

骨組要素を用いたセル構造材料のための 非線形マルチスケールモデリング

大植 健¹・ 斉木 功²・ 寺田賢二郎³・ 中島章典⁴

¹工修 川田テクノシステム(株) (〒116-0014 荒川区東日暮里 5-51-11)

²博(工) 宇都宮大学 工学部建設学科 (〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2)

³Ph.D. 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

⁴工博 宇都宮大学 工学部建設学科 (〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2)

セル構造体のような格子状微視構造を有する材料のための非線形均質化法の定式化を示す。従来の均質化法を連続体に適用すると、マクロおよびミクロの両スケールに対する連続体の境界値問題が導かれる。しかしながら、格子状微視構造は、その幾何学的特徴から、連続体ソリッド要素に比べ、骨組要素による離散化が効率的である。そこで、ミクロ問題に骨組要素を用いる障害となっていた、周期的ミクロ変位と仮定する骨組の変位場との不整合に対する解決策を示す。さらに、セル構造体の解析例により、本手法の妥当性、および計算効率における利点を示す。

Key Words : multi-scale modeling, bifurcation, homogenization method, non-convex potential, cellular materials

1. はじめに

今日の工業製品の高機能化、高性能化の背景には、材料そのものの特性の改善が少なからず寄与している。材料特性の改善は、主に異種材料の組み合わせにより行われ、これにより単一の材料では得られない優れた力学特性を材料に与えることが可能となっている。一方、木材や骨といった材料は、機能的に優れた天然の複合材料であり、これらの微視構造はハニカムパネルやフォーム材などの工学的に重要なセル構造体として人工的に応用されている。セル構造体は重量に比較して剛性は高いが、荷重を受ける方向によって強い異方性を示す、変形の大きさにより強い非線形性を示すなどの特徴を有している。さらに、圧縮を受ける場合、セルを構成する部材に座屈が生じ、材料特性が急激に変化するいわゆる材料不安定性を示すことが知られている。

セル構造体の平均 Young 率などの基本的な力学特性は Gibson and Ashby のモノグラフ¹⁾に詳しく調べられている。前述の部材座屈による材料不安定についても、個別のセルをはり-柱からなる周期構造系としてモデル化することにより、巧妙に解かれている。しかしながら、それらは個別のセルを構造系としてモデル化しているため、セル構造を微視構造に持つマクロ構造を微視構造の大変形、座屈、座屈後挙動を考慮して解析することは事実上不可能である。一方、複合材料の平均物性評価のための研究は数多く行われているが、セル構造体の

ような不安定挙動も含むような非線形問題に対する統一的な理論は完成されてはいない。これに対し、マルチスケール解法としての均質化法^{2),3)}は、マクロ構造の任意の点にミクロ構造を関連づけ、マクロ構造の点の変形とミクロ構造の力学応答の相互影響を考慮することができる。著者らは、この点に着目し、材料不安定とミクロ構造の不安定を結びつける幾何学的非線形を考慮した非線形マルチスケール法の開発を進めてきた^{4),5)}。

しかし、非線形マルチスケール解析においては、マクロ解析の1回の増分計算ごとに非線形ミクロ解析を行なう必要がある⁶⁾ため、ミクロ解析の計算効率の改善が課題となっていた。一方、ここで対象としているセル構造体のミクロ構造は、その幾何学的特徴から骨組要素による離散化が合理的である。そこで、著者らはミクロ構造に骨組要素を適用したセル構造体のためのマルチスケール解析の定式化を試みた。この際、周期性を仮定するミクロスケール変位と骨組要素における変位場の不整合に起因する問題点が見出されたが⁷⁾、ミクロ問題の解析自由度に一樣変位と周期変位との和であるミクロ構造の実変位を用いることで、上記の問題が解決されることを線形の範疇で示した⁸⁾。そこで本論文では、ミクロ構造に骨組要素を用いたマルチスケール解析を、非線形問題へ拡張するための定式化を行う。また、解析例として、いくつかのセル構造体に対し適当なマクロ変形を想定することで非線形ミクロ解析を行い、本手法の精度と効率、

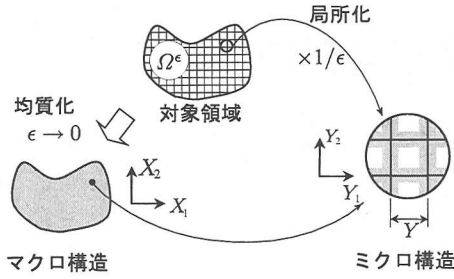


図-1 解析対象と微視構造

および非線形マルチスケール法への適用性を確認する。

2. 非凸均質化法の定式化

対象とする系のポテンシャルの凸性が失われる場合、解の唯一性が失われ、分岐が生じる。逆に、ここで取り扱っているようなセル構造体のマイクロ構造には分岐座屈が起こることが知られており、したがって、ポテンシャルの凸性は保証されない。非凸ポテンシャル問題に対する均質化法の適用と注意点については著者らの文献⁵⁾に詳細に記述されているため、本節では、同文献で用いられている Γ -収束論^{9),10)}を用いた定式化の概要を示す。

(1) 境界値問題の設定

図-1に示すように、非常に小さい ϵ によって規定される大きさ ϵY の微小な単位周期構造により、周期的に埋め尽くされた領域 Ω^ϵ を解析対象とする。このとき、対象領域は大きさ ϵY の並進変換に対して不変である。この構造全体の力学挙動は基本周期構造のみならず、その大きさを表すパラメータ ϵ にも影響を受ける。以下では、このパラメータ ϵ への依存性を領域 Ω^ϵ のように各変数に上付きの添え字 ϵ により明示することとする。

一般的な有限変形境界値問題

$$\nabla_X \cdot \mathbf{P}^\epsilon + \rho^\epsilon \mathbf{b} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{u}^\epsilon = \mathbf{u} \quad \text{on } \Gamma_u, \quad \mathbf{P}^{\epsilon T} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{t} \quad \text{on } \Gamma_\sigma \quad (2)$$

を考える。ここに、 \mathbf{P}^ϵ は第1 Piola-Kirchhoff 応力、 ρ は密度、 \mathbf{b} は単位質量当たりの物体力、 \mathbf{u} , \mathbf{t} は与えられる幾何学的、および力学的境界条件、 N は初期配置における単位外向き法線ベクトル、 Γ は領域 Ω^ϵ の境界、 ∇ は下付きの変数による勾配を取る演算子であり、 \mathbf{X} は物質座標を表す。次に、物体を構成する材料がひずみエネルギー \mathcal{W}^ϵ を持つと仮定すれば、構成関係は

$$\mathbf{P}^\epsilon = \frac{\partial \mathcal{W}^\epsilon}{\partial \mathbf{F}^\epsilon} \quad (3)$$

と表される。ここに、 \mathbf{F}^ϵ は変形勾配テンソルである。

均質化法の通常の手続きに従い、微視構造を観察するためのマイクロスケール $\mathbf{Y} = \mathbf{X}/\epsilon$ を導入する。すると、

領域 Ω^ϵ は \mathbf{X} の属する Ω と \mathbf{Y} の属する ϵY の2つの空間の直積として $\Omega^\epsilon = \Omega \times \epsilon Y$ と表すことができ、また、変位、応力といった場の変数は \mathbf{X} , \mathbf{Y} の2変数の関数と見なすことができる。

(2) 一般化収束論による定式化

前節で定義した境界値問題は、変分原理により汎関数

$$\Pi(\mathbf{v}^\epsilon) := \int_{\Omega^\epsilon} \mathcal{W}(\nabla_X \mathbf{v}^\epsilon) dv + \Pi_{\text{ext}}(\mathbf{v}^\epsilon) \quad (4)$$

の停留問題に変換される。ここに、 \mathbf{v} は任意の変位、 $\Pi_{\text{ext}}(\mathbf{v}^\epsilon)$ は外力ポテンシャルである。Müllerによる Γ -収束論^{9),10)}によれば、パラメータ ϵ を持つ非凸汎関数 $\Pi(\mathbf{v}^\epsilon)$ は $\epsilon \rightarrow 0$ において

$$\Pi^H(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathcal{W}^H(\nabla_X \mathbf{v}) dv \quad (5)$$

に Γ -収束する。ただし \mathcal{W}^H は

$$\mathcal{W}^H(\gamma) := \inf_N \inf_{\mathbf{v}^1} \langle \mathcal{W}(\gamma + \nabla_Y \mathbf{v}^1) \rangle_{NY} \quad (6)$$

により定義される均質化ひずみエネルギーである。ここに、 N はある正の整数、 \mathbf{v}^1 は NY における周期関数であり、 $\langle \bullet \rangle_{NY}$ は

$$\langle \bullet \rangle_{NY} := \frac{1}{|NY|} \int_{NY} \bullet dY \quad (7)$$

で定義される NY における体積平均を意味する。ここで注目すべきことは、非凸均質化法においてはマイクロスケール変位に相当する \mathbf{v}^1 の周期性が Y ではなく NY においてのみ要求されているところである。これは、マイクロ問題の対象となる代表体積要素として複数の単位周期構造を考えなくてはならないことを意味する。著者らはこの問題に対し、群論的分岐理論に基づくブロック対角化法を用いて単位周期構造の数を決定する方法を提案した^{4),5)}。

汎関数 (5) の停留条件より、マイクロ、マクロ、両スケールでの弱形式の釣合式

$$g(\mathbf{P}^0, \boldsymbol{\eta}^1) := \langle \mathbf{P}^0 : \nabla_Y \boldsymbol{\eta}^1 \rangle_{NY} = 0 \quad (8)$$

$$G(\bar{\mathbf{P}}, \boldsymbol{\eta}^0) := \int_{\Omega} \nabla_X \boldsymbol{\eta}^0 : \bar{\mathbf{P}} dv - \int_{\Omega} \rho^H \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 dv - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta}^0 ds = 0 \quad (9)$$

を得る。ここに、 $\boldsymbol{\eta}^0$ はマクロスケール変位の許容変分、 $\boldsymbol{\eta}^1$ は NY 周期性を有するマイクロスケール変位の許容変分、 \mathbf{u}^0 はマクロスケール変位、 \mathbf{u}^1 は NY 周期性を有するマイクロスケール変位、 \mathbf{P}^0 は全応力、 \mathbf{F}^0 は全変形勾配、 $\bar{\mathbf{P}}$ は平均応力、 ρ^H は平均密度であり、それぞれ

$$\mathbf{P}^0 := \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{F}^0} \quad (10)$$

$$\mathbf{F}^0 := \mathbf{1} + \nabla_X \mathbf{u}^0 + \nabla_Y \mathbf{u}^1 \quad (11)$$

$$\bar{\mathbf{P}} := \langle \mathbf{P}^0 \rangle_{NY}, \quad \rho^H := \langle \rho \rangle_{NY} \quad (12)$$

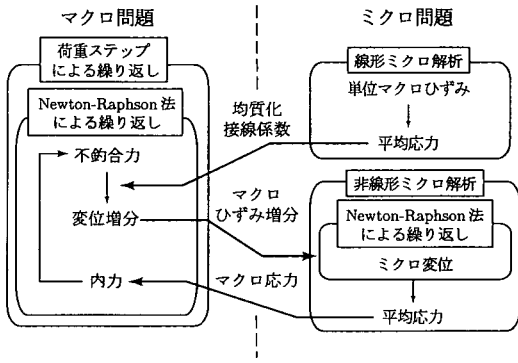


図-2 非線形マルチスケール解析のアルゴリズム

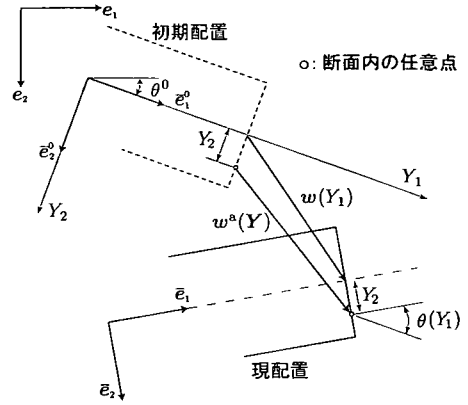


図-3 骨組要素の変位場

により定義した。また、このとき、代表体積要素内の全変形に起因する実変位 w は、式 (11) より一様変形に起因する成分と周期成分 u^1 の和として

$$w(X, Y) = \nabla_X u^0(X) \cdot Y + u^1(X, Y) \quad (13)$$

により与えられる^{6), 11)}。

3. 線形化と解析アルゴリズム

マイクロ、マクロスケール釣合式 (8), (9) のような非線形方程式を数値的に解く場合、何らかの線形化を行う必要がある。ミクロスケール問題において、一般的な Newton タイプの線形化を考えれば

$$g(P^0, \eta^1, \Delta u^1) := g(P^0, \eta^1) + Dg(P^0, \eta^1) \cdot \Delta u^1 = 0 \quad (14)$$

となる。ここに、 $D \bullet \cdot \Delta \phi$ は \bullet の ϕ に関する方向微分を表し、 $Dg \cdot \Delta u^1$ の具体形は

$$Dg(P^0, \eta^1) \cdot \Delta u^1 = \left\langle \nabla_Y \eta^1 : \left\{ \frac{\partial P^0}{\partial F^0} : (DF^0 \cdot \Delta u^1) \right\} \right\rangle_{NY} = \left\langle \nabla_Y \eta^1 : \mathcal{A} : \nabla_Y (\Delta u^1) \right\rangle_{NY} \quad (15)$$

である。ここに、 \mathcal{A} は

$$\mathcal{A} := \frac{\partial P^0}{\partial F^0} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial F^0 \partial F^0} \quad (16)$$

により定義される材料の接線係数テンソルである。

また非線形マルチスケール解析アルゴリズムは図-2に示すようになる。マクロ問題の構成関係はマイクロ問題により与えられ、また、マイクロ問題ではマクロ変形が荷重パラメタとしての役割をする。つまり、マクロ解析の繰り返し計算の中で生じるマクロ変形増分を、マイクロ解析における1ステップの荷重増分と見なすことで、マイクロ解析において繰り返し計算を行ない、マクロ、マイクロ問題の両者が収束するまで計算を行なう。ただし、本論文では、冒頭で述べたように、マクロ解析から得られるマクロ変形増分を仮定したマイクロ解析のみを行う。

4. 骨組要素によるマイクロ解析

均質化法の定式化より、元の問題はマクロ、マイクロの両スケールの問題に分割されるが、微視構造である代表体積要素において物理的に意味のある変形はあくまでも両スケールの変形の和として表される。このため、粒状体や薄肉要素のように要素内の一部の変形が拘束されるモデルをマイクロモデルだけに用いる場合、実際の物理現象との矛盾が生じることが報告されていた⁷⁾。この問題に対し、文献⁸⁾により、いわゆる周期的なマイクロ変位ではなく、マイクロ、マクロ両変形に起因する代表体積要素の実変位をマイクロ問題の定式化および解析に用いることで、線形マイクロ問題に任意の変位場を導入できることが示された。本節では、線形の範疇で示された骨組要素を用いたマイクロ問題を非線形問題へと適用する。

(1) 骨組の変位場の導入

本論文では、マクロ構造における変形、すなわちマイクロ構造の平均変形に関しては、何ら制限を設けない大変形理論を採用する。しかしながら、マイクロ構造が細長い部材から構成されるという幾何学的特徴から、非線形マイクロ問題を有限変位、微小ひずみ問題として取り扱う。骨組の有限変位、微小ひずみ問題の定式化にあたっては、広く用いられている剛体変位除去の手法¹²⁾を採用する。さらに、ここで導入するはりの変位場として図-3に示す Bernoulli-Euler のはり理論に基づく変位場を用いる。

全体系を規定する単位直交基底ベクトルの組 e_I を図-3に示すように定義する。はり断面と共に移動する単位直交基底ベクトルの組 \bar{e}_i を同図のように定義する。すると、はり断面の任意点の変位 w^a ははりの軸線上の点の変位 w および軸線の回転により

$$w^a(Y) = w(Y_1) + Y_2(\bar{e}_2 - \bar{e}_2^0) \quad (17)$$

と表される。ここに、 \bar{e}_i^0 は初期配置での基底ベクトル、

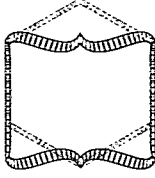


図-4 単位変形を受ける正六角形ハニカムの周期変位

\bar{e}_i は現配置での基底ベクトルである。

従来の剛体回転除去の手法に従い、要素と共に移動する局所座標系を規定する単位直交基底ベクトルの組 \bar{e}_i^0 を定義すれば、局所座標系での断面の微小回転角 $\bar{\theta}$ は

$$\bar{\theta} = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2^0 \quad (18)$$

と表される。本論文では、2 節点はり要素を用い、局所座標系は 2 節点を通る直線上に \bar{e}_i^0 を設定するいわゆる割線座標系を採用する。

(2) 実変位によるマイクロ問題の記述

図-4はソリッド要素により計算されたマクロ単位変形 $\{\bar{H}\} = \{0, -1, 0, 0\}$ に対する正六角形ハニカムのマイクロスケール周期変位 u^1 による変形である。ここに、 $\{\bar{H}\}$ は $\{\bar{H}\} := \{\bar{H}_{11}, \bar{H}_{22}, \bar{H}_{12}, \bar{H}_{21}\}$ なる平均変位勾配 $\bar{H} := \nabla_X u^0$ のベクトル表記である。この図より、通常の骨組構造ではありえない、軸直角方向の膨張が確認される。しかしながら、このような変形は骨組の変位場を導入することにより完全に拘束され、骨組要素では表現できない。したがって、周期変位 u^1 に骨組要素の変位場を導入すると、上記の問題から、正しい結果を導かないことが著者ら⁷⁾により示されている。これに対して、式(13)で定義される物理的に意味のある実変位 w により、骨組要素の変位場との不整合の問題を解決できることが示されている⁸⁾。そこで、本節では、非線形マイクロスケール問題を実変位により定式化し、その具体的な解法を説明する。

実変位 w をマイクロスケール問題の自由度とすれば、線形化マイクロスケール釣合式(14)は

$$\langle \nabla_Y \eta^1 : \mathcal{A} : \nabla_Y (\Delta w) \rangle_{NY} = -g(P^0, \eta^1) \quad (19)$$

と表される。このとき、 u^1 に関する NY 周期性は

$$w(Y + r_i) - w(Y) = \{\nabla_X u^0\} \cdot r_i \quad (20)$$

により表される。ここに、 r_i ($i = 1, 2, 3$) はマイクロ構造の基本並進ベクトルである。以下、非線形マイクロ解析におけるマクロ変形を増加させた後の最初のイタレーション、もしくは接線均質化係数を得るための線形計算を考える。周期境界を考慮せずに式(19)を離散化すると

$$\begin{pmatrix} K_{ii} & K_{io} & K_{id} \\ K_{oi} & K_{oo} & K_{od} \\ K_{di} & K_{do} & K_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_o \\ w_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_i \\ 0 \\ t_d \end{pmatrix} \quad (21)$$

となる。ここに、 w などの下付の添字はそれぞれ

- i: ミクロスケール Y の原点が属する境界上の節点
- o: 境界上にない通常の節点
- d: i を r_i だけ並進させた点にある境界上の節点

を意味し、また、 t は本来、無限周期構造である解析領域から周期境界を有する代表体積要素を切り出すことに対する形式的な節点力であり、ここでは未定であるが、境界節点での釣合より

$$t_i + t_d = 0 \quad (22)$$

を満たす。ここで、 w における u^1 の NY 周期性を表す式(20)を離散式で

$$d = w_d - w_i \quad (23)$$

と表せば、マイクロ離散釣合式(21)は

$$\begin{pmatrix} K_a & K_{io} + K_{do} \\ K_{oi} + K_{od} & K_{oo} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_o \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (K_{id} + K_{dd}) \cdot d \\ K_{od} \cdot d \end{pmatrix} \quad (24)$$

となり、 w について解くことができるようになる。ここに、 $K_a = K_{ii} + K_{id} + K_{di} + K_{dd}$ である。上式により求められた w から節点力 t が得られる。

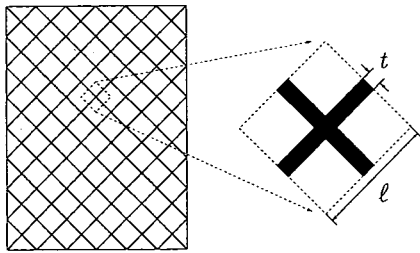
本論文で対象としている Bernoulli-Euler はり要素などのせん断変形が拘束されるようなモデルでは、せん断および軸直角方向のひずみは常にゼロであるが、せん断力はゼロとはならないため、平均応力の算出には注意が必要である。そこで、骨組により離散化されたマイクロ自己釣合問題から平均応力を求める場合、平均応力を表面力の面積分により表しておくと同都合である⁸⁾。ここでも微小ひずみ問題と同様に、有限ひずみ問題における各種応力の平均を表面力により表しておく。例えば、平均第1 Piola-Kirchhoff 応力 \bar{P} は

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \langle P^0 \rangle_{NY} = \left\langle \{ \nabla_Y \cdot (P^0 \otimes Y) \}^T \right\rangle_{NY} \\ &= \int_{\partial NY} \{ N \cdot (P^0 \otimes Y) \}^T ds \\ &= \int_{\partial NY} Y \otimes t ds \end{aligned} \quad (25)$$

となる。式(25)に基づいた平均応力の算定では、マイクロ領域の境界面での表面力が既知であればよいので、前述の変位場を用いたモデルにおいても不都合なく適用することができる。実際の数値解析においては、式(25)は節点力の総和

$$\bar{P} = \sum_{i \in \mathcal{N}_b} Y_i \otimes t_i \quad (26)$$

により求められる。ここに、 \mathcal{N}_b は代表体積要素の境界上の節点番号の集合、 Y_i 、 t_i は節点 i の物質座標および節点力である。



(a) 正方形セル構造体 (b) 単位周期構造

図-5 解析対象：正方形セル構造体

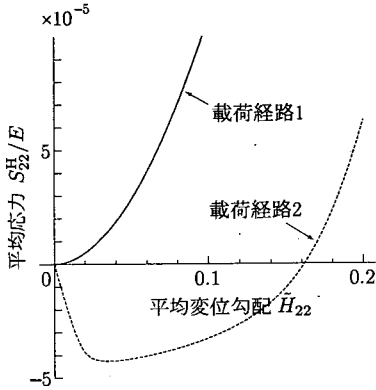


図-6 正方形セル構造体の平均応力-平均変位勾配関係

5. 非線形ミクロスケール解析例

前節までに示した、非凸ポテンシャルの有限変位問題の非線形ミクロ解析の定式化の精度の確認として、以下に述べるセル構造体のミクロ構造に対して仮定したマクロ変形を平均変位勾配 $\{\bar{\mathbf{H}}\} = f\{\bar{H}_{11}, \bar{H}_{22}, \bar{H}_{12}, \bar{H}_{21}\}$ として与えることで非線形ミクロ解析のみを独立に行う。ここに、 f は荷重パラメタである。また、以下のすべての骨組要素を用いた解析例において、セルを構成する材料は Young 率 E の線形弾性体とした。

(1) 正方形セル構造体

図-5(a) に示す正方形が 45° 傾いたセル構造体のミクロスケール解析を行う。このときの代表体積要素は、図-5(b) に示す単位周期構造であり、セル壁厚さ t と長さ l との比を $t/l = 0.02$ とした。このようなセル構造体は、鋼製組立網¹³⁾ や地盤補強材¹⁴⁾ などに用いられている。また、正方形セル構造体は非常に強い異方性を有していることが知られており、かつ、軸と 45° の角度をなす方向においては、Poisson 比がほぼ 1 となる特徴的な性質を有している。この解析例では、上記のような既知の特徴的な性質と比較し、ミクロ構造を骨組要素とした非線形ミクロ解析の妥当性を定性的に検討する。

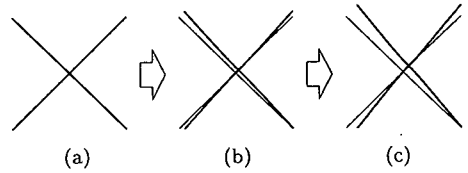


図-7 载荷経路1での変形

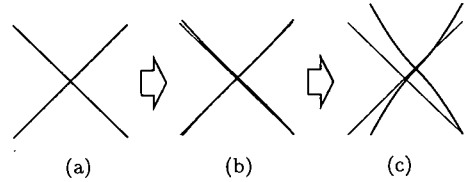
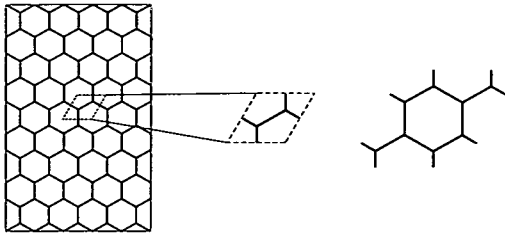


図-8 载荷経路2での変形

以下、平均変位勾配 $\bar{\mathbf{H}}$ が $\{\bar{\mathbf{H}}\} = f\{-1, 1, 0, 0\}$ および $\{\bar{\mathbf{H}}\} = f\{-1.25, 1, 0, 0\}$ で与えられる変形経路をそれぞれ载荷経路1および2として、解析結果を示す。それぞれの载荷経路での平均応力-平均変位勾配関係を、無次元化平均第2 Piola-Kirchhoff 応力 (以下 2nd P-K 応力とする) 成分 S_{22}^H/E および平均平均変位勾配成分 \bar{H}_{22} により図-6に示す。ここに、 E はセル壁を構成する材料の Young 率である。図中、実線が载荷経路1、破線が载荷経路2に対応する。

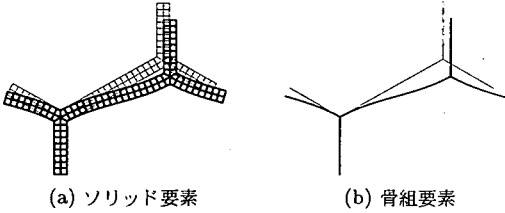
载荷経路1では、 $-\bar{H}_{11}/\bar{H}_{22} = 1$ であるため、このセル構造体の平均 Poisson 比が 1 に近いことを考慮すると、初期段階ではほぼ一軸応力状態とみなすことができる。そのため、大きな Poisson 比による拘束の影響は、顕著に現れていない。また、変形が大きくなるに従い、外力への抵抗がセル壁の曲げから軸変形に徐々に変化する幾何学的非線形性の影響が現れ、結果的に材料特性としては硬化する。この経路での変形を図-7に示す。同図において、(a) は初期状態、(b) は $\bar{H}_{22} = 0.05$ 、(c) は $\bar{H}_{22} = 0.1$ のときの変形である。図-7(b) から (c) の過程で、曲げから軸変形へ遷移する上記の変形特性が確認できる。

载荷経路2では、鉛直方向の伸び変形が水平方向の圧縮変形よりも小さいことから、大きな Poisson 比の影響により、鉛直方向に引っ張っているにもかかわらず、圧縮応力を生じている。しかしながら、変形が大きくなると、見かけ上の Poisson 比が減少することから、次第に引張応力が発生する。最終的には载荷経路1と同様に軸変形で引張に抵抗することから、応力の変位勾配に対する勾配は载荷経路1と同程度になっている。この経路での変形を図-8に示す。同図において、(a) は初期状態、(b) は応力-変位勾配関係の極小点付近の $\bar{H}_{22} = 0.02$ 、(c) は $\bar{H}_{22} = 0.2$ のときの変形である。



(a) 正六角形ハニカム (b) 単位周期構造 (c) 2×2 セル

図-9 解析対象：正六角形ハニカム



(a) ソリッド要素 (b) 骨組要素

図-10 ソリッド要素と骨組要素によるミクロ構造実変形

(2) 正六角形ハニカムによるソリッド要素との比較

ミクロ構造を骨組要素とした非線形ミクロ解析の定量的な精度の確認として、ソリッド要素で解析されている著者らによる非線形ミクロ解析^{5),15)}との比較を行なう。ただし、ここで示すソリッド要素の解析のみ、セルを構成する材料を 2nd P-K 応力と Green ひずみが Young 率 E , Poisson 比ゼロの微小ひずみ線形弾性体における応力とひずみの関係と同様の関係にある超弾性体とした。以下に示す例題では、実質的な変形は小さいのでひずみの 2 次項に起因する影響は無視できるほど小さい。

解析対象は、図-9(a)に示す正六角形平面ハニカムである。図-9(b)において、破線で囲まれた領域がこのセル構造体の単位周期構造となる。1 辺の長さ l に対する壁の厚さ h の比は $h/l = 0.11$ とした。ミクロ解析における代表体積要素としては、図-9(b)の単位周期構造を用いた。骨組およびソリッド要素でモデル化されたミクロ構造に、平均変位勾配が $\{\bar{H}\} = f\{3, -4, 0, 0\}$ となるような載荷経路にて比較を行った。要素分割数は、ソリッド要素では 4 節点 4 辺形要素を 108 要素、骨組要素では回転を含む 1 節点 3 自由度の 2 節点 Bernoulli-Euler はり要素を 48 要素としている。

平均変位勾配が $\{\bar{H}\} = \{0.075, -0.1, 0, 0\}$ のときの各モデルのミクロ構造の実変位を図-10に示す。この結果から、モデル化の違いによる変形の差異は見られなかった。次に、図-11にそれぞれのモデルによるミクロ解析から得られた平均応力-平均変位勾配関係を示す。同図にはソリッド要素の要素分割を、前述の 108 要素の 1 要素をそれぞれ 4 分割もしくは 9 分割した 432 要素、972 要素のモデルによる結果も示した。この図から得ら

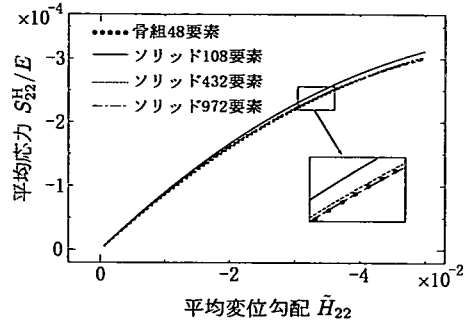


図-11 ソリッド要素と本解析の平均応力-平均変位勾配関係

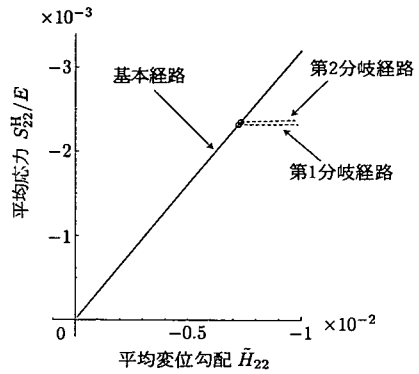


図-12 一軸圧縮における平均応力-平均変位勾配関係

れる平均応力-平均変位勾配関係においても、骨組モデルとソリッド要素で大きな差は見られなかったが、432 要素、972 要素と要素分割数が増加するほど骨組要素の解に漸近している。この傾向は、骨組構造をソリッド要素で解析する場合、せん断ロッキングのために剛性が過大評価されるという通常の有限要素法に見られる傾向と同じである。したがって、本手法によりミクロ問題を骨組要素で離散化することの利点は、通常の骨組構造解析における骨組要素の利点と同程度であると考えられる。

6. ミクロスケール分岐解析例

ここでは、前節で取り上げた正六角形ハニカムが一軸および等二軸圧縮を受ける際の分岐解析を行なう。ただし、代表体積要素に含まれる単位周期構造の数は、著者らの文献の結果に従い 2×2 とし、図-9(c)に示す 2×2 セルを代表体積要素とした。

(1) 正六角形ハニカムの一軸圧縮

ハニカムの一軸圧縮変形、すなわち平均変位勾配 \bar{H} が $\bar{H} = f\{0, -1, 0, 0\}$ で与えられる変形経路での解析結果を示す。

平均応力-平均変位勾配関係を、無次元化平均 2nd P-

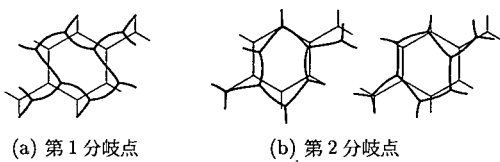


図-13 一軸圧縮における分岐モード

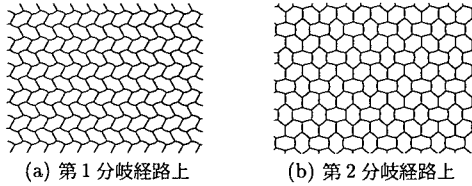


図-14 一軸圧縮における分岐経路上の変形

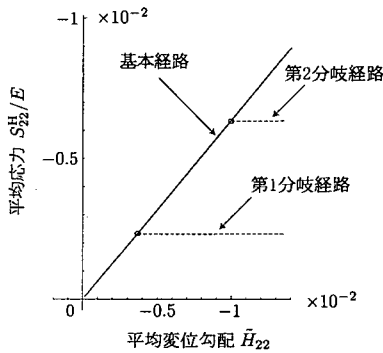


図-15 等二軸圧縮時における平均応力-平均変位勾配関係

K 応力成分 S_{22}^H/E および平均変位勾配成分 \bar{H}_{22} により図-12に示す。図中、実線が基本経路、破線は分岐経路、 \circ は分岐点である。第1の分岐点は単純分岐点であり、変位勾配成分 \bar{H}_{22} は0.0073であった。第2の分岐点は2重分岐点であり、変位勾配成分 \bar{H}_{22} は0.0080であった。基本経路においては、剛体変位モードを除き、第1分岐点までは負の固有値数がゼロ、その後、第2分岐点までは負の固有値数が1、第2分岐点以降は負の固有値数が3である。第1、第2分岐点における分岐モードをそれぞれ図-13(a) および (b) に示す。

第1分岐経路における負の固有値数はゼロであり、このときのマイクロ構造の変形を、周期境界条件を考慮し、繰り返し図形として図-14(a) に示す。この変形は Gibson and Ashby¹⁾の鉛直方向一軸圧縮の実験により観察された座屈後変形モードと一致している。第2分岐経路における負の固有値数は1であり、このときの変形を第1分岐経路と同様に図-14(b) に示す。この変形は、水平方向圧縮時の座屈後変形モードとして知られている。

(2) 正六角形ハニカムの等二軸圧縮

平均変位勾配 \bar{H} が $\{\bar{H}\} = f\{-1, -1, 0, 0\}$ で与えられる等二軸圧縮の解析を行った。正六角形ハニカム

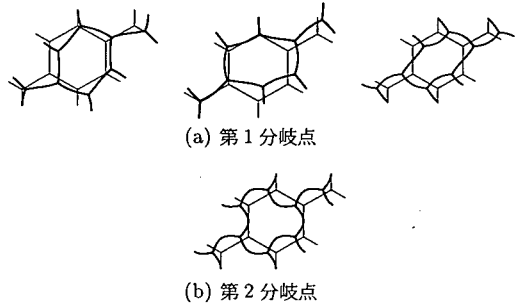


図-16 等二軸圧縮における分岐モード

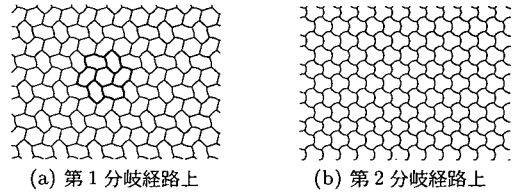


図-17 等二軸圧縮における分岐経路上の変形

の等二軸圧縮時のミクロスケール分岐挙動については、Ohno et al.¹⁶⁾に詳しく調べられている。

このときの平均応力-平均変位勾配関係を図-15に示す。第1の分岐点は3重分岐点であり、変位勾配成分 \bar{H}_{22} は0.0038、第2の分岐点は単純分岐点であり、変位勾配成分 \bar{H}_{22} は0.0100であった。基本経路においては、剛体変位モードを除き、第1分岐点までは負の固有値数がゼロ、その後、第2分岐点までは負の固有値数が3、第2分岐点以降は負の固有値数が4である。第1、第2分岐点における分岐モードをそれぞれ図-16(a) および (b) に示す。また、第1分岐経路上の変形を図-17(a)、第2分岐経路上の変形を図-17(b) に示す。図-17(a)の変形は Papka and Kyriakides¹⁷⁾により実験的に観察されたモードと一致する。このモードは、図中、太線で示した形状から、花状モードと呼ばれている。

7. おわりに

本論文では、より効率的な非線形マルチスケール解析手法の構築に向け、マクロ構造を大変形連続体、マイクロ構造を有限回転、微小ひずみの骨組構造としてモデル化する非線形ミクロスケール解析の定式化を行った。このために、線形問題において適用された骨組要素を用いたマイクロ解析手法を分岐問題を含む幾何学的非線形問題へ拡張した。次いで、解析例として正六角形ハニカムを用いて、従来のソリッド要素との比較を行い、本手法の精度を確認した。その結果、本手法による骨組マイクロ解析と従来のソリッド要素によるマイクロ解析の差異は、通常の構造解析における要素選択における差異と同程度であることが示された。この結果は、マイクロ問題が通常の境

界値問題と本質的に変わらないことから当然の結果であるが、ミクロ問題における周期性と骨組要素の変位場の不整合の問題を解決することによって初めて実証されるものである。以上から、本手法により格子状微視構造を有する構造物の非線形マルチスケール解析の効率を大幅に改善することが可能になった。本手法は、板状微視構造を有する構造物の3次元解析にも応用が可能である。今後は、本手法により、マクロ、ミクロの相互作用を考慮したマルチスケール解析手法を構築する。

謝辞：この研究は科学研究費補助金奨励研究(A)(課題番号 12750416 平成 12, 13 年度)の補助を得た。

参考文献

- 1) Gibson, L.J. and Ashby, M.F.: *Cellular solids 2nd ed.*, Cambridge University Press, 1997.
- 2) Bensoussan, A., Lions, J.L. and Papanicolaou, G.: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland Publishing Company, 1978.
- 3) Guedes, J.M. and Kikuchi, N.: Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.83, pp.143-198, 1990.
- 4) 齊木 功, 寺田賢二郎, 堀 宗朗, 池田清宏: 巨視的材料不安定性のマルチスケールモデリングにおける微視的構造周期のブロック対角化法による同定, *応用力学論文集*, Vol.3, pp.37-45, 2000.
- 5) Saiki, I., Terada, K., Ikeda, K. and Hori, M.: Appropriate number of unit cells in a representative volume element for microstructural bifurcation encountered in a multi-scale modeling, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.191, pp.2561-2585, 2002.
- 6) Terada, K. and Kikuchi, N.: A class of general algorithm for nonlinear multi-scale analyses for heterogeneous media, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.190, pp.5427-5464, 2001.
- 7) 大植 健, 齊木 功, 中島章典, 寺田賢二郎: 骨組要素を用いたセル構造体のマルチスケールモデリング, *応用力学論文集*, Vol.3, pp.185-192, 2000.
- 8) 齊木 功, 大植 健, 寺田賢二郎, 中島章典: 構造要素を用いたミクロモデルによるマルチスケールモデリングとそのセル構造体への適用, *日本計算工学会論文集*, Paper No.20020004, 2002.
- 9) Müller, S.: Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials, *Arch. rat. mech. anal.*, 99, pp.189-212, 1987.
- 10) Allaire, G.: *Mathematical approaches and methods*, in: Hornung, U. ed., *Homogenization and Porous Media*, Springer, New York, pp.225-250, 1996.
- 11) Terada, K., Saiki, I. and Matsui, K.: Kinematically correct formulation for two-scale finite deformation problems, *Transactions of JSCEs*, Vol.2, pp.53-62, 2000.
- 12) Iwakuma, T., Hasegawa, A., Nishino, F. and Kuranishi, S.: Principle and numerical check of a stiffness equation for plane frames, *Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng.*, Vol.4, pp.73s-83s, 1987.
- 13) 阿部和久, 小嶋里志, 深谷克幸: 鋼製組立網に用いられる金網の面外変形解析, *構造工学論文集*, Vol.47A, pp.147-154, 2001.
- 14) Peng, F.-L., Kotake, N., Tatsuoka, F., Hirakawa, D. and Tanaka, T.: Plane strain compression behaviour of geogrid-reinforced sand and its numerical analysis, *Soils and Foundations*, Vol.40, No.3, pp.55-74, 2000.
- 15) Saiki, I.: *Instability and pattern formation of materials with internal structures*, dissertation for the degree of doctor of engineering, Tohoku University, 2001.
- 16) Ohno, N., Okumura, D. and Noguchi H.: Microscopic symmetric bifurcation condition of cellular solids based on a homogenization theory of finite deformation, to appear in *J. Mech. Phys. Solids*.
- 17) Papka, S.D. and Kyriakides, S.: Biaxial crushing of honeycombs; —Part 1: Experiments, *Int. J. Solids Structures.*, Vol.36, pp.4367-4396, 1999.

(2002. 4. 22 受付)

NONLINEAR MULTI-SCALE MODELING WITH FRAME ELEMENTS FOR CELLULAR MATERIALS

Ken OOUE, Isao SAIKI, Kenjiro TERADA and Akinori NAKAJIMA

We propose a formulation of nonlinear homogenization for media with lattice-like periodic micro-structures. For continuum media, the conventional homogenization method leads classical boundary value problems of continuum for both micro- and macro-scales. However, it is rational to discretize lattice-like micro-structures such as cellular solids by frame elements. The main difficulty to apply the frame elements into micro-scale problems is due to inconsistency between kinematic field of the frame elements and the micro-scale displacement field. Some numerical examples of cellular solids show not only the feasibility but also the advantage on the computational efficiency of the present method.