

# Element-free Galerkin法を応用した 新しい三次元地下水浸透流解析システム

櫻井英行<sup>1</sup>

<sup>1</sup>正会員 工修 清水建設株式会社 技術研究所 (〒135-8530 東京都江東区越中島3-4-17)

Element-Free Galerkin法 (EFGM) による三次元地下水浸透流解析システムを開発した。EFGMは、有限要素法解析などにおけるメッシュ作成作業を解消する最も現実的な手法として期待されているメッシュレス解析法の一つである。ところが、複雑な三次元形状を対象とした完全な解析システムは、未だに開発されていない。本稿では、EFGM解析の入力データとして、メッシュ間の非適合やメッシュ同士の重複を許す特殊なメッシュ群 (不整合メッシュ集合体) を用いることを提案する。これにより、従来の三次元メッシュの作成や変更作業の効率が格段に向上することを論ずる。また、三次元計算例により、その利便性を具体的に示すとともに、本システムの解の精度と収束性、材料不連続面の影響についても論ずる。

**Key Words :** meshless method, element-free Galerkin method (EFGM), radioactive waste geological disposal, groundwater seepage flow analysis, consistency-free mesh assembly (CMA)

## 1. はじめに

放射性廃棄物の処分については、青森県六ヶ所村で進められている低レベル放射性廃棄物埋設事業<sup>1)</sup>に加え、使用済み燃料の再処理過程で発生する高レベル放射性廃棄物についても2000年6月に最終処分に関する法律が公布、同年10月には処分事業の実施主体<sup>2)</sup>が設立され、事業化に向けて着々と進み始めた。低レベル廃棄物が、地下10m程度の浅い地層内に埋設されているのに対し、高レベル廃棄物は、地下300mから1,000m程度の深い地層に総延長数百kmに及ぶ坑道群を展開し、処分される方針である<sup>2),3)</sup>。

このような放射性廃棄物の地層処分施設を計画する上で、サイト周辺の地下水流動場や地下施設建設による地下水流動場の変化を予測することは処分の安全性を評価する上で非常に重要である<sup>4)</sup>。しかしながら、事業の初期段階では、地下水流動場を精度良く予測するのに十分なデータは望めない。地下水解析に必要な透水係数などの物性値が乏しいだけでなく、地質データの解釈が違えば、複数の地質構造を検討する必要もあろう。そうしたデータが少なく曖昧な状態においても、解析サイドは調査データが充実してくるのを待つといった受け身でいるのではなく、むしろ積極的に調査データの解釈を助け、地質調査の進展に貢献するよう、取り組まねばならな

い。地質調査と数値解析が、相互に補完し合いながら次第にサイト周辺の地下水流動状況が、明らかにされていくものと考えられる。したがって、地下施設計画の初期から中期段階では、以下の要件を満足する地下水流動解析システムは不可欠である。

- 要件1：地質学的解釈の相違、地質調査の進展に伴う解析データの変更が容易なこと。
- 要件2：地下施設の形態・位置・配向検討に伴う解析データの変更が容易なこと。

ところが、従来の有限要素法 (FEM: Finite Element Method) による解析システムでは、三次元地質モデルに対応するメッシュ・モデルの作成が足かせとなり、上述の要件を満足するのは大変難しい。

こうしたメッシュ生成の問題を根本的に解決しようとする解析手法としてメッシュレス法<sup>5),6),7)</sup>やボクセル解析法<sup>5),8)</sup>がある。ボクセル解析法は、三次元形状表現法の一つであるボクセル・モデルをそのまま解析用のメッシュ・モデルとして用いる方法である。ボクセル・モデルでは、三次元空間を非常に小さな立方体、すなわちボクセル (Voxel: Volume Pixelの略) に分割し、対象物が各ボクセルを占めるか否かの2値情報によって三次元形状を表現する。各ボクセルの対象物に対する内外判定だけなので、形状が非常に複雑であっても、確実、かつ、高速に

モデリングできる。解析モデルとして利用する場合は、節点座標が必要ないこと、要素形状が単一なこと等を考慮して、うまくプログラミングすると、大幅な記憶容量の削減が可能になり、数千万自由度といった通常のFEMより格段に細かいメッシュによる解析が可能になる。著者らは、既に、このボクセル解析法による地下水解析システムを開発しており、その有効性や問題点についても整理している<sup>9),10)</sup>。低レベル廃棄物埋設施設のように比較的大きな施設の計画に対しては有効であるが、高レベル廃棄物処分施設のような小断面トンネル群から成る施設のモデル化は難しい。高レベル処分の場合、解析領域は、10km四方×深度数km程度になるので、断面積が数十m<sup>2</sup>のトンネル一本一本まで、まともにモデル化しようとするれば、非現実的な解析規模になることは火を見るよりも明らかである。

一方、メッシュレス法は、メッシュ生成のキーとなる要素コネクティビティを必要としない解析手法である。Finite Point Method<sup>11)</sup>やBoundary Node Method<sup>12)</sup>、Free Mesh Method<sup>13)</sup>など、いくつかの手法が提案されているが、ほとんどが、Element-Free Galerkin Method (EFGM)<sup>14)</sup>の発表をきっかけとして、急速に研究・開発の動きが広まったと言える。EFGMは、内挿関数に移動最小自乗法 (MLSM: Moving Least Square Method) を使い、弱形式で表された連続体の支配方程式を節点群のみで離散化する方法であり、要素データは必要なく、領域内に節点を配置するだけなので、三次元メッシュ生成作業を解消する手法として期待され、多くの研究者によって、いろいろな応用がなされてきた。ところが、適用問題としては、形状関数の高次導関数の連続性に着目した報告<sup>15)</sup>や、クラックの進展問題のように、解のメッシュ依存性を回避するための適用例<sup>16),17),18)</sup>など、EFGMの利点は活かしているものの二次元問題の報告が多く、三次元問題に適用された報告はあっても<sup>12),18),19),20)</sup>、地質構造のように複雑形状の複数材料から構成される三次元複合領域までも扱える汎用的なシステムは、未だ開発されていないのが実状である。著者も、EFGMが地下施設計画における三次元地下水解析に資する強力な手法に成りうることを検討しているが二次元の例で構想を示したに過ぎない<sup>21)</sup>。解析対象の幾何形状定義やMLSMによる形状関数作成のための節点収集法等の他、合理的な全体システム設計も課題であると考えられる。

本論では、EFGMによる実用的な三次元地下水浸透流解析システムを実現するため、不整合メッシュ集合体と称する特殊なメッシュ・データを導入することを提案する。メッシュ・データといっても、不

整合メッシュ集合体は、各地層や地下施設毎に独立に作成されたメッシュの集まりであり、各メッシュの接合面での非適合、および、メッシュ同士の空間的な重複を許すため、通常のFEM解析用メッシュに比べ、非常に自由度が高く、作成も容易である。本稿では、不整合メッシュ集合体とEFGMの統合が、冒頭述べた二つの要件を満足することを三次元数値計算例により具体的に示すと共に、本システムの解の精度と収束性、並びに、材料不連続面での連続性拘束についての影響等についても論ずる。

## 2. Element-free Galerkin法

ガラキン法を支配近似原理とし、関数近似にMLSMを用いる偏微分方程式の数値解析法をElement-Free Galerkin Methodという。EFGMでは、FEMのような要素コネクティビティを必要としないため、メッシュレス解析が可能である。

### (1) 移動最小自乗法 (MLSM)<sup>14),22)</sup>

MLSMでは、領域内の任意の位置  $x$  において、未知関数  $\phi(x)$  を次のように近似する。

$$\phi^h(x) = \{P(x)_m\}^T \{a(x)_m\} \quad (1)$$

$\{P(x)_m\}$  は基底であり、本システムでは、三次元の線形基底を用いた。すなわち、

$$\{P(x)_m\} = [1 \ x \ y \ z]^T, m=4 \quad (2)$$

未定係数  $\{a(x)_m\}$  は、FEMと異なり、空間座標の関数であり、領域内の任意の点  $x$  において、次の評価関数を最小化することにより求められる。

$$J = \sum_i^N w(r_i) [\{P(x_i)_m\}^T \{a(x)_m\} - \phi_i]^2 \quad (3)$$

ここで、 $N$  は評価点周りに設定した領域  $d_i$  内に存在する節点数であり、この領域  $d_i$  を影響領域と呼ぶ。図-1は、ハッチで示された影響領域  $d_i$  内に7個の節点が存在している例である。 $x_i$  は、 $i$  番目の節点の空間座標値であり、 $\phi_i$  は  $x = x_i$  における  $\phi$  の節点値、 $r_i$  は評価点  $x$  と節点  $i$  との距離である。重み関数  $w(r_i)$  は、後述するように、影響領域内ではある値をとり、その外ではゼロとなるように選ぶ。

評価関数  $J$  の  $\{a(x)_m\}$  に関する最小条件から、次の  $\{a(x)_m\}$  と  $\phi_i$  との関係を得る。

$$[A_{mm}] \{a(x)_m\} = [B_{mN}] \{\phi_N\} \quad (4)$$

すなわち、

$$\{a(x)_m\} = [A_{mm}]^{-1} [B_{mN}] \{\phi_N\} \quad (5)$$

ここで、

$$[A_{mm}] = [D_{mN}] [W_{NN}] [D_{mN}]^T \quad (6)$$

$$[B_{mN}] = [D_{mN}] [W_{NN}] \quad (7)$$

$$\{\phi_N\} = \{\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_N\}^T \quad (8)$$

$$[D_{mN}] = [\{P(x_1)_m\} \ \{P(x_2)_m\} \ \dots \ \{P(x_N)_m\}] \quad (9)$$

$$[W_{NN}] = \text{diag}[w(r_1) \ w(r_2) \ \dots \ w(r_N)] \quad (10)$$

式(5)を式(1)に代入すると、次のように書ける。

$$\phi^h(x) = \{G_N\}^T \{\phi_N\} \quad (11)$$

ここで、 $\{G_N\}$  は形状関数であり、

$$\{G_N\}^T = \{P_m\}^T [A_{mm}]^{-1} [B_{mN}] \quad (12)$$

## (2) 重み関数

重み関数は評価点  $x$  からの距離  $r$  の関数であり、解の精度への影響は大きく、その選定は非常に重要である。本システムでは、次の四次スプラインを導入した。

$$w(r) = 1 - 6\left(\frac{r}{d_I}\right)^2 + 8\left(\frac{r}{d_I}\right)^3 - 3\left(\frac{r}{d_I}\right)^4 \quad (13)$$

この重み関数は、次の条件を満足するように求められている<sup>23)</sup>。

$$w(d_I) = 0 \quad (14)$$

$$w'(d_I) = 0 \quad (15)$$

$$w''(d_I) = 0 \quad (16)$$

$$w'(0) = 0 \quad (17)$$

$$w(0) = 1 \quad (18)$$

式(14)~(16)は、影響領域境界における重み関数とその1階微分、2階微分の連続条件に対応している。また、式(17)は  $r=0$  で極値を取る条件であり、式(18)は、正規化条件である。これらの条件につい

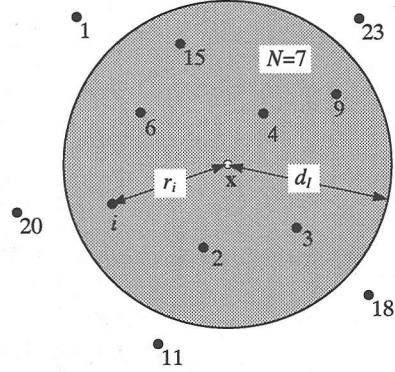


図-1 移動最小自乗法における影響領域

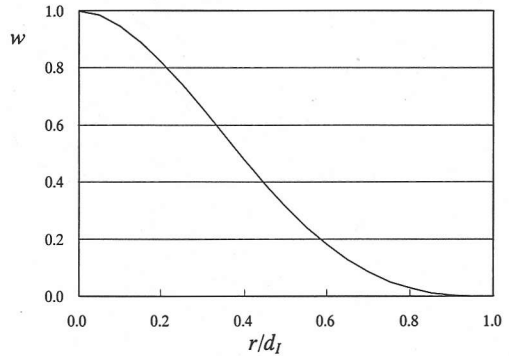


図-2 四次スプラインの重み関数

ては、野口<sup>24)</sup>が分かりやすく解説している。式(13)の他、より高次の多項式<sup>25)</sup>や指数関数を用いた重み関数<sup>14)</sup>、基本境界条件を満足させるための特異な重み関数<sup>26)</sup>なども提案されている。

## (3) 支配方程式と定式化

ここでは、着目する領域  $V$  内の地下水流動の支配方程式は、次の浸透流方程式で与えられるものと仮定する。

$$\nabla(k\nabla\phi) = 0 \quad \text{in } V \quad (19)$$

ここで、 $k$  は透水係数、 $\nabla$  は線形の微分演算子で、

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial y} \ \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T \quad (20)$$

$\phi$  は全水頭（速度ポテンシャル）であり、位置水頭  $h$  と圧力水頭  $p/\rho_w g$  の和で表される。

$$\phi = h + p/\rho_w g \quad (21)$$

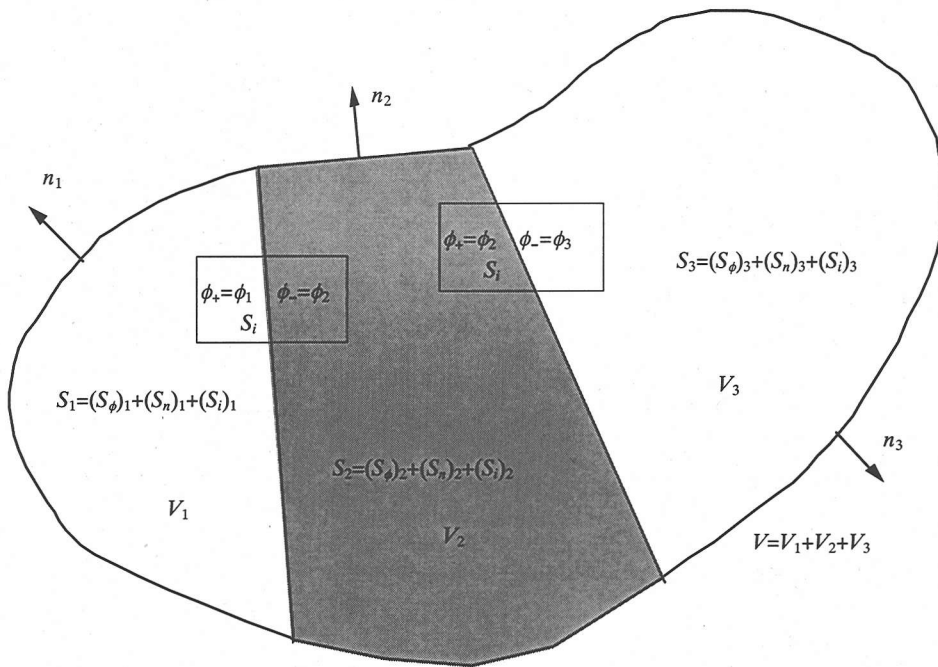


図-3 三つの材料（地層）から成る解析領域

$p$  は地下水圧,  $\rho_w$  は地下水の密度,  $g$  は重力加速度である.

境界条件は, 次のとおりである.

$$\phi = \hat{\phi} \quad \text{on } S_\phi \quad (22)$$

$$k \frac{\partial \phi}{\partial n} = \hat{q} \quad \text{on } S_n \quad (23)$$

ここに, 添え字 $\hat{\phantom{x}}$ は既知量を表し,  $n$  は領域 $V$ の境界に立てた単位法線ベクトルである.

地下水の解析対象となる地盤は, 複数の地層から構成されるため, 物性値の不連続性を考慮する必要がある. 簡単のため, 図-3に示す三つの地層からなる領域を考える. 各地層境界において,  $\phi$  とそのフラックスの連続条件は, 次のように書ける.

$$\phi_+ - \phi_- = 0 \quad \text{on } S_i \quad (24)$$

$$q_+ + q_- = 0 \quad \text{on } S_i \quad (25)$$

上述のとおり, EFGMでは, 近似関数 $\phi^h(\mathbf{x})$ を MLSMによって構築する. 従って, FEMとは異なり, 近似関数 $\phi^h(\mathbf{x})$ の節点座標値は,  $\phi$ の節点値と必ずしも一致しない. すなわち,

$$\phi^h(\mathbf{x}_i) \neq \phi_i \quad (26)$$

従って, 弱形式表現においても, 式(22)の基本境界条件と式(24)の $C^0$ 連続条件は, 付帯条件として考慮する必要がある. 各地層に関する量を添え字 $e$ で表現すると, 上述の支配方程式に対応する汎関数は,

$$\begin{aligned} \Pi(\phi) = & \sum_e \left\{ \int_{V_e} \frac{1}{2} k_e (\nabla \phi)^2 dV - \int_{(S_e)_e} (\phi \hat{q}) dS \right. \\ & \left. + \int_{(S_e)_e} \frac{\alpha}{2} (\phi - \hat{\phi})^2 dS \right\} \\ & + \sum_{\text{all interfaces}} \int_{S_i} \frac{\beta}{2} (\phi_+ - \phi_-)^2 dS \quad (27) \end{aligned}$$

ここで,  $\alpha$ と $\beta$ は式(22)と式(24)を緩和するためのペナルティ関数法におけるペナルティ数で, 十分な大きな正の値である. ペナルティ法他, ラグランジュ乗数法によって緩和する方法もある<sup>25)</sup>.

ただし, 式(27)右辺第4項の材料不連続面での $C^0$ 連続性については, 二次元浸透流問題ではあるが, 著者は, その影響が小さいことを確認しており<sup>21)</sup>, 本システムでも, 考慮しないこととした. 三次元の浸透流問題においても, この影響は無視できることが, 後述する数値計算例で明らかにされている. したがって, 式(27)は,

$$\Pi(\phi) = \sum_e \left\{ \int_{V_e} \frac{1}{2} k_e (\nabla \phi)^2 dV - \int_{(S_e)_e} (k_e \phi \hat{q}) dS + \int_{(S_e)_e} \frac{\alpha}{2} (\phi - \hat{\phi})^2 dS \right\} \quad (28)$$

式(11)の近似関数を式(28)に代入し、 $\{\phi\}$ に関する $\Pi(\phi)$ の停留条件から次の代数方程式系を得る。

$$[K]\{\phi\} = \{f\} \quad (29)$$

ここで、

$$[K] = \sum_e \{[H] + [M]\} \quad (30)$$

$$\{f\} = \sum_e \{[f_q] + [f_\phi]\} \quad (31)$$

$$[H] = \int_{V_e} k_e \{ \nabla G_N \} \{ \nabla G_N \}^T dV \quad (32)$$

$$[M] = \alpha \int_{(S_e)_e} \{ G_{N_e} \} \{ G_{N_e} \}^T dS \quad (33)$$

$$\{f_q\} = \int_{(S_e)_e} \hat{q} \{ G_{N_e} \} dS \quad (34)$$

$$\{f_\phi\} = \alpha \int_{(S_e)_e} \hat{\phi} \{ G_{N_e} \} dS \quad (35)$$

#### (4) 領域積分

EFGMでは、要素がないので、一般には、セル構造を利用した数値積分法により式(32)の領域積分を実行する。このセル構造は、バックグラウンド・セルとも呼ばれ、図-4に示すように節点とは独立に解析領域を包含するように設定された構造格子である。本稿では、各セルに対し、ガウスの積分公式を適用した。すなわち、各セルの各積分点に対し、影響領域を設定し、その中の節点を集めて、式(12)の形状関数を構築し、式(32)の積分を実行する。このとき、影響領域は、解析領域や材料境界（地層境界）等のいかなる境界をも横切らない。また、セルが境界上に位置する場合、積分対象領域の外側の積分点での積分値はゼロとなり、被積分関数は境界を跨いで不連続になるため、そのセルには、より高次の積分点を用いている。

### 3. 不整合メッシュ集合体 (CMA) の利用

上述のように、EFGMにおいては、要素コネク

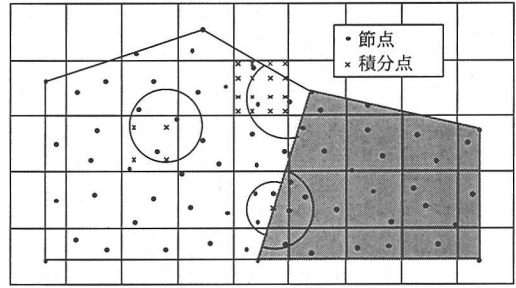


図-4 領域積分のためのセル構造と影響領域

ティビティ・データを必要としないため、三次元FEM解析で最も労力を要するメッシュ作成作業から解放される。それにもかかわらず、複雑な三次元形状を対象とする完成されたEFGM解析システムは未だに開発されていない。エレメント・フリーとはいえ、節点情報に加えて解析対象の幾何形状定義は必須であり、この幾何形状定義と形状関数構築のための合理的な節点収集法が大きなハードルになっている。本稿では、そのハードルを越える一つ的手段として、不整合メッシュ集合体 (CMA: Consistency-Free Mesh Assembly) と呼ぶメッシュ・データを利用することを提案する。

#### (1) 三次元FEMメッシュ生成の実態

ソリッド・モデリングは、多くのCAE (Computer Aided Engineering) システムで採用されている最も高度な三次元形状モデリング手法の一つであり、FEM解析用メッシュ生成のベースとなる幾何形状定義としても広く用いられている。著者らは、既に三次元地質構造を分かり易く表現することを目的として、それをソリッド・モデルとして作成し、画像化することの有効性を示した<sup>27)</sup>。また、そのソリッド・モデルを合理的に定義・管理する方法として、地質構造を地層ブロック（地質境界面や断層面で囲まれたソリッド・モデル）の集合として扱い、各地層ブロックをそれを囲む曲面群とそれらの論理演算式によって定義する方法を提案した<sup>28),29)</sup>。これは、ソリッド・モデリングの一手法であるCSG (Constructive Solid Geometry)<sup>30)</sup>の考え方を踏襲したものである。しかし、このソリッド・モデルからFEM解析用のメッシュを直接生成することはできない。各地層ブロックが独立に作成されており、地層境界面でのメッシュの適合が保証されないからである。これが、地質構造のように多くの材料不連続面を持つ三次元複合領域に対するメッシュ作成を困難にしている最も大きな要因の一つとなっている<sup>9)</sup>。つまり、材料不連続面でメッシュが適合するように

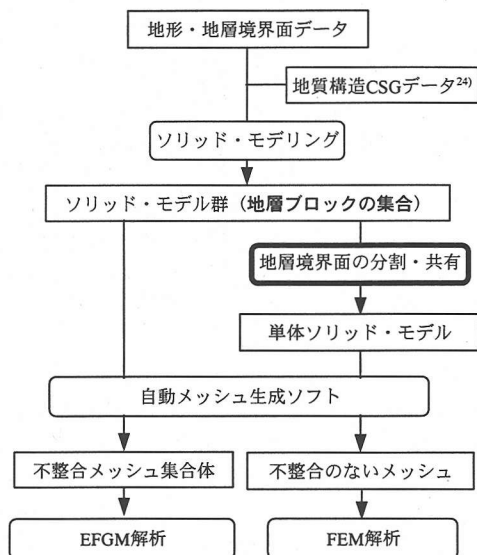


図-5 地下水浸透流解析の流れ

幾何形状定義（ソリッド・モデリング）を行うこと、あるいは、図-5の太枠で示されたそのための修正こそが、複合領域のメッシュ生成を困難にしている本質的な原因であり、上述の地層ブロックのソリッド・モデル群から材料不連続面でメッシュが非適合となるメッシュ群は、既存のメッシュ・ジェネレータにより、むしろ容易に生成可能なのである。本稿では、この非適合なメッシュ群をEFGM解析に利用することを提案する。そして、これをCMA（不整合メッシュ集合体）と呼ぶ。

## (2) CMAとその利便性

CMAは、単なるメッシュの集合である。地下水浸透流解析の場合、各メッシュは、地層や地下施設のそれぞれに対応する。CMAは、通常FEM解析用メッシュと異なり、各メッシュ間の接触面での非適合、および、メッシュ同士の重複を許すため、前述のとおり、自動生成のベースとなるソリッド・モデリングもFEM解析メッシュ用のソリッド・モデリングに比べ格段にやりやすい。EFGM解析において、CMA（メッシュ）が利用できれば、そのメリットは大きい。例えば、

- ・ 解析領域の定義として利用する。
- ・ 数値積分のセルとして利用する。
- ・ 解析結果の画像化に利用する。
- ・ FEM形状関数を利用して微分値を求める。

ソリッド・モデルからSTLファイル<sup>31)</sup> (Standard

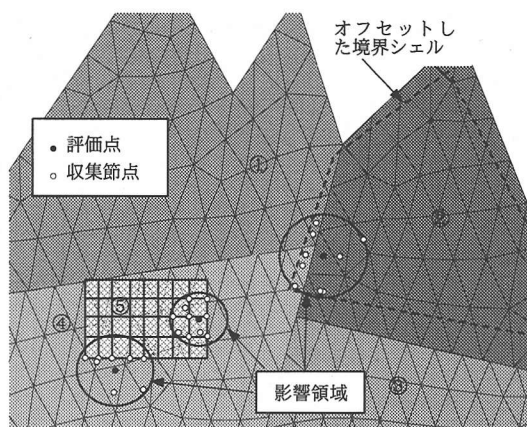


図-6 CMAによる形状定義と節点収集

Triangulation Language : 光造形用のCADデータとして用いられることが多い。) やVRMLファイル<sup>32)</sup> (Virtual Reality Modeling Language : インターネット上で三次元表示するための言語。) を出力し、解析用の幾何形状として利用することも考えられるが、それらも対象物の表面形状を三角形の多面体で表現したメッシュ・データの種類である。表面積分に利用することを考えると、メッシュ・サイズの制御が柔軟なFEMメッシュの方が有利である。また、境界条件の設定等にFEMプリ・プロセッサ流用できるといったメリットも大きい。

## (3) CMAによる幾何形状定義とMLSMの節点収集

図-6は、①～⑤を付した五つのメッシュから成るCMAの一例である。ここでは、CMAの構成要素である各メッシュをメッシュ・ユニットと呼ぶこととする。

本システムでは、各メッシュ・ユニットの表面に接する要素の面を利用し、境界シェルと呼ぶ三角形メッシュを発生させ、解析領域を多面体として表す。EFGMでは、MLSMによる形状関数を構築するに当たり、評価点（積分点）を中心とする影響領域内の節点を収集するが、この際、図-6のメッシュ・ユニット②に描かれた影響領域の例のように、隣接メッシュ・ユニット間の境界面上の節点は両方のメッシュ・ユニットで共有されなければならない。これは、メッシュ・ユニット②の破線のように、境界シェルを法線方向に適量だけ膨張させ、その膨張させた多面体の内部にある隣接メッシュ・ユニットの境界シェル構成節点も収集対象とすることで処理している。実際の境界面は複雑な曲面なので、節点が同一曲面上に乗っているか否かの数値的判断は難しいが、この方法であれば、境界シェルの発生、

その膨張，多面体に対する点の内外判定のみなので容易に行うことができる。また，境界シェルは，式(33)~(35)の境界積分にも利用しており，本稿では，三角形一次有限要素形状関数により境界上の未知量  $\phi$  を近似している。

次に，メッシュ・ユニットが重なっている場合を解説する。図-6において，メッシュ・ユニット⑤と④が重なりあっているが，例えば，メッシュ・ユニット⑤がメッシュ・ユニット④の地層内に建設された地下施設であると仮定する。この場合，メッシュ・ユニット⑤にメッシュ・ユニット④より高い優先順位を与える。メッシュ・ユニット⑤を積分する場合は，前述のとおり，メッシュ・ユニット⑤の表面に発生させた境界シェルを膨張させ，その中に入った節点を形状関数構築のための収集対象とすればよい。この際，メッシュ・ユニット④の構成節点も対象となる。一方，メッシュ・ユニット④を積分する場合は，それより優先順位の高いメッシュ・ユニット⑤を積分領域から除外する。そして，形状関数構築の際には，メッシュ・ユニット⑤の境界シェルの構成節点は収集対象とするが，メッシュ・ユニット⑤の内部に位置する節点は収集対象外とする。

この方法では，メッシュが重なる部分で，必要以上の節点が配置されることにもなるが，大規模問題で，節点数を節約したい場合には，優先順位の低いメッシュ・ユニットの節点は計算に使わないようにプログラミングすることも可能である。

#### 4. 数値解析例

##### (1) 解の収束性と影響領域の大きさの影響

解の基本性能を検討するため，図-7の二次元問題に対して節点数の異なるMesh 1~3の三つのメッシュを用意した。境界条件は，解が二次元的な分布を示すように配慮した。各メッシュの仕様は，表-1に示すように，二次元問題とはいえ，奥行きのある三次元メッシュであり，前述のとおり，解析領域形状の定義に使用される。バックグラウンド・セルは要素と一致させ，各セルにおいて $2 \times 2 \times 2$ のガウス積分により式(32)の計算を実行した。また，影響領域の大きさが解の精度に与える影響も捉えるため，各メッシュで影響領域を変化させた解析も実施した。

一般に，この種の検討は，理論解の存在する問題で行われることが多いが，本稿では，あえて理論解のない問題で検討した。理由は，理論解には線形解が多く，従来のFEMによる結果との精度比較を行う場合，差が出にくいこと。解が放射状の分布を示す

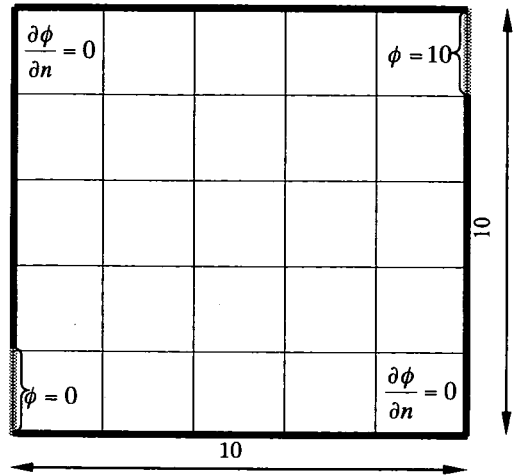


図-7 二次元問題とMesh-1

表-1 二次元問題用メッシュの仕様

	Mesh 1	Mesh 2	Mesh 3	Reference
要素長	2.0	1.0	0.4	0.05
節点総数	72 (6 <sup>2</sup> ×2)	242 (11 <sup>2</sup> ×2)	1,352 (26 <sup>2</sup> ×2)	80,802 (201 <sup>2</sup> ×2)
要素総数	25 (5 <sup>2</sup> ×1)	100 (10 <sup>2</sup> ×1)	625 (25 <sup>2</sup> ×1)	40,000 (200 <sup>2</sup> ×1)
影響半径 基準値	1.69	0.84	0.34	—

ような軸対称問題等で比較することも考えられるが，節点を立方格子状に分布させることができず，影響領域の大きさの違いによる解への影響を的確に評価することが難しいためである。理論解との比較による本手法の妥当性の検証は，別途行っており，妥当な結果が得られることは確認している。

図-8に解析結果を示す。図中，横軸は，表-1の影響半径基準値を100%として正規化した影響領域の大きさ  $\kappa$  である。影響半径基準値とは式(2)の完全一次多項式を一意に決定する影響領域の最小値，つまり，積分点に4番目に近い節点との距離である。縦軸には，次のエラー・ノルムを採った。

$$Error = \frac{\sum_{i=1}^{nodes} \sqrt{(\phi_i - \phi_i^{Reference})^2}}{nodes} \quad (36)$$

ここで， $\phi_i^{Reference}$  は，表-1に示す非常に細かいReferenceメッシュによるFEM（アイソパラメトリック六面体一次要素）の解である。また，比較のため，各メッシュでのFEM解析も実施しており，図-8では水平線で表されている。図より，節点分布が密にな

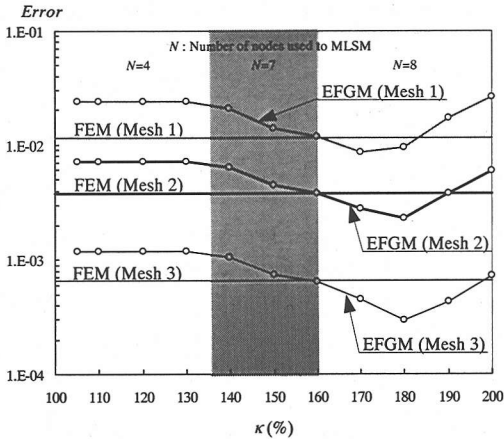


図-8 解の収束性と影響領域の大きさの影響

ることによるEFGMの解の収束性は、FEM同様、良好であることが分かる。また、影響領域の大きさは解の精度に大きく影響し、この問題では、どのメッシュでも $\kappa = 180\%$ 付近で最も精度の良い結果を与えている。EFGMの基底関数が完全一次多項式であるのにも関わらず、より高次のアイソパラメトリック六面体一次形状関数の解より精度が良い場合があることも興味深い。 $\kappa \leq 130\%$ において、エラー・ノルムが一定なのは、MLSに使用された節点数 $N$ が4であり、完全一次多項式が一意に決定されたためである。図-9は、Mesh 2のポテンシャル分布である。図中、実線が $\kappa = 180\%$ のEFGMの結果、点線はFEMの結果、破線はReferenceメッシュによるFEMの参照解である。EFGMの結果と参照解は良好な一致を示していることが確認できる。

以上の結果により、最適な影響領域の大きさは、解こうとしている問題によって唯一つ決まるのではなく、節点密度にも依存することが示された。Lancaster and Salkauskas<sup>22)</sup>は、重み関数とその $j$ 次までの導関数を影響領域の境界でゼロになるように選び、解析領域内で影響領域を一定に取れば、形状関数とその $j$ 次までの導関数は連続になることを示している。したがって、実際問題に適用する際には、節点を解析領域全体で一様に分布させ、影響領域を節点密度に応じて一定値に設定して解析を実行することが望ましい。節点密度に粗密があると、分布の粗い部分で影響領域の大きさが決まり、分布の密な部分での影響領域が大きくなり過ぎて、解析精度が落ちる可能性があるからである。

## (2) 節点分布密度の変遷

一方、FEM解析では、着目している部分や変化の激しい部分でより密に節点を配置するのが一般的で

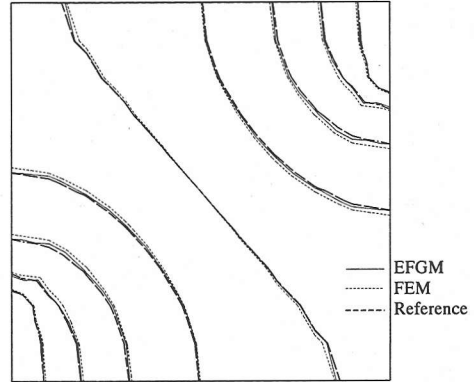


図-9 二次元問題のポテンシャル分布の比較

ある。自然地形を対象とした地下水浸透流解析の場合、図-10に示すように地表付近で細かく、地下深部に行くに従い粗くなるようなメッシュ分割が行われることが多い。このように節点密度が連続的に変化するようなメッシュでは、影響領域を評価点周りの節点密度に応じて変化させても、その影響は小さいと予想される。そこで、ここでは式(12)の $[A_{mm}]$ の正則性にも配慮し、節点密度に粗密のある場合の影響領域の設定を以下の方法で行うこととした。基底関数の項数を $m$ とすると、

- ① 節点番号 $i$ と式(3)中の $r_i$ の配列を作成する。
- ② それらの配列を $r_i$ の昇順にソートする。
- ③ 先頭の $m-1$ 個の情報を配列から取り出す。
- ④ 次の一つの情報を配列から取り出す。
- ⑤ 収集した $n$ 個の情報で次の $[R_{mn}]$ を計算する。

$$[R_{mn}] = [D_{mn}] [D_{mn}]^T \quad (37)$$

$$[D_{mn}] = [\{P(x_1)_m\} \{P(x_2)_m\} \cdots \{P(x_n)_m\}] \quad (38)$$

- ⑥  $[R_{mn}]$ の正則性を次式でチェックする。

$$RCOND > EPS \quad (39)$$

ここで、 $RCOND$ は、 $[R_{mn}]$ の正則性を示す値であり、本システムでは、LINPACK FORTRAN ライブラリ<sup>33)</sup>のサブルーチンDGECOを利用して計算している。 $EPS$ は、正則性の基準値としての小さな値である。

- ⑦ 不等式(39)が成立しない場合は④に戻る。
- ⑧ 影響領域 $d_i$ を次式で設定する。

$$d_i = \kappa \times r_n \quad (40)$$

ここで、 $\kappa$ は、スケール・ファクタであり、1より大きな値を取る。



図-10のメッシュに対し、地下水面は地表面と一致していると仮定し、地表面で大気圧条件、すなわち、 $\phi = z$ 、その他の境界面では、フラックスがゼロの境界条件を与えて解析を実施した。節点数は1,910、要素数は7,731である。領域積分のためのバックグラウンド・セルは200m立方とし、セルが完全に解析領域内に完全に含まれる場合は、積分点を $2 \times 2 \times 2$ 、セルが解析領域境界と交差する場合は、積分点を $4 \times 4 \times 4$ としてガウス積分を実行した。図-11は、式(40)のスケール・ファクタと式(36)のエラー・ノルムの関係である。参照解は、図-10のメッシュに中間節点を加えた四面体二次要素によるFEM解析の結果である(総節点数12,673)。比較のため、四面体一次要素によるFEM解析の結果も示している。先の二次元問題と同様、影響領域の大きさが解の精度に与える影響は大きい、スケール・ファクタが160%付近で四面体一次要素によるFEMの解析結果と同程度の結果が得られることが確認できた。図-12は、EL-500m水平断面のポテンシャル分布である。図中、実線が $\kappa = 160\%$ のEFGMの結果、点線は四面体一次要素のFEMの解析結果、破線は四面体二次要素によるFEMの参照解である。EFGMの結果は参照解と良好な一致を示しており、節点密度が滑らかに変遷するような場合、評価点周りの節点密度に応じて、影響領域の大きさを設定することが妥当であることを示す一つの結果が得られたと言える。

### (3) 材料不連続面の影響とCMAの利便性

材料不連続面の影響を捉えると共に、CMAの利便性を具体的に示すため、図-13に示す3種の地層と地下施設に対応する円柱状の構造物から成る解析対象を用意した。それぞれの透水係数は図-13に記載のとおり、最大で4オーダの差がある。境界条件は、 $x = 0$ の $yz$ 平面で $\phi = 0$ 、 $x = 20$ の $yz$ 平面で $\phi = 20$ 、その他の境界面でフラックスをゼロとした。まず、解析精度を検討するため図-14に示す不整合のないメッシュによる解析を実施し、FEMの解析結果と比較した。節点数は2,281、要素数は9,960である。積分のためのバックグラウンド・セルは0.5立方であり、積分点の配置方法は、図-10の問題と同様にセルが解析領域境界と交差するか否かで $2 \times 2 \times 2$ と $4 \times 4 \times 4$ を使い分けた。影響領域の設定方法も、前節と同様、式(40)による。図-15に、影響領域のスケール・ファクタとエラー・ノルムの関係を示す。エラー・ノルムは、式(36)により求めた。参照解は、図-14のメッシュに中間節点を加えた、四面体二次要素によるFEM解析の結果である(総節点数

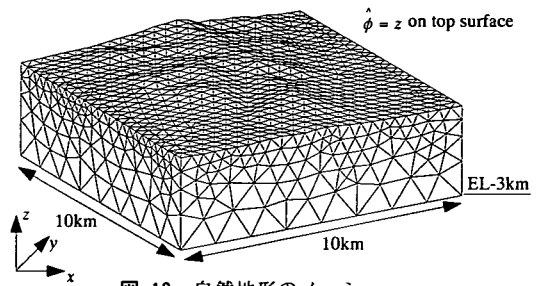


図-10 自然地形のメッシュ

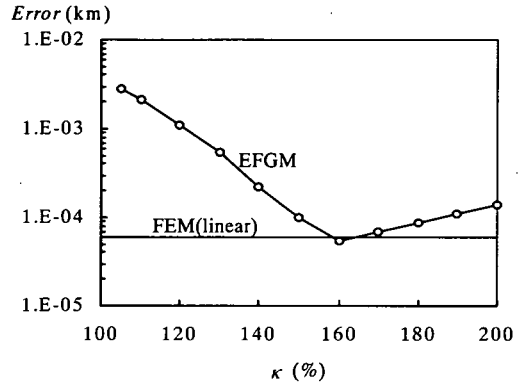


図-11 スケール・ファクタと精度の関係

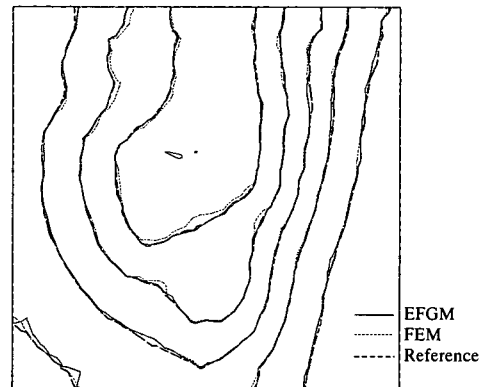


図-12 EL-500m断面のポテンシャル分布の比較

15,667)。図より、スケール・ファクタが150%付近で最も精度を良い結果を得られており、130%～170%の範囲で線形FEMと同程度以上の結果が得られていることが分かる。図-16は、図-13に描かれた断面上でのポテンシャル分布である。実線が $\kappa = 150\%$ のEFGMの結果、点線は四面体一次要素のFEMの解析結果、破線は四面体二次要素によるFEMの参照解である。図より、EFGMの結果と参照解は良い一致を示していることが確認できる。2. (3)の定式化で述べたとおり、本解析では、地層境

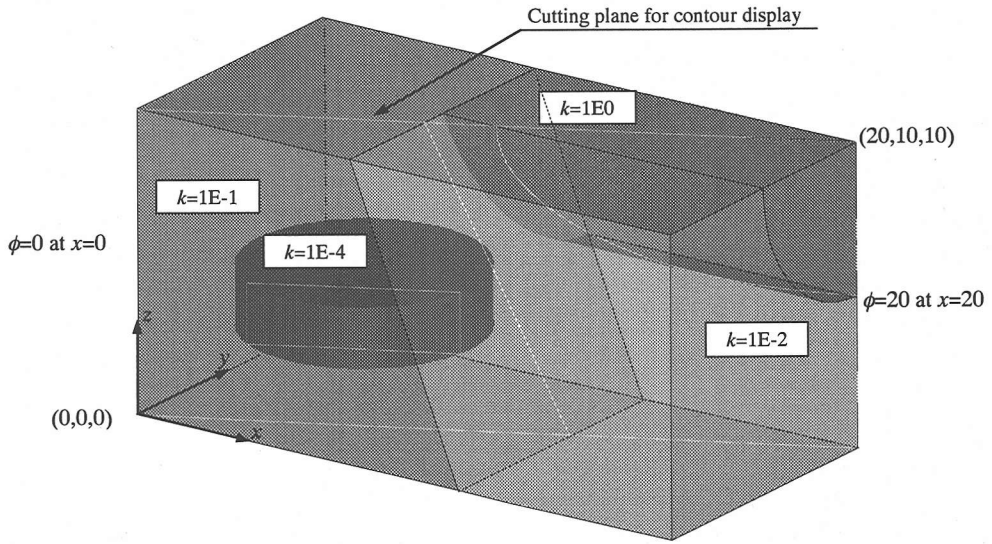


図-13 3種の地層と地下構造物から成る解析対象

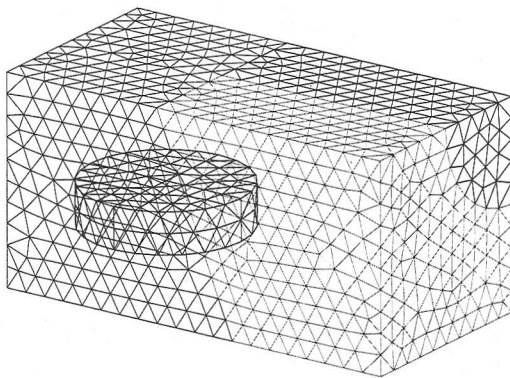


図-14 不整合のないメッシュ

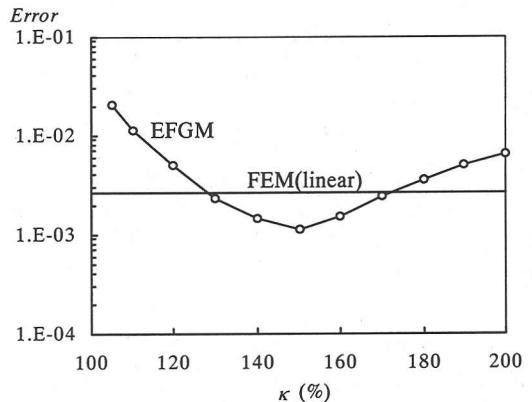


図-15 スケール・ファクタと精度の関係

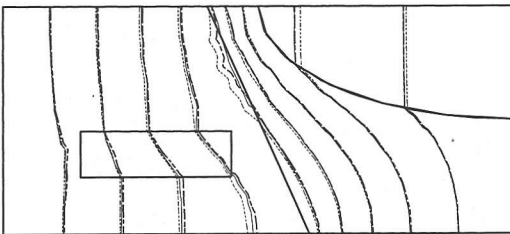


図-16 断面上でのポテンシャル分布の比較

界面でのポテンシャルの連続性を拘束するための式(27)の右辺の最後の項を無視している。それにも関わらず、EFGMは良好な結果を与えることが確認できた。ポテンシャル問題では、三次元の場合でも材料不連続面の影響は小さく、実用上は無視してよいと考えられる。

次に、CMAの利便性を示すため、この問題に対して、各地層と地下構造物で、独立にメッシュ生成したCMAを準備した。図-17がそれであり、節点数が2,276、要素数は4,765である。各地層境界でメッシュが非適合であるだけでなく、地下施設に対応するメッシュ・ユニットは、地層のメッシュ・ユニットと完全に重複している。メッシュ・ユニット間の非適合と重複の扱いについては、3.(3)に記載のとおりである。このCMAに対し、図-14の解析と同様の積分方法で解析を実施した。図-18にスケール・ファクタを150%とした場合の結果を示す。これは、図-16と同じ断面状でのポテンシャル分布を表しており、実線がEFGMの結果、破線は図-14のメッシュで解析した四面体二次要素によるFEMの参照解である。図より、EFGMの解と参照解は良く一致しており、図-17のCMAのようにメッシュ・ユ

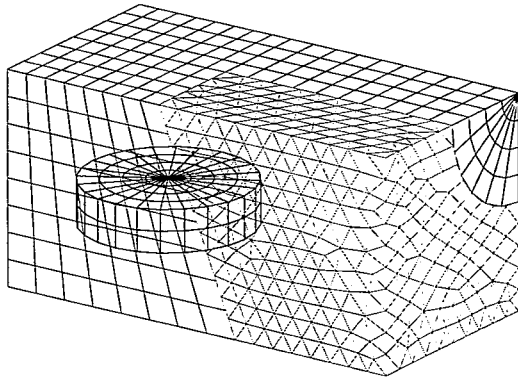


図-17 メッシュ間の非適合と重複のあるCMA

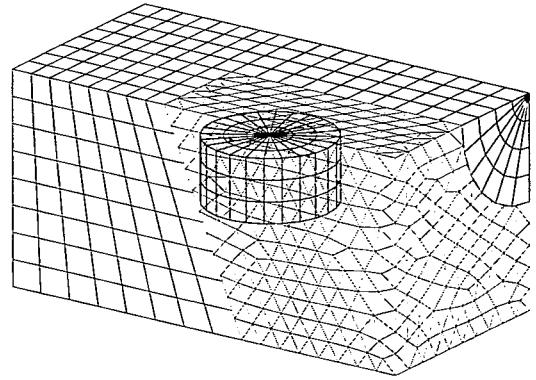
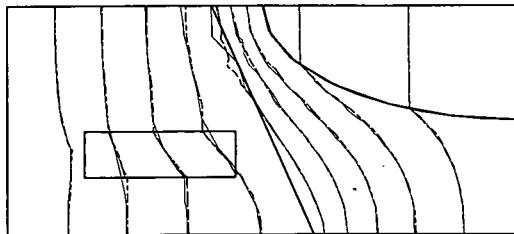
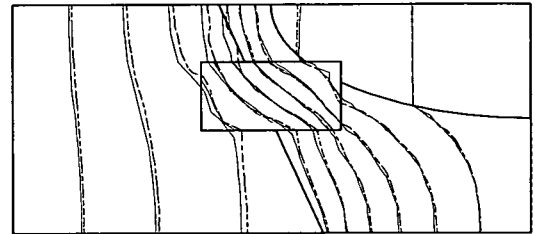


図-19 地下施設の位置と形状の異なるCMA



— EFGM      - - - - Quadratic FEM as reference

図-18 CMAによるEFGM解と参照解



— EFGM      - - - - Quadratic FEM as reference

図-20 施設の位置と形状の異なる解析結果

ニット間の非適合や重複がある場合でも、妥当な結果が得られることが確認できた。

さらに、このCMAでは、地下構造物のメッシュは、地層と完全に独立しているため、位置と形状の変更が容易である。図-19は、寸法の異なる地下施設をモデル中央付近に配置した例である。地層部分のメッシュには全く変更がない。図-20は、図-18と同じ断面上でのEFGM結果と別途用意した不整合のないメッシュを使った2次のFEMの参照解である。影響領域、積分方法等の条件も、前の解析と同様である。地下施設が変わったことによる影響が表現されていることが容易に見て取れる。

地下施設だけでなく、追加ボーリング調査により、新たに薄い地層を発見した場合等でも、その地層に対応するメッシュだけを別途作成し、所定の位置に配置するだけで済む。元の地質構造のCMAを変更することなく、解析可能なのである。冒頭に挙げた二つの要件は、EFGMとCMAの統合により満足されるであろう。

なお、図-18と図-20において、地下施設の部分で等値線が二重に描かれているが、これはFEM用のポスト・プロセッサにより図化したため、要素毎に等値線を引いていることによる。必要に応じて、適切

な可視化ソフトウェアを使うことにより、この問題は回避できる。ただ、地下施設のメッシュを用いずに地層のメッシュだけで表示しても地下施設の影響の入った概略的なポテンシャル分布を捉えることができるのはメリットでもある。

## 5. おわりに

三次元メッシュ生成技術については、これまでに多く研究、開発がなされ、優れた商用プログラムも多い<sup>34),35)</sup>。三次元FEM解析は、自動メッシュ生成ソフトがなければ、不可能であると言っても過言ではない。一旦、幾何形状が定義されれば、自動メッシュ生成プログラムに渡すための準備は、メッシュ・サイズの設定程度であり、さほど人手を必要としない。つまり、ソリッド・モデリングによる幾何形状定義に課せられた制約をいかに緩和するかが、三次元解析を合理化する大きな鍵とも言える。本稿で提案した不整合メッシュ集合体（CMA）は隣接メッシュ間の非適合やメッシュ同士の重複を許すため、複合領域に対する幾何形状定義に課せられた制約を解消するものである。また、複合領域に限らず、

単一材料の複雑形状であっても、部分的に見れば、単純な形状になっているはずである。CMAにより複雑形状を単純形状の集まりとしてモデル化することも可能になる。

この開発のゴールは、冒頭述べた二つの要件を満足する解析システムである。決して、一貫したメッシュレス解析システムではない。CMAとEFGMの統合が、それらの要件を満足する三次元地下水浸透流解析システムを実現することを、本稿では、具体的な数値計算例により示した。また、本手法の基本性能を確認するための数値実験を実施し、次のような知見を得た。

- ①節点が増加することによる解の収束性はFEM同様、良好である。
- ②最適な影響領域の大きさは、解こうとしている問題で唯一つ決まるのではなく、節点密度にも依存する。
- ③節点密度に応じた影響領域の大きさを設定する方法を提案し、節点密度が滑らかに変遷するメッシュでは、影響領域を評価点周りの節点密度に応じて変化させることの妥当性を確認した。
- ④材料不連続面での形状関数の不連続性の影響は小さく、実用上は無視できると考えられる。

一般に、EFGMは計算効率が悪いことが欠点であると言われている。本システムでは計算効率を意識したソフトウェアのチューニングを行っていないこともあって、現状ではFEMの10倍以上の計算時間を要する。しかし、複雑な地質構造の場合、メッシュ変更に必要な時間は、著者らの経験では、数日から数週間以上を要する。たとえ計算時間が1時間から10時間になったとしても、メッシュ変更に要する時間が数日から一日に短縮されるメリットの方が大きいと考える。計算時間は、積分セルとしての要素の利用やMLSMMにおける効率的な節点収集法の採用などにより、かなり短縮できると見込んでいる。また、日進月歩のハードウェアの発展による直接的な恩恵を受けることもできる。反面、メッシュ変更における対話形式オペレーション、つまり手作業部分の効率化は、ほとんど期待できないのである。

今後は、上述の計算効率の向上に加え、要素を積分セルに利用した場合の解の精度の検討、影響領域の大きさの合理的な設定方法、大次元問題の効率的なソルバーの導入も課題と考えている。しかしながら、飽和不飽和解析等への発展は、開発スコープに入れていない。飽和不飽和解析では、不飽和特性や涵養量分布を与える必要があるが、実際には、これ

らは試行錯誤的なパラメタスタディにより設定される。調査が進み地質構造や地下施設の位置等が、詰められた時点で行うというのが現実的な戦略であろう。その時点では、メッシュの変更を頻繁に行う必要がないであろうから、本稿のEFGM+CMAではなく、従来のFEMで行うべきであると考えている。EFGMでは、MLSMMによる形状関数の作成にどうしても計算時間がかかる。メッシュを変えずに不飽和特性や境界条件等に関する多くのパラメタスタディを行うのであれば、FEMの方が有利であろう。

謝辞：本研究を進めるに当たり、中央大学理工学部土木工学科の川原睦人教授にご指導頂きました。記して感謝致します。

#### 参考文献

- 1) <http://www.jnfl.co.jp/>
- 2) <http://www.numo.or.jp/>
- 3) 核燃料サイクル開発機構：わが国における高レベル放射性廃棄物地層処分技術的信頼性—地層処分研究開発第2次とりまとめ—分冊2 地層処分の工学的技術，JNC TN1400 99-022, 1999.
- 4) 核燃料サイクル開発機構：地層処分場のレイアウトに関する検討，JNC TN8400 99-044, 1999.
- 5) 鈴木克幸：メッシュレス解析法・ボクセル解析法の動向，第3回日本計算工学会講習会教材 自動メッシュ生成の基礎と応用，pp. 55-62, 1998.
- 6) Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P.: Meshless methods: An overview and recent developments, *Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg.*, Vol.139, pp. 3-47, 1996.
- 7) 奥田洋司：計算工学におけるメッシュレス解法，計算工学，第1巻3号，pp.151-162, 1996.
- 8) 鈴木克幸，寺田賢二郎，大坪英臣，米里直樹：ボクセル情報を用いたソリッド構造の解析法，日本造船学会論文集，Vol.182, pp.595-600, 1997.
- 9) 櫻井英行，白石知成：地下施設計画のための地下水浸透流ボクセル解析，土木学会論文集，No.687/Ⅲ-56, pp.155-168, 2001.
- 10) 櫻井英行，白石知成，後藤高志：浸透流ボクセル解析における地下施設通過流量の評価法，土木学会第56回年次学術講演会講演概要集，CS1-028, pp.56-57, 2001.
- 11) Onate, E., Idelsohn, S., Fischer, T. and Zienkiewicz, O.C.: A finite point method for analysis of fluid flow problems, *Proc. of Int. Conf. on Finite Elements in Fluids - New trends and applications Venezia*, pp. 15-21, Oct. 1995.
- 12) Chati, M.K. and Mukherjee, S.: The boundary node method

- for three-dimensional problems in potential theory, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.47, pp. 1523-1547, 2000.
- 13) Yagawa, G., Yamada, T. and Kawai, H.: Some remark on free mesh method: A kind of meshless finite element method, *Proc. of ICES'95*, pp. 1572-1577, Mar.1995.
  - 14) Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L.: Element-free Galerkin methods, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.37, pp. 229-256, 1994.
  - 15) Askes, H., Pamin, J. and Borst, R.: Dispersion analysis and element-free Galerkin solutions of second- and fourth-order gradient-enhanced damage models, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.49, pp. 811-832, 2000.
  - 16) 村上章, 川端浩司, 青山成康: Element-Free Galerkin Methodによる水～土連成弾塑性解析, 農業土木学会論文集, No.214, pp. 1-7, 2001.
  - 17) Fleming, M., Chu, Y.A. and Belytschko, T.: Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.40, pp. 1483-1504, 1997.
  - 18) Krysl, P. and Belytschko, T.: The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.44, pp. 767-800, 1999.
  - 19) Barry, W. and Saigal, S.: A three-dimensional element-free Galerkin elastic and elastoplastic formulation, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.46, pp. 641-693, 1999.
  - 20) 若土耕一, 奥田洋司: 3次元CAD援用EFGMの開発, 計算工学講演会論文集, Vol.5, pp. 231-232, 2000.
  - 21) 櫻井英行: エレメント・フリー・ガラーキン法を用いた三次元地下水流動解析システムの開発, 計算工学講演会論文集, Vol.3, pp. 341-344, 1998.
  - 22) Lancaster, P. and Salkauskas, K.: Surfaces generated by moving least squares methods, *Math. Comput.*, Vol.37, No.155, pp. 141-158, 1992.
  - 23) Beissel, S. and Belytschko, T.: Nodal integration of the element-free Galerkin method, *Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg.*, Vol.139, pp. 49-74, 1996.
  - 24) 野口裕久: エレメントフリー法の基礎理論 (1: 移動最小自乗法), 講習会「わかるエレメントフリー法」テキスト, 日本機会学会, pp. 9-17, 1998.
  - 25) Cordes, L.W. and Moran, B.: Treatment of material discontinuity in the Element-Free Galerkin method, *Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg.*, Vol.139, pp. 75-89, 1996.
  - 26) Kaljevic, I. and Saigal, S.: An improved element free Galerkin formulation, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.40, pp. 2953-2974, 1997.
  - 27) 櫻井英行, 難波治之, 古賀小枝子, 古宇田亮一, 升本眞二, 原田芳金: 汎用ソリッド・モデラを用いた深成岩地域と火山岩地域の3次元地質構造可視画像化, 地質ニュース, No.502, pp. 36-41, 1996.
  - 28) 櫻井英行, 難波治之, 後藤高志, 古宇田亮一, 河野愛: 地質構造の三次元モデリングと可視化, 計算工学講演会論文集, Vol.2, pp. 503-506, 1997.
  - 29) 櫻井英行, 後藤高志, 古宇田亮一, 田代寿春, 宮島繁, 中井仁彦: 長期地質変動予測手法の開発 (その5) - 地質情報の可視化 -, 土木学会第55回年次講演会論文集, CS-117, 2000.
  - 30) Requicha, A.A.G. and Voelcker, H.B.: Solid Modeling: A historical summary and contemporary assessment, *IEEE Comput. Graphics and Appl.*, Vol.2, No.2, pp. 9-24, Mar.1982.
  - 31) <http://www.ennex.com/fabbers/StL.asp>
  - 32) <http://www.web3d.org/vrml/vrml.htm>
  - 33) <http://phase.etl.go.jp/mirrors/netlib/linpack/index.html>
  - 34) 日本数値流体力学会: 「最先端のメッシュ生成技術」講習会—Mesh Generator Seminar—講演集, 1996.
  - 35) 日本計算工学会: 自動メッシュ生成の基礎と応用, 第3回日本計算工学講習会教材, 1998.

(2002. 1. 11 受付)

## A NEW THREE-DIMENSIONAL GROUNDWATER FLOW ANALYSIS SYSTEM APPLYING THE ELEMENT-FREE GALERKIN METHOD

Hideyuki SAKURAI

A three-dimensional (3D) groundwater flow analysis system using the element-free Galerkin method (EFGM) is presented. The EFGM is a meshless method that is expected to eliminate the task of mesh generation. However, an analysis system by EFGM for complex 3D geometry has not been developed yet. In this paper, a unique mesh data called consistency-free mesh assembly (CMA) is introduced. The CMA is a simple assembly of meshes permitting incompatibility at the material interface and overlapping of meshes. This paper shows that CMA is easy to generate and use of CMA brings great advantages to EFGM. Some numerical tests are also presented to discuss the convergence of solutions and the influence of material discontinuity.