

多孔体中における水-NAPL 2相流の 数値モデルの比較

日比義彦¹・藤縄克之²・藤原幸彦³

¹正会員 基礎地盤コンサルタンツ株式会社 関東支社 (〒135-0016 東京都江東区東陽 3-22-6)

²正会員 農博 信州大学教授 工学部社会開発工学科 (〒380-8553 長野市若里 500)

³元宮城農業短期大学助教授 農業土木科 (〒982-0215 仙台市太白区旗立 2-2-1)

数値解析モデルを用いて地盤中への浸透を解析する際の適切な数値モデルは、浸潤前線で解の振動が発生しないだけでなく、解の収束性がよく、かつ、マスバランスが保たれるように特徴付けられなければならない。この研究では、流体のマスバランスと浸潤前線における解の振動に特に注目して、水-NAPL の 2 相流方程式に関する圧力型方程式、飽和度をパラメーターとするか否かにより区分される混合型と圧力飽和度型方程式に関する有限要素法により得られた数値解を比較した。各々の方程式の数値解の精度に関する調査は、圧力型方程式より混合型および圧力飽和度型方程式の方が確な結果が得られることを示している。さらに、飽和度をパラメーターとする混合型方程式は飽和度をパラメーターとしない方程式よりよい結果を得る。

Key Words: NAPL, multi-phase flow, lumping, mass balance, finite element method

1. はじめに

近年、トリクロロエチレン(TCE)などの有機溶剤やガソリンなどの鉱物油を主とする疎水性の液体 (Non-Aqueous Phase Liquid, 略して NAPL と称する) による土壌・地下水汚染が繁発している。

NAPL の移動形態は、水などの溶媒に溶解した物質が移流分散によって移動する形態とは相違し、多相の流れとなる。例えば、ガソリンなどの水より密度の小さい NAPL が多量に地下に漏洩すると、NAPL は重力と毛管力により通気帯中を流下し、毛管水帯に達すると水平方向に広がる。これに対して、トリクロロエチレン(TCE)などの有機溶剤で水より密度の大きい NAPL が漏洩した場合は、さらに地下水を降下し、難透水層まで到達する¹⁾。

従って、NAPL の通気帯における浸透過程は水-NAPL-空気の 3 相流となり、地下水帯では水-NAPL の 2 相流となる。本研究では、3 相流解析の前段階として、水-NAPL 2 相流の解析手法について検討を行う。

さて、水-NAPL 2 相流において各流体の密度を一定とすると、各相の Richards の方程式は次式で与えられる。

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = \nabla \cdot K_{rw} K_s \nabla (\psi_w + z) \quad (1)$$

$$\phi \frac{\partial (1 - S_w)}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{K_{ro} K_s}{\mu_r} \nabla (\psi_o + \rho_r z) \quad (2)$$

ここで、 z は上向きを正とする鉛直方向の座標を示し、 t は時間を示す。さらに、 S_w は水の飽和度 (無次元)、 ϕ は間隙率 (無次元)、 ψ_w は水の圧力水頭 (L)、 ψ_o は NAPL の圧力水頭 (L)、 K_{rw} と K_{ro} は水と NAPL の相対透過度 (無次元)、 K_s は飽和透水係数 (L/T)、 ρ_r は水の密度に対する NAPL の相対密度 (無次元)、 μ_r は水の粘性係数に対する NAPL の相対粘性係数 (無次元) である。なお、 S_o を NAPL の飽和度とすると $S_w + S_o = 1$ となり、毛管圧 ψ_c は $\psi_c = \psi_o - \psi_w$ で与えられる。式(1)と式(2)は、流体の流れを圧力と飽和度で記述した混合型の支配方程式である。

ここで、式(1)と式(2)を ψ_w と ψ_o を変数とする圧力型の支配方程式に変形すると以下の式ようになる²⁾。

$$-C(\psi_c) \frac{\partial \psi_w}{\partial t} + C(\psi_c) \frac{\partial \psi_o}{\partial t} = \nabla \cdot K_{rw} K_s \nabla (\psi_w + z) \quad (3)$$

$$C(\psi_c) \frac{\partial \psi_w}{\partial t} - C(\psi_c) \frac{\partial \psi_o}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{K_{ro} K_s}{\mu_r} \nabla (\psi_o + \rho_r z) \quad (4)$$

ここで、 $C(\psi_c) = \phi \partial S_w / \partial \psi_c$ で、 $c(\psi_c)$ は比水分容量である。

水-NAPL 2 相流の解析では、様々な方程式と数値解法の組合せが可能であるが、組合せの仕方によっては解の

精度が大きく異なる。Celia and Bouloutas³⁾は、圧力型および混合型で表した不飽和浸透流の支配方程式を有限要素法と差分法で解いて、マスバランスを比較し、圧力型支配方程式を基礎とした数値解法では領域の境界より浸入した流体の流量に対して領域内に貯留された流体の体積が10%以上小さくなると報告している。一方、混合型支配方程式を用いた場合は、浸透した流体流量と領域内に溜まる流体の体積はほぼ等しくなるが、圧力型支配方程式または混合型支配方程式を通常の有限要素法により離散化した場合、両者ともに湿潤前線（流体の置換過程で毛管圧が急激に変化する箇所）付近で数値振動が生じ、その原因は時間マトリックスの処理方法にあると結論付けている。なお、Milly⁴⁾もマスバランスおよび湿潤前線付近での数値振動の問題について同様の報告をしている。そこで、Celia and Bouloutas³⁾は混合型支配方程式を離散化する方法として、 ψ_w を未知変数とし、 S_w をパラメーターとする方法を提案した。すなわち、混合型でありながら圧力のみを未知変数とし、時間マトリックスはLumpingによるマトリックスの対角化を行うことにより湿潤前線付近での数値振動を解消した。

本報では、Celia and Bouloutas³⁾が飽和・不飽和浸透流解析（1相流）のために開発した Mixed-form Picard iteration をさらに発展させ、水-NAPL の2相流の解析に応用する。以下では、この解析モデルをハイブリッド型 Galerkin 有限要素法 (GFEM) と称する。従来の飽和・不飽和浸透流解析でよく用いられてきた圧力を変数とする支配方程式に単純 GFEM を適用するモデル解析法（以下、圧力型 GFEM と称する）、Thomson et al.⁵⁾ が用いた方法である圧力と飽和度を変数とする支配方程式に Fully up wind GFEM を適用するモデル解析法（以下、混合型 Fully up wind GFEM と称する）およびハイブリッド型 GFEM の3つの方法の精度をマスバランス、解の安定性および実験結果への適用性の観点から比較検討を行う。

2. ハイブリッド型 GFEM による水-NAPL 2相流の解析法

式(1)と式(2)の時間項に後退差分を適用すると次式が得られる。

$$\phi \frac{S_w^{n+1,m+1} - S_w^n}{\Delta t} - \nabla \cdot K_{rw}^{n+1,m} K_s \nabla \psi_w^{n+1,m+1} - \frac{\partial K_{rw}^{n+1,m} K_s}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

$$-\phi \frac{S_w^{n+1,m+1} - S_w^n}{\Delta t} - \nabla \cdot \frac{K_{ro}^{n+1,m} K_s}{\mu_r} \nabla \psi_o^{n+1,m+1} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_r K_{ro}^{n+1,m} K_s}{\mu_r} \right) = 0 \quad (6)$$

ここで、添え字 n は時間ステップ、 m は繰り返し回数である。次に、 $S_w^{n+1,m+1}$ をテーラー展開すると次式を得る。

$$S_w^{n+1,m+1} = S_w^{n+1,m} + \left(\frac{\partial S_w}{\partial \psi_c} \right)^{n+1,m} (\psi_c^{n+1,m+1} - \psi_c^{n+1,m}) + O(\delta^2) \quad (7)$$

式(7)の高次の項を無視して、式(5)と式(6)に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} C^{n+1,m} \delta_o^m - \frac{1}{\Delta t} C^{n+1,m} \delta_w^m - \nabla \cdot K_{rw}^{n+1,m} K_s \nabla \delta_w^m \\ & = \nabla \cdot K_{rw}^{n+1,m} K_s \nabla \psi_w^{n+1,m} + \frac{\partial K_{rw}^{n+1,m} K_s}{\partial z} \frac{S_w^{n+1,m} - S_w^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\Delta t} C^{n+1,m} \delta_o^m + \frac{1}{\Delta t} C^{n+1,m} \delta_w^m - \nabla \cdot \frac{K_{ro}^{n+1,m} K_s}{\mu_r} \nabla \delta_o^m \\ & = \nabla \cdot \frac{K_{ro}^{n+1,m} K_s}{\mu_r} \nabla \psi_o^{n+1,m} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_r K_{ro}^{n+1,m} K_s}{\mu_r} \right) + \phi \frac{S_w^{n+1,m} - S_w^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (9)$$

ここに、 $\delta_\alpha^m = \psi_\alpha^{n+1,m+1} - \psi_\alpha^{n+1,m}$ 、 $\alpha \in \{w, o\}$ である。

なお、飽和度と毛管圧との関係は後述する水分特性曲線の方程式によって関係付けられるので、式(9)の $S_w^{n+1,m}$ は毛管圧 $\psi_c^{n+1,m}$ に対する水分特性曲線により求め、 S_w^n は ψ_c^n より求めることができる。

式(8)と式(9)をGFEMにより離散化したものがハイブリッド型GFEMである。なお、圧力型支配方程式である式(3)と式(4)の時間項については後退差分で離散化し、空間については通常のGFEMにより離散化したものが圧力型GFEMである。

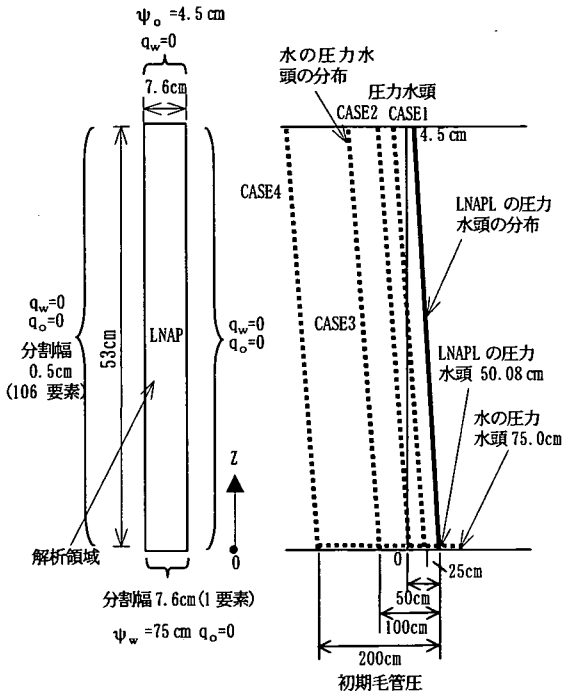
3. ハイブリッド型 GFEM と圧力型 GFEM の比較

以下では、最初に一次元の浸水過程および排水過程のマスバランスについて検討する。Thomson et al.⁵⁾ は水-NAPL における排水過程の実験を行っており、ここでは、さらに、その実験結果とハイブリッド型GFEMおよび圧力型GFEMの解析結果を比較する。

なお、計算初期の時間間隔は 10^{-4} 秒程度とし、その後については圧力型GFEMで繰り返し回数が10回前後、ハイブリッド型GFEMで最大500回程度まで計算させ、解が収束した場合には時間間隔を2倍にし、収束しない場合には時間間隔を増加させないか、または、減少させた。ちなみに、圧力型GFEMはハイブリッド型GFEMのように繰り返し計算の回数を増やしても収束しない。また、計算にはいずれも四辺形要素（二次元）を用いる。

表-1 供試体と液体の物理特性(24℃)

液体の種類	液体の物理特性		供試体の物理特性	
	密度 (g/cm ³)	粘性係数 (Pa · s × 10 ⁻³)	間隙率 (-)	飽和透水係数 (cm/s)
水	1.00	0.914	(-)	(-)
22Hoil	0.86	38.56	0.37	4.243 × 10 ⁻²



(a) 解析モデルと境界条件

(b) 初期状態

図-1 解析モデル, 境界条件と初期条件の設定 (浸水過程)

(1) 浸水過程

a) 領域の離散化

直径 7.6 cm, 長さ 53 cm の円筒土壌カラムに砂を充填し, 水と LNAPL (密度が水より小さい NAPL) を用いた 2 相流のシミュレーションを行った。なお, 解析領域は図-1 (a) に示すように鉛直方向に 53 cm, 水平方向に 7.6 cm の二次元領域とし, 鉛直方向に 0.5 cm (106 要素), 水平方向に 7.6 cm (1 要素) の等間隔な四辺形要素で領域を分割した。また, 線形形状関数 Φ_i を用いて変数 ξ_α を

$$\xi_\alpha = \sum_{i=1}^N \xi_{\alpha i} \Phi_i, \quad \xi_\alpha \in \{\psi_w, \psi_o, S_w, \delta_w, \delta_o\} \quad (10)$$

で近似する。ここで, N は全節点数である。

b) 水分特性曲線と相対透過度

表-1 に Thomson et al.⁵⁾ の実験に用いられた砂と LNAPL の物理特性を示す。なお, LNAPL には 22H oil が使用されており, 解析では表-1 の値を採用した。

毛管圧 ψ_c と水の飽和度 S_w の関係を図-2 の浸水過程の水分特性曲線に示す。なお, 図-2 の排水過程は Thomson et al.⁵⁾ の実験結果であり, 浸水過程は 22H oil (潤滑油に相当) の残留飽和度 S_{or} が 0.2 になるように Thomson et al.⁵⁾ の実験結果を修正したものをを用いる。水分特性曲線は van Genuchten モデル²⁾ を用いると次の

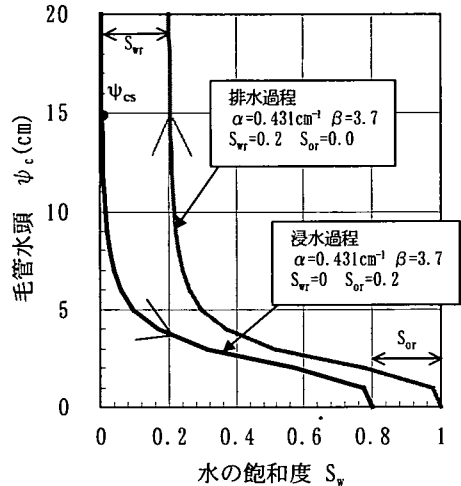


図-2 水-NAPL の 2 相における水分特性曲線

ように表される。

$$S_{we} = \frac{(S_w - S_{wr})}{(1 - S_{wr} - S_{or})} = \frac{1}{\{1 + (\alpha \psi_c)^\beta\}^\gamma} \quad (11)$$

ここで, S_{we} は水の有効飽和度, S_{wr} と S_{or} はそれぞれ水と LNAPL の残留飽和度である。また, α, β, γ ($\gamma = 1 - 1/\beta$) は, van Genuchten モデルの定数で, 土質に固有の定数である。

一方, 水の飽和度と相対透過度との関係は Mualem モデル^{1), 2), 5)} を用いると以下のように表すことができる。

$$K_{rw} = S_{we}^{1/2} \left\{ 1 - (1 - S_{we}^{1/\gamma}) \right\} \quad (12)$$

$$K_{ro} = (1 - S_{we})^{1/2} (1 - S_{we}^{1/\gamma})^{2\gamma} \quad (13)$$

c) 初期条件および境界条件

Thomson et al.⁵⁾ の実験に従い, 初期状態ではカラムが LNAPL で満たされているように $S_w = 0, S_o = 1$ とし, 水の圧力水頭と LNAPL の圧力水頭の初期値は図-1 (b) に示すように設定した。圧力水頭を変数とする場合には, 初期条件 $S_w = 0, S_o = 1$ を満たすように初期毛管圧を設定する必要がある。なお, $S_w = 0, S_o = 1$ となるように圧力水頭の初期条件を設定するには, 水の残留飽和度が 0 となる毛管圧 ψ_{cs} より初期毛管圧を大きくする必要がある (図-2 参照)。初期状態では, 領域内は LNAPL で満たされているため, LNAPL の圧力水頭は静水圧分布

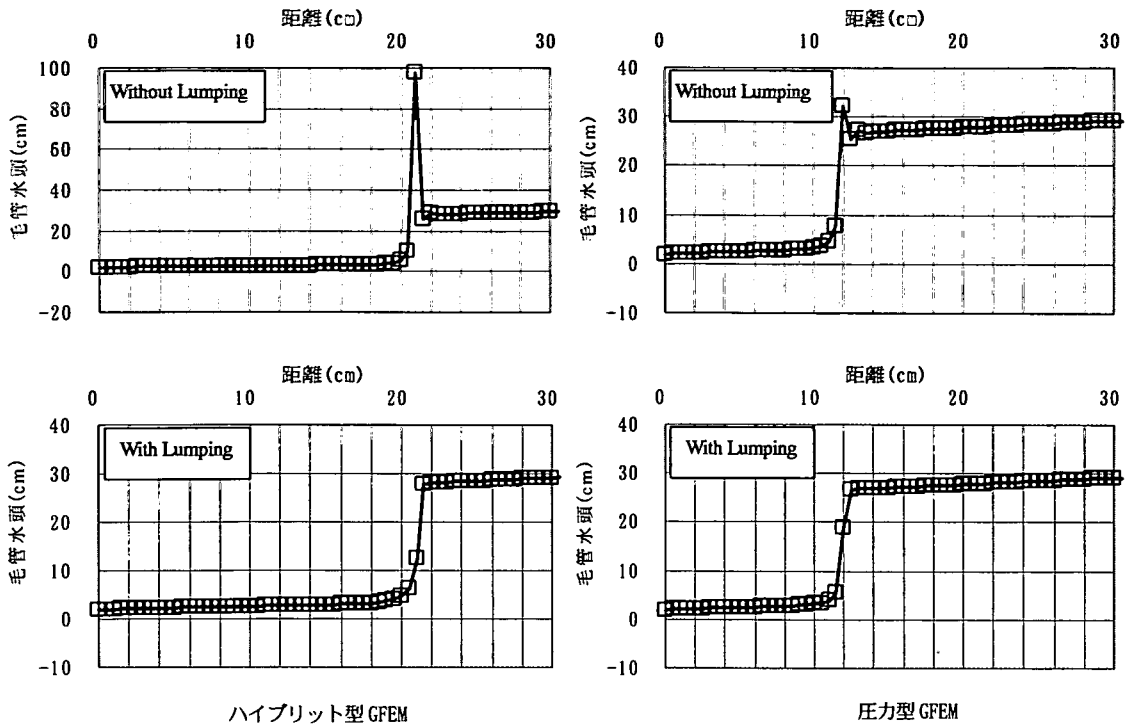


図-3 浸水過程における時間マトリックスの対角化の効果 (経過時間 5000 秒)

$\psi_o = \rho_f(53 - Z) + 4.5$ (ただし, Z はカラム下端に原点をとり, 鉛直上向き, $\rho_f = 0.86$) で与える. 水の圧力水頭は, LNAPL の圧力水頭を用いて $\psi_w = \psi_o - \psi_{ic}$ として設定する. ここでは, 初期毛管圧 ψ_{ic} を解析領域の下端 ($Z=0\text{cm}$) で 25cm(CASE1), 50cm(CASE2), 100cm(CASE3), 200cm(CASE4) とする 4 ケース, すなわち $\psi_w = -Z + 25.08$, $\psi_w = -Z + 0.08$, $\psi_w = -Z - 49.92$, $\psi_w = -Z - 149.92$ に対して計算を行う.

d) 解析結果と考察

いま, 式(10)の近似式を用いて時間項を $F(\xi_\alpha) \partial \xi_\alpha / \partial t$ で一般化した場合, i 節点に対する差分陰解法近似では,

$$F \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t} \approx F_i^{n+1} \frac{\xi_{\alpha i}^{n+1} - \xi_{\alpha i}^n}{\Delta t} \quad (14)$$

となり, 時間マトリックスは対角成分 (i 行, i 列) のみ非 0 要素をもつ. 一方, i 節点に対するガラーキン FEM 近似では,

$$\int_D \Phi_j F \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t} dR = \int_D \Phi_j \left(\sum_{j=1}^N F_j \Phi_j \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{d \xi_{\alpha k}}{dt} \Phi_k \right) dR \quad (15)$$

となる. ここに, D は解析領域である.

一次元の場合, 式(15)は以下のようなマトリックスをもち, 対角成分以外にも非 0 要素が存在する.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_{ii-1} & A_{ii} & A_{ii+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{N-N-2} & A_{N-N-1} & A_{N-N} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & A_{NN-1} & A_{NN} \end{bmatrix} \quad (16)$$

ここで, A_{ij} は式(15)のマトリックスの要素である.

そこで, 式(16)のマトリックスにおいて, i 行のマトリックスの要素をすべて対角線上に累積すると以下のようになる.

$$\begin{bmatrix} A_{11} + A_{12} & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_{ii-1} + A_{ii} + A_{ii+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & A_{NN-1} + A_{NN} \end{bmatrix} \quad (17)$$

上記のような時間マトリックスの処理を lumping または時間マトリックスの対角線化と称する. 式(17)のマトリックスを用いると式(15)は以下の式(18)のように変形できる.

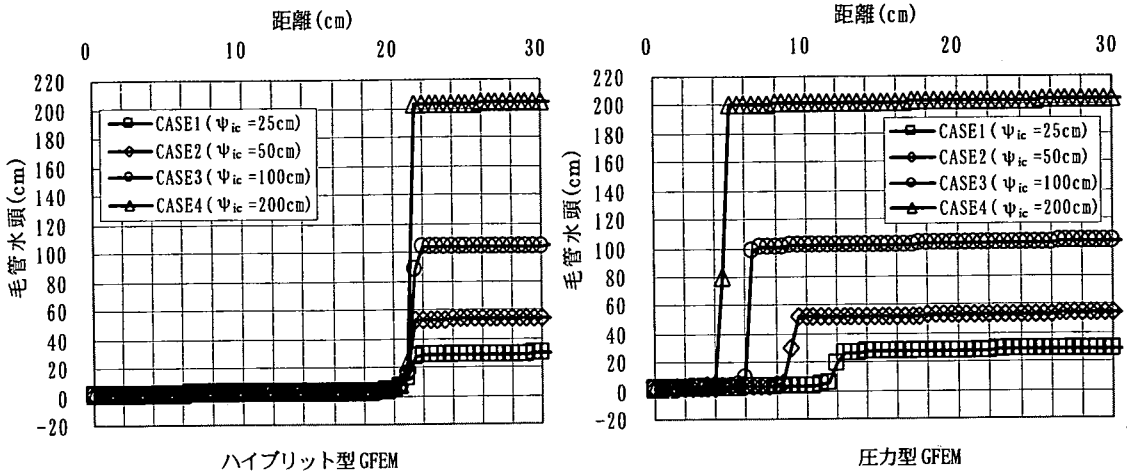


図-4 浸水過程における毛管圧の解析値 (経過時間 5000 秒)

$$\int_D \Phi_i F \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial t} dR = \frac{d\xi_{\alpha i}}{dt} \int_D \Phi_i \left(\sum_{j=1}^N F_j \Phi_j \right) dR \quad (18)$$

以下では、時間マトリックスの Lumping による効果について検討する。

図-3 にハイブリット型 GFEM と圧力型 GFEM の時間マトリックスを Lumping した場合としない場合の計算結果を示す。なお、 $\psi_{ic} = 25\text{cm}$ とした。ハイブリット型 GFEM と圧力型 GFEM はともに時間マトリックスを Lumping しないと湿潤前線付近で解の振動が生じることがわかる。一方、Lumping すると湿潤前線付近で解の振動は生じない。このことより、ハイブリット型 GFEM と圧力型 GFEM はともに時間マトリックスを Lumping する必要があることがわかる。

図-4 は初期毛管圧を 25, 50, 100, 200cm とした場合の 5000 秒後における毛管圧の解析結果を示したもので、時間マトリックスはすべて Lumping されている。圧力型 GFEM で求められた湿潤前線の到達距離は、初期毛管圧の選定によって著しく変化し、初期毛管圧が大きくなるにつれて湿潤前線の到達距離が短くなっている。一方、ハイブリット型 GFEM を用いた場合、初期毛管圧の設定に関係なく湿潤前線の到達距離は一定となることがわかる。浸水過程の初期条件で要求される条件は $s_w = 0$ に対する毛管圧であるが、前述のようにその毛管圧は一義的に定めることはできない。しかしながら、設定した初期毛管圧にかかわらず湿潤前線の到達距離は一定である必要がある。

ハイブリット型 GFEM で計算した比水分容量ならびに LNAPL と水の相対透過度分布を図-5 に示す。図-5 によると比水分容量は湿潤前線下流側で 0 となり、水の相対透過度は浸水域で上昇し、LNAPL の相対透過度は低下して

いる。これは、水の浸入により領域内で LNAPL が水に置換されていることを示す。また、比水分容量および相対透過度は毛管圧分布と同様に初期毛管圧の設定値に関係なく同じ分布となっていることに注目したい。

次に、解析精度を把握するためマスバランスについて検討する。今回の解析は、下端境界から領域内に水が流入する浸水過程である。従って、水の流入量に相当する分だけ解析領域内の体積含水率分布が変化している必要がある。そこで、境界より流入した体積と領域内に貯留された水の体積を調べることでマスバランスが検討できる。

いま、領域内に貯留された水の体積を境界からの水の流入体積で除した値としてマスバランス MB を定義すると MB は次式で計算できる。

$$MB = \left\{ \sum_{i=2}^{N/2-1} (\theta_{2i}^n - \theta_{2i}^0) \Delta x \Delta z + (\theta_N^n - \theta_N^0) \Delta x \Delta z / 2 + (\theta_2^n - \theta_2^0) \Delta x \Delta z / 2 \right\} / \sum_{j=1}^n (q_{in}^j - q_{out}^j) \Delta t_j \quad (19)$$

ここで、上付の添え字 j は時間ステップ、0 は初期状態、 n は最終ステップ、 q_{in} と q_{out} はそれぞれカラム下端からの流入量とカラム上端からの流出量を表す。 Δx と Δz は、それぞれ水平方向と鉛直方向の要素の分割幅であり、 Δt_j は時間ステップ j の時間間隔である。

図-4 の解析結果に対するマスバランスを図-6 に示す。圧力型 GFEM のマスバランスは、流入量より貯留量が少なく、初期毛管圧が大きくなるほど小さくなり、初期毛管圧が 200cm の場合には 0.1 以下まで減少している。図-4 の圧力型 GFEM の計算において初期毛管圧を大きくすると湿潤前線の到達距離が小さくなった原因はマスバランスがとれていないことによると考えられる。これに対して、ハイブリット型 GFEM のマスバランスは 1% 程度の

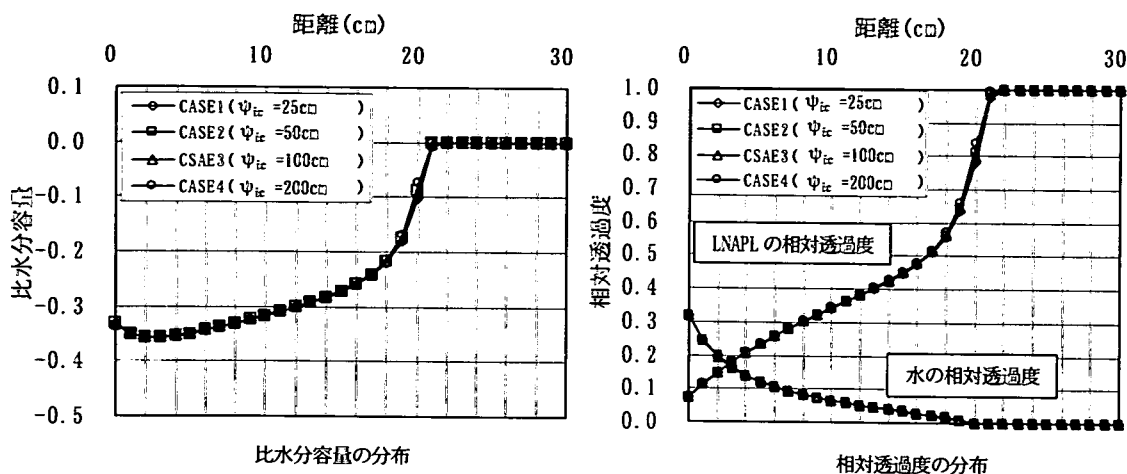


図-5 浸水過程における比水分容量と相対透過度の解析値 (ハイブリット型 GFEM, 経過時間 5000 秒)

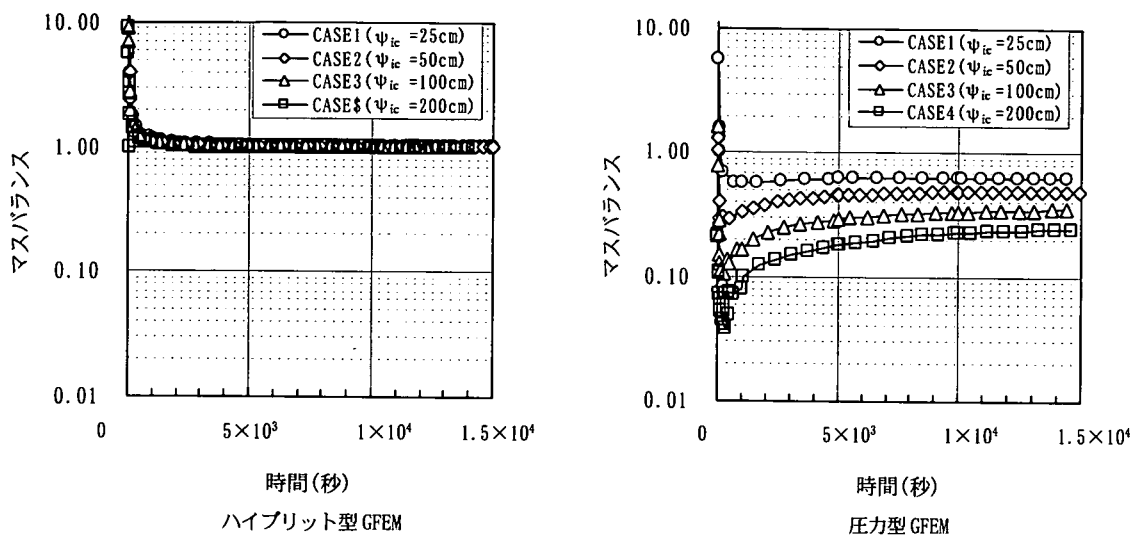


図-6 浸水過程のマスバランス (初期毛管圧 25cm, 50cm, 100cm, 200cm)

誤差はあるが、初期毛管圧の設定に関わらず概ね1となっている。従って、ハイブリット型 GFEM では、マスバランスが維持されていると考えられる。

なお、ハイブリット型 GFEM 解析の最大時間間隔を CASE1 で 50 秒、CASE2 で 25 秒、CASE3 で 50 秒、CASE4 で 25 秒としたが、時間間隔によって解析結果に大きな影響は生じなかった。しかし、圧力型 GFEM は、ハイブリット型 GFEM と違って時間間隔を大きくすると解の収束性が悪くなった。

(2) 排水過程

a) 領域の離散化

ここでは、浸水過程と同じモデルを用いて鉛直一次元浸透のシミュレーションを行い、Thomson et al.⁹⁾の実験

結果と比較する。

b) 水分特性曲線と相対透過度

試料および液体の物理特性も、浸水過程と同様とする。なお、毛管圧と水の飽和度の関係は、図-2 に示す排水過程の水分特性曲線を用いる。

c) 初期条件および境界条件

浸水過程とは逆に、水で飽和したカラムに LNAPL が下端より上端へと浸入するケースを解析する (図-7 (a) 参照)。従って、水の初期飽和度 $S_w = 1$ 、LNAPL の初期飽和度 $S_o = 0$ となるように水と NAPL の圧力水頭の初期値を設定する。

初期毛管圧が 0 以下であれば、 $S_w = 1$ 、 $S_o = 0$ となる。そこで、図-7 (b) に示すように $\psi_w = 57.5 - z$ とし、LNAPL の圧力水頭は $\psi_o = \psi_{ic} + \psi_w$ であるから、Case1

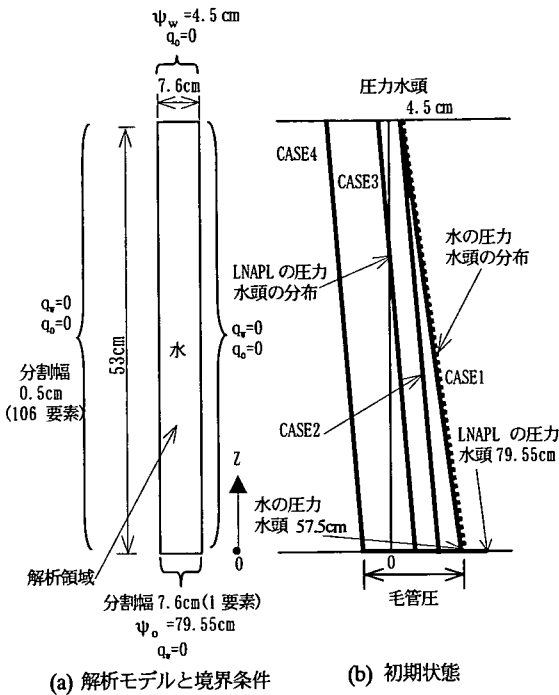


図-7 解析モデル、境界条件と初期条件の設定 (排水過程)

として毛管圧が解析領域全体で0 ($\psi_o = \psi_w$), Case2として毛管圧が解析領域上端で0 ($\psi_o = 4.5 + \rho_l(53 - Z)$), Case3とCase4として解析領域上端で-10cm ($\psi_o = -5.5 + \rho_l(53 - Z)$), -50cm ($\psi_o = -45.5 + \rho_l(53 - Z)$)となる4ケースについて解析を行う。

d) 解析結果と考察

図-8に時間マトリックスをLumpingしたハイブリット型GFEMと圧力型GFEMにより解析した5000秒後の毛管圧分布を示す。圧力型GFEMを用いた解析結果では、浸水過程と同様に湿潤前線の到達距離が初期毛管圧の値に大きく依存し、初期毛管圧が小さくなるほど湿潤前線の到達距離が短くなっている。これに対して、ハイブリット型GFEMより求めた浸潤距離は初期毛管圧の値に依存せず、湿潤前線の到達距離はほぼ一定となっている。排水過程の初期条件で要求される条件は $S_w = 1$ に対する毛管圧である。浸水過程と同様に、その毛管圧は一義的に定めることはできない。本ケースも初期毛管圧にかかわらず湿潤前線の到達距離は一定である必要がある。なお、初期毛管圧を-50cmとしたCase4の場合は、ハイブリット型GFEMの解は収束したが、圧力型GFEMの解は収束しなかった。そのため、Case4の場合に対する圧力型GFEMの解析結果は図-8に示されていない。

次に、前述の式(19)を用いて、マスバランスを検討する。なお、排水過程では、式(19)の分母に領域の下端境界より浸入したLNAPLの体積を、分子には領域内に貯留されたLNAPLの体積をとる。図-9は、排水過程におけ

るハイブリット型GFEMと圧力型GFEMによるマスバランスを示したもので、圧力型GFEMでは0.4~0.8の範囲となった。これに対して、ハイブリット型GFEMでは0.94~0.97で、浸水過程におけるハイブリット型GFEMのマスバランス誤差が約0.01であったことを考えると、排水過程のマスバランス誤差はやや大きいですが、圧力型GFEMに比べると十分満足できる結果となった。なお、図-8の圧力型GFEMにおいて初期毛管圧を小さくすると湿潤前線の到達距離が短くなったが、浸水過程と同様に、この原因もやはりマスバランスがとれていないことにあると考えられる。

以上より、圧力型GFEMでは、マスバランスが維持されないが、ハイブリット型GFEMではどのような初期毛管圧でもマスバランスが維持され、初期条件の設定で特に精度上の制限を受けることはないことがわかる。

4. 実験結果とハイブリット型GFEMによる解析結果との比較

(1) 22Hoilを用いた排水過程

Thomson et al.⁵⁾は、図-10に示すような直径7.6cm、長さ57.5cmの円柱状アクリルパイプに砂を充填した水-22H oil 2相流の排水試験を実施し、水の圧力水頭と水の飽和度を変数とする混合型支配方程式をFully up wind GFEMで解析して実験結果と比較している。この実験は、最初に試料を水で飽和させ、その後にかラム下端よりLNAPLを浸入させるものである。その際のかラム下端におけるLNAPLの圧力水頭は79.55cmで、試料上端における水の圧力水頭は4.5cmである。ハイブリット型GFEMの初期条件は $\psi_w = 57.5 - Z$ および $\psi_o = 4.5 + \rho_l(53 - Z)$ (前記のcase2に相当)とし、混合型Fully up wind GFEMの初期条件は $\psi_w = 57.5 - Z$ および $S_w = 1.0$ とした。なお、LNAPLの飽和度は、水とNAPLの熱伝導率の違いにより測定する熱プローブ法により求められており、実験における熱プローブの設置位置はかラム下端より20.5cmと38cmである。実験に関わる諸元は表-1に示してある。

図-11は、Thomson et al.⁵⁾の実験結果、解析結果とハイブリット型GFEMの解析結果を比較したものである。プローブ1の位置におけるLNAPLの到達時間ならびにLNAPLの最大飽和度については、ハイブリット型GFEMの解析結果ではThomson et al.の解析結果とほぼ同じ値となり、実験値とも比較的よく合っている。一方、プローブ2の位置では、ハイブリット型GFEMで求めた湿潤前線の到達時間は、Thomson et al.の実験値ならび解析結果よりも若干遅くなっている。しかし、LNAPLの飽和度が最大値に近づくほど、ハイブリット型GFEMの解析結果は実験結果とよく一致していることがわかる。

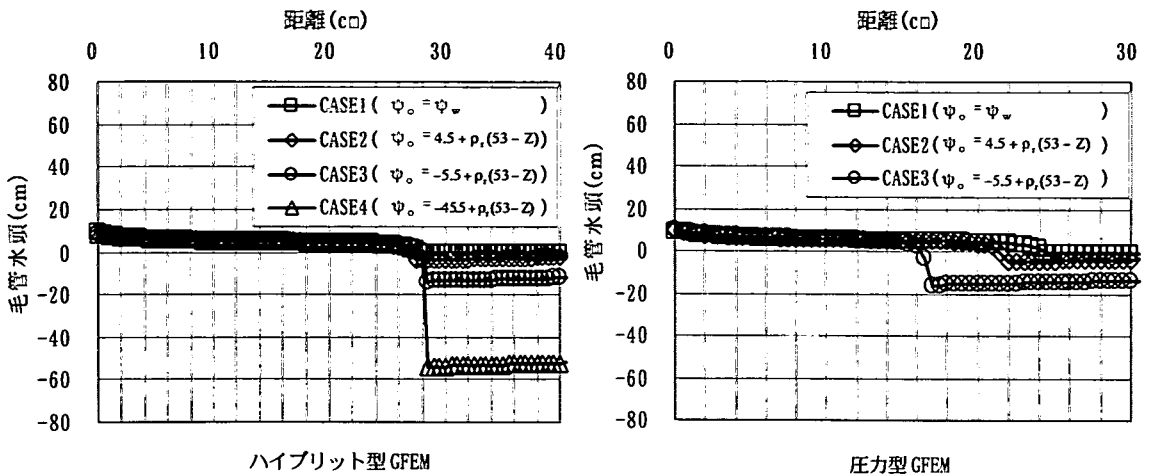


図-8 排水過程における解析結果 (経過時間 5000 秒)

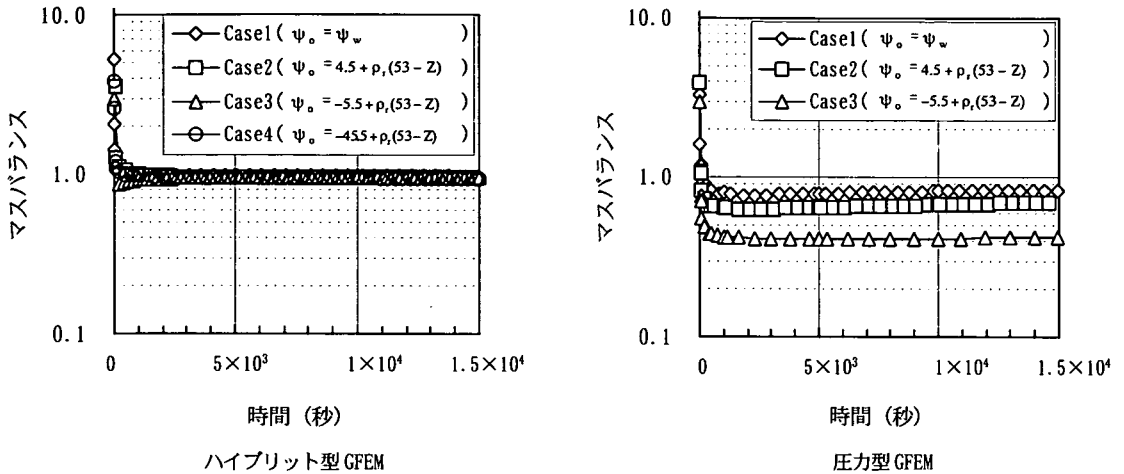


図-9 排水過程のマスバランス

図-12は、混合型 Fully up wind GFEM とハイブリット型 GFEM のマスバランスを示したものである。ハイブリット型 GFEM では、計算初期のマスバランスはやや悪いものの、時間が経過するにともない次第に 1 に近くなった。ハイブリット型 GFEM の精度は全体的に混合型 Fully up wind GFEM よりよいことが同図よりわかる。

なお、ハイブリット型 GFEM では最大時間間隔を CASE1 で 50 秒、CASE2 で 10 秒、CASE3 で 20 秒、CASE4 で 25 秒と変化させたが、解析結果に大きな影響は生じなかった。また、圧力型 GFEM は、ハイブリット型 GFEM と違って時間間隔を大きくすると解の収束性が悪くなる。

(2) 灯油を用いた排水過程

Thomson et al.⁹⁾は、灯油についてもガラス製円筒カラムを用いて同様な実験を実施している。この実験で用い

たカラムの長さは 78.5cm で、熱プローブ 1 はカラム下端より 24cm の位置に、熱プローブ 2 はカラム下端より 49cm の位置に設置されている。そこで、以下で灯油の実験についても検討する。

a) 解析に用いた定数と領域の離散化

表-2 に計算に用いた水と灯油の物理特性を示す。また、表-3 は灯油を用いた浸透試験の諸条件を示す。ケース C1 の飽和透水係数は $6.212 \times 10^{-2} \text{cm/s}$ 、動水勾配は 1.28 で、ケース C2 の飽和透水係数は $4.861 \times 10^{-2} \text{cm/s}$ 、動水勾配は 1.18 である。図-13 は供試体に対する水と灯油の水分特性曲線を示したものである。

領域の離散化は前記した 22Hoi1 の場合と同様にカラム縦方向 (灯油の侵入方向) を 0.5cm、横方向を 7.6cm のピッチでメッシュ分割した。

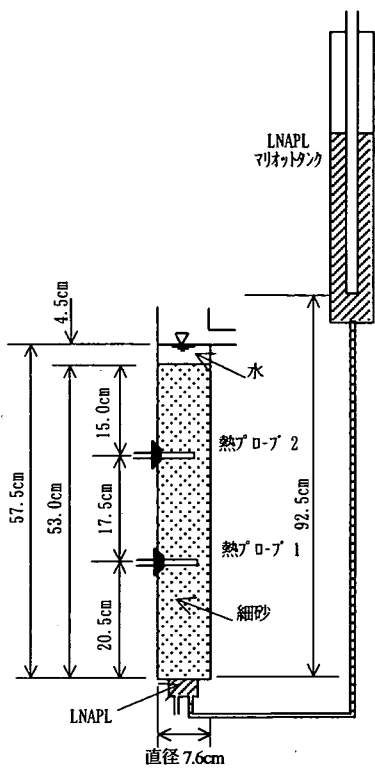


図-10 Thomson et al.⁹⁾の22Hoil 浸透実験装置

表-2 液体の物理特性 (21℃)

液体の種類	密度 (g/cm ³)	粘性係数 (Pa · s × 10 ⁻³)
水	1.00	0.986
灯油	0.78	1.91

b) 境界条件と初期条件

表-3 に解析に用いた境界条件と初期条件を示す。灯油の境界条件は、カラム下端で圧力水頭を一定とし、カラム上端を不透水境界とした。一方、水の境界条件は、カラム下端を不透水境界とし、カラム上端で圧力水頭を一定とした。

また、水および NAPL の初期条件は静水圧とした。

c) 解析結果

図-14 に、混合型 Fully up wind GFEM およびハイブリット型 GFEM による解析結果と実験結果を示す。ケース C1 では、プローブ1の位置で Thomson et al.⁹⁾の混合型 Fully up wind GFEM の解析結果とハイブリット型 GFEM の解析結果はほぼ一致し、両者ともに実験結果に近い値が得られている。灯油がプローブ2の位置に到達する時間は、両者ともに数分程度実験結果より早い。ハイブリット型 GFEM より求めた値のほうが Thomson et al. の解析結果より実験結果に少し近い。ケース C2 のプローブ1の位置では Thomson et al. の解析結果よりハイブリッ

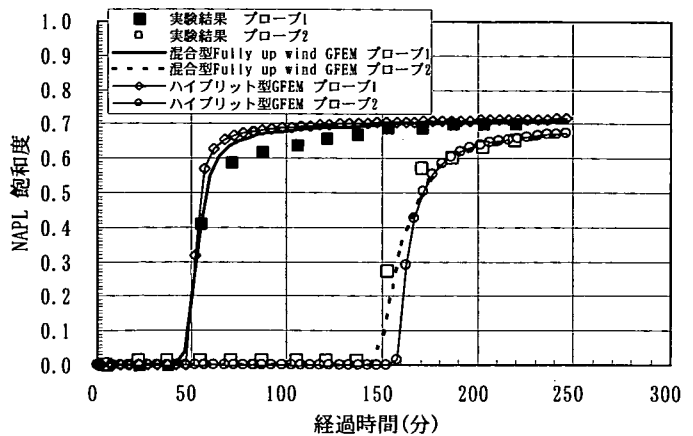


図-11 ハイブリット型 GFEM, 混合型 Fully up wind GFEM による解析結果と Thomson の実験結果の比較

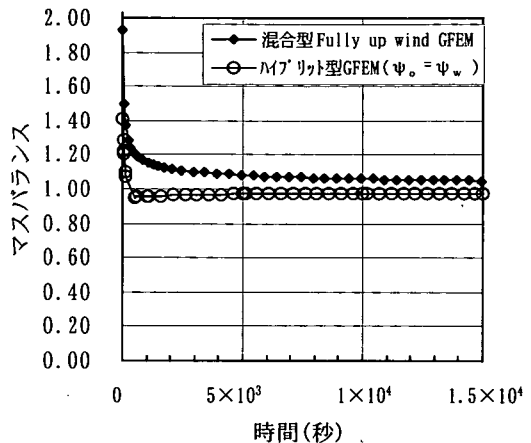


図-12 混合型のマスバランス (排水過程)

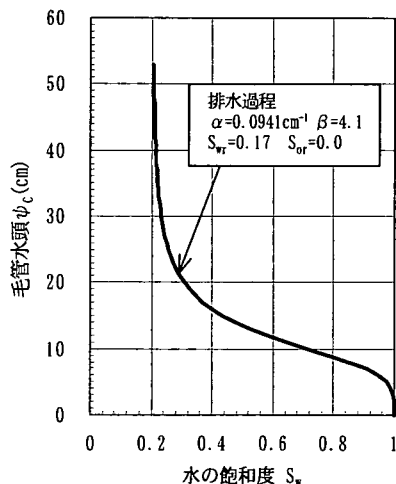


図-13 水と灯油の2相における水分特性曲線

ト型 GFEM の解析結果の方が若干実験結果より遅れているが、プローブ2の位置では、逆に Thomson et al. の解析

表-3 試料の物理特性と試験および解析条件

計算 ケース	試料の物理特性		境界条件				初期条件		
	間隙率 (-)	飽和透水係数 (cm/s)	試料長 (cm)	灯油 (cm)		水 (cm)		灯油の圧力水頭 (cm)	水の圧力水頭 (cm)
				カラム 下端	カラム 上端	カラム 下端	カラム 上端		
C1	0.33	6.212×10^{-2}	59.5	$\psi_o = 122.0$	$q_o = 0$	$q_w = 0$	$\psi_w = 19.0$	$\psi_o = 19.0 + 0.78(40.5 - Z)$	$\psi_w = 40.5 - Z$
C2	0.37	4.861×10^{-2}	67.5	$\psi_o = 116.5$	$q_o = 0$	$q_w = 0$	$\psi_w = 11.0$	$\psi_o = 11.0 + 0.78(56.5 - Z)$	$\psi_w = 56.5 - Z$

(Zはカラム下端を0とする)

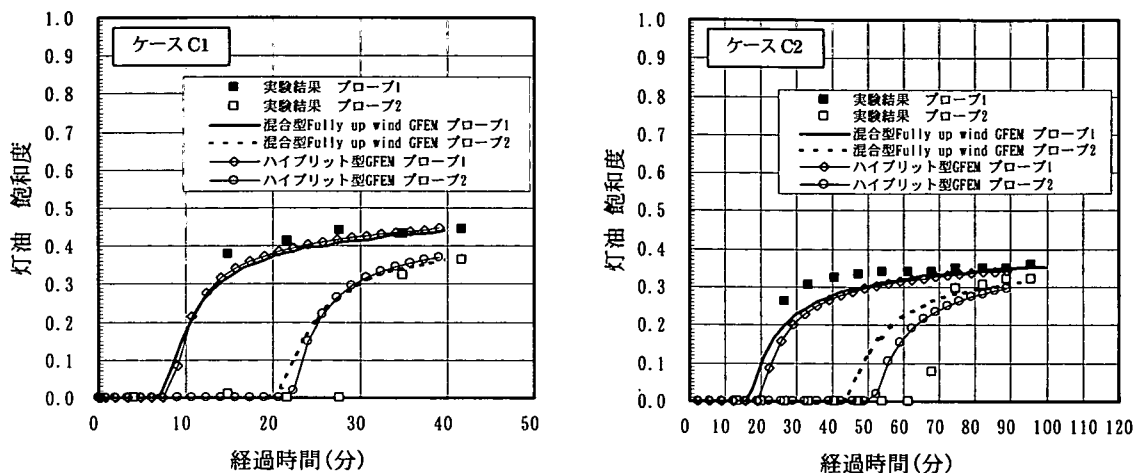


図-14 水と灯油の2相流におけるハイブリット型GFEMによる解析結果とThomsonの実験結果の比較

結果よりハイブリット型GFEMの解析結果の方がかなり実験結果に近くなっている。

以上より、飽和度と圧力水頭を変数とする混合型 Fully up wind GFEM よりハイブリット型GFEM のほうが若干精度がよいと考えられる。

5. おわりに

本報では、圧力を変数とし飽和度をパラメーターとして利用するハイブリット型GFEMを水-NAPL 2相流へ適用し、圧力を変数とし飽和度をパラメーターに利用しない圧力型 GFEM および飽和度と圧力を変数とする混合型 Fully up wind GFEM による解析結果と比較して次の結論を得た。

各手法の特色と本研究の結論を整理すると表-4 のようになる。以下に結論の概要を述べる。

①混合型 Fully up wind GFEM では直接一義的に初期条件が設定できる。これに対して、圧力型およびハイブリット型 GFEM では、初期条件の設定は一義的でなく、毛管圧

を用いて間接的に設定する⁶⁾。しかし、圧力型 GFEM では初期毛管圧により解析結果が左右されるが、ハイブリット型 GFEM では、初期毛管圧を表のように設定すれば、解析結果は初期毛管圧の設定値に依存しないことがわかった。

②境界条件についてみると、圧力型 GFEM では、各相の境界条件は圧力水頭あるいは流量で設定する必要がある。飽和度を一定にする場合は、毛管圧が一定になるように各相の圧力水頭を設定する。これに対して、混合型モデルでは、飽和度と圧力水頭を設定する必要があり、境界で飽和度が変化したり、水およびNAPLの圧力水頭が一定となる場合には、Forsythが提案⁷⁾しているような極めて煩雑な計算が必要となる。

③飽和度と圧力を変数とする混合型支配方程式を用いる従来の解析手法では飽和度などに数値振動⁸⁾が生じるため、Fully up wind GFEM⁹⁾や Control volume FEM¹⁰⁾などを用いて定式化されてきた。しかし、ハイブリット型 GFEM を用いる解法では、混合型支配方程式において変数を圧力のみとすることができ、飽和度をパラメーターに用いることにより数値解に振動が生じないことがわかった。

④圧力型 GFEM およびハイブリット型 GFEM とともに時間マ

表-4 水-NAPLの2相流における解析法の比較

解析法名	圧力型 GFEM	混合型 Fully up wind GFEM	ハイブリット型 GFEM
支配方程式	$A \left(\frac{1}{\Delta t} C^{\alpha+1,m} \psi_0^{\alpha+1,m+1} - \frac{1}{\Delta t} C^{\alpha+1,m} \psi_0^{\alpha+1,m} \right) - \nabla \cdot \frac{K_{ra}^{\alpha+1,m} K_s}{\mu_{ra}} \nabla \psi_0^{\alpha+1,m} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_{ra} K_{ra}^{\alpha+1,m} K_s}{\mu_{ra}} \right) \alpha \in \{w(A=1), o(A=-1)\}$	$\phi \frac{1}{\Delta t} S_w^{\alpha+1,m+1} - \nabla \cdot \frac{K_{ra}^{\alpha+1,m} K_s}{\mu_{ra}} \nabla \psi_0^{\alpha+1,m+1} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_{ra} K_{ra}^{\alpha+1,m} K_s}{\mu_{ra}} \right) \alpha \in \{w, o\}$	$A \left(\frac{1}{\Delta t} C^{\alpha+1,m} \delta_0^{\alpha+1,m} - \frac{1}{\Delta t} C^{\alpha+1,m} \delta_0^{\alpha+1,m} \right) - \nabla \cdot \frac{K_{ra}^{\alpha+1,m} K_s}{\mu_{ra}} \nabla \delta_0^{\alpha+1,m} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_{ra} K_{ra}^{\alpha+1,m} K_s}{\mu_{ra}} \right) \alpha \in \{w(A=1), o(A=-1)\}$
変数	水と NAPL の圧力水頭	飽和度と圧力水頭	水と NAPL の圧力水頭
数値解法	ガラーキーン FEM	Fully up wind ガラーキーン FEM ⁹⁾	ガラーキーン FEM
時間マトリックスの Lumping の有無	有	無	有
初期条件	<p>水と NAPL の圧力水頭から以下のように明確に設定できる。 (NAPL で飽和している場合) ψ_0 は静水圧分布 $\psi_c = \psi_0 - \psi_w \geq \psi_{cs}$ になるように ψ_w を設定する。 (水で飽和している場合) ψ_w は静水圧分布 $\psi_c = \psi_0 - \psi_w \leq 0$ になるように ψ_0 を設定する。 ここで、ψ_{cs} は残留飽和度になる毛管圧である。</p>	<p>飽和度と圧力水頭から以下のように明確に設定できる。 (NAPL で飽和している場合) $S_w = 0$ $S_o = 1$ ψ_0 は静水圧分布 (水で飽和している場合) $S_w = 1$ $S_o = 0$ ψ_w は静水圧分布</p>	<p>水と NAPL の圧力水頭から以下のように明確に設定できる。 (NAPL で飽和している場合) ψ_0 は静水圧分布 $\psi_c = \psi_0 - \psi_w \geq \psi_{cs}$ になるように ψ_w を設定する。 (水で飽和している場合) ψ_w は静水圧分布 $\psi_c = \psi_0 - \psi_w \leq 0$ になるように ψ_0 を設定する。 ここで、ψ_{cs} は残留飽和度になる毛管圧である。</p>
境界条件	<p>飽和度一定の境界では、水と NAPL の圧力水頭差を一定 (毛管圧を一定) に設定する。 また、水ならび NAPL の流量として設定することも可能である。</p>	<p>飽和度と圧力水頭により境界条件を設定する。 ただし、境界で飽和度が変化する場合、または、境界で水および NAPL の圧力水頭を一定とする場合、飽和度を変数とする相の境界の圧力水頭を境界条件として設定された圧力水頭に一致するように流量を繰り返し計算により求める必要がある⁷⁾。 なお、水ならび NAPL の流量を設定することが可能である。</p>	<p>飽和度一定の境界では、水と NAPL の圧力水頭差を一定値 (毛管圧を一定) に設定する。 また、水ならび NAPL の流量を設定することも可能である。</p>
特色と問題点	<p>マスバランスが維持されない。 ただし、上記の毛管圧の範囲において解析結果が初期毛管圧に依存し、初期条件を任意に設定できない。</p>	<p>マスバランスは維持されるが、飽和度と数値振動が生じ、Fully up wind のような手法を使用する必要がある⁹⁾。 マスバランスの誤差は本計算例では 5% 程度である。</p>	<p>マスバランスは維持され、圧力は振動しない。また、Fully up wind のような風上法を用いる必要がない。 解析結果が初期毛管圧に依存しないので、初期条件を任意に設定できる。</p>

トリックスの Lumping を行うことにより、数値振動が解消できることがわかった。

⑤ 圧力型支配方程式を GFEM で定式化した圧力型 GFEM では、マスバランスが維持されず、解析結果も初期毛管圧に大きく依存するため、この解法は信頼性が低いことが分かった。

⑥ 圧力型支配方程式における時間項は $C(\psi_c) \partial \psi_c / \partial t$ ($\alpha = w, o$) で表現され、変数 ψ_c の関数で時間変化するパラメータ $C(\psi_c)$ が含まれている。一方、

混合型支配方程式の時間項は $\phi \partial S_w / \partial t$ で表され、パラメータの ϕ は間隙率であるため時間変化しない。Helmig¹⁾ や Celia and Bouloutas³⁾ も指摘しているように、パラメータが時間変化しない時間項を差分法で離散化した場合はマスバランスが維持されるが、時間変化する場合にはマスバランスは維持されない。従って、時間変化するパラメータを時間項に含む圧力型支配方程式に対する GFEM ではマスバランスが維持されず、値が一定なパラメータを時間項に含む混合型支配方程式に対する GFEM ではマス

バランスは維持される。

しかしながら、混合型支配方程式を標準的な GFEM で定式化すると飽和度の分布に数値振動が発生する。そこで、有限要素法による数値解析では、一般に Fully up wind GFEM などを用いて数値振動の発生を抑制しているが、一方で Fully up wind GFEM などのような風上法の利用により計算誤差が大きくなり、マスバランスが悪化するという欠点がある。従って、混合型 Fully up wind GFEM では、数値振動の解消とマスバランスの維持を同時に達成することは非常に困難であるといえる。

これに対して、ハイブリット型 GFEM は、毛管圧の関数として表される飽和度をテーラー展開し、展開した結果を混合型支配方程式の飽和度に代入することによりマスバランスを維持したまま、圧力水頭のみを変数とする支配方程式を導くもので、圧力型 GFEM と混合型 Fully up wind GFEM の両者の利点を組み合わせた精度の高い解法といえる。

参考文献

- 1) Helmig, R. : *Multiphase Flow and Transport Process in the Subsurface*, Springer, 1997.
- 2) 藤縄克之, 日比義彦, 藤原幸彦 : 多孔体における水-疎水性液体-気体の等温多相流れに関する研究の進歩, 農業土木学会論文集, No.214, pp. 149-158, 2001.
- 3) Celia, M. and Bouloutas, E. T. : A General mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation, *Water Resources Research*, Vol.26, No7, pp. 1483-1496, 1990.
- 4) Milly, P. C. D. : A mass-conservative procedure for time-stepping in models of unsaturated flow, *Advance Water Resources*, Vol.8, pp. 32-36, 1985.
- 5) Thomson, N. R., Graham D. N., and Farquhar G. J. : One-dimension immiscible displacement experiments, *Journal of Contaminant Hydrology*, 10, pp. 197-223, 1992.
- 6) 日比義彦, 藤縄克之, 藤原幸彦 : 水-灯油二相流圧力係数モデルにおける初期条件設定について, 2001年春季講演会講演要旨, 日本地下水学会, pp. 50-55, 2001.
- 7) Foryth, P. A. : Simulation of nonaqueous phase groundwater contamination, *Advance Water Resources*, Vol.11, pp. 74-83, 1988.
- 8) Foryth P. A. : A Control volume finite element approach to NAPL groundwater contamination, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 12, No5, pp. 1029-1057, 1991.
- 9) 日比義彦, 藤縄克之, 藤原幸彦 : 地盤中における水・LNAPL2相流の基礎方程式と数値解析法, 地下水・土壌汚染とその防止対策に関する研究集会, pp. 223-226, 2000.

(2001. 10. 19 受付)

A COMPARISON OF FINITE ELEMENT SOLUTIONS USING PRESSURE-BASED AND MIXED TYPE EQUATIONS FOR WATER-NAPL TWO-PHASE FLOW IN POROUS MEDIA

Yoshihiko HIBI, Katsuyuki FUJINAWA and Yukihiko FUJIWARA

In analyzing infiltration into ground by using numerical models, favorable models should be characterized as a method with good convergence and good mass-balance as well as no oscillation at seepage fronts. This study compares the results obtained by finite element models for pressure-based equations and mixed-type, pressure-and-saturation-based equations with and without saturation parameterization to solve water-NAPL, two-phase flow equations with a special focus on fluid mass-balance and oscillation behavior near seepage fronts. Investigation of the accuracy of numerical results for both types of equations showed that the mixed-type, pressure-and-saturation-based equations give reliable results compared to the pressure-based equation, and the mixed-type equations with saturation parameterization give better results than those without saturation parameterization.