

# 粒状体の塑性変形メカニズムに関する 微視力学的考察

石井建樹<sup>1</sup>・金子賢治<sup>2</sup>・岸野佑次<sup>3</sup>

<sup>1</sup>学生会員 工修 東北大学大学院 工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

<sup>2</sup>正会員 工博 八戸工業大学 工学部 環境建設工学科 (〒 031-8501 八戸市大字妙字大開 88-1)

<sup>3</sup>フェロー会員 工博 東北大学大学院 工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

砂に代表される地盤材料の変形特性として、従来の塑性論における仮定に反する増分非線形性の存在が指摘されるようになってきている。このような地盤材料の変形特性はその離散的で複雑な内部構造に支配される。本研究では、地盤材料の簡易モデルである粒状体の塑性変形のメカニズムを調べるために、粒状体の内部構造と塑性変形挙動との関連性について検討する。まず、3次元粒状要素法に基づく数値シミュレーションにより粒状体の塑性変形挙動を把握する。次に、粒状要素法の剛性行列に基づく固有変形解析を行い、塑性変形に関する変形モードについて検討する。さらに、粒状体の内部構造を定量的に評価し得る構造テンソルであるファブリックテンソルと塑性変形挙動との関連性を調べ、塑性変形のメカニズムについて微視力学的な見地から考察を行う。

**Key Words :** *plastic flow, incremental non-linearity, 3-dimensional Granular Element Method, eigenvalue analysis, fabric tensor*

## 1. はじめに

砂に代表される地盤材料は粒子の集合体であり、その力学挙動は離散的かつ不均質な内部構造に支配され、非常に複雑な振る舞いを見せる。実際、近年の実験技術の飛躍的な進歩により、中空ねじり試験<sup>1)</sup>などが比較的容易に行うことができるようになり、従来の弾塑性論では表現し得ない地盤材料の変形特性が指摘されるようになってきている<sup>2),3)</sup>。

特に、任意の応力状態から種々の方向へ応力増分を与える応力プローブ試験において、塑性流動方向が応力速度方向に依存し、一定方向にならない増分非線形性の存在が指摘されている。Pradel ら<sup>2)</sup>は、豊浦砂を用いた中空ねじり試験により応力プローブ試験を行い、応力主軸回転時には塑性ひずみ増分の増分非線形性が現れるという結論を導いた。Anandarajah ら<sup>3)</sup>はオタワ砂を用いて三軸圧縮試験装置による応力プローブ実験を行い、破壊線に近い応力状態においては古典的な塑性論が適用できると結論づけている一方で、破壊線から離れた応力状態では古典的な塑性論が適用できない場合もあることを指摘している。

このような実験結果を表現すべく、塑性ひずみ増分の応力増分方向依存性を表現することのできる連続体モデルとして、増分非線形モデル<sup>9)</sup>と従来の塑性論を拡張した増分線形モデル<sup>10)-13)</sup>が提案されている。しかしながら、現象論的に定式化されたこれらの連続体構成モデルは、物理的な意味合いが不明瞭なパラメータを数多く含み、極めて複雑なものとなっている。また、地盤材料の連続体モデルに関する議論に関しては、未だ

に関連・非関連型のモデルが入り乱れて提案されているように、古くから議論されながら未決着な議論が多い。これは、室内要素試験では、種々の载荷に対する精緻な応力制御が困難である上に、各実験に用いた供試体の個体差を取り除くことは不可能であり、再現性にも問題があるなど地盤材料の連続体構成モデルに関する議論を行うための実験データを取得するのが容易でないためである。

それに対して、著者らは離散体解析手法の1つである3次元粒状要素法<sup>4)</sup>を用いた数値実験により、3次元の構造を有する粒状供試体に対し種々の応力プローブ試験シミュレーションを行った<sup>4)-8)</sup>。その結果として、粒状体の塑性ひずみ増分は比較的非関連流動則に近いが一定方向に現れるわけではなく増分非線形性を示すこと、増分非線形性発生の主たる要因は応力主軸回転だけではなく、その離散的な性質から粒状体が潜在的に持ち得る変形特性であることを示した。任意の応力制御が容易であり微視力学的な考察が可能である数値実験により粒状材料の変形特性に関する種々の数値実験データを得ると共に、そのマイクロメカニズムを解明することは、合理的な連続体構成モデルを定式化する上で重要な役割を果たすものと考えられる。

本研究では、既往の研究<sup>4)</sup>で得られている粒状体の塑性変形挙動に対してその発現メカニズムの解明を目的とし、3次元粒状要素法に基づく数値シミュレーションを行い、構造テンソルおよび固有変形解析結果に基づき粒状体の塑性変形メカニズムについて詳細に考察を行う。特に、粒状体の微視的内部構造に着目し塑性ひずみ増分方向が非関連型になる理由や塑性ひずみ増

分の増分非線形性発現のメカニズムについて議論する。まず、応力プローブ試験シミュレーションにより粒状体の塑性変形挙動を把握し、粒状要素法の剛性行列に基づく固有変形解析<sup>4),14)</sup>を用いてそれらの変形モードについて論じる。その際に、既往の数値実験結果<sup>4)</sup>に加え、応力状態の違いが増分非線形性に与える影響についても検討する。さらに、粒状体の内部構造を定量的に評価する構造テンソル<sup>15)-17)</sup>とその他の力学的諸量の関連性を調べる。このような構造テンソルと塑性変形挙動との関連性を検討することにより、簡単には結びつきにくい応力ひずみ関係を内部構造を介し関連づけ、塑性変形メカニズムについて微視力学的な見地から考察する。

なお、本論文では、既往の数値実験<sup>4)</sup>の結果、増分非線形性発現に大きな相違が観察された真三軸応力状態<sup>1),22)</sup>の変形挙動について主に検討する。真三軸応力状態は、3つの主応力が全て異なる応力状態を意味していて、通常の3軸試験装置では再現することのできない応力状態であり、ここで得られる所見は一般的な応力状態における塑性変形挙動のメカニズムを解明する糸口となり得るものと考えられる。

## 2. 構造テンソルの定義と数値シミュレーションの概要

ここでは、数値シミュレーションの概要を述べると共に、微視的内部構造を評価するための2つの構造テンソルの定義について示す。3次元粒状要素法や固有変形解析については本論文では述べないが、これらの詳細は文献<sup>4)</sup>を参照されたい。

### (1) 構造テンソルの定義

砂のような粒状体における複雑な変形挙動は、その離散的で複雑な内部構造の力学挙動の反映である。そのため、粒状体の変形挙動を取り扱うには、その微視的な内部構造を評価し得る構造テンソルが不可欠である。

ファブリックテンソルは、粒子接触状態のような幾何学的な構造異方性を評価する構造テンソルであり、粒子接触点における単位法線ベクトルのダイアドの平均値として定義される。

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{2M} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (1)$$

ここに、 $M$  は領域内の総接触点数であり、 $\mathbf{n}_i$  は  $i$  番目の接触点における単位法線ベクトルである。式(1)で定義されるファブリックテンソルは、対角項の和が常に1となるように正規化されており、3つの主値がすべて1/3の場合には粒状体の内部構造は完全に等方的と見なすことができる。ファブリックテンソルをせん断载荷中に逐次算出することにより粒状体の幾何学的内部構造の異方的な発達を力学量として評価し、応力プローブ試験により得られる弾塑性ひずみ増分応答の発生メカニズムを微視力学的に考察することができる。

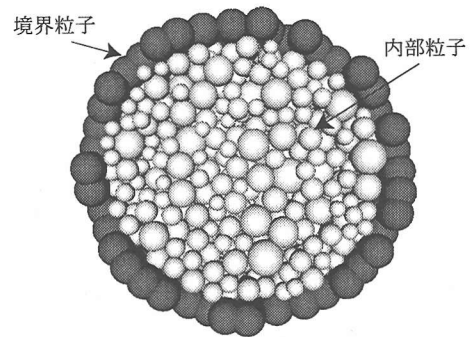


図-1 解析モデル

ところで、粒状体内部の接触は、力を伝える粒子接触とそうではない粒子接触の2つに分けることができる。力を伝える接触点は柱状構造<sup>18)</sup>や楕円微細構造体<sup>19),20)</sup>と称される特殊な構造を形成する。このような力学的な内部構造を評価する構造テンソルとして、コンタクトテンソル<sup>21)</sup>や弾性エネルギーテンソル<sup>17)</sup>等の重み付きの構造テンソルが提案されている。本研究では、粒状要素法へ容易に適用できる弾性エネルギーテンソルを用いて力学的内部構造を評価する。弾性エネルギーテンソルは、重みとして接触点に蓄えられる弾性エネルギーを用いた構造テンソルである。

$$\mathbf{f}^e = \frac{1}{V_0} \sum_{i=1}^{2M} \frac{1}{2} (P_n^2/k_n + P_t^2/k_t) \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (2)$$

ここで、 $P_n$ ,  $P_t$  は接触点における法線、接線方向の接触力、 $k_n$ ,  $k_t$  は接触点における仮想バネ要素の法線、接線方向バネ定数であり、 $V_0$  は対象領域における基準状態の体積である。弾性エネルギーテンソルの一次不変量は単位体積あたりに蓄えられる弾性エネルギーである。

本論文では、これらの特徴の異なる2つの構造テンソルを用いることで、粒状体の内部構造を粒子接触状態を示す幾何学的内部構造および粒子間接触力により形成される力学的内部構造に分類して考察する。

### (2) 解析モデルとせん断载荷シミュレーション

本論文で行った数値シミュレーションは、側圧一定の三軸圧縮試験および2種類の真三軸応力プローブ試験から成る一連の数値実験である。ここでは、応力プローブ試験に先だて行う側圧一定三軸圧縮試験シミュレーションについて示す。

解析に用いた粒状体モデルは図-1のような断面をもつ粒子数1698個のモデルとした。このモデルは粒径0.2mm~0.6mmの球形粒子1340個を球状領域にランダムに配置し、境界粒子358個で覆うことで作成した。なお、球形の粒子集合体モデルを用いた理由は、境界制

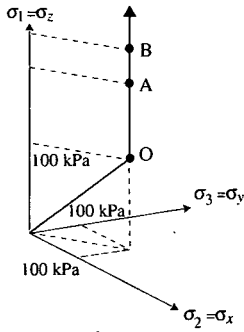


図-2 圧縮載荷経路

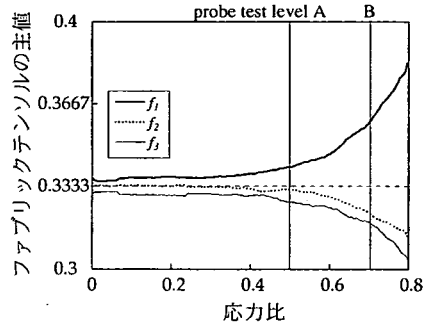


図-4 ファブリックテンソルの主値変化

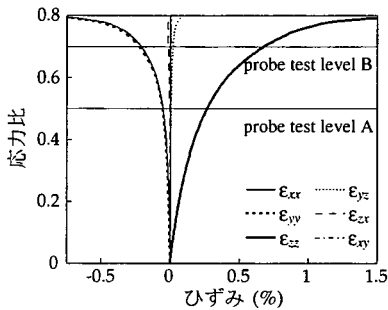


図-3 載荷曲線

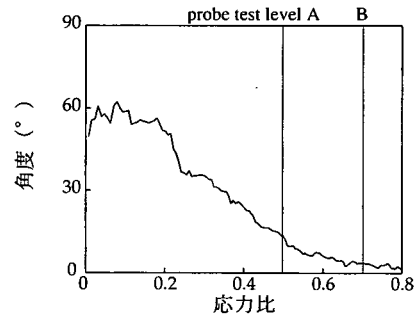


図-5 ファブリックテンソルの最大主方向

御における幾何学的な異方性を極力排除するためである。また、以下の解析では、接触点における法線および接線方向バネ定数をそれぞれ 200kN/m、140kN/m とし、粒子間摩擦角を 15° とした。これらのパラメータは豊浦砂の中空ねじり試験<sup>2)</sup>にフィッティングした解析結果<sup>8)</sup>を参考に定めている。

せん断載荷シミュレーションの載荷経路を図-2 に示す。解析モデルを 100kPa となるように等方圧縮し初期状態 (図中点 O) を作成した後、応力制御による側圧一定三軸圧縮試験を行う。なお、初期状態の空隙率は 0.375 であり、非常に密詰めめの供試体である。三軸圧縮試験より得られた載荷曲線を図-3 に示す。縦軸の応力比は偏差応力のノルム/平均応力を表す。図中、せん断ひずみ成分は、垂直ひずみ成分と比して極めて小さいため、応力とひずみの主軸はほぼ一致しているとみなすことができる。応力プローブ試験は、このようなせん断載荷履歴を有する供試体に対して、応力比 0.5 (試験点 A) および 0.7 (試験点 B) の 2 つの試験点において行う (図-3)。

図-4 は、せん断載荷に伴うファブリックテンソルの主値変化を示した図である。初期等方応力状態点 O において、各主値はほぼ 1/3 程度で等しく幾何学的内部構造はほぼ等方的であるが、載荷が進むにつれて内部構造が異方的に発達することが確認される。応力比が 0.4 を越える頃から徐々に幾何学的構造異方性が発達し

始め、特に、応力比が 0.6 付近から急激に異方性が発達する。また、側圧方向に関するファブリックテンソルの 2 つの主値は、側圧が等方的であるにもかかわらず等しい値を示さない。これは、微視的内部構造の初期状態における異方性、いわゆる固有異方性が若干存在している影響であると考えられる。

図-5 には、最大主応力軸とファブリックテンソルの最大主方向とのなす角を示す。図中、初期等方応力状態における固有異方性によるファブリックテンソルの最大主方向 (ここでは、最大主応力軸とのなす角 50° 付近) から、せん断載荷に伴い最大主応力軸とのなす角は 1~4° 程度まで近づいている。応力比 0.2 付近までは、ファブリックテンソルの最大主方向が最大主応力軸に近づく様子は認められない。しかし、応力比 0.2~0.6 までの間に最大主応力軸に近づき、応力比 0.6 付近で最大主応力軸とファブリックテンソルの最大主方向がほぼ一致すると構造異方性が急激に発達することが確認される。

次に、弾性エネルギーテンソルの主値変化を図-6 に示す。同図より、初期等方応力状態において 3 つの主値は等しい値を示し、粒子接触の配向構造よりも等方的であることが確認される。また、弾性エネルギーテンソルでは、ファブリックテンソルと比べて載荷初期段階から異方性が発達する。すなわち、幾何学的構造異方性が未発達な載荷段階においても、接触力伝達に関

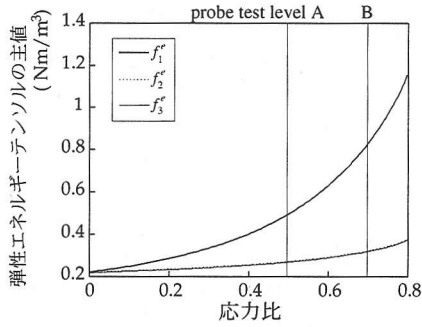


図-6 弾性エネルギーテンソルの主値変化

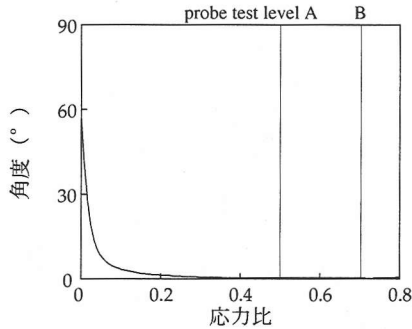


図-7 弾性エネルギーテンソルの最大主方向

する力学的構造異方性は発達し、供試体に作用する外力に抵抗する構造骨格が着実に形成されることを意味する。

図-7には、最大主応力軸と弾性エネルギーテンソルの最大主方向とのなす角を示す。弾性エネルギーテンソルにおいてはごく初期の段階を除き、最大主方向と最大主応力軸とのなす角がほぼ一致する。このことは、幾何学的構造異方性が発達していなくとも、接触力の伝達は整然とした力学的構造異方性の発達を伴って行われることを示している。

### (3) 応力プローブ試験の概要

応力プローブ試験は、任意の応力状態におかれた材料の応力増分とひずみ増分との関係を調べ、増分型の連続体構成モデルの考察を行うための一連の試験である。ある応力状態点から種々の方向に大きさ一定の応力増分による載荷・除荷を行い、応答として得られるひずみ増分を評価する。載荷時に生じたひずみ増分のうち、除荷の過程において回復するひずみを弾性ひずみ増分、非回復ひずみを塑性ひずみ増分と見なす。

図-8に真三軸応力プローブ試験の概念図を示す。真三軸応力プローブ試験は主応力空間内の2つの面で行う。2つのプローブ面は、任意の試験点A周りの局所座標空間を定める主応力空間内の直交基底ベクトル

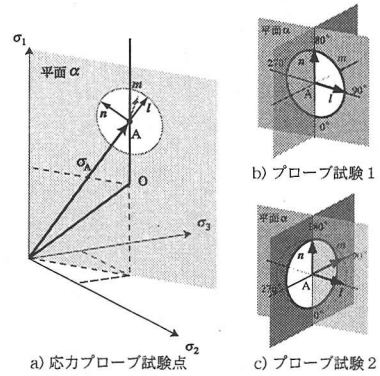


図-8 応力プローブ試験概念図

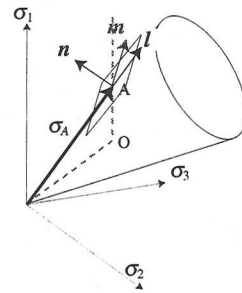


図-9 局所座標基底の概念

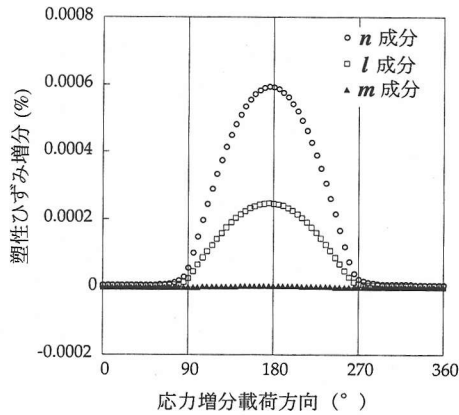
$(l, m, n)_A$  によって特徴づけられる。これらの基底ベクトルは、試験点Aの応力 $\sigma_A$ および初期等方応力状態の基準点Oの応力 $\sigma_O$ で表現される。

$$l = \frac{\sigma_A}{|\sigma_A|}, \quad n = \frac{\sigma_A - \sigma_O - \{(\sigma_A - \sigma_O) \cdot l\}l}{|\sigma_A - \sigma_O - \{(\sigma_A - \sigma_O) \cdot l\}l|},$$

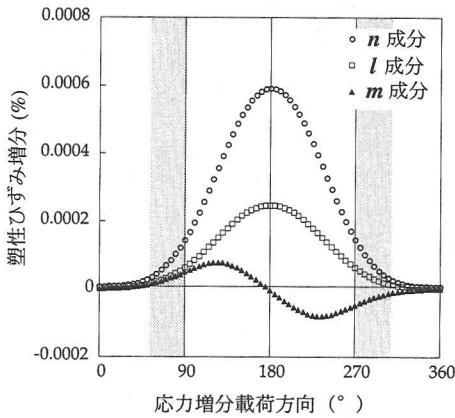
$$m = n \times l$$

試験点Aにおける局所座標系を定める直交基底ベクトル $(l, m, n)_A$ は、図-9のような降伏曲面を仮定すると、 $l$ が現在の応力の方向、 $n$ が降伏曲面の外向き法線方向( $n = \bar{n}$ )、 $m$ が降伏曲面の接線方向を定める単位ベクトルと見なすことができる。

プローブ試験1は $l, n$ を含む面内の応力プローブ試験である(図-8b)。 $-n$ 方向を $0^\circ$ 、 $l$ 方向を $90^\circ$ とし、 $5^\circ$ 間隔72方向への載荷・除荷を行う。プローブ試験1では、各応力増分に対して側圧は常に等方的である。一方、プローブ試験2は $m, n$ を含む面内の応力プローブ試験である(図-8c)。 $-n$ 方向を $0^\circ$ 、 $m$ 方向を $90^\circ$ とし、 $5^\circ$ 間隔72方向への載荷・除荷を行う。プローブ試験2では、側圧に主応力差を生じ、三軸圧縮試験とは異なるせん断を生じさせる試験である。以上直交する2種類の面における応力プローブ試験を通して、応力主軸非回転時の粒状体の真三軸応力状態における増分弾塑性挙動の考察を行う。なお、増分型の構成関係を

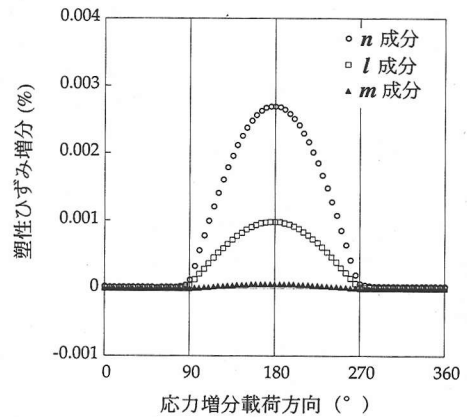


a) プローブ試験 1

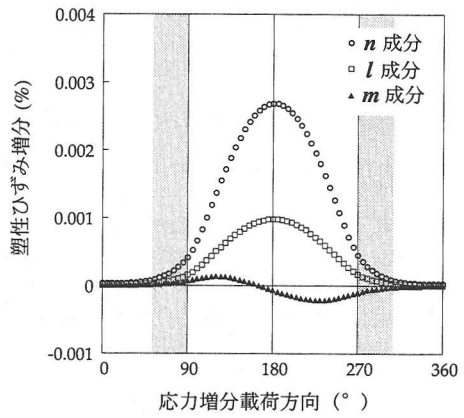


b) プローブ試験 2

図-10 塑性ひずみ増分 (試験点 A)



a) プローブ試験 1



b) プローブ試験 2

図-11 塑性ひずみ増分 (試験点 B)

検討する上では応力増分の大きさを慎重に定めるべきであるが、本研究の応力プローブ試験においては、予備的な解析<sup>4)</sup>で調べた適正な応力増分の大きさ 0.1kPa を設定している。

### 3. 粒状体の塑性変形応答

ここでは、真三軸応力プローブ試験の結果得られる塑性ひずみ増分応答を示し、数値実験結果を整理する。また、塑性ひずみ増分応答に対してせん断レベルの違いが与える影響について検討する。

#### (1) 塑性ひずみ増分応答

試験点 A, B における応力プローブ試験シミュレーションにより得られた塑性ひずみ増分を  $(l, m, n)_{A, B}$  方向成分に分解する。いま、応力主軸は全体座標系の座標軸と常に等しいので、全体座標系においても  $(l, m, n)_{A, B}$  方向を定義することができる。図-10, 11 は、縦軸に塑性ひずみ増分の各成分、横軸に応力増分の方

向を示した図である。横軸の応力増分方向はそれぞれ図-8b, 8c に示した方向に一致している。つまり、各試験における 180° 方向を降伏曲面の外向き法線方向  $\bar{n}$  と見なすことができ、古典的塑性論の降伏基準に従うとすれば 90°- 270° を境として塑性と弾性とが分けられるはずである。

図-10, 11 において、2 種類の応力プローブ試験結果に明確な差が観察される。プローブ試験 1 では、ほぼ 90° ~ 270° の間で塑性ひずみ増分が生じていて塑性論の降伏基準が成立すると見なすことができる。また、 $l$  方向成分の塑性ひずみ増分も非零であることから、関連流動則ではなく非関連流動則に類似した応答を示すことが窺える。ちなみに、これらの塑性流動方向  $\bar{m}$  は、降伏曲面外向き法線  $n = \bar{n}$  方向とのなす角が試験点 A では約 20°、試験点 B では約 22° 程度である。さらに、 $m$  方向成分の塑性ひずみ増分はほぼ 0 であり、プローブ試験 1 においては、塑性ひずみ増分の増分非線形性はほとんど現れない。

一方、プローブ試験 2 では、 $m$  方向成分の塑性ひず

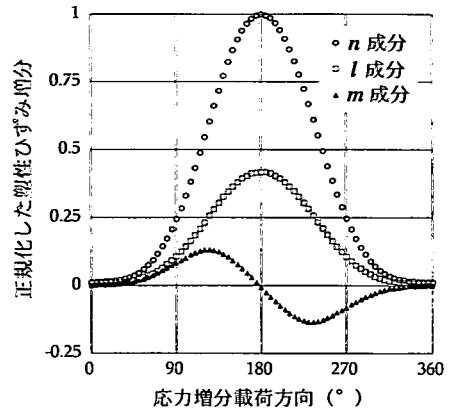
み増分において応力増分方向依存性が認められ、塑性ひずみ増分応答が明らかに増分非線形性を示す。また、同図において、塑性ひずみ増分を生じる応力増分方向は、プローブ試験1ではほぼ90°~270°間であるのに対して、プローブ試験2ではほぼ60°~300°の間で塑性ひずみ増分が生じている。つまり、粒状体においては古典的塑性論の降伏曲面が単純には適用できないことを示している。降伏曲面の概念を用いるとするならば、古典的塑性論の降伏曲面が適用できるのは  $l-n$  面内においてのみであり、 $m-n$  面内では尖り点が存在するようなモデルとなるべきことを示唆している。これらの現象は側圧に主応力差が発生し、載荷履歴において未経験のせん断が生じたことに起因する現象であると考えられる。なお、このような塑性ひずみ増分応答は、応力増分方向依存性を表現し得る線形モデル<sup>10),12)</sup>でも完全には表現できない非線形性の強い変形特性であることが確認されている<sup>4)</sup>。

## (2) 増分非線形性に対するせん断レベルの影響

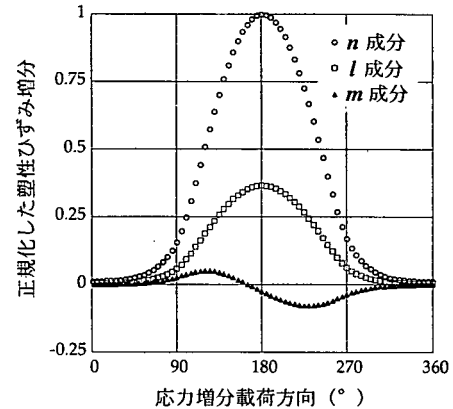
Anandarajah らは、三軸圧縮試験装置を用いた応力プローブ試験により、せん断レベルの違いによって地盤材料の塑性変形挙動が異なると指摘している<sup>3)</sup>。応力プローブシミュレーション結果によれば、三軸圧縮試験と同様に側圧を等方的に保つプローブ試験1の載荷に対しては、応力状態に関係なく従来型の塑性論をおおよそ適用できるという結果が得られた(図-10, 11)。以下には、プローブ試験2の載荷に関して、せん断レベルの違いが与える増分非線形性への影響を検討する。増分非線形性は、塑性ひずみ増分の  $m$  方向成分に応力増分方向依存性を生じることで発現する。そこで、各試験点での塑性ひずみ増分における  $m$  方向成分の寄与率を検討するために、塑性ひずみ増分を正規化する(図-12)。同図の縦軸は、図-10, 11の結果を方向成分の最大値が1となるように正規化した塑性ひずみ増分である。图中、塑性変形における  $m$  方向成分の寄与率に変化が生じていることが認められる。正規化した塑性ひずみ増分の  $m$  方向成分のピーク値が試験点Aよりも試験点Bでは小さくなっている。すなわち、応力のピークにより近い試験点Bでは、プローブ試験2の結果、発現する増分非線形性は試験点Aの場合よりも弱くなるのがわかる。また、図-12において、古典的塑性論では表現し得ない90°以下および270°以上の応力増分に対応する塑性ひずみ増分の各成分値が、試験点Aよりも試験点Bでは小さくなることも確認できる。つまり、古典的塑性論の降伏基準が適用できない塑性ひずみ増分を生じるような塑性変形は、応力ピークへ近づくに伴い粒状体の塑性変形挙動に占める寄与率が小さくなるものと考えられる。

## (3) 固有変形解析による変形モードの考察

粒状要素法では、シミュレーション試験における各ステップの粒子データから容易に増分型の全体剛性関



a) 試験点A (応力比0.5)



b) 試験点B (応力比0.7)

図-12 応力状態と増分非線形性

係式を得ることができる。

$$F = K^* U \quad (3)$$

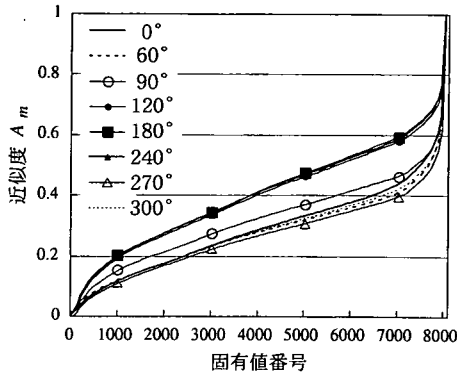
ここに、 $U$  は各要素の移動量と領域の変形を並べた変形に関わる増分ベクトル(変形増分ベクトル)であり、 $K^*$  は  $U$  に対応する粒状体の全体剛性マトリクスである。なお、全体剛性マトリクスの次数は1340個の内部粒子が各々6、境界が6の計8046である。

この全体剛性マトリクス  $K^*$  に対して固有値解析を行い、各固有ベクトル  $U_n$  を  $|U_n| = 1$  となるように正規化しておけば、固有ベクトルの直交性より、任意の変形増分ベクトル  $U$  は固有変形モードの線形結合として表される。

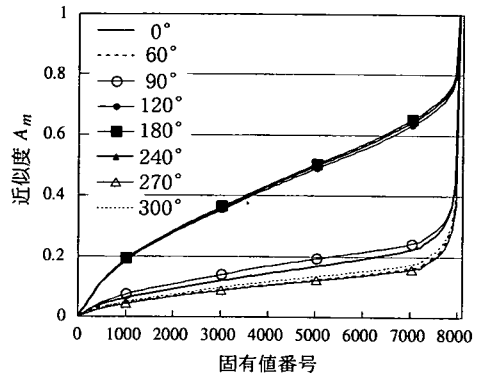
$$U = \sum_{n=1}^N a_n U_n \quad (4)$$

次に、式(4)の右辺  $m$  項 ( $m \leq N$ ) までの線形結合  $U^m$  による変形増分ベクトル  $U$  の近似度  $A_m$  を次式で定義する。

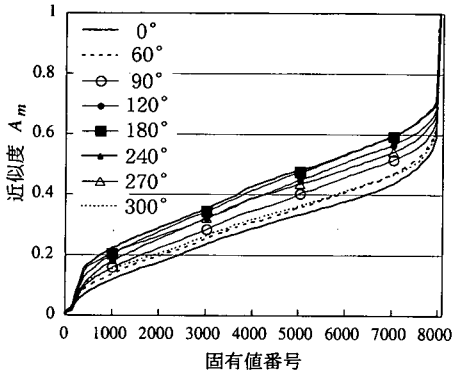
$$A_m = |U^m|/|U| \quad (5)$$



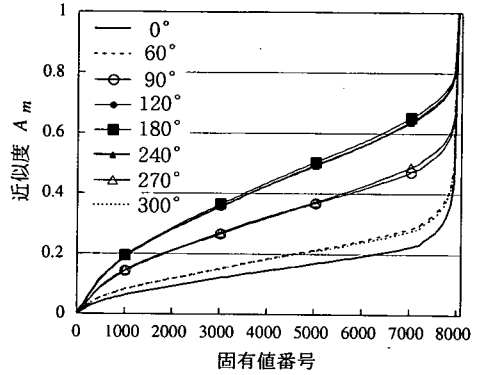
a) プローブ試験 1



a) プローブ試験 1



b) プローブ試験 2



b) プローブ試験 2

図-13 変形モード (試験点 A)

図-14 変形モード (試験点 B)

ここに,

$$U^m = \sum_{n=1}^m a_n U_n \quad (6)$$

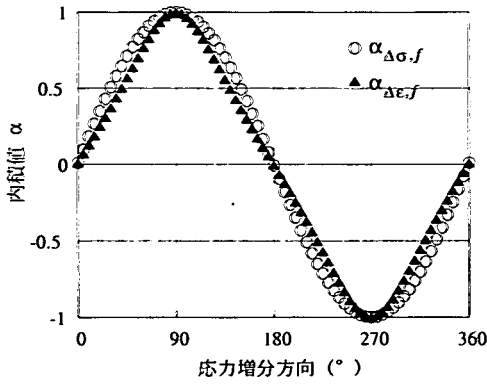
である。1つの試験点から得られる固有ベクトルの組み合わせは1組のみであり、近似度  $A_m$  を応力プローブ試験結果と組み合わせることで、各試験点での増分弾塑性挙動の変形モードを知ることができる。

図-13 および図-14 は、試験点 A, B における2種類の応力プローブ試験より得られた変形増分  $U$  に対する近似度  $A_m$  を示した図である。図中、横軸の固有値番号は固有値の小さい順に並べた番号であり、凡例に示す角度はプローブ試験における応力増分方向である。これらの図において、両試験点ともにほぼ同様の傾向が得られている。試験点 A および B では固有ベクトルの組み合わせが異なるため、両試験点間での変形モードの等価性については議論することはできないが、両試験点ともにプローブ試験 1 と 2 とでは非常に似通った明らかな差異が観察される。

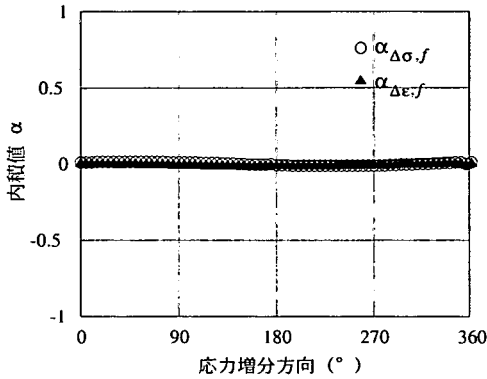
まず、古典的な非関連流動則に従うような塑性ひずみ増分応答が得られたプローブ試験 1 では、粒状体の変形挙動が2つのモードに大別されている。1つは塑性ひずみを生じる塑性変形のモードであり、もう1つ

は塑性ひずみ増分を生じない弾性変形の変形モードである。特に、塑性変形のモードは応力増分方向によらずほぼ同一のモードであり、古典的な流動則で表現される塑性変形はある特定の1変形挙動であることが確かめられる。つまり、粒状体では、载荷履歴に伴い固有の変形モードが唯一つ卓越し、履歴と同様のせん断载荷を受ける場合、その固有の変形モードに沿った塑性変形が生じると考えられる。

一方、増分非線形性を示す塑性ひずみ増分応答が得られたプローブ試験 2 では、塑性ひずみ増分を生じる载荷においても载荷方向の違いによって現れる変形モードが分割され、プローブ試験 1 の結果では観察されない変形モードが確認される。塑性ひずみ増分を生じない  $0^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $300^\circ$  方向や、 $120^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $240^\circ$  方向の古典的塑性論における降伏曲面外方向への载荷では、プローブ試験 1, 2 の両試験を通じてほぼ同傾向の近似度  $A_m$  が得られている。しかし、プローブ試験 2 では、 $90^\circ$ ,  $270^\circ$  の試験結果において明らかに他の载荷方向の結果と異なる塑性変形のモードが確認される。つまり、プローブ試験 2 では、プローブ試験 1 で観察される塑性変形モードとそれとは異なる塑性変形モードが混在している。



a) プローブ試験 1



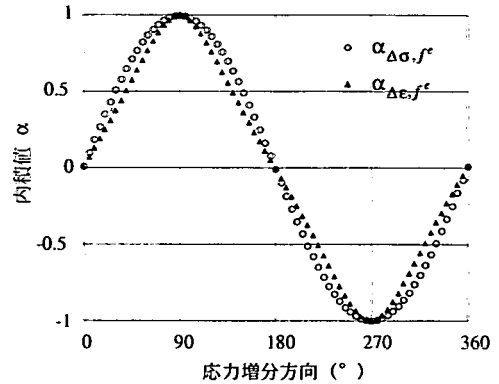
b) プローブ試験 2

図-15 ファブリックテンソルとの内積値 (初期状態)

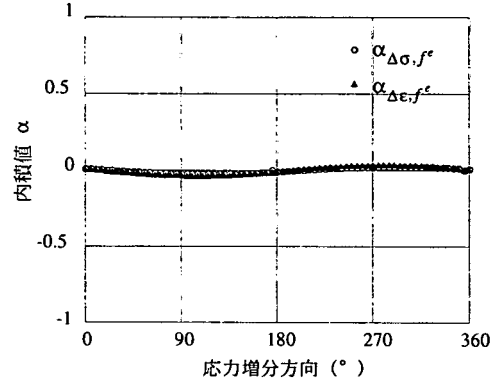
以上のような粒状体の変形モードの傾向は、解析モデルの違いによらず確認される<sup>4)</sup>。すなわち、粒状体の塑性変形においては、古典的塑性論で表現可能な塑性変形と表現不可能な塑性変形の2つの異なる変形が複合的に生じ、塑性ひずみ増分が増分非線形性のような複雑な変形挙動を示すと考えられる。さらに、図-12と併せて考えれば、古典的塑性論では表現し得ない塑性変形は、応力がピークに近づくにつれて全塑性変形挙動に対する寄与率が低下する塑性変形挙動であることがわかる。これは、せん断載荷が進むにつれてある種の変形モードが発達・卓越し、塑性変形において支配的になるためであると推測される。以下、ここで示した2つの塑性変形のメカニズムについて検討し、「塑性流動方向が非関連流動則に類似すること」および「粒状体の塑性変形において増分非線形性が発現すること」を中心に構造テンソルを用いて粒状体の塑性変形メカニズムについて考察する。

#### 4. 粒状体の2つの塑性変形モード

これまでの結果から、粒状体の塑性変形挙動は、古典的塑性論の仮定に合致する塑性変形モードと、古典



a) プローブ試験 1



b) プローブ試験 2

図-16 弾性エネルギーテンソルとの内積値 (初期状態)

的塑性論では説明できない塑性変形モードの2つの変形挙動から成ることが確かめられた。2つの変形モードのうち、前者は三軸圧縮の過程で卓越する線形的な変形モードであり、以下これを増分線形モードと呼ぶこととする。また、後者は応力増分方向に応じて生じる付加的な塑性変形モードであり、以下増分非線形モードと呼ぶ。ここでは、応力プローブ試験により得られた変形挙動を構造テンソルと照らし合わせることで、これら2つの塑性変形モードについて論じる。なお、各テンソル量同士の関連性を調べるための指標として、次の内積値を考慮する。

$$\alpha_{a,b} = \frac{(a,b)}{\|a\|\|b\|} \quad (7)$$

ここに、 $(a,b)$ はテンソル量 $a,b$ の内積であり、 $\|a\| = \sqrt{(a,a)}$ である。

図-10, 11に示すような塑性変形挙動は、試験点における応力状態もしくは内部構造を反映した応答の結果であると考えられる。図-15, 16に、初期等方応力状態点Oにおけるファブリックテンソルと応力増分、ひずみ増分との内積値、弾性エネルギーテンソルと応力増分、ひずみ増分との内積値をそれぞれ図示する。図



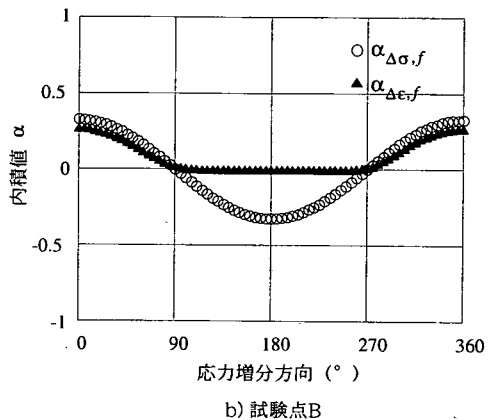
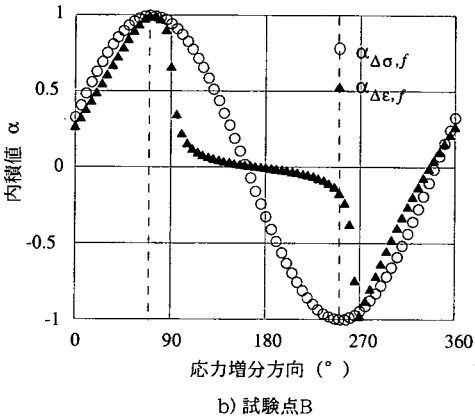
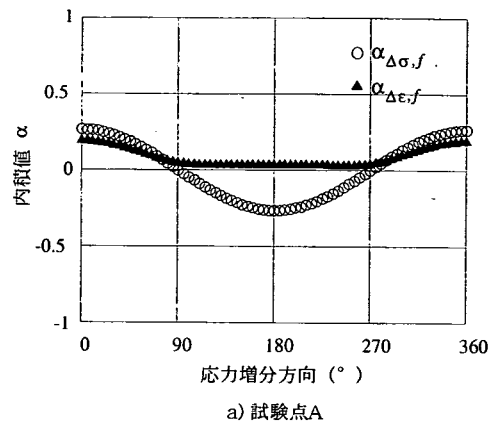
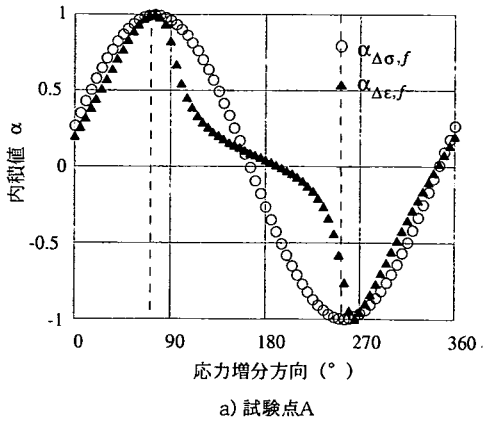


図-17 ファブリックテンソルとの内積値（プローブ試験1）

図-18 ファブリックテンソルとの内積値（プローブ試験2）

中、横軸はそれぞれ図-8b, 8cに示した応力増分方向である。したがって、180°方向は図-9ような降伏曲面の外向き法線方向  $\bar{n}$  であり、図-15a, 16aにおいては、90°方向が各試験点における応力の方向  $l$  と常に一致している。これらの図において、塑性ひずみ増分がほとんど生じない初期等方応力状態点  $O$  での各構造テンソルとひずみ増分テンソルの内積値は、応力増分テンソルとの内積値に追従する傾向が得られている。初期等方応力状態では、正規化された構造テンソルはほぼ単位テンソルであるので構造テンソルと応力増分との内積値が  $\text{tr} \Delta \sigma / |\Delta \sigma|$  となる。したがって、プローブ試験1において構造テンソルと応力との内積値がほぼ正弦挙動を示し、プローブ試験2ではほぼ0である。以下、せん断荷が進むと対応する内積値がどのように変化していくのか検討する。

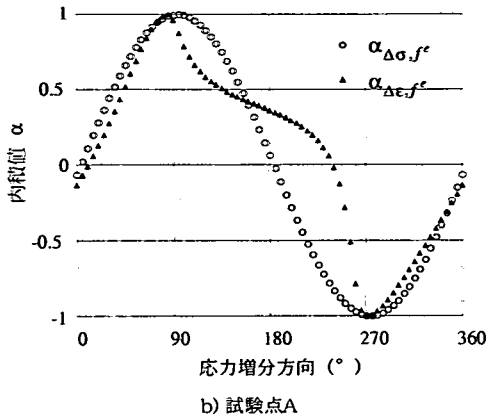
### (1) 増分線形モード

まず、古典的塑性論に合致する塑性変形挙動が得られた増分線形モードに関して検討する。図-17に試験点A, Bにおけるプローブ試験1で得られたひずみ増分・応力増分とファブリックテンソルとの内積値をそ

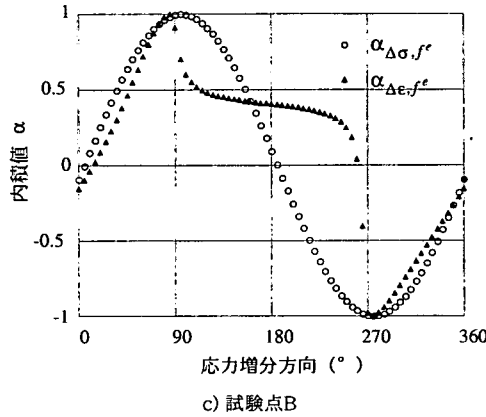
れぞれ示す。せん断荷が進み試験点Aに至ると、塑性ひずみ増分を生じる90°~270°間でファブリックテンソルとひずみ増分の内積値が応力増分との内積値の挙動から逸脱するようになる。さらに、試験点Bでは、90°~270°間のファブリックテンソルとひずみ増分の内積値は完全に応力増分との内積値から逸脱し、0に近づいている。

ここで、プローブ試験1では、試験点A, Bともに主として古典的非関連流動則で表現可能な塑性ひずみ増分が生じ、塑性ひずみ増分応答における試験点間の相違は塑性ひずみ増分の大きさのみである。したがって、図-17における試験点A, Bでの結果の違いは、全ひずみ増分の中で塑性ひずみ増分が占める割合の差異によるものと考えられる。したがって、古典的塑性論で表現されるような塑性ひずみ増分は、ファブリックテンソルに直交すると考えられる。

図-18に試験点A, Bにおけるプローブ試験2で得られた塑性ひずみ増分・応力増分とファブリックテンソルとの内積値をそれぞれ示す。プローブ試験1の場合と同様に、90°~270°間のファブリックテンソルとひずみ増分の内積値が応力増分との内積値から逸脱し0に

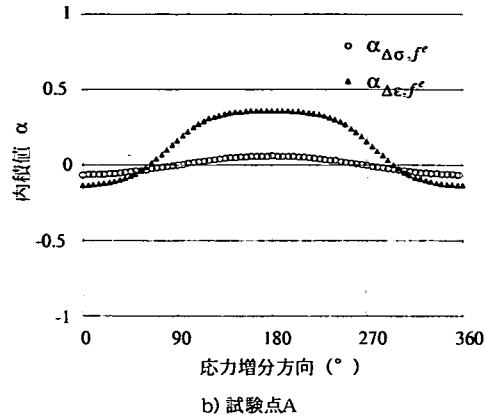


b) 試験点A

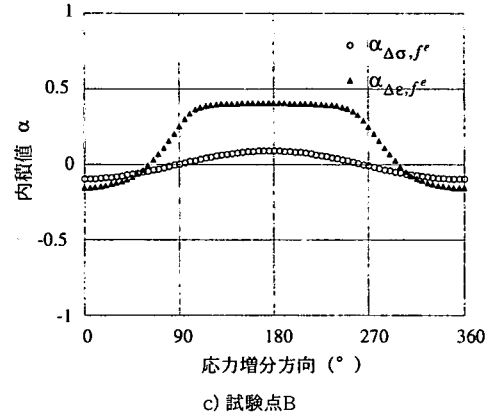


c) 試験点B

図-19 弾性エネルギーテンソルとの内積値 (プローブ試験1)



b) 試験点A



c) 試験点B

図-20 弾性エネルギーテンソルとの内積値 (プローブ試験2)

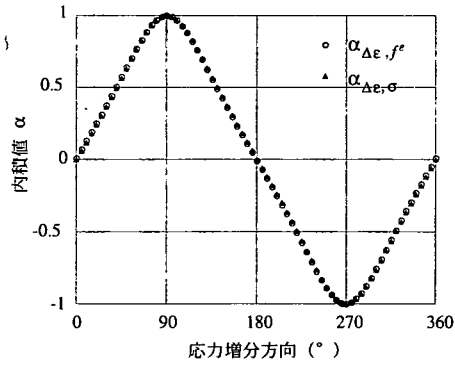
近づくことがわかる。固有変形解析の結果より、この区間の塑性ひずみ増分では古典的塑性論で表現される塑性ひずみ増分が支配的であると考えられるので、図-18からも古典的塑性論で表現されるような塑性ひずみ増分はファブリックテンソルに直交することが確認される。

最も簡単な粒子集合体である2粒子接触について考えると、粒子接触等の幾何学的構造に対し直交する各粒子の相対移動は粒子間すべりのような挙動であると考えられる。このことから、多粒子の集合体においては、視覚的に明確なすべり面の形成は確認されていないものの、ファブリックテンソルに直交する塑性変形のメカニズムをいわゆる「すべり面」に起因するメカニズムであると概念的に捉えるものとする。つまり、せん断載荷に伴いすべり面と称されるある卓越した変形モードが粒状体内部の幾何学的構造において形成され、プローブ試験1のように載荷履歴と同様のせん断載荷に対してはその変形モードが支配的となり塑性変形が生じるものと推察される。したがって、このような塑性変形モードのみを対象とするのであれば、幾何学的内部構造に応じた塑性ポテンシャルを仮定することができよう。

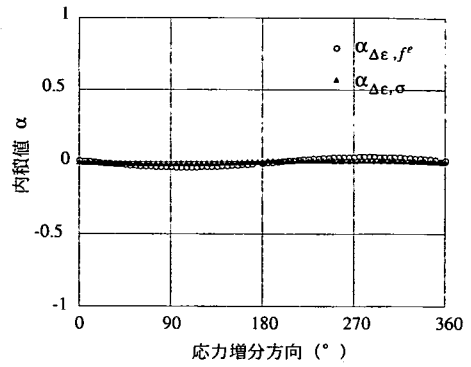
## (2) 増分非線形モード

プローブ試験2では、すべり面に起因する塑性変形に加えて応力増分方向依存性を示す塑性ひずみ増分が生じ、増分非線形性が発現する。この応力増分方向依存性を示す塑性ひずみ増分は、古典的塑性論の降伏基準に当てはまらない塑性ひずみ増分である。しかし、図-18において、古典的塑性論の降伏基準に当てはまらない塑性ひずみ増分が確認された90°~270°以外の区間では、ひずみ増分の内積値は応力増分との内積値にほぼ一致し、90°~270°間で観察された0に近づくような幾何学的内部構造に依存する傾向は確認できない。このことから、塑性変形のメカニズムとして、古典的塑性論で表現可能なすべり面に起因するメカニズムとは異なる他の塑性変形メカニズムが存在することが確かめられる。

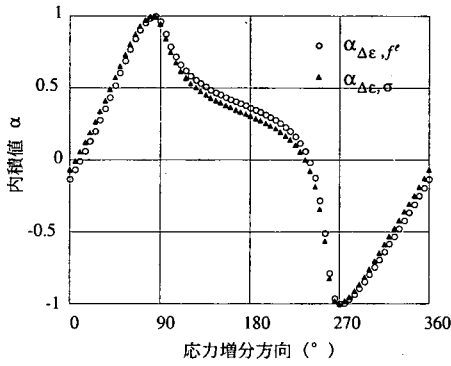
次に、弾性エネルギーテンソルとプローブ試験1、2で得られたひずみ増分、応力増分の内積値をそれぞれ図-19、図-20に示す。図-19において、ファブリックテンソルの場合と同様に、90°~270°間の弾性エネルギーテンソルとひずみ増分の内積値が応力増分との内積値から逸脱することがわかる。しかし、その収束値



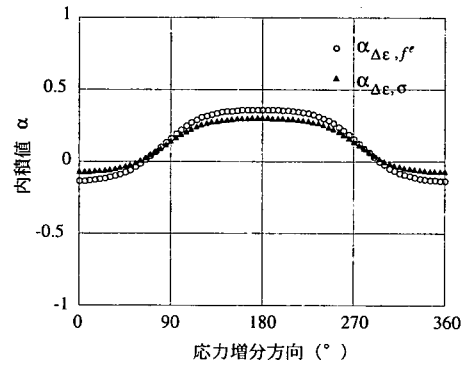
a) 初期等方応力状態



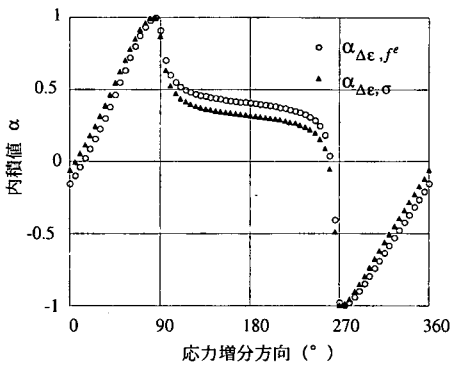
a) 初期等方応力状態



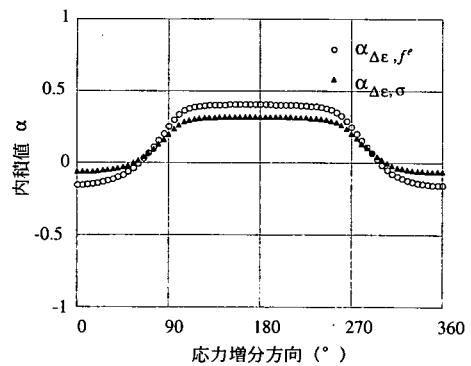
b) 試験点A



b) 試験点A



c) 試験点B



c) 試験点B

図-21 弾性エネルギーテンソルと応力テンソルの類似性 (プローブ試験1)

図-22 弾性エネルギーテンソルと応力テンソルの類似性 (プローブ試験2)

は0ではなくある値に近づいている。すなわち、古典的塑性論で表現されるような塑性ひずみ増分は、弾性エネルギーテンソルと直交はしないものの、その弾性エネルギーテンソルとの内積値はある一定値を示すような変形であることがわかる。

図-20では、 $60^\circ \sim 300^\circ$ 間の弾性エネルギーテンソルとひずみ増分の内積値が応力増分との内積値から逸脱し、塑性変形の発生が認められる。さらに、 $145^\circ \sim$

$215^\circ$ 間では、弾性エネルギーテンソルとひずみ増分の内積値がほぼ一定値を示し、増分線形モードと称した古典的塑性論に仮定される塑性変形が支配的であることも確認される。これに対して、 $60^\circ \sim 145^\circ$ および $215^\circ \sim 300^\circ$ の間では、増分線形モードとは異なる応力増分方向依存性を示す塑性変形の存在が確認される。このように、弾性エネルギーテンソルを用いることで、増分線形モードとは別の塑性変形挙動(増分非線形モー

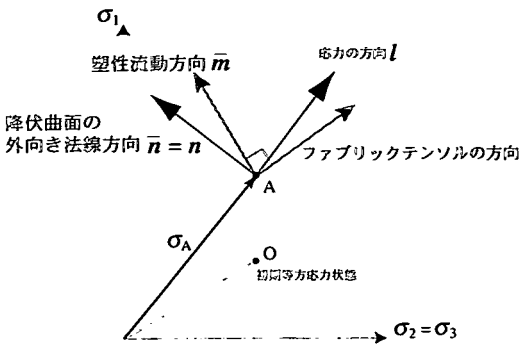


図-23 降伏曲面外向き法線と塑性流動方向がずれる理由

ド)の存在を確認することができた。

図-21, 22は弾性エネルギーテンソルとひずみ増分の内積値および応力テンソルとひずみ増分の内積値を示したものである。これらの図より弾性エネルギーテンソルはほぼ応力テンソルに相似なテンソルであることがわかる。もし、増分非線形モードが試験点の応力や内部構造のような状態量に支配されて生じる変形モードであれば増分線形モードと同様に、応力増分方向に対して内積値は一定になるはずである。しかし、図-10, 11に対応する図-21, 22の増分非線形モードでは、内積値が一定値を示す傾向は認められず、この塑性変形は幾何学的内部構造だけではなく力学的内部構造、応力状態のような状態量に支配されない塑性変形であるといえる。

## 5. 非関連流動則発現メカニズム

従来の研究において、安定性等の面から流動則に関して種々の議論がなされている<sup>23)-25)</sup>。ここでは、ファブリックテンソルを介して粒状体の塑性流動方向について考察する。なお、ここで論じる塑性変形は、ファブリックテンソルと密接な関連性が認められた増分線形モードを対象とする。図-10, 11より、主応力空間における塑性流動方向  $\bar{m}$  と降伏曲面外向き法線  $\bar{n}$  とのずれは約  $20^\circ$  である。

### (1) 内部構造の発達について

図-17では、ファブリックテンソルと塑性ひずみ増分テンソルが直交することの他、ファブリックテンソルと応力増分の内積値に関して注目すべき現象が確認される。初期等方応力状態点Oにおいては、ファブリックテンソルと応力増分の内積値は  $90^\circ$  でピークを取るような正弦挙動を示している。つまり、O点では、ファブリックテンソルの方向と応力の方向  $l$  が一致している。しかし、せん断载荷を経験した試験点Aや試験点Bでは、応力増分の内積値のピークが  $90^\circ$  ではなく、 $70^\circ$  付近へ移動している。これは、せん断载荷が進むことで応力テンソルの方向とファブリックテンソルの

方向が一致しなくなることを意味している。

図-4からわかるように、試験点AとBとではその幾何学的構造異方性は大きく異なる。しかし、ここで見られる内積値のピークは両試験点ともにほぼ  $70^\circ$  付近であり、試験点間で大きな違いは確認できない。この現象は、単調载荷に際してせん断载荷初期では構造(粒子運動)の自由度が大きく応力状態を完全には反映し得ないが、载荷に伴い硬化が進むとある程度応力状態に追従するように幾何学的内部構造が発達することを示しているものと考えられる。

### (2) 降伏曲面外向き法線 $\bar{n}$ と塑性流動方向 $\bar{m}$ がずれる理由

これまでの検討結果より得られた増分線形モードに関する知見をまとめると以下ようになる。

- 従来の塑性論において、応力方向  $l$  と降伏曲面外向き法線  $\bar{n} = n$  は直交する。
- 図-17, 18より、古典的塑性論で考慮されている塑性変形モードは、ファブリックテンソルとの内積が0となり、その塑性流動方向  $\bar{m}$  とファブリックテンソルの方向は直交する。
- 図-17より、本研究で用いた供試体において応力の方向  $l$  とファブリックテンソルの方向とのずれは約  $20^\circ$  である。

これらの関係の概念図を図示すると、図-23のように描くことができる。つまり、粒状体の内部構造が応力状態を必ずしも反映していないために、内部構造内で卓越するすべりモードは応力状態だけでは表現し得ず、結果として、降伏曲面外向き法線  $\bar{n}$  と塑性流動方向  $\bar{m}$  がずれると考えられる。

また、図-10, 11で観察された塑性流動方向  $\bar{m}$  と降伏曲面外向き法線  $\bar{n}$  のずれが、応力の方向  $l$  とファブリックテンソルの方向のずれとほぼ等しくなることから、このような考察の妥当性が確認される。

## 6. 粒状体の塑性変形メカニズム

ここでは、上述の検討結果を踏まえて粒状体の塑性変形メカニズムについて考察する。粒状体における塑性変形は、「増分線形モード」と「増分非線形モード」との重ね合わせである。前者は、载荷とともに発達する粒状体内部の粒子接触状況等の幾何学的構造と密接に関連し、すべり面でモデル化される変形モードである。一方、後者は、幾何学的および力学的な内部構造に依存しない。また、この塑性変形モードは、せん断履歴の影響を受けて全塑性変形に対する寄与率が小さくなることから、応力比もしくは拘束圧等の影響を受ける微弱なすべり挙動が集合した変形モードであると考えられる。つまり、粒状体を構成する個々の粒子同士の接触面を常に存在する潜在的な微小すべり面であると考えれば、与えたせん断応力の方向に滑るといった当然の塑性変形のメカニズムが存在し得る。したがって、粒状体の塑性変形挙動は载荷に伴い卓越す

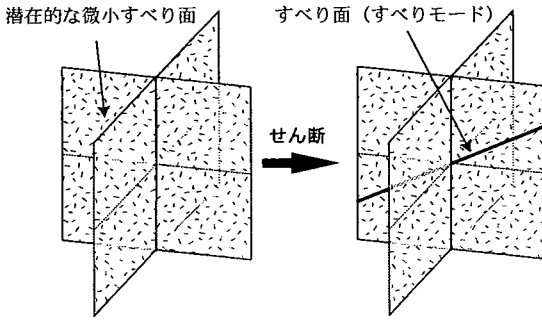


図-24 塑性変形メカニズムの概念

るすべり面に起因する塑性変形成分と潜在的な微小すべりの集積として生じる塑性変形成分との重ね合わせであると考えられる。

いま、これらの概念を図-24のように2つの面で表現する。履歴としてせん断を経験した場合には、せん断載荷に伴い内部構造にある種のすべりモードが形成されるが、その及ぼす影響は載荷履歴あるいは応力状態から定まる一定面内に限定されたものである。例えば、単調載荷のようにこれまでの応力履歴と同一の載荷であれば、形成されたすべりモードの影響が大きく、それに従ってほぼ一定方向に塑性ひずみを生じる。つまり、このような載荷に対しては古典的塑性論流動則で考慮されているような変形メカニズムが支配的となる。一方、その面に直交するような面では卓越したすべりモードとは別に、離散体特有の潜在的な微小すべり挙動メカニズムが残されていて塑性ひずみ増分が応力増分の方向に依存して変化することになる。本解析においては、 $l-n$ 面に直交する $m$ 方向の応力増分に対しては卓越したすべりモードは影響せず、古典的塑性論では表現できない塑性変形が生じている。つまり、載荷履歴と異なるようなせん断を受けた場合、古典的塑性論流動則で考慮されているすべり面に起因する変形メカニズムの他に、応力増分の方向に依存した塑性ひずみ増分が生じる。なお、応力主軸回転を伴う場合においても未経験のせん断応力が作用するために応力増分に依存した塑性ひずみ増分応答を示すことになる<sup>8)</sup>。

より複雑な載荷履歴により、微視的内部構造には単調載荷時と比べ複雑なすべりモードが卓越することが予想される。したがって、一般的な地盤材料や応力増分に対しては、複数の塑性変形メカニズムがさらに複雑に複合した変形モードが生じるものと考えられる。

## 7. おわりに

本研究では、3次元粒状要素法を用いた数値シミュレーションにより応力プローブ試験を行い、粒状体の塑性変形挙動について検討すると共に、粒状体の微視

的内部構造に着目して塑性変形メカニズムについて種々の検討を行った。その結果として、粒状体の塑性変形は2つの塑性変形モードの重ね合わせであることや非関連型流動則に類似した塑性ひずみ増分応答を示す理由等について示した。以下に本研究で得られた知見を列挙する。

1. 粒状体の塑性変形は、増分線形モードと増分非線形モードの重ね合わせにより生じる。
2. 増分線形モードは古典的塑性論で想定されているようなせん断載荷の過程で形成されるすべり面に起因する塑性変形メカニズムである。
3. 増分非線形モードは、粒状体が潜在的に有している粒子間の微小なすべり面の集積による応力増分に依存する塑性変形メカニズムである。
4. 増分非線形モードによる塑性ひずみ増分が増分非線形性発現の要因となるが、せん断載荷が進むにつれて増分線形モードが発達・卓越し塑性変形において支配的になるため、応力がピークに近づくにつれて全塑性変形に対する増分非線形モードの寄与率は減少する。
5. 増分線形モードは粒状体内部の幾何学的内部構造に支配されるため、幾何学的内部構造と応力状態との差により非関連型流動則に類似し関連型の流動則にはならない。

なお、粒子間の摩擦角や初期状態の密度、固有異方性、境界の制御法などの種々の要因が塑性ひずみ増分応答に与える影響については今後の課題としたい。

謝辞：本稿をまとめるにあたり、東北大学大学院助教授の京谷孝史氏、寺田賢二郎氏、東北大学大学院助手の堤成一郎氏から多大なるご協力を頂いた。記して感謝の意を表します。

## 参考文献

- 1) 土質試験の方法と解説（第一回改訂版），地盤工学会，2000。
- 2) Pradel, D., Ishihara, K. and Gutierrez, M.: Yielding and flow of sand under principal stress axes rotation, *Soils and Foundations*, Vol.30, pp.87-99, 1990.
- 3) Anandarajah, A., Sobhan, K. and Kuganethira, N.: Incremental stress-strain behavior of granular soil, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 121, pp. 57-67, 1995.
- 4) 石井建樹，金子賢治，岸野佑次：真三軸応力プローブに対する粒状体の増分非線形応答について，応用力学論文集，JSCE, Vol.5, pp. 451-460, 2002.
- 5) 赤井澤裕幸，岸野佑次，金子賢治：3次元プローブシミュレーション試験による粒状体の増分弾塑性挙動の研究，土木学会東北支部研究発表会講演概要集，pp.274-275, 2001.
- 6) Kishino, Y., Akaizawa, H. and Kaneko, K.: On the plastic flow of materials, *Powders and Grains 2001*, pp.199-202, 2001.
- 7) Kishino, Y.: The incremental nonlinearity observed in numerical tests of granular media, *CD-ROM Proc. of 15th ASCE Engineering Mechanics Conference*, 2002.

- 8) 金子賢治, 石井建樹, 嶋海 渉, 岸野佑次: 応力主軸回転を受ける粒状体の塑性ひずみ増分応答の考察, 応用力学論文集, Vol.5, pp. 441-450, 2002.
- 9) Wu, W. and Niemunis, A.: Beyond failure in granular materials, *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 21, pp. 153-174, 1997.
- 10) Rudnicki, J. W. and Rice, J. R.: Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 371-394, 1975.
- 11) Hashiguchi, K. and Tsutsumi, S.: Elastoplastic constitutive equation with tangential stress rate effect, *Int. J. Plasticity*, Vol. 17, pp. 117-145, 2001.
- 12) 堤 成一郎, 橋口公一, 岡安崇史, 齋藤公志郎, 杉本昌也: 接線ストレッチングを考慮した下負荷面モデルの力学的応答特性, 応用力学論文集, JSCE, Vol. 4, pp. 375-382, 2001.
- 13) 堤 成一郎, 橋口公一, 杉本昌也, 池田清宏, 山川勇樹: 異方性および接線塑性に基づく非共軸性を持つ土の非弾性構成式の力学的応答, 応用力学論文集, JSCE, Vol.5, pp. 401-409, 2002.
- 14) 岸野佑次: 粒状体の固有変形解析, 土木学会論文集, No. 481/III-25, pp. 87-95, 1993.
- 15) 佐武正雄: 粒状体におけるファブリックテンソルについて, 粒状体力学の構成に関する研究, pp. 1-10, 文部省科学研究費総合研究, No. 56306023, 1982.
- 16) Oda, M., Nemat-Nasser, S. and Mehrabadi, M.M.: A statistical study of fabrics in a random assembly of spherical granules, *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 6, pp.77-94, 1982.
- 17) 岸野佑次: 新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析, 土木学会論文集, No.406/III-11, pp.97-116, 1989.
- 18) Oda, M. and Kazama, H.: Microstructure of shear bands and its relation to the mechanisms of dilatancy and failure of dense granular soils, *Geotechnique*, Vol. 48, No. 4, pp.465-481, 1998.
- 19) 前田健一, 三浦均也: 楕円微細構造体に着目した粒状体の非線形解析, 応用力学論文集, JSCE, Vol. 1, pp. 507-518, 1998.
- 20) 前田健一, 三浦均也: 楕円微細構造体に着目した初期構造の異なる粒状体の非線形変形挙動, 応用力学論文集, JSCE, Vol. 1, pp. 507-518, 1998.
- 21) 飛田善雄, 柳澤栄司: 砂のような粒状体の構造, 応力, 運動則に関する準巨視的考察, 土木学会論文集, No. 364/III-4, pp. 77-86, 1985.
- 22) Goldscheider, M.: True triaxial tests on dense sand, *Constitutive Relations for Soils*, A.A. BALKEMA, pp. 11-54, 1984.
- 23) Hill, R.: On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 5, pp. 229-241, 1957.
- 24) Hill, R.: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *Int. J. Plasticity*, Vol. 6, pp. 236-249, 1958.
- 25) Drucker, D.K. and Li, M.: Triaxial test instability of a nonassociated flow rule model, *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol.119, pp. 1188-1204, 1993.

(2002.6.24 受付)

## MICRO-MECHANICAL STUDY ON PLASTIC DEFORMATION OF GRANULAR MATERIALS

Tateki ISHII, Kenji KANEKO and Yuji KISHINO

The incremental nonlinearity has been studied experimentally and theoretically for the exact modeling of mechanical behavior of geomaterials. However, the micro-mechanical origin of the incremental nonlinearity has not yet been clarified. We discuss the micromechanism with the aid of discrete element simulations. The results obtained by a series of stress probe tests, which are conducted under the true tri-axial stress states in terms of the 3D-GEM, suggest that the behavior of granular materials have to be described by the incremental nonlinearity. The characteristic deformation modes and fabric parameters calculated for each stress probe give important information to clarify the micromechanism of incremental nonlinearity.