

コンクリート構造物の数値解析への Flexibility 法の適用に関する研究

中野友裕¹・田邊忠顕²

¹学生会員 工修 名古屋大学大学院 工学研究科(〒464-8603 名古屋市千種区不老町 1)

²フェロー会員 工博 名古屋大学大学院教授 工学研究科(〒464-8603 名古屋市千種区不老町 1)

厳密な力の分布を基礎とする Flexibility 法のコンクリート構造物への適用可能性を評価するために、各種の履歴条件下における数値解析的検討を行い、大変位に至るコンクリート構造物への Flexibility 法の適用を行った。その結果、Flexibility 法においては力の直線性が規定される部材に対しては、1要素でありながら、内力分布・変位分布が正しく求められること、塑性ヒンジの仮定を正しく把握することで、Post-Peak 領域まで一貫したアルゴリズムで解析が可能であること、それらは静的・動的解析の双方に有用であることが明らかとなった。

Key Words : flexibility-method, stiffness-method, localization, integration point, moment-curvature relationship

1. はじめに

近年のコンピュータの急速な発展に伴い、激震時における土木構造物の非線形動的解析に代表される数多くの数値解析を用いた研究が行われてきている。道路橋示方書¹⁾においても、非線形動的解析を用いて構造物の挙動を予測することを推奨している。今後、土木構造物の大型化・複雑化が進めば、数値解析による構造物の挙動解析は大きな役割を担うとともに、その精度・再現性に対して一層の期待と責任を受け持つことになることは論を待たない。とりわけ実験が難しい実構造物レベルにおいては、その傾向はますます顕著になっていくものと考えられる。

今日、多くの数値解析に用いられている有限要素法であるが、静的あるいは動的繰返し载荷を受ける解析において最もよく使われる要素に、はり要素がある。はり要素はフレーム構造や橋の構造要素をモデル化する際に好都合であり、全体的な挙動を捉えるのに非常に適している。

はり要素の定式化に関しては大きく分けて2つの形式がある。1つは要素変位の近似関数を元にした剛性法に基づくものであり、もうひとつは要素内力の直線分布を規定する Flexibility 法である。従来、

構造解析には専ら剛性法に基づくはり要素の定式化が用いられ、多くの汎用プログラムでも剛性法を採用している。剛性法は非線形領域に至っても比較的容易に収斂過程が作れること、また構成則の表記が一般にひずみから応力を求める方向にあることなどが、解析アルゴリズムにとって都合が良いといった理由から、多用されてきた。しかしその反面、剛性法のアルゴリズムでは、部材内力は等価節点力に置き換えられるため、節点における力の釣合いさえ満足すれば、要素内の力の分布が現実と異なってしまうと、外力と内力の釣合いは見かけ上、満足していることになる。そのため、剛性法では適切に要素分割を施さなければ、非線形領域での解析が妥当な解とならないことがありうる。そのことは同時に、数値解析を困難にし、莫大な要素を用いた解析が必要となる一因でもある。剛性法による解析の利点を否定するものではないが、これらの問題点は、今後の数値解析において必ず大きな問題として解決すべきものであると考える²⁾。

一方で、Flexibility 法による構造解析の特徴は、要素内のモーメント分布の直線性を規定することである。従来の Flexibility 法（一般に応力法と呼ばれる）は、力を考慮に入れてなおかつ変形を成り立

たせるために、除荷域や軟化域に至った場合、収斂過程が極めて煩雑であり、数々の問題点を抱えていた³⁾。しかし近年になって California 大学の研究グループにより、力の分布をもとにした新たなアルゴリズムが提案されている⁴⁾。そのため、力の分布を基礎とした定式化に基づく解析が可能となれば、剛性法の克服しきれない問題点を解決する有効な手段となることが期待できる。

Flexibility 法の最大の利点は、厳密な力の釣合いを基礎としているために、力の直線性が成り立つ範囲においては 1 要素で局所化や軟化を含めた解析が可能であるという点である。そのことは大幅に少ない自由度で精度よい解析を行うことができることにつながり、連続高架橋などのはり部材にモデル化できるような大構造物の非線形動的応答解析が、全体系に亘っても可能となると考えられるのである。

本研究は、これらの点を明確にするために、まず、剛性法と Flexibility 法それぞれの特徴について考察を加えた。その検討結果に基づき構造物をモデル化し、静的実験を再現するための Flexibility 法による解析を行い、Flexibility 法の構造解析に対する適用可能性を評価した。さらに動的応答実験に対しても Flexibility 法による解析を行い、動的応答における適用可能性を評価した。

なお、著者らは文献 5)、6)において比較的簡単な断面履歴則に対して Flexibility 法を適用した例を発表しているが、本稿は、剛性法との比較、局所化の考慮、実験結果との整合性と相違点の検討などに対する新たな知見を体系的にまとめたものである。

2. 要素の定式化

(1) 剛性法 (変位法) によるはり要素の定式化

剛性法に基づくはり要素の定式化において基礎となるのは、変位の内挿関数である。要素内の x における変位分布 $u(x)$ は、要素を構成する変位 q と形状関数 N_D を用いて次のように表すことができる。

$$u(x) = N_D \cdot q \quad (1)$$

ここで N_D は、軸方向変形については 1 次式、曲げ変形に関しては 3 次式で仮定されることになる。 $u(x)$ を要素内のひずみに変換するためには、式(1)を軸方向に対して 1 階・曲げ変形について 2 階の微分を行えばよい。ひずみを $\epsilon(x)$ とすれば変位・ひずみマトリクス $B(x)$ を用いて次式が得られる。

$$\epsilon(x) = B(x) \cdot q \quad (2)$$

いま、要素内の点 x における断面剛性を $k(x)$ とすると、断面力ベクトルは $S(x) = k(x) \epsilon(x)$ と表される。この関係に仮想変位の原理を適用すれば、要素剛性マトリクス K と節点力ベクトル Q が次のように導かれる。

$$K = \int_0^L B^T(x) k(x) B(x) dx \quad (3)$$

$$Q = \int_0^L B^T(x) S(x) dx \quad (4)$$

これらの定式化の中で、節点-断面間の力の釣合いは節点力 Q と内力 $S(x)$ の関係として式(4)で表されることとなる。これらの定式化のもたらす問題点は 4 章で述べる。

(2) Flexibility 法によるはり要素の定式化

Flexibility 法の定式化では、基礎となるのは力の内挿関数である。力の内挿関数を $N_F(x)$ と表すと、

$$S(x) = N_F(x) \cdot Q \quad (5)$$

ここで $N_F(x)$ は、軸力については定数、モーメントについては x の 1 次式で構成されるマトリクスになる。これらに断面 Flexibility $f(x)$ を適用すると、

$$\epsilon(x) = f(x) \cdot S(x) \quad (6)$$

が得られる。式(6)に仮想力の原理を適用すれば、要素 Flexibility マトリクス F は次式で表される。

$$F = \int_0^L N_F^T(x) f(x) N_F(x) dx \quad (7)$$

3 章で述べるが、Flexibility 法では、節点力ベクトル Q は各積分点での収斂計算により求めるため、要素内における力の分布は厳密に満足される。

3. Flexibility 法の収斂アルゴリズム⁴⁾

(1) 構造物レベルの収斂アルゴリズム

本研究で用いる Flexibility 法の収斂手法は、構造物レベル・要素レベル・断面レベルの 3 段階を必要とする。構造物レベルでの収斂は、通常の構造解析と同様の手順により行われ、当該 step での不平衡力が収斂条件を満たすまで iteration を行うことにより得られる。

(2) 要素・断面レベルの収斂アルゴリズム

構造物レベルでの収斂に用いる内力は、次の手順で求める。なお、図-1～図-3 のA～D の記号はそれぞれの図相互の対応を示している。

- ① 剛性方程式により、構造物レベルでの荷重増分 ΔP 、変位増分 Δp を計算する。
- ② Δp から各要素の変位ベクトル Δq を計算する。
- ③ 要素 Flexibility マトリクスより、要素の荷重増分 ΔQ を求める。

$$\Delta Q = F \cdot \Delta q \quad (8)$$

- ④ ΔQ と補間関数 $b(x)$ から、断面力増分 $\Delta D(x)$ を次式により求める。

$$\Delta D(x) = b(x) \cdot \Delta Q \quad (9)$$

- ⑤ $\Delta D(x)$ と断面 Flexibility $f(x)$ から断面変形増分 $\Delta d(x)$ を計算する。
- ⑥ 全断面変形 $d_{t-1}(x) + \Delta d(x)$ により、断面力 $D_R(x)$ 、断面剛性 $k(x)$ 、断面 Flexibility $f(x)$ を計算する。
- ⑦ 断面不平衡力 $D_U(x)$ の計算を行う。
- ⑧ 断面の不平衡変位 $r(x)$ を計算する。

$$r(x) = f(x) \cdot D_U(x) \quad (10)$$

- ⑨ 各断面の不平衡変位を要素長に亘って積分し、要素の不平衡変位 s を求める。
- ⑩ 要素 Flexibility マトリクス F を計算する。

$$F = \int_0^L b(x)^T \cdot f(x) \cdot b(x) dx \quad (11)$$

- ⑪ s が収斂条件を満たさない場合は、 $\Delta q = -s$ として収斂条件を満たすまで③から再度計算する。
- ⑫ s が十分に小さい場合は、要素レベルでの収斂は完了し(点 D)、構造物の不平衡力を求める。不平衡力が収斂条件を満たさない場合には、 $\Delta P = \Delta P_U$ として収斂条件を満たすまで①から計算する。

この手順の最大の特徴は、各断面が力と変形の条件を満たすまで要素の変形を固定してしまう点にある。このアルゴリズムを採用すれば、要素全体に亘っての釣合いは厳密に維持されることとなり、はり要素の分割をせずに、精度の良い解析が可能となる。

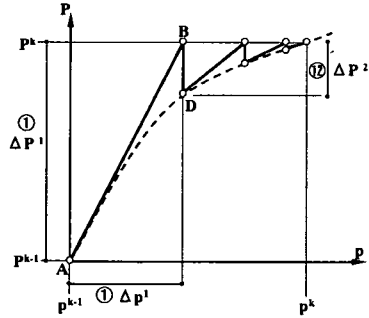


図-1 構造物レベルの収斂計算

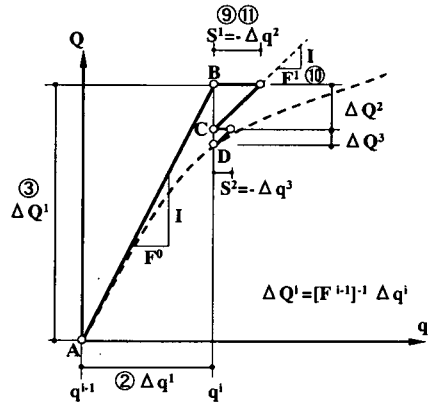


図-2 要素レベルの収斂計算

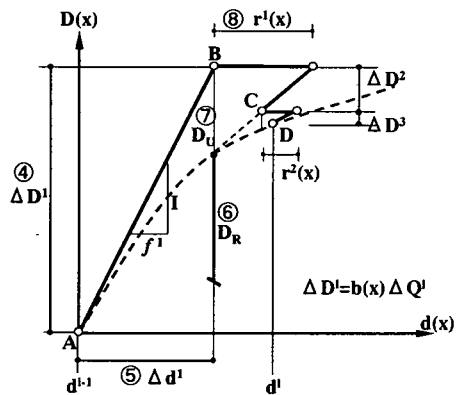


図-3 断面レベルの収斂計算

4. 柱の応答の数値解析

(1) 数値解析条件

2章で述べた定式化の相違が、数値解析においてどのような相違を生じさせるかを検討するために、1本の柱を対象にした数値解析を行う。

表-1 柱の諸定数

柱高さ	2.40 [m]
ひび割れ発生曲率 ϕ_{cr}	0.0015 [1/m]
ひび割れ発生モーメント M_{cr}	150.0 [kN*m]
降伏曲率 ϕ_y	0.0080 [1/m]
降伏モーメント M_y	240.0 [kN*m]
基部降伏時の水平力	100.0 [kN]

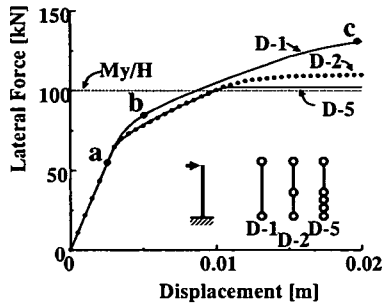


図-4 剛性法要素の応答 (要素数 1/2/5)

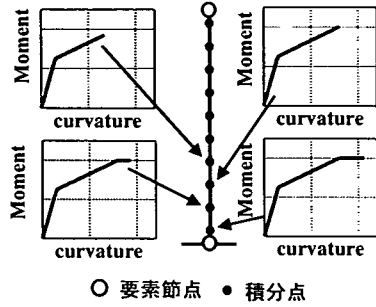


図-5 各断面の履歴応答 (D-1)

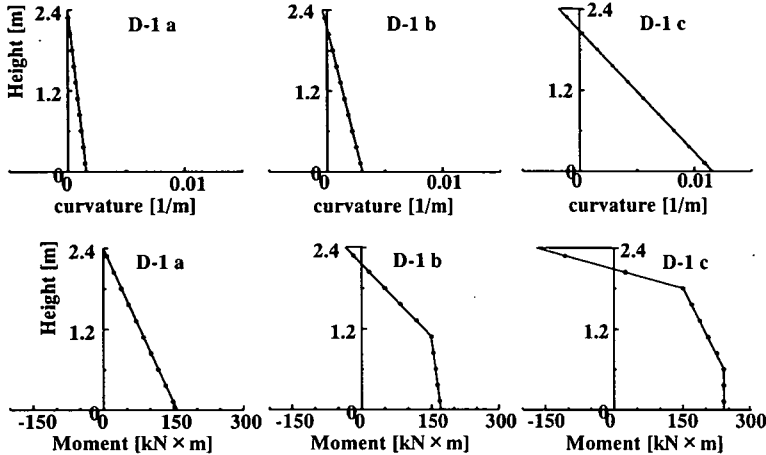


図-6 剛性法1要素内の曲率分布・モーメント分布 (D-1)

現象の理解を容易にするため、表-1 に示すような柱高さと履歴定数を Takeda-Model 型の断面構成則を用いて Push-Over 解析に適用することとした。これらの諸元は、柱天端に 100 [kN]の水平力が作用したときに、柱基部が降伏モーメントとなるように決定したものである。

(2) 軟化を考慮しない場合の剛性法要素と

Flexibility 法要素の応答

a) 剛性法要素の応答

よく知られているように、剛性法要素による数値解析の問題点として、要素の分割方法により部材・構造物の応答が無視し得ない程度の解析結果の相違をもたらすことが挙げられる。図-4 に、要素数を 1, 2, 5 とした柱の Push-Over 解析の結果を示す。

この結果から分かるように、要素分割数が少ない場合、解析結果は荷重を大きく見積もることになる。図-5 には、剛性法1要素 (D-1) における各積分点の M- ϕ 履歴を示してある。明らかに、基部付近の3積分点で断面は降伏しているが、さらに変位を大

きくすると4番目、5番目の積分点も降伏していく。

図-6 に、各変形時における曲率分布およびモーメント分布を示す。a, b, c の記号は、図-4 中の a, b, c に対応しており、a は弾性域、b は基部にひび割れが入った状態、c は基部が降伏して変形が進んだ状態である。式(2)に示される変位・ひずみマトリクス $B(x)$ が曲げ変形に対して1次式であることから、曲率分布はすべて直線となる。しかし、モーメント分布はその仮定に基づいて等価な節点力を求めて収斂させるため、実際のモーメント分布を表さない。モーメントの直線性が成立するのは弾性域のみであって、非線形領域に入ってしまうともはや線形に仮定された曲率分布では現象を捉えられなくなってしまう。それゆえ、剛性法では非線形領域に入る場合は、適切な要素分割を施さないと、内力分布を正しく求めることができないことになる。

b) Flexibility 法要素の応答

a)において示された剛性法の解析と同一の条件で行われた、Flexibility 法による柱の数値解析結果、断面履歴、および曲率分布図・モーメント分布

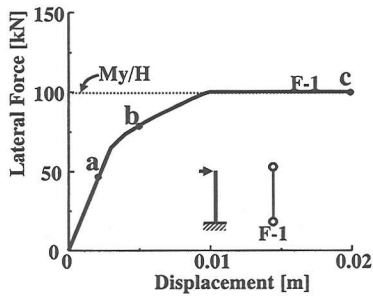


図-7 Flexibility 法要素の応答 (要素数 1)

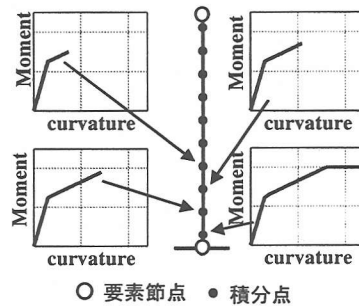


図-8 各断面の履歴応答 (F-1)

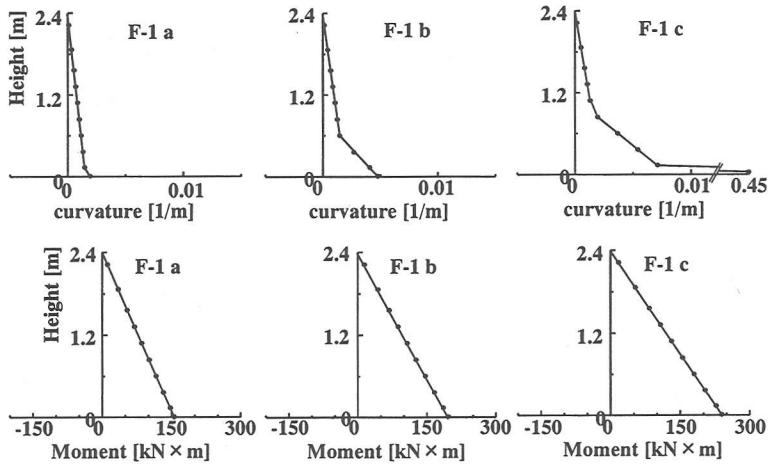


図-9 Flexibility 法 1 要素内の曲率分布・モーメント分布 (F-1)

図を図-7～図-9 に示す。要素数は 1 である。

Flexibility 要素は、力の直線分布をもとにしているため、剛性法と異なり常にモーメントは直線分布することになる。したがって、図-7 に示すような荷重-変位点すべてにおいてモーメントは直線分布している (図-9)。さらに、柱基部において降伏モーメントに達した後、剛性法 1 要素においては曲率の増加が最下部の積分点から上の積分点に向かって現れたが、Flexibility 法ではそのような現象は発生せず、基部の曲率のみが増加し、その他の断面の曲率は一定を保つ (図-8)。これは基部のモーメントが降伏に達した後、変形は基部の曲率のみに依存し、他の断面は変形に寄与しなくなるためである。

図-9 の上段には、図-7 の a, b, c に対応する柱の曲率分布を示してあるが、この図から基部において変形が著しくなり他の断面は変形が進展しない挙動を示すことが把握できる。この現象は、ひずみの局所化現象を忠実に表現するものであり、かつ要素内力の分布においても厳密性を失わないことを示しているといえる。

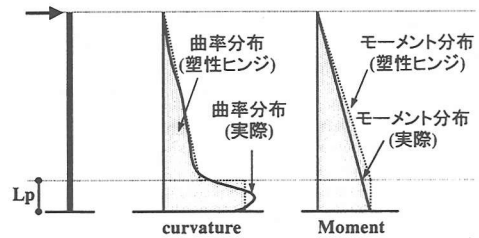


図-10 塑性ヒンジの仮定⁹⁾

(3) 塑性ヒンジ長による Flexibility 法要素の応答特性^{2), 9)}

ひずみの局所化を論じる際には、塑性ヒンジ長を考慮しなければ正しい解が得られないことが知られている。Flexibility 法では、1 要素内の力の釣合いを基礎として定式化しているが、数値積分を行う際には、その力の釣合いの規定が塑性ヒンジの仮定と矛盾することのないように注意する必要がある。

塑性ヒンジの仮定は、図-10 中央の実線で示された曲率分布をハッチのような形状に分布させることである。すなわち、曲率の増大する区間に、適当な

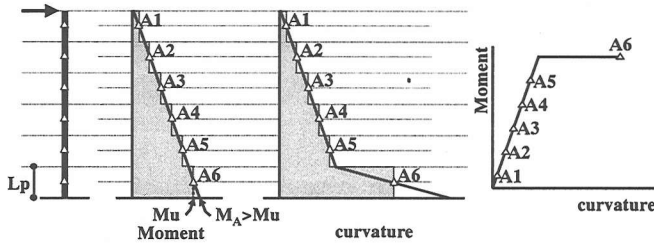


図-11 積分区間の代表点を区間中央とした場合のモーメント・曲率分布

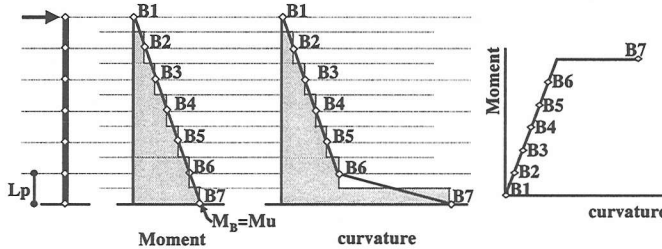


図-12 積分区間の代表点を区間端部とした場合のモーメント・曲率分布

長さの塑性ヒンジ長 L_p を設定し、その区間内に曲率を平均的に分布させるといものである。

このような仮定を解析上忠実に表現するためには、モーメント分布は図-10 右のハッチで示されるような分布形状を仮定することになる。なぜなら曲率分布が一樣に大きくなるためには、塑性ヒンジ区間全体が一樣に、完全塑性域に入らなければならないからである。しかし、塑性ヒンジが形成されてモーメントがそのような分布形状を呈すると言うのは、現象を忠実に表しているものではないことは明らかである。

このような塑性ヒンジのモデルに対する矛盾を解決するために、積分長および積分点を適切に配置することを考える。図-11 に示すように、1要素内の積分点を各積分長さの中央部分に設置した場合、各点で内力が計算されることになるために、A6 点が塑性域に入るまで、荷重は増大することになる。いま、A6 点が塑性域に入った場合のモーメント分布を考えると、断面の最大モーメントを M_u としたとき、基部のモーメントは M_u を越えることとなる。これは、柱基部において断面の取りうる最大モーメントを越えているため、不適切な解析である。

次に、同じ積分長に対して、積分点を区間両側で考えた場合（図-12）、断面のモーメントは M_u を越えることはない。これは、B7 点のモーメントが M_u に達した後は、他の積分点はモーメントが増加しないからである。

図-13 と図-14 に積分点を中央にとった場合と両

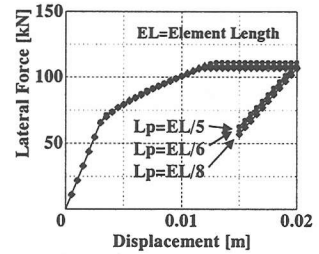


図-13 区間中央を代表点とした場合

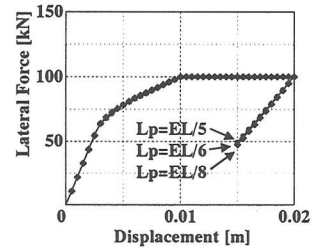


図-14 区間端部を代表点とした場合

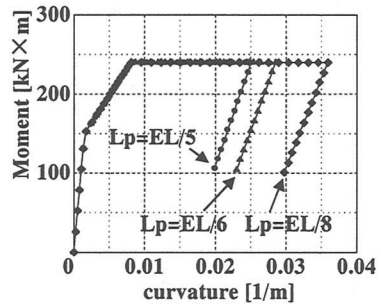


図-15 区間端部を代表点とした場合の断面履歴

端にとった場合の積分区間長による応答の比較を示す。解析対象は表-1 と同じである。図から明らかのように、中央に取った場合は塑性ヒンジ長により P-D 曲線が異なるのに対し、両端に取った場合はそのような差異は発生しない。また、除荷をした場合でも、それらの客観性は失われぬことも示されている。

一方、図-15 には、図-14 に対応する塑性ヒンジ断面の履歴を示している。塑性ヒンジの長さにより局所化の進展が変化する事がわかる。すなわち、完全塑性型の断面剛性を用いた場合、柱全体の挙動に対しては塑性ヒンジ長による変動は現れないが、部材断面のモーメント-曲率履歴については、塑性ヒンジ長により相当異なった結果が得られることに注意しなければならない。

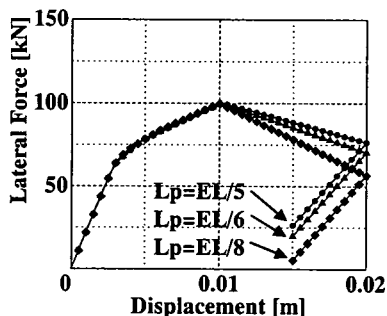


図-16 軟化型断面の荷重-変位関係

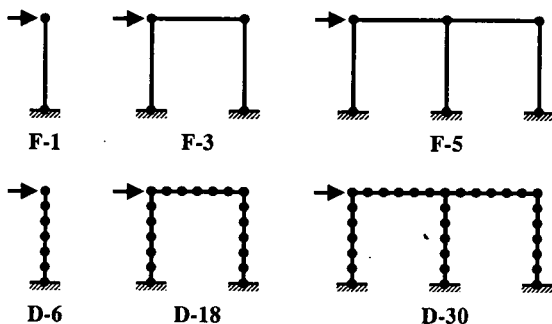


図-17 計算時間の比較対象としたモデル

(F : Flexibility 要素 / D : 剛性法要素 / 数字は要素数)

(4) 軟化断面での Flexibility 法要素の応答特性

一般に理想的にモデル化された $M-\phi$ 関係は、軟化勾配を取ることはない。しかし、実際にはわずかながら負の勾配を有する $M-\phi$ 関係が存在する。本節では、このような場合に Flexibility 要素がどのような応答を示すかの概略を示す。

図-16 には、表-1 と同じ条件で、軟化勾配を初期剛性の -3.0% とした場合の柱の荷重-変位関係が示されている。各断面が軟化勾配を有する場合、基部の断面が軟化を始めると、他の断面は力の釣合いを維持するために除荷挙動を示す。

図-16 から明らかのように、断面に軟化勾配を用いるとブランチの勾配は塑性ヒンジ長に依存して大きく変化する。すなわち、軟化勾配を用いた場合は、塑性ヒンジ長を適切に与えないと、解析結果が断面の $M-\phi$ 履歴関係だけでなく構造物の荷重-変位関係にも影響を与えることになる。

(5) 剛性法要素と Flexibility 法要素の計算特性の比較

上記の通り、剛性法要素と Flexibility 要素では、計算手順や応答特性が異なるが、それらの相違が構造解析上の計算特性にどのような差異をもたらすかを把握するために、図-17 に示す各構造に対して計算時間の比較を行った。これまで同様、柱の高さとはりの長さは $2.4[m]$ である。

剛性法は構造・要素レベルでの収斂計算であるが、Flexibility 法は構造・要素・断面レベルでの収斂計算であるため、表-2 に示す計算条件を用いて同一のコンピュータで計算を行う形で比較を行った。解析に用いた断面履歴は、表-1 の条件を用いた。軟化勾配は 0 である。計算時間は、剛性マトリクスと、剛性方程式を解く際に用いるマトリクスを計算し終わった時点から、 200 ステップ分の荷重-変位関係を求めるまでの時間である。修正 Newton-

表-2 計算条件

収斂条件	1%
変位増分	0.01 [cm]
最大変位	2.00 [cm]
塑性ヒンジ領域	20.0 [cm]
修正 Newton-Raphson 法による収斂計算	

表-3 計算時間の比較 (()内は要素数)

	Flexibility 法	剛性法
1	1.00 (1)	3.05 (6)
2	2.05 (3)	8.04 (18)
3	7.06 (5)	43.50 (30)

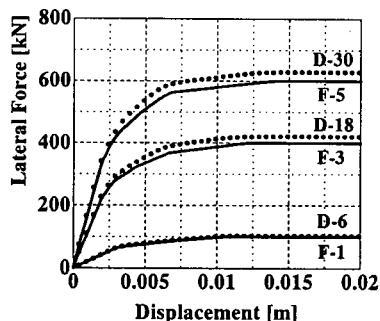


図-18 解析結果の比較

Raphson 法を用いることから、剛性マトリクスの再計算は行っていない。また、剛性法の要素分割は、Flexibility 要素の積分区間と一致させている。この分割数で、剛性法と Flexibility 法ではほぼ同じ解が得られる (誤差 5% 以内)。

表-3 に、 200 ステップの計算に要した時間を示す。数値は、F-1 の解析に要した時間を 1.00 とし

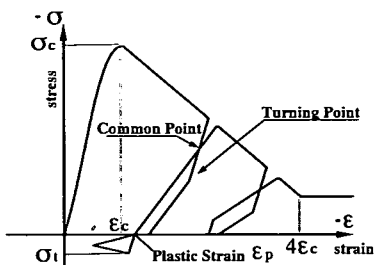


図-19 Darwin-Pecknold モデル

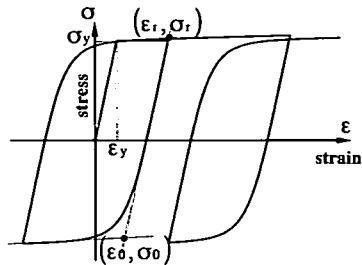


図-20 Menegotto-Pinto モデル

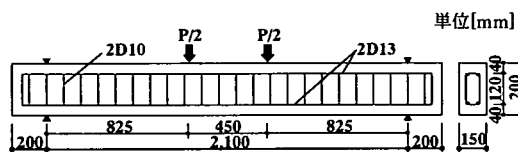


図-21 解析対象構造物 (本郷ら, 1993)

表-4 材料特性

コンクリート	圧縮強度 f'_c	39.2 [MPa]
	引張強度 f'_t	(2.7) [MPa]
	圧縮ひずみ ϵ_c	(0.0020)
	初期ヤング係数 E_0	(31.0) [GPa]
鉄筋	降伏点 σ_y	368.0 [MPa]
	ヤング係数 E_s	(200.0) [GPa]

た倍率である。ほぼ同じ精度の解 (図-18) を得るために必要な時間は、Flexibility 要素の方がかなり短く、その傾向は構造物が大きくなるほど顕著に表れている。ただしこの結果は、比較のために行列の計算をすべて定義どおりに行ったものであることから、自由度の影響が顕著に現れていると考えられる。行列計算・収斂計算によってこの結果が大きく変わることは当然であるが、Flexibility 法の自由度縮約の効果は、収斂計算が1ステップ多くなることを考えても比較的大きいと考えられる。

(6) Flexibility 法要素の適用範囲の考察^{10), 11)}

Flexibility 法要素は、自由度縮約の効果が比較的大きく、コンクリート構造に限らず剛性法が適用できる限り要素であれば適用可能である。また、コンクリート構造物では、ひび割れ発生後、即座に非線形性が現れ、変形が大きくなる場合には軟化現象が発生することもあることから、1要素でひずみの局所化が表現できる点は Flexibility 法をコンクリート構造に適用する際のきわだつ特徴である。

一方、剛性法に高次要素を適用すれば、剛性法の欠点大幅に改善されることも事実である。これらの改良された要素は、解の精度が良く、必要な精度に応じて要素数を減少することもできる。しかし、高次要素を用いる場合には、全体の自由度は必ずしも減少しない。また、一般の剛性法と比べてひずみの局所化についても良い近似を得られるが、定式化が複雑になることや、剛性マトリクスの組立てに多少の工夫が必要である。

また、剛性法高次要素は、要素内部に節点を配置

することができることから、振動解析で2次・3次のモードが無視できないような構造物などについては有効な手段であると考えられる。一方、Flexibility 法では、たとえば柱の高次モードを算定しようとする要素分割を剛性法のように細かく行わなければならない。そのような場合は必ずしも計算上の利点は生かされない。

このように剛性法、Flexibility 法それぞれの利点を生かして使用することが適当と考える。

以下では、Flexibility 法の利点が生かされる構造物に対して、その適用可能性を考察する。

5. Flexibility 法による静的構造解析

(1) 解析手法

Flexibility 法を構造物に適用する際には、断面の履歴特性が必要になる。本研究ではその履歴特性をFiber-Modelにより算出することとした。

Fiber-Model を適用する際の材料の1軸構成則として、コンクリートに対しては Darwin-Pecknold モデル¹²⁾、鉄筋に対しては Menegotto-Pinto モデル¹³⁾を用いることとした (図-19, 図-20)。

(2) Flexibility 法によるはりの解析

a) 解析対象および解析モデル

構造物に対する Flexibility 法の有用性を確認するために、はりの解析を行う。解析対象は本郷ら¹⁴⁾により行われた単純支持のはりに対する繰返し解析である。試験供試体は図-21 に示すようにスパン

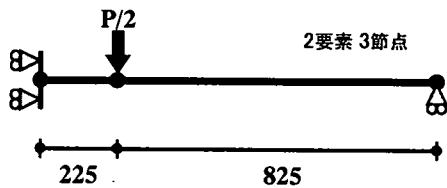


図-22 はりの解析モデル

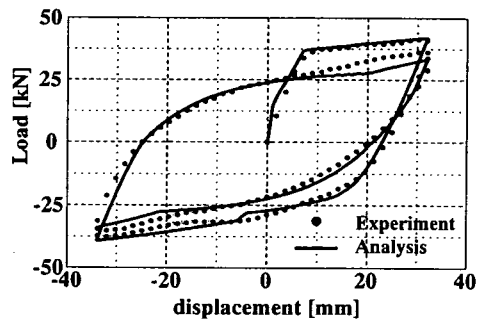


図-23 はりの荷重-変位関係

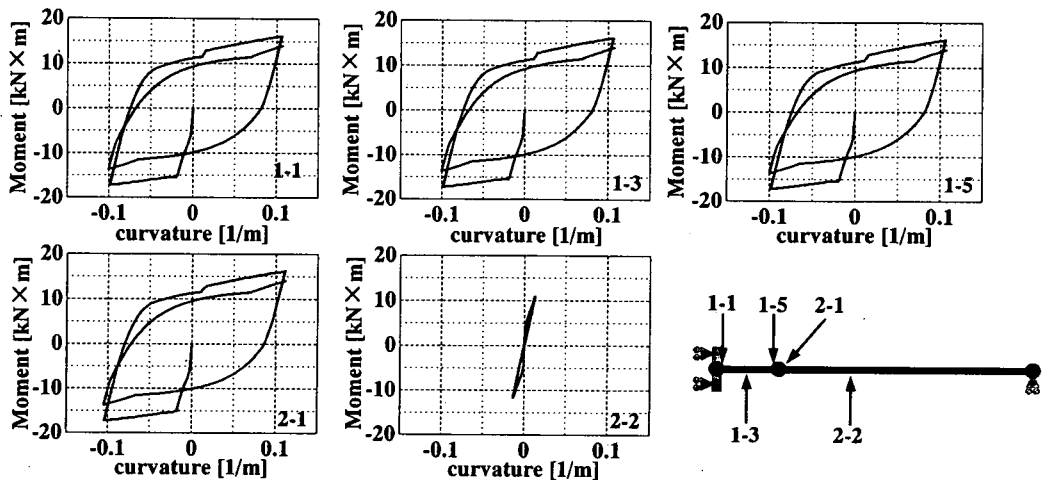


図-24 はりの代表的な積分点におけるモーメント-曲率関係

2,100[mm], せん断スパン比 5.16, 主鉄筋比 1.05[%] であり, 静的 1 方向荷重により得られた部材の降伏変位をもとに, 変位制御による同一振幅での正負交番繰返し荷重を行ったものである。

材料特性を表-4 に示す。なお, 表中()で示した数値は, 文献内に報告されていないために各種の資料^{9), 10)}により推定した値であることを表す。

b) 解析モデルおよび解析結果

はり要素での解析に Flexibility 法を用いる場合, 力の直線性が規定できる範囲においてはその区間を 1 要素とすることができる。図-21 に示すようなはりであれば, スパン中央の等モーメント区間と載荷点より支点側の区間との 2 つの要素のみを用いれば良い (図-22)。

先に述べたように, $M-\phi$ 関係の勾配が小さくなると, 塑性ヒンジ長の仮定が非常に重要になるが, 文献から得られる限られた情報から推定するために, その算定は, パラメータが明確で, かつ広

く認められている式が良いと考える。そこで本研究では, 塑性ヒンジ長さとして, Mattock の提案式¹⁶⁾を用いることとした。

$$L_{ep} = 0.5d + 0.05z \quad (12)$$

ここに d は有効高さ, z は塑性ヒンジの中心からモーメント反曲点までの長さである。

以上の条件に基づき解析を行い, 解析の精度を比較した。図-23 は実験値と解析値を比較したものである。解析値は全体に亘って妥当であり, 荷重-変位関係を比較的良好に推定可能であることが認められる。

図-24 は代表的な積分点のモーメント-曲率関係を示したものである。スパン中央部の要素では, モーメントが要素内で一定であることからすべての断面が同一の履歴を描く。一方, 支点側の要素では, モーメントが支点に近づくにつれて小さくなることから, 履歴ループも支点に向かって小さくなる傾向

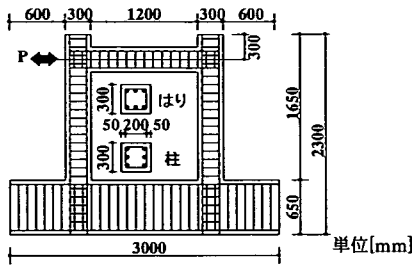


図-25 解析対象構造物 (藤掛ら, 1988)

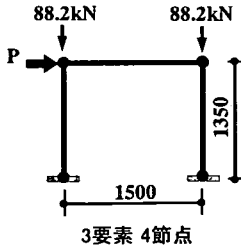


図-26 フレームの解析モデル

が認められる。これらの結果はモーメントの分布を考えれば常識的な結果であり、1要素でひずみの局所化を含めた非線形構造解析が可能であるということを示していると言える。

(3) Flexibility 法によるフレームの解析

a) 解析対象および解析モデル

静的繰返し荷重を受ける不静定次数の高い構造物に Flexibility 法を適用する。解析対象は、藤掛ら¹⁷⁾により行われたフレーム構造物である。試験供試体は図-25 に示すような寸法・諸元を有する1層フレームであり、柱の頭部に $\sigma = 0.98[\text{MPa}]$ の軸方向圧縮力を加えながら、はりの図心軸上で水平方向に繰返し荷重を行ったものである。

材料特性を表-5 に示す。前と同様、()内は推定値である。

b) 解析モデルおよび解析結果

前述した通り、Flexibility 法では力の直線性が成り立つ範囲ではその区間を1要素とすることができるので、図-25 に示す構造物ならば、柱2本とはりを各1要素、全体で3要素4節点にモデル化すれば良い(図-26)。しかし、本供試体のようなフレーム構造では、柱とはりの断面がある大きさを持って交差しているために、断面が非常に大きくなり、断面2次モーメントが極端に大きくなる。土木学会コンクリート標準示方書¹⁸⁾では、ハンチのない場合の剛域として柱(はり)の幅の1/4だけ内部に入った部分からを剛域とするように規定されている。

表-5 材料特性

コンクリート	圧縮強度 f'_c	26.5 [MPa]
	引張強度 f'_t	(2.0) [MPa]
	圧縮ひずみ ϵ_c	(0.0020)
	初期ヤング係数 E_0	(25.0) [GPa]
鉄筋	降伏点 σ_s	346.4 [MPa]
	ヤング係数 E_s	153.0 [GPa]

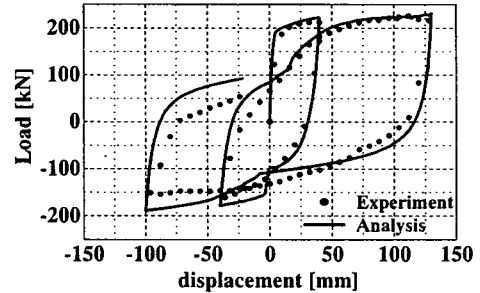


図-27 フレームの荷重-変位曲線

Flexibility 法では、各断面ごとに履歴則や剛性を変化させても1要素で解析ができることから、その区間の断面剛性を100倍にして解析を行った。なお、剛域の区間は75 [mm]である。

図-27 は実験値と解析値を比較した結果である。解析値は全体に亘ってほぼ実験値をとらえており、エネルギー吸収の程度もほぼ推定できていると認められる。また、実験値においては載荷方向により耐荷力が異なって現れている。これは、正の方向に荷重を加えたときは、はりに圧縮力が生じ、負の方向に与えたときは、はりに引張力が生じるために、載荷方向依存性が耐力に影響したものと考えられるが、その傾向も解析において現れている。

また解析において、負の耐力が若干高めに算定されている点については、コンクリートの構成則において、ひび割れが閉じた瞬間に急激に剛性が上昇するモデルを用いているからであると考えられる。引張から圧縮への移行に伴う履歴の設定により、これらの問題は解決できると思われるが、構成則の検討は本研究の目的を超えるものなので、割愛する。

図-28 はフレーム内の代表的な積分点のモーメント・曲率関係である。柱基部およびはり-柱接合部付近で断面が降伏していることが現れている。断面1-6、2-2は、いずれも剛域との接触点での履歴であるが、そこで非常に大きな曲率が発生し、柱、はり部材の中で局所化していることが分かる。これらは隅角部全体を回転させることになることから、この状態のフレームを模式的に示すと、図-29(a)のよ

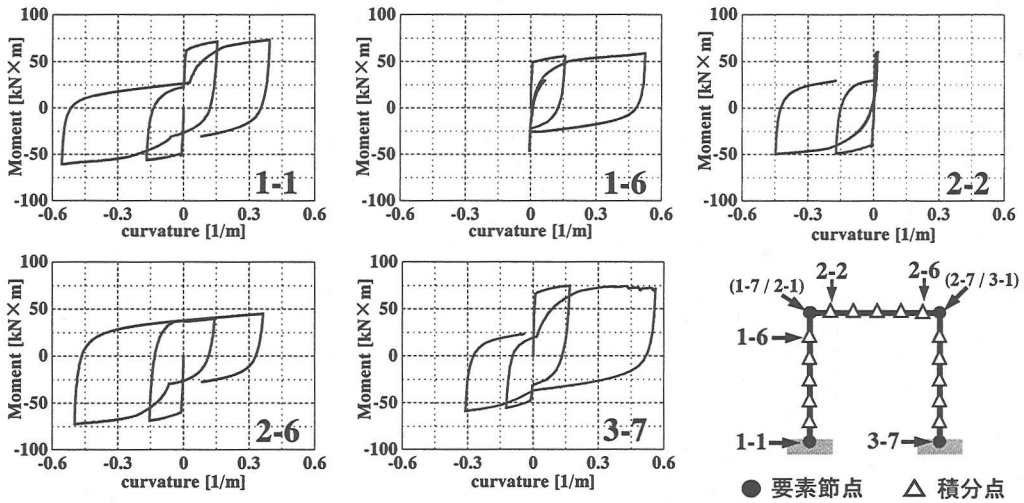
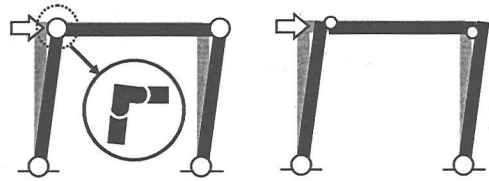


図-28 フレームの代表的な積分点におけるモーメント-曲率関係

うになる。すなわち、図-29(a)の円内に示した形で剛域全体がヒンジのように回転していることになる。しかし、藤掛らの実験では、図-29(b)のようなヒンジ形成、すなわち接合部においてははりの左上および右下部に偏った形のヒンジが形成されたような挙動を示したと報告されており、接合部全体がヒンジ化した本解析とは異なっている。ヒンジの形成に相違があるのにも関わらず、解析と実験が比較的一致した理由は、4ヶ所のヒンジ回転の変形への寄与のうち、制御点変位に大きく寄与するのが柱基部の2つの回転であったからである。すなわち、接合部のヒンジ回転は、制御点と距離が近いため、制御点変位に与える影響が少ないからであると考えられる。このように、はり-柱接合部のような広がりを持つ断面に対しては結果を慎重に吟味する必要があるといえる。



(a) 解析の塑性ヒンジ (b) 実験の塑性ヒンジ

図-29 塑性ヒンジ形成位置

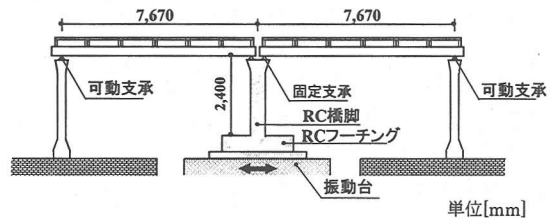


図-30 解析対象構造物（土木研究所,1993）

6. Flexibility 法による動的応答解析

(1) 解析手法

Flexibility 法のひとつの特徴は、剛性法と比較して非常に少ない自由度で解析が可能であるという点にある。このような特徴は、動的問題に対しては非常に有効な手段となり得ると考え、動的応答に対して Flexibility 法を適用することを考える。

解析は、4章と同様に Fiber-Model に構成則を適用した形で行っている。

(2) 解析対象および解析モデル

解析対象としたのは、旧建設省土木研究所で行われた振動台加振実験¹⁹⁾である。試験体は図-30に示す橋長 15.0[m]、けた総重量 393[kN](40.1[tf])の2径間単純けた橋であり、地震動は橋軸方向に入力されている。両端の橋脚部における可動支承の摩擦は非常に小さいので、上部構造物の慣性力はほとんどすべて RC 橋脚に伝わる構造になっている。

入力地震動を図-31に示す。最大加速度は実験 A

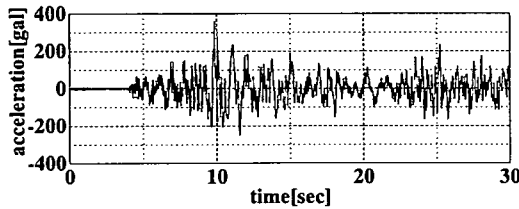
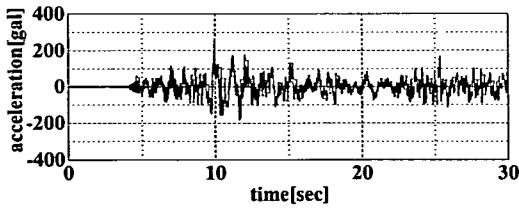


図-31 入力加速度波形 (上: 実験 A/下: 実験 B)

表-6 材料特性

コンクリート	圧縮強度 f'_c	29.7 (A)/28.6 (B) [MPa]
	引張強度 f'_t	(2.4) [MPa]
	圧縮ひずみ ϵ_c	(0.0020)
	初期ヤング率 E_0	(28.0) [GPa]
鉄筋	降伏点 σ_y	346.0 [MPa]
	ヤング係数 E_s	171.0 [GPa]

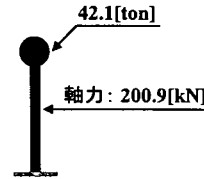


図-32 振動台実験の解析モデル

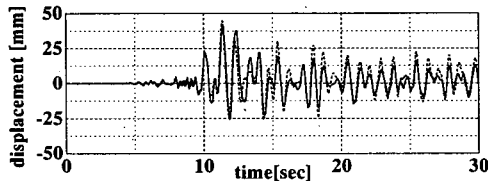
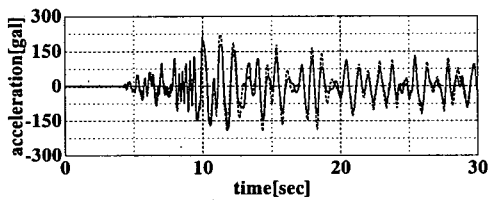


図-33 絶対加速度応答・相対変位応答 (実験 A)
(実線: 解析値/破線: 実験値)

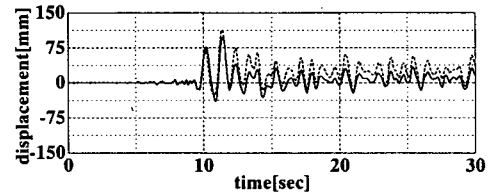
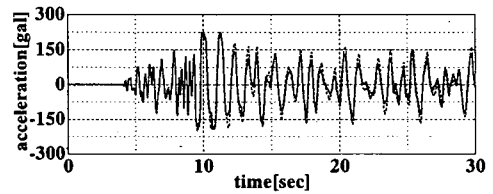


図-34 絶対加速度応答・相対変位応答 (実験 B)
(実線: 解析値/破線: 実験値)

が 275[gal], 実験 B が 360[gal]である。なお, この実験には実験 C (最大 402[gal]) が行われているが, 実験中に供試体と実験装置の衝突が起きているとのことから, 解析からは除外した。また表-6 に材料特性を示す。() 内は推定値である。

図-30 のような試験体に対する解析モデルは, 図-32 のような 1 本の柱になる。ただし, 上部構造慣性力の作用位置が明記されていないため, 側面図を参考に橋脚天端より 30cm を仮定している。

時刻歴応答解析には Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) を用いた。減衰は Raileigh 型を用いている。構造物のエネルギー吸収による履歴減衰を考慮し, 減衰定数は 1 次・2 次ともに 0.03 とした。

(3) 実験 A に対する解析結果

図-33 に, 実験 A に対する実験結果および解析結

果を示す。ただし, 図中に示したのは 60 秒間の解析のうち, 最初の 30 秒間である。絶対加速度応答・相対変位応答ともに, 最大応答値・固有周期を精度よくとらえており, 妥当な再現性を有していると認められる。

(4) 実験 B に対する解析結果

図-34 には, 実験 B に対する最初の 30 秒間における実験結果および解析結果が示されている。この図から明らかなように, 絶対加速度応答についてはほとんど問題なく再現できている。変位応答については, 固有周期・最大応答値はよく再現できているものの, 残留変形については 23 [mm] 生じた実験と比べ, 解析では 7 [mm] である。なお, 残留変形とは, 60 秒直前における応答波形の山と谷の値を平均した変位である。また, 全体的に振幅も小さめである

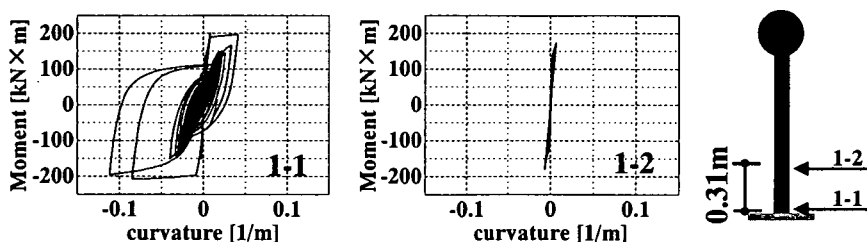


図-35 柱の代表的な積分点におけるモーメント-曲率関係 (実験 B)

が、これらは先のフレーム解析と同様、構成則の設定による履歴特性の再現性の問題であると考えられる。すなわち、11 秒までの比較的断面の履歴ループが小さい時刻においては良い一致が得られているが、その後、断面履歴が大きくなると、エネルギー吸収による履歴減衰が、応答に対して顕著な影響を与えるためであると考えられる。このことは残留変形が実験と解析で異なったことにもつながっていることと推測できる。

図-35 に、実験 B に対する代表的な断面でのモーメント-曲率関係を示す。基部における $M-\phi$ 履歴は応答中に非常に大きな曲率を生じているものの、最終的には残留曲率を発生していない。また、基部から 2 番目の積分点では、基部が降伏した後にはモーメントが上昇しないため、降伏域に入ることはない。これらは 1 要素の柱で行った解析であるが、部材に局所化が生じて、その局所化を適切に表現できていることを示すものである。

7. 結論

本研究では、鉄筋コンクリート構造物の解析に対する Flexibility 法の適用可能性を検討するために多角的な考察を行い、構造物の静的・動的解析への適用を試みた。本研究の結果得られた結論は以下の通りである。

- (1) 剛性法による解析を行う場合、曲率分布を 1 次式として規定することになるために、1 要素内での力の分布は必ずしも実際の内力分布とはならない。一方、Flexibility 法では力の分布を 1 次式として規定するため、1 要素内での内力分布に応じた曲率分布を導くことができる。
- (2) Flexibility 法では、要素内の断面履歴に異なった勾配が発生した場合、構造物の挙動としては積分点による依存は現れないが、断面履歴は塑性ヒンジ区間の大きさにより変化する。また、断面の履歴に負の勾配を用いた場合には、塑性ヒンジ長が構造全

体の解析結果に影響を与える。そのため、塑性ヒンジの長さを適切に評価することにより積分点を設定する必要がある。

(3) 力の分布を基礎とする Flexibility 法では、塑性ヒンジ部分の積分点を区間端部において代表させる必要がある。

(4) Flexibility 法では、内力分布が直線になるような場合、1 要素として解析が可能である。また、厳密な力の分布を規定しているため、少ない要素でも内力分布・変形を含めた構造解析を妥当な精度で行うことができる。

(5) はり要素として Flexibility 要素をとらえた場合、忠実に力の分布を表現してしまうため、はり-柱接合部のような線材において表現できない部分については、現象をとらえきれない場合がある点に注意をする必要がある。

謝辞：本研究を遂行するにあたり、東京大学の魚本健人先生、防衛大学の藤掛一典先生、ならびに旧建設省土木研究所の各研究グループにより実施され発表されたデータを引用させていただきました。ここに深甚なる謝意を表します。

参考文献

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書/V耐震設計編・同解説, 日本道路協会, 1996.
- 2) 六郷恵哲, 白井伸明, 内田裕市：コンクリートの破壊の数値解析の現状と課題, コンクリート工学, Vol.32, No.12, pp.5-14, 1994.
- 3) CEB: RC FRAMES UNDER EARTHQUAKE LOADING, Thomas Telford, pp.50-60, 1996.
- 4) Spacone, E., Ciampi, V. and Filippou, F.C.: "Mixed Formulation of Nonlinear Beam Finite Element," Computers & Sciences, Vol.58, pp.71-83, 1996.
- 5) 中野友裕, 田邊忠顕: Flexibility 法による RC 柱の繰り返し解析, コンクリート工学年次論文集, Vol.23, No.3, pp.25-30, 2001.6.

- 6) C.C.Hong, 中野友裕, 田邊忠顕 : Flexibility 法による RC 構造物の地震応答解析, コンクリート工学年次論文集, Vol.23, No.3, pp.1231-1235, 2001.6.
- 7) Takeda,T., Sozen,M.A. and Nielsen,N.N. : Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes, *J.of Structural Division*, ASCE, pp2557-2573, 1970.
- 8) Coleman,J. and Spacone,E. : "Localization Issues in Nonlinear Frame Elements," *Seminar on Post-Peak Behavior of RC Structures subjected to Seismic Loads*, pp.157-171, 1999.10.
- 9) 田邊忠顕, 檜貝勇, 梅原秀哲, 二羽淳一郎 : コンクリート構造, 朝倉書店, 1992.
- 10) H.C.マーチン, G.F.ケイリー : 有限要素法の基礎と応用, 鷺津久一郎, 山本善之共訳, 培風館, pp.119-151, 1979.4.
- 11) 鷺津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦 : 有限要素法ハンドブック / I 基礎編, 培風館, pp.363-405, 1981.9.
- 12) Darwin,D. and Pecknold,D.A. : "Analysis of Cyclic Loading of Plane R/C Structures," *Computers & Structures*, Vol.7, pp.137-147, 1977.
- 13) CEB : *RC ELEMENTS UNDER CYCLIC LOADING*, Thomas Telford, pp.58-69, 1996.
- 14) 本郷和徳, 矢島哲司, 魚本健人 : 正負交番繰返し曲げを受ける RC はりの累積消費エネルギー量の算定, コンクリート工学年次論文集, Vol.15, No.2, pp.395-400, 1993.
- 15) 岡田清, 伊藤和幸, 不破昭, 平澤征夫 : 鉄筋コンクリート工学, 鹿島出版会, 1997.3.
- 16) Mattock,A.H. : Rotational capacity of hinging regions in reinforced concrete beams, *ACI*, SP12, pp.143-180, 1965.
- 17) 藤掛一典, 大野友則, 西岡隆 : 鉄筋コンクリートラメンのエネルギー吸収容量に関する実験的研究, 土木学会論文集, No.390/V-8, pp.113-121, 1988.2.
- 18) 土木学会 : コンクリート標準示法書 / 設計編, 土木学会, 1996.3.
- 19) 建設省土木研究所 : 鉄筋コンクリート橋脚の地震時保有水平耐力照査法の開発に関する研究, 土木研究所報告 第190号, pp.160-182, 1993.9.

(2001.11.12 受付)

STUDY ON THE APPLICABILITY OF FLEXIBILITY METHOD TO THE NUMERICAL ANALYSIS OF RC STRUCTURES

Tomohiro NAKANO and Tada-aki TANABE

To investigate the applicability of flexibility method that is based on strict force distribution to concrete structures, analyses of RC elements under various cyclic loading were carried out and numerical simulations of concrete structures which reach large deformation states were performed by the method. As results of these analyses, it was shown that flexibility method can estimate the accurate moment and curvature distribution by just one element so long as force distribution is linear, which is an usual case in real elements, and that it is possible to estimate the post-peak behavior by consistent algorithm. Further, it was shown that flexibility method is applicable for both static and dynamic analyses.