}(j\omega)$ と表-3 の G_1, G_2, G_3 を式(94),(103)に代入して得られた周波数特性を比較している。太実線が $Z_{15,1}(j\omega), Z_{15,4850}(j\omega)$ を示し、点線が式(94)を細実

線が式(103)の周波数伝達関数を示している。図-19を参照しながら $Z_{15,1}(j\omega)$ と $Z_{15,4850}(j\omega)$ を比較すると、 $Z_{15,1}(j\omega)$ は $Z_{15,4850}(j\omega)$ より降雨量と流出量間の時間遅れが大きく、かつ、ゲインの減衰の程度が大きく、河道網構造の相違による流出特性の相違を見ることができる。図-20(B)の $Z_{15,4850}(j\omega)$ の時間遅れと式(94),(103)より求まる時間遅れが高周波領域で大きく異なっている。しかし、(A)のゲインを見るとこの周波数帯でゲインの低下が著しく、高周波数領域における時間遅れの相違を無視できると考えられる。また、図によると式(101)の3次方程式が、 $Z_{15,1}(j\omega), Z_{15,4850}(j\omega)$ を良好に近似していると言える。

10. 本手法の実流域への適用の展望

実流域において降雨量、 $r(t)$ とその流出量、 $q(t)$ が既知ならば、 $r(t) \sim q(t)$ 間の等価周波数伝達関数は式(146)によって計算できる。

$$Z_q(j\omega, \bar{r}) = \frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} \quad (146)$$

$$Q(j\omega) = \int_0^{\infty} q(t)e^{-j\omega t} dt \quad (147)$$

$$R(j\omega) = \int_0^{\infty} r(t)e^{-j\omega t} dt \quad (148)$$

したがって、式(99),(100),(104)で $Z(j\omega) = Z_q(j\omega, \bar{r})$ と置換すると係数 G_1, G_2, G_3 を同定できる。同一地点で多くの出水資料のある地点を選択し、かつ、異なる流域、異なる地点で G_1, G_2, G_3 を同定したものとする。これらの G_1, G_2, G_3 は、河道網のマグニチュード、河道網パターンさらに平均降雨量も異なる流域から得られたものと考えられる。したがって、得られた G_1, G_2, G_3 を個別に比較することができない。式(141),(144),(145)で与えられる G_1, G_2, G_3 は互いに独立したものではなく、相互に関連しているはずである。理論的に求めた G_1, G_2, G_3 間の関係式が、実測資料を用いて計算した G_1, G_2, G_3 にも成立しているならば、流出モデルの基礎式として kinematic wave 式を採用できるか否かの目安にすることができる。ここでは、 G_1, G_2, G_3 が時間の3,2,1乗の次元を持っている

ことに着目して、次式で定義される無次元数 D_1, D_2 を定義する。

$$D_1 = \frac{G_1}{G_3^3} \quad (149)$$

$$D_2 = \frac{G_2}{G_3^2} \quad (150)$$

一方、藤田¹⁸⁾は河道網パターンの生起確率は、新しく河道が発生する確率はどの河道(リンク)でも等しいとする仮定の基に、マグニチュード m の河道網において i 番目の河道網パターンの生起確率、 $p_{m,i}$ を与えている。 $p_{m,i}$ の誘導過程に関しては原論文を参照されたい。

$$P_m = [p_{m,1}, p_{m,2}, \dots, p_{m,S_m}] \quad (151)$$

図-16の()内の数値は、 $p_{m,i}$ を示している。

実測資料に基づいてマグニチュード m の河道網流域より n 個の D_1, D_2 を求めたものとする。これらを $d_{1,i}, d_{2,i}, i=1,2,\dots,n$ とするならば、 $d_{1,i}, d_{2,i}$ は確率 $p_{m,i}$ にしたがって分布していることになる。これらの平均値 \bar{D}_1, \bar{D}_2 は、次式によって定義される。

$$\bar{D}_1 = E \left[\frac{G_1}{G_3^3} \right] \quad (152)$$

$$\bar{D}_2 = E \left[\frac{G_2}{G_3^2} \right] \quad (153)$$

$E[\]$ は期待値の演算子を表す。式(152),(153)では、計算が困難なので、近似的に次式によって \bar{D}_1, \bar{D}_2 を計算する。

$$\bar{D}_1 = \frac{\bar{G}_1}{\bar{G}_3^3} \quad (154)$$

$$\bar{D}_2 = \frac{\bar{G}_2}{\bar{G}_3^2} \quad (155)$$

平均値 $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3, \bar{G}_3^2$ の誘導過程については、付録(2)に示している。

図-21は、マグニチュード100までの河道網を対象として図-18(A)の計算条件を用いた \bar{D}_1, \bar{D}_2 とマグニチュードの関係を示している。マグニチュードが3以上になると、 \bar{D}_1, \bar{D}_2 はマグニチュードに関係なく一定値をとると考えてよい。他の t_s, t_c の値を用いたときも、 \bar{D}_1, \bar{D}_2 は河道網のマグニチュードに関係

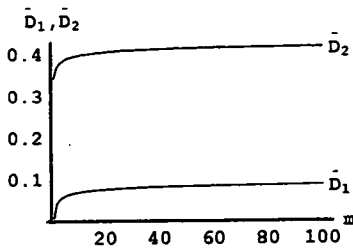


図-21 \bar{D}_1, \bar{D}_2 とマグニチュードの関係

$$p_s = 5/3 \quad p_c = 4/3 \quad t_s = 6 \text{ (hr)} \quad t_c = 2 \text{ (hr)}$$

なく一定値になっていることを付記しておく。

図-22 は、 $p_c = p_c = 5/3$ として到達時間 t_s, t_c を変化させたときの \bar{D}_1, \bar{D}_2 の値を示している。 t_s, t_c の値による \bar{D}_1, \bar{D}_2 の変化の範囲が極めて狭く、次の範囲を考えるとよい。

$$\bar{D}_1 = 0 \sim 0.09 \quad (156)$$

$$\bar{D}_2 = 0.35 \sim 0.42 \quad (157)$$

式(156),(157)の \bar{D}_1, \bar{D}_2 は式(127)~(130)の仮定のもとに誘導されたものであるが、河道網のマグニチュード、河道網パターン、平均降雨量などに関係なく成立している。

11. まとめ

本論文で得られた主たる結果をまとめると以下のようになる。

- (1) 山地流域を対象に斜面、河道域ともに kinematic wave モデルを適用できるものとして、任意の河道網流域における降雨量～流出量間の等価周波数伝達関数を誘導した。 kinematic wave モデルでは、平均降雨量に関する各斜面、河道の到達時間がパラメータになっていることを明らかにした。
- (2) kinematic wave モデルより得られた等価周波数伝達関数を、2~3 階の常微分方程式のこれによって近似できることを明らかにした。微分方程式に含まれている 3 個の係数 G_1, G_2, G_3 を等価周波数伝達関数より誘導した。これらの定数が河道網の構造に依存していることを明らかにした。さらに、係数 G_1, G_2, G_3 間の関係式として無次元数 \bar{D}_1, \bar{D}_2 を求め、これらが河道網のマグニチュ

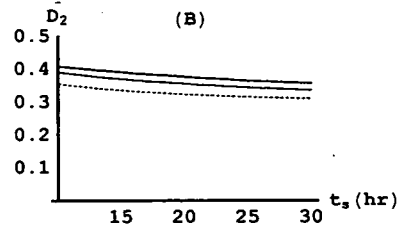
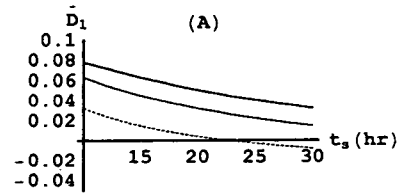


図-22 \bar{D}_1, \bar{D}_2 と t_s の関係 ($p_s = p_c = 5/3$)

点線: $t_c = 0.5 \text{ (hr)}$ 細実線: $t_c = 1.0 \text{ (hr)}$

太実線: $t_c = 1.5 \text{ (hr)}$

ード、河道網パターンおよび平均降雨量に依存していないことを確かめた。

本論文で提案している係数 G_1, G_2, G_3 を用いた遅れ系や無次元数 \bar{D}_1, \bar{D}_2 の有用性については、実測資料を用いた解析で実証する必要がある。紙面の関係で解析例を提示できないが、良好な結果を得ていることを付記しておく²⁰⁾。

- (3) 等価周波数伝達関数が平均降雨量の関数になっているので、当然、これから求まる遅れ系の係数 G_1, G_2, G_3 もまた平均降雨量の関数になる。すなわち、降雨ごとに G_1, G_2, G_3 の値が変化することになる。貯留関数法やタンクモデルのような集中定数系の流出モデルを用いて同一の地点で複数個の出水資料よりモデル定数を同定する場合、個々の出水の再現計算は良好であるが、モデル定数が出水ごとに変動することが多い。本研究から予想される結果であるが、これについてはさらに実測資料の解析を積み重ねて結論を出したい。

謝辞：本研究は、(財)北海道河川防災研究センターの研究補助を受けたものである。関係各位に謝意を表します。

付録

(1) 式(141)~(143)の要素の計算

式(100),(137)を用いて次式を得る.

$$G_{3,m} = \frac{1}{2m-1} \left[(2m-2i-1)G_{3,m-i} + (2i-1)G_{3,i} + E_1 \right] \quad (A1.1)$$

$$E_1 = \frac{t_s}{1+p_s} + \frac{f_1}{1+p_c} \quad (A1.2)$$

$$f_1 = (2m-1)t_{c31} - (2m-2)t_{c32} \quad (A1.3)$$

式(A1.1)の初期値は, 式(121),(127)より与えられる.

$$G_{3,1,1} = \frac{t_c}{1+p_c} + \frac{t_s}{1+p_s} \quad (A1.4)$$

式(136)の $Z_m(j\omega)$ を式(112)に代入して次式を得る.

$$V_m = \frac{1}{2m-1} \left[(2m-2i-1) \{ V_{m-i} - 2(t_{c31} - t_{c32})G_{3,m-i} \} \right. \\ \left. + (2i-1) \{ V_i - 2(t_{c31} - t_{c32})G_{3,i} \} + E_2 \right] \quad (A1.5)$$

$$E_2 = V_s - 2G_{3,s} \left(t_{c31} - \frac{p_c f_1}{1+p_c} \right) + \frac{2p_c t_{c31} f_1}{1+p_c} - \frac{p_c f_2}{2+p_c} \\ - (2m-1)t_{c31}^2 + (2m-2)t_{c32} (2t_{c31} - t_{c32}) \quad (A1.6)$$

$$f_2 = (2m-1)t_{c31}^2 - (2m-2)t_{c32}^2 \quad (A1.7)$$

式(A1.5)の初期値は, 式(119),(127)を用いて計算できる.

$$V_{1,1} = -\frac{2t_c^2}{(1+p_c)(2+p_c)} - \frac{2t_s t_s}{(1+p_c)(1+p_s)} \\ - \frac{2t_s^2}{(1+p_s)(2+p_s)} \quad (A1.8)$$

式(136)の $Z_m(j\omega)$ を式(113)に代入して, 次式を得る.

$$W_m = \frac{1}{2m-1} \left[(2m-2i-1) \{ W_{m-i} - 3(t_{c31} - t_{c32})V_{m-i} \} \right. \\ \left. + 3(t_{c31} - t_{c32})^2 G_{3,m-i} \right] + (2i-1) \{ W_i - 3(t_{c31} - t_{c32})V_i \} \quad (A1.9)$$

$$E_3 = W_s - 3V_s \left(t_{c31} - \frac{p_c f_1}{1+p_c} \right) + 3G_{3,s} \left(t_{c31}^2 - \frac{2p_c t_{c31} f_1}{1+p_c} \right. \\ \left. + \frac{p_c f_2}{2+p_c} \right) - \frac{3p_c t_{c31}^2 f_1}{1+p_c} + \frac{3p_c t_{c31} f_2}{2+p_c} - \frac{p_c f_3}{3+p_c} \\ + (2m-1)t_{c31}^3 - (2m-2)t_{c32} (3t_{c31}^2 - 3t_{c31}t_{c32} + t_{c32}^2) \quad (A1.10)$$

$$f_3 = (2m-1)t_{c31}^3 - (2m-2)t_{c32}^3 \quad (A1.11)$$

$V_s, W_s, G_{3,s}$ は, 式(116)~(118)に与えられている. また, 式(A1.9)の初期値は式(120),(127)を用いて, 次式を得る.

$$W_{1,1} = 6 \left\{ \frac{t_c^2}{(1+p_c)(2+p_c)(3+p_c)} + \frac{t_c^2 t_s}{(1+p_c)(2+p_c)(1+p_s)} \right. \\ \left. + \frac{t_c t_s^2}{(1+p_c)(1+p_s)(2+p_s)} + \frac{t_s^3}{(1+p_s)(2+p_s)(3+p_s)} \right\} \quad (A1.12)$$

(2) 式(154),(155)の計算

河道網パターンの生起確率 $p_{m,i}$ を用いると, 次式を定義できる.

$$\bar{G}_{k,m} = \sum p_{m,i} G_{k,m,i} \quad (A2.1)$$

したがって, 式(A1.1),(A2.1)より次式を誘導できる.

$$\bar{G}_{3,1} = \frac{t_c}{1+p_c} + \frac{t_s}{1+p_s} \quad (A2.2)$$

$$\bar{G}_{3,m} = \frac{1}{2m-1} \left[E_1 + \sum_{i=1}^{[m/2]} p(m,i) \{ (2m-2i-1)\bar{G}_{3,m-i} \} \right. \\ \left. + (2i-1)\bar{G}_{3,i} \right] \quad (A2.3)$$

式(A2.2)を初期値として $m \geq 2$ の範囲で $\bar{G}_{3,m}$ を計算できる.

また, $\bar{G}_{1,m}, \bar{G}_{2,m}$ を計算するために必要となる

$\bar{G}_{3,m}^2, \bar{G}_{3,m}^3$ に関しても次式を誘導できる.

$$\bar{G}_{3,1}^2 = \left\{ \frac{t_s}{1+p_s} + \frac{t_c}{1+p_c} \right\}^2 \quad (A2.4)$$

$$\bar{G}_{3,m}^2 = \frac{1}{(2m-1)^2} \left[E_1^2 + \sum_{i=1}^{[m/2]} p(m,i) \{ (2m-2i-1)^2 \bar{G}_{3,m-i}^2 \} \right. \\ \left. + (2i-1)^2 \bar{G}_{3,i}^2 + 2(2m-2i-1)(2i-1)\bar{G}_{3,m-i}\bar{G}_{3,i} \right. \\ \left. + 2(2m-2i-1)E_1\bar{G}_{3,m-i} + 2(2i-1)E_1\bar{G}_{3,i} \right] \quad (A2.5)$$

$$\bar{G}_{3,1}^3 = \left\{ \frac{t_s}{1+p_s} + \frac{t_c}{1+p_c} \right\}^3 \quad (A2.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{3,m}^3 = & \frac{1}{(2m-1)^3} \left[E_1^3 + \sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} p(m,i) \left\{ (2m-2i-1)^3 \bar{G}_{3,m-i}^3 \right. \right. \\ & + (2i-1)^3 \bar{G}_{3,i}^3 + 3(2m-2i-1)^2 (2i-1) \bar{G}_{3,m-i}^2 \bar{G}_{3,i} \\ & + 3(2m-2i-1)(2i-1)^2 \bar{G}_{3,m-i} \bar{G}_{3,i}^2 + 3E_1 \left[(2m-2i-1)^2 \right. \\ & \times \bar{G}_{3,m-i}^2 + 2(2m-2i-1)(2i-1) \bar{G}_{3,m-i} \bar{G}_{3,i} + (2i-1)^2 \bar{G}_{3,i}^2 \left. \right] \\ & \left. \left. + 3E_1^2 \left[(2m-2i-1) \bar{G}_{3,m-i} + (2i-1) \bar{G}_{3,i} \right] \right\} \right] \quad (A2.7) \end{aligned}$$

式(A2.4),(A2.6)を初期値として $m \geq 2$ の範囲で $\bar{G}_{3,m}^2, \bar{G}_{3,m}^3$ を計算できる。

次に、式(A1.5)より \bar{V}_m を誘導する。

$$\bar{V}_1 = V_{1,1} \quad (A2.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_m = & \frac{1}{2m-1} \left[E_2 + \sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} p(m,i) \left\{ (2m-2i-1) \left[\bar{V}_{m-i} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - 2(t_{c31} - t_{c32}) \bar{G}_{3,m-i} \right] + (2i-1) \left[\bar{V}_i - 2(t_{c31} - t_{c32}) \bar{G}_{3,i} \right] \right\} \right] \quad (A2.9) \end{aligned}$$

式(A2.5),(A2.9)を用いて $\bar{G}_{2,m}$ を得る。

$$\bar{G}_{2,m} = \frac{1}{2} \left(\bar{V}_m + 2\bar{G}_{3,m}^2 \right) \quad (A2.10)$$

$\bar{G}_{1,m}$ を計算するためには、 $\bar{G}_3 \bar{V}_m$ の値が必要になる。

式(A1.1),(A1.5)より次式を得る。

$$\bar{G}_3 \bar{V}_1 = G_{3,1,1} V_{1,1} \quad (A2.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_3 \bar{V}_m = & \frac{1}{(2m-1)^2} \left[E_1 E_2 + \sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} p(m,i) \left\{ (2m-2i-1)^2 \right. \right. \\ & \times \left[\bar{G}_3 \bar{V}_{m-i} - 2(t_{c31} - t_{c32}) \bar{G}_{3,m-i}^2 \right] + (2i-1)^2 \\ & \times \left[\bar{G}_3 \bar{V}_i - 2(t_{c31} - t_{c32}) \bar{G}_{3,i}^2 \right] + (2m-2i-1)(2i-1) \\ & \times \left[\bar{G}_{3,i} \bar{V}_{m-i} + \bar{G}_{3,m-i} \bar{V}_i - 4(t_{c31} - t_{c32}) \bar{G}_{3,m-i} \bar{G}_{3,i} \right] \\ & \left. \left. + (2m-2i-1) \left[E_1 \bar{V}_{m-i} - 2(t_{c31} - t_{c32}) E_1 \bar{G}_{3,m-i} \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \left. + E_2 \bar{G}_{3,m-i} \right] + (2i-1) \left[E_1 \bar{V}_i - 2(t_{c31} - t_{c32}) E_1 \bar{G}_{3,i} \right. \right. \\ & \left. \left. + E_2 \bar{G}_{3,i} \right] \right\} \quad (A2.12) \end{aligned}$$

\bar{W}_m に関して式(A1.9)より次式を誘導できる。

$$\bar{W}_1 = W_{1,1} \quad (A2.13)$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_m = & \frac{1}{2m-1} \left[E_3 + \sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} p(m,i) \left\{ (2m-2i-1) \left[\bar{W}_{m-i} \right. \right. \right. \\ & + 3(t_{c31} - t_{c32})^2 \bar{G}_{3,m-i} - 3(t_{c31} - t_{c32}) \bar{V}_{m-i} \left. \right. \\ & \left. \left. + (2i-1) \left[\bar{W}_i + 3(t_{c31} - t_{c32})^2 \bar{G}_{3,i} - 3(t_{c31} - t_{c32}) \bar{V}_i \right] \right\} \right] \quad (A2.14) \end{aligned}$$

式(A2.3),(A2.5),(A2.7),(A2.9),(A2.12),(A2.14) の $p(m,i)$ は、図-17に示すようにマグニチュード m の河道網を最下流の合流点で2分したとき、2個の流域のマグニチュードがそれぞれ $i, m-i$ となるパターン群の確率である¹⁹⁾。

$$\begin{cases} p(m,1) = \frac{m}{2m-3} \\ p(m,i) = \frac{2(2i-3)! m! (m-2)! (2m-2i-2)!}{(i-2)! i! (m-i)! (2m-3)! (m-i-1)!} \\ \quad 2 \leq i \leq \lfloor m/2 \rfloor \quad m \neq 2n \\ p(2n,n) = \frac{8n}{(4n-2)!} \left\{ \frac{(2n-1)! (2n-3)!}{n! (n-2)!} \right\}^2 \\ \quad m = 2n \end{cases} \quad (A2.15)$$

式(A2.7),(A2.12),(A2.14)より次式を得る。

$$\bar{G}_{1,m} = \frac{1}{6} \left(\bar{W}_m + 6\bar{G}_{3,m}^3 + 6\bar{G}_3 \bar{V}_m \right) \quad (A2.16)$$

参考文献

- 1) 藤田睦博, 山岡勲: ナイキスト図による河川流出モデルの適合性の判定, 第13回水理講演会講演集, pp.25-30, 1969
- 2) 藤田睦博: 降雨流出系のシステム関数の解析について, 第15回水理講演会講演集, pp.61-66, 1971
- 3) 嵯峨浩: 周波数応答法の非線形流出系への適用, 第31回水理講演会論文集, pp.167-172, 1987
- 4) 嵯峨浩: 周波数応答法による流出解析, 土木学会論文集, No.393/II-9, pp.77-86, 1988

- 5) 藤田睦博, 工藤睦信, 中尾隆志, 橋本謙秀: 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究-降雨量が時間的に独立な確率過程の場合-, 土木学会論文集, No.515/II-31, pp.1-11,1995
- 6) 田中岳, 藤田睦博, Luai Hamouda: 拡張された周波数応答法の流出システムへの適用, 水工学論文集, 第42巻, pp.221-235, 1998
- 7) Mutsuhiro Fujita, Ruai Hamouda and Gaku Tanaka: Application of the Equivalent Frequency Response Method to Runoff Analysis, Proceedings of Korea Water Resources Association, KWRA Conference-2000, pp.1-10, 2000
- 8) Luai Hamouda and Mutsuhiro Fujita: Application of the Equivalent Frequency Response Method to Nonlinear Runoff System-St. Venant Equations and Related Models-, 土木学会論文集, No.677/II-55, pp.189-203,2001
- 9) 藤田睦博: 斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究, 土木学会論文報告集, 第314号, pp.75-88, 1980
- 10) 平野宗夫: 山地小河川における流出過程について, 土木学会論文報告集, 第308号, pp.69-76,1981
- 11) 星清, 山岡勲: 雨水流法と貯留関数との相互関係, 第26回水理講演会論文集, pp.273-278,1982
- 12) 高棟琢馬, 椎葉充晴: 雨水流モデルの集中化に関する基礎的研究, 京都大学防災研究所年報, 第28号 B-2, pp.213-220, 1985
- 13) 市川温, 小椋俊博, 立川康人, 椎葉充晴: 数値地形情報と定常状態の仮定を用いた山腹斜面系流出モデルの集中化, 水工学論文集, 第43巻, pp.43-48,1999
- 14) 松林宇一郎, 高木不折, 古田直: 不飽和浸透流理論に基づく斜面流出モデルの集中化について, 土木学会論文集, No.497/II-28, pp.11-20,1994
- 15) Siamak Bodaghpour, Mutsuhiro Fujita and Yasuyuki Shimizu: Lumping Process Based on Unsaturated Infiltration Theory, *Annual Journal of Hydraulic Engineering*, JSCE, Vol.39,pp.209-214, 1995
- 16) 八田茂実, 藤田睦博, 山梨光訓: 損失を考量した不飽和浸透流理論の集中化, 土木学会論文集, No.600/II-44, pp.11-21, 1998
- 17) 例えば, パボリス著, 大槻・平岡寛二訳: 応用フーリエ積分, オーム社, pp.21-23,1973
- 18) 藤田睦博: 流域地形構造とその統計則に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第234号, pp.73-82, 1975
- 19) 藤田睦博: 河道網における支流の分布特性に関する研究, 土木学会論文報告集, 第246号, pp.35-45, 1976
- 20) Surakha Wanphen and Mutsuhiro Fujita: Estimation of Runoff Parameters by Moment Method, 第20回日本自然災害学会学術講演会講演概要集, pp.133-134,2001

(2001.12.10 受付)

STUDY ON THE LUMPING PROCESS OF THE KINEMATIC WAVE MODEL BASED ON THE EQUIVALENT FREQUENCY TRANSFER FUNCTION

Mutsuhiro FUJITA, Surakha WANPHEN, Gaku TANAKA and Yasuyuki SHIMIZU

Luai and Fujita proposed a method to determine the equivalent frequency transfer function (EFTF) between rainfall input and runoff from a mountainside slope using several runoff models. To further develop their proposed method, we used the kinematic wave equation as a runoff model and derived a new EFTF between rainfall and runoff from a whole basin. The parameters of the new EFTF are the time of concentration related to average rainfall at slopes and channels. It is shown in this paper that the newly derived EFTF can be approximated by a second- or third- order delay system and that parameters involved in delay systems depend on the river network structure.