

# 陰解法を用いたコロケート格子による 高次精度の流体解析手法の提案

牛島 省<sup>1</sup>・瀬津 家久<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 正会員 工博 京都大学大学院 助教授 環境地球工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

<sup>2</sup> フェロー会員 工博 京都大学大学院 教授 環境地球工学専攻

スタガード格子における Implicit SMAC 法をコロケート格子配置に基づく流体計算法で利用する C-ISMAC 法を提案した。C-ISMAC 法では、予測段階における圧力の取り扱いに検討を加えたことで、流速の予測値の残差成分に対して低次のスキームを適用し、高次精度スキームを陽的に扱うことを可能にした。同手法を各種の流体計算に適用した結果、CFL 条件と拡散数に基づく安定性条件が同程度である場合には、クーラン数と拡散数を適切に設定することにより、QSI スキームを用いた MAC 系解法と同等の精度を有する計算が 2～5 倍程度の計算速度で行えることが示された。特に自由水面流れにおいては、定常解における流速分布や水面形だけでなく、水位の時系列に関しても妥当な結果が得られることが示された。

*Key Words* : C-ISMAC method, implicit SMAC method, QSI scheme, collocated grid, free-surface flow

## 1. 緒言

河川や貯水池などの詳細な流況を把握するための水理計算に対して、非圧縮性流れの解法を利用することが近年一般的となっている。この解法に基づく開水路や調整池、また各種の水理構造物に関連した複雑な 3 次元流れの計算結果が多数報告されている<sup>1),2),3)</sup>。

有限差分法に基づき、このような非圧縮性流れの計算を行う場合には、Harlow & Welch<sup>4)</sup>により提案された MAC 系の解法、あるいは比較的少数ではあるが、Caretto ら<sup>5)</sup>および Patankar<sup>6)</sup>による SIMPLE 系の解法が用いられるのが一般的である。これらの計算アルゴリズムには、これまでに多くの検討が加えられており<sup>7),8),9)</sup>、計算精度や数値的安定性などに関する改良が図られている。高次精度のスキームを用いて定常あるいは非定常流れを解析する場合には、スキームの扱いが比較的容易な MAC 系の解法が選択されることが多い<sup>10),11),12)</sup>。一方、MAC 系の解法では、流速の予測段階が陽的に扱われるので、CFL 条件や拡散数に起因する制約が生じ、通常長時間の計算が必要となる。これに対して、SIMPLE 系の解法では、それらに対する制限が緩くなるため、条件によっては計算時間を短縮化することが可能である<sup>13)</sup>。しかし、SIMPLE 系の解法では、高次精度の計算スキームに基づく離散化式の取扱いが極めて煩雑となる場合が多く、スキームによってはその導出が不可能な場合もある。

一方、有限差分法に基づく非圧縮性流れの計算では、初期のスタガード格子に代わり、流速成分と圧力がセル中心上で共通に定義されるコロケート格子配置の有用性が示されている<sup>14),15)</sup>。コロケート格子配置は最初に Rhie and Chow<sup>16)</sup>により提案されたが、解法としては SIMPLE 法が採用されており、上述した高次スキームの扱いに関する問題のため、移流項には最も簡単な 1 次風上差分が使われている。これに対して、チャンネル内乱流のシミュレーション<sup>14),15)</sup>や内部流動が支配的となる自由水面流れ<sup>17)</sup>などの最近の流体計算では、精度の高いスキームが不可欠であるため、コロケート格子を利用する場合には、MAC 系の解法を利用することが多くなっている。

上記のような背景を考慮して、本研究では、高速計算が可能な陰的解法のアルゴリズムを利用し、しかも高次精度のスキームを利用できるコロケート格子配置の流体計算法を提案することを目的とする。すなわち、スタガード格子で利用される Implicit SMAC 法<sup>18),19)</sup>の計算アルゴリズムをコロケート格子配置へ適用する C-ISMAC 法を提案し、予測段階における圧力の取扱いに考察を加えるとともに、閉領域内の流れおよび自由水面流れを対象とした解法を示す。本研究では、C-ISMAC 法をキャピティフロー、流出入のある容器内の流れ、そして自由水面を有する流れに適用し、MAC 系解法との比較を通じて、計算時間および流速分布や自由水面に関する解析精度に検討を加える。

## 2. コロケート格子における C-ISMAC 法

### (1) 格子配置と Implicit SMAC 法

Ikohagi & Shin<sup>18)</sup> はスタガード格子配置に基づき、SMAC 法の予測段階における流速の推定値を陰的に計算する Implicit SMAC 法を提案した。スタガード格子では、流速が定義される格子点上において、圧力項を含む運動方程式の全ての項が離散化表示される。このため、計算結果が定常解に漸近するに従い、流速の推定値に対する残差成分が 0 に収束する。Implicit SMAC 法はこれを利用して、陰的解法が用いられる残差成分には 1 次風上差分などの低次のスキームを適用し、陽的に計算が可能な成分には高次精度スキームを利用する手法である。

一方、コロケート格子配置を用いる場合には、圧力勾配をセル中心で評価する CCP スキームよりも、これをセル境界で扱う CBP スキームが適切であることが既報<sup>20)</sup> により示されている。MAC 系の解法を用いる場合、CBP スキームでは、セル中心において流速の推定値が陽的に求められるが、この推定値には圧力勾配が含まれていないため、スタガード格子のように残差成分が 0 に漸近しない。このため、コロケート格子を用いる流体計算に Implicit SMAC 法を適用するには何らかの工夫が必要となる。これを解決する 1 つの方法として、圧力勾配が考慮されるセル境界における流速の推定値を対象として Implicit SMAC 法を利用する手法が考えられる。ただし、この方法ではセル境界に空間内挿された離散化式を求めて、これに陰的解法を適用して連立方程式を導くという手順が必要になり、離散化式の取り扱いが容易であるというコロケート格子の利点が損なわれると考えられる。このため、本研究ではコロケート格子の特性を生かした新しい計算手法を提案する。コロケート格子 (Collocated grid) 上の Implicit SMAC 法であるので、以下ではこれを C-ISMAC 法と表記する。

### (2) 閉領域内流れに対する C-ISMAC 法

基本変数を直交座標系  $x_i$  の流速成分とする場合、自由水面を持たない閉領域内の Navier-Stokes 式と連続式は一般座標系  $\xi_m$  上でそれぞれ以下のように表される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_m \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial (JU_m)}{\partial \xi_m} = 0 \quad (2)$$

ここに、 $u_i$  は  $x_i$  方向の流速成分、 $U_m$  は流速の反変成分であり、 $t$ 、 $\rho$ 、 $p$ 、 $\nu$  はそれぞれ時間、流体の密度、

圧力そして動粘性係数である。また、 $J$  は変換のヤコビアンで、次式で定義される。

$$J = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \quad (3)$$

式 (1) の移流項と拡散項に梯形則を用いて時間方向に離散化すると次のように表される。

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = & u_i^n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \Delta t \\ & - \alpha U_m^n \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial \xi_m} \Delta t - (1 - \alpha) U_m^n \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} \Delta t \\ & + \beta \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \\ & + (1 - \beta) \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \end{aligned} \quad (4)$$

本研究では、Ikohagi & Shin<sup>18)</sup> と異なり、式 (4) に示されるように、移流項と拡散項の時間差分を独立に扱えるように、 $n+1$  ステップにおける各項には、それぞれ  $\alpha$  と  $\beta$  を乗じている。この方法により、計算対象とする自由水面流れにおいて、移流あるいは拡散効果のどちらが卓越するかに応じて  $\alpha$  と  $\beta$  を制御し、より大きい  $\Delta t$  を用いて安定に計算を進めることが可能となる。 $\alpha$  と  $\beta$  は 0 から 1 までの値を取り、1 の場合には完全陰解法、0 では陽解法となり、0.5 のときには 2 次精度のクランク・ニコルソン法となる。なお、式 (4) では、 $n+1$  ステップの移流項には  $U_m^n$  を用いて線形化している<sup>18)</sup>。

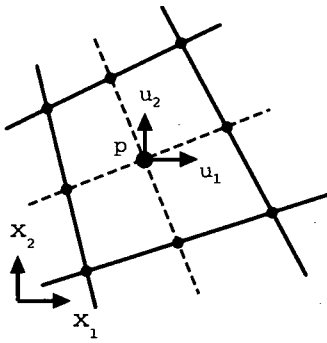
式 (4) を利用して流速の推定値  $u_i^*$  を求める。図-1 に座標系と物理空間と写像空間における主な変数の定義位置を示す。CBP スキームでは、セル中心において圧力項を除く次式から  $u_i^*$  が計算される。

$$\begin{aligned} u_i^* = & u_i^n - \alpha U_m^n \frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_m} \Delta t - (1 - \alpha) U_m^n \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} \Delta t \\ & + \beta \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \\ & + (1 - \beta) \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \end{aligned} \quad (5)$$

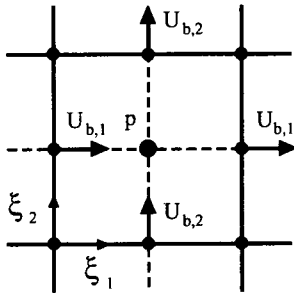
ここで、流速の推定値を次式のように残差成分  $\tilde{u}_i$  を用いて表示する。

$$u_i^* = u_i^n + \tilde{u}_i \quad (6)$$

スタガード格子を用いる場合には、流速の推定値に圧力項が考慮されているので、定常解では  $\tilde{u}_i$  は 0 へ収束する。しかし、式 (5) では、圧力項が含まれていないため、残差成分が 0 へ漸近しない。このため、C-ISMAC 法では、セル中心における推定値の算出に一時的に圧力勾配を考慮して、その離散化式から残差成分  $\tilde{u}_i$  に



(a) 物理空間中の変数配置



(b) 写像空間中の変数配置

図-1 各空間中の変数の定義位置

対する連立方程式を導く。そして、計算により得られた  $\tilde{u}_i$  を用いてセル中心の流速の推定値を求め、これより圧力勾配を差し引く。その結果得られるセル中心での流速の推定値は、CBP スキームにおける推定値と同様に扱うことができ、セル境界へ空間内挿した後、圧力勾配を再び考慮すればよい。以下に具体的な計算手順を示す。まず、流速の推定値に対して次式のように圧力勾配を考慮する。

$$\begin{aligned}
 u_i^* &= u_i^n - \alpha U_m^n \frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_m} \Delta t - (1 - \alpha) U_m^n \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} \Delta t \\
 &+ \beta \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \\
 &+ (1 - \beta) \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \\
 &- \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i}
 \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)右辺第6項の圧力勾配項は、CCP スキームと同様に差分化されるが、後述するように、この項が取り除かれて流速の推定値が算出されるので、同項は圧力計算には影響を及ぼさない。式(7)に式(6)を代入し

て整理すると次式が導かれる。

$$\begin{aligned}
 [1 + D(\alpha, \beta)] \tilde{u}_i \\
 = -D(1, 1) u_i^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i}
 \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、 $D(\alpha, \beta)$  は次式で定義される微分演算子である。

$$\begin{aligned}
 D(\alpha, \beta) &= \alpha \Delta t U_m^n \frac{\partial}{\partial \xi_m} \\
 &- \beta \Delta t \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j}
 \end{aligned} \quad (9)$$

式(7)には圧力項が含まれるので、残差成分  $\tilde{u}_i$  は十分小さい値となる。このため、式(8)左辺に含まれる移流項と拡散項に対する空間的な離散化には低次のスキームを利用し、右辺の対応する項には高精度のスキームを適用する。左辺の移流項に1次風上差分、拡散項に中央差分を利用する場合には、式(8)は次のような  $\tilde{u}_i$  の連立1次方程式に帰着する。

$$\begin{aligned}
 \sum_{p,q=-1,0,1} a_{j+p,k+q} \tilde{u}_{i,j+p,k+q} \\
 = -U_{m,j,k}^n C_{im1,j,k}^n + DF_{i,j,k}^n
 \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $(j, k)$  は2次元場における格子点を示し、 $a_{j+p,k+q}$  は  $n$  ステップの流速と座標変換に関するテンソル量から得られる係数である。本研究では、式(8)右辺の移流項には5次精度のQSIスキーム<sup>21)</sup>を用いており、 $C_{im1,j,k}^n$  は、写像空間中において、格子点  $(j, k)$  に対して  $\xi_m$  方向に並ぶ6個の格子点上の  $u_i^n$  を5次スプライン関数で表現したときの1次の項の係数である。また、式(10)右辺の  $DF_{i,j,k}^n$  は拡散項であり、ここでは左辺と同様の中央差分を用いた。上記のように、C-ISMAC法では、高精度スキームを適用した項を陰的に扱わないで済むので、SIMPLE系の解法と比較して離散化式の導出が容易である。なお、計算手法の導出過程に示されるように、C-ISMAC法は基本的に定常解を得るための手法と位置づけられる。しかし、式(8)において、左辺の影響が無視できる条件においては、非定常流れ場へも適用可能と考えられる。このためには、計算過程において  $\tilde{u}_i$  が十分小さいことが必要であり、これは流況の時間スケールが時間ステップ  $\Delta t$  と比較して十分大きい場合に相当する。

式(10)は、適当な行列解法を適用して解くことができ、得られた  $\tilde{u}_i$  を式(6)に用いて、セル中心における流速の推定値  $u_i^*$  が求められる。次に、C-ISMAC法では、以下のように  $u_i^*$  から圧力項を取り除く。

$$\tilde{u}_i^* = u_i^* + \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (11)$$

この操作により、 $\tilde{u}_i^*$  はCBPスキームで利用される圧力を含まない流速の推定値となる。

得られた  $\hat{u}_i^*$  をセル境界へ空間内挿し、そこで圧力を考慮した推定値を求める。反変成分で表示すると次式が得られる。

$$\hat{U}_{b,m} = U_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho} g^{mj} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_j} \quad (12)$$

ここに、 $\hat{U}_{b,m}$  はセル境界における流速の推定値の反変成分、 $U_{b,m}^*$  は  $\hat{u}_i^*$  をセル境界に空間内挿した値の反変成分であり、 $g^{mj}$  は基本テンソルの反変成分である。これに対して、 $n+1$  ステップで成り立つべき式は次のように与えられる。

$$U_{b,m}^{n+1} = U_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho} g^{mj} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_j} \quad (13)$$

ここで、 $U_{b,m}^{n+1}$  に対して次の連続式が成り立つとする<sup>4)</sup>。

$$\frac{\partial (JU_{b,m}^{n+1})}{\partial \xi_m} = 0 \quad (14)$$

式(12)と式(13)の差を取り、式(14)に用いると次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( Jg^{mj} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right) = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( J\hat{U}_{b,m} \right) \quad (15)$$

ここに、 $\phi = p^{n+1} - p^n$  である。式(15)を解くことにより  $p^{n+1}$  が得られ、これを用いてセル中心の流速  $u_i^{n+1}$  が最終的に求められる。

### (3) 自由水面流れに対する C-ISMAC 法

自由水面流れに対する C-ISMAC 法では、上記と同様の手順が用いられるが、外力および圧力の取り扱いに留意する必要がある。自由水面流れでは、式(1)に対して重力項を考慮し、式(7)に相当する次式から流速の推定値を求める。

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_i^n - \alpha U_m^n \frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_m} \Delta t - (1-\alpha) U_m^n \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} \Delta t \\ &+ \beta \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \\ &+ (1-\beta) \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \Delta t \\ &- \delta_{i2} g \Delta t - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (16)$$

ここに、 $\delta_{i2}$  はクロネッカーのデルタであり、 $x_2$  は鉛直上方に向かう座標成分としている。式(6)を式(16)へ代入し、次式を導く。

$$\begin{aligned} [1 + D(\alpha, \beta)] \hat{u}_i &= -D(1, 1) u_i^n \\ &- \delta_{i2} g \Delta t - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (17)$$

これより  $\hat{u}_i$  の連立方程式が(10)式と同様に得られるので、これを解いてセル中心の流速の推定値を求める。

重力項はセル中心で評価するので<sup>17)</sup>、得られた値から式(11)と同様に圧力項のみを取り除く。これをセル境界へ空間内挿し、 $n$  ステップの水深  $h^n$  から計算される静水圧  $p_0$  を用いて次式より推定値  $\hat{U}_{b,m}$  を得る。

$$\hat{U}_{b,m} = U_{b,m}^* - \frac{\Delta t}{\rho} g^{mj} \frac{\partial p_0}{\partial \xi_j} \quad (18)$$

ここで、 $\hat{U}_{b,m}$  を求めるために利用する圧力は  $p_0$  の代わりに  $p^n$  としてもよく、いずれの場合でも圧力計算の結果、同等の  $p^{n+1}$  が求められる。

次に、式(14)、式(13)および式(18)より、 $\phi$  に関する方程式が式(15)と同様に得られる。式(18)を用いる場合には、 $\phi$  は静水圧からの偏差分に相当する。自由水面流れでは、流体質量を精度良く保存させることが重要であるので、式(13)と式(15)を利用して C-HSMAC 法<sup>17)</sup>により圧力と流速を同時緩和することが有効である。得られた  $\phi$  を用いて次式より  $p^{n+1}$  を定める。

$$p^{n+1} = p_0 + \phi \quad (19)$$

また、C-HSMAC 法で求められた水表面上の流速の反変成分  $U_{s2}^{n+1}$  を用いて、次式より  $n+1$  ステップの水深を求める<sup>17)</sup>。

$$h^{n+1} = h^n + \frac{JU_{s2}^{n+1} \Delta \xi_1}{\Delta x_1} \Delta t \quad (20)$$

セル中心における  $u_i^{n+1}$  は、重力項をすでに含んでいる  $\hat{u}_i^*$  を用いて次式より求められる。

$$u_i^{n+1} = \hat{u}_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (21)$$

## 3. C-ISMAC 法の適用性

### (1) 移動壁を有するキャビティフロー

実際の流体計算における C-ISMAC 法の適用性を確認するため、最初に移動壁を有するキャビティ内の流れ<sup>22)</sup>の計算を行った。計算対象とする流れのレイノルズ数は1,000である。計算セル数は  $25 \times 25$  とし、境界適合座標系を利用して壁面近傍で格子間隔が密になるよう配置した。計算格子点の分布を座標系等と合わせて図-2に示す。図-1にも示したように、1つの計算セルが9個の格子点から構成されているため、図-2に示される見かけ上のセル数は、計算セル数の約4倍となっている。図-2に示すように、高さと幅が1.0の正方形領域内において上壁面が速度1.0で移動する。直交座標系の原点は左下隅にとり、 $x, y$  方向の流速成分をそれぞれ  $u, v$  とする。なお、本節の計算は、Ghiaら<sup>22)</sup>と同様に変数は無次元として扱う。

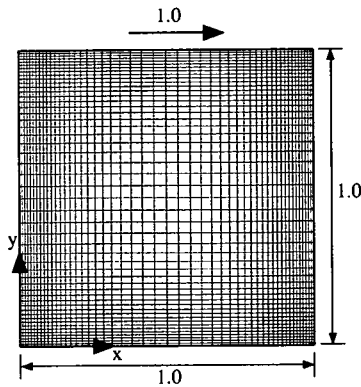


図-2 計算格子点の分布と座標系および計算条件

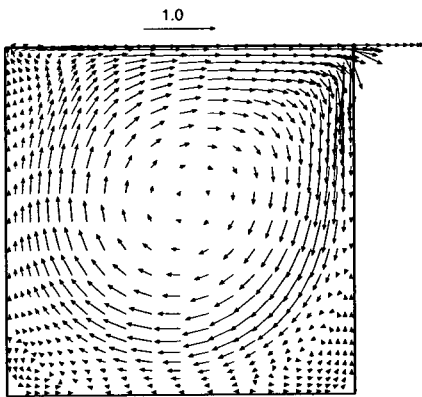


図-3 C-ISMAC 法で計算された流速ベクトルの分布 ( $\Delta t = 1.0 \times 10^{-1}$ )

計算時間と精度を比較するため、前報<sup>21)</sup>で示した予測段階を陽的に扱う条件との比較を行う。以下ではこの条件の計算を標準計算(図中では explicit)と表記する。標準計算と C-ISMAC 法による計算では、この予測段階のみが異なり、他の段階の解法は同一である。定常解は、標準計算の時間ステップを基準として、その間における流速の変化の最大値が  $\epsilon_U = 1.0 \times 10^{-5}$  となった時点の計算結果とする。式(15)の計算における収束のしきい値  $\epsilon_\phi$  と C-HSMAC 法による流速ベクトルの発散値のしきい値  $\epsilon_D$  はともに  $1.0 \times 10^{-10}$  とし、定常解に対してこれらの条件が満足されるものとした。また、C-ISMAC 法における式(10)の計算には SOR 法を用い、その収束判定基準は  $\epsilon_R = 1.0 \times 10^{-10}$  とした。また、 $\alpha = \beta = 1.0$  とした。

図-2 に示した格子点を用いる場合、標準条件では  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-2}$  で安定な計算を行えたが、 $\Delta t = 2.5 \times 10^{-2}$  では計算が不安定となった。これに対して、C-ISMAC 法を用いる場合、 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-1}$  としても安定な計算が可能であった。この計算で得られた流速ベ

表-1 計算時間、クーラン数および拡散数の比較

計算手法	$\Delta t$	$T_n$	$1/T_n$	$C_{nm}$	$D_{nm}$
標準計算	$1.0 \times 10^{-2}$	1.00	1.00	0.37	0.05
C-ISMAC	$2.5 \times 10^{-2}$	0.95	1.05	0.94	0.13
C-ISMAC	$5.0 \times 10^{-2}$	0.54	1.85	1.90	0.26
C-ISMAC	$1.0 \times 10^{-1}$	0.32	3.15	3.74	0.51

クトルの分布を図-3 に示す。

表-1 に標準計算と C-ISMAC 法を用いたときの計算時間  $T_n$  を示す。計算時間  $T_n$  は標準計算の値を基準として正規化したものである。その逆数は計算速度の向上比に相当する。2次元場のクーラン数  $C_n$  は次式で定義される。

$$C_n = \sum_m \frac{|U_m| \Delta t}{\Delta \xi_m} \quad (22)$$

また、拡散数  $D_n$  は次式から計算される値とした。

$$D_n = \nu \Delta t \sum_m \sum_j \frac{1}{\Delta \xi_m^2} \left( \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \right)^2 \quad (23)$$

定常解における計算領域内の  $C_n$  と  $D_n$  の最大値を  $C_{nm}$  および  $D_{nm}$  と表示し、これらの値を表-1 に示した。

C-ISMAC 法では、流速の推定値の計算が陰的に行われるので、標準計算よりも1ステップの計算負荷が大きくなる。しかし、クーラン数や拡散数の制限が緩くなるため、表-1 に示すように  $\Delta t$  を大きくとることができ、結果的に計算時間を短縮化することが可能となっている。ただし、 $\Delta t$  を増加させると収束速度が低下するため、 $\Delta t$  の増加に比例した計算時間の短縮化は見られない。また、表-1 に示されるように、 $\Delta t$  を  $5.0 \times 10^{-2}$  以下とする条件では、 $D_{nm} < 0.5$  なる安定条件を満足するので、 $\beta = 0$  としても安定な計算が可能である。特に、 $\beta = 0$  とすることにより、計算時間を表-1 の値よりも若干短縮化することが可能であった。

また、定常解が得られた段階では、計算領域内における  $|\bar{u}_i|$  の最大値と平均値は、それぞれ約  $1.0 \times 10^{-5}$  および  $2.0 \times 10^{-6}$  となっており、これらは  $\Delta t$  の値にかかわらず、表-1 のすべての C-ISMAC 法を用いた計算で同オーダーの値であった。なお、 $|\bar{u}_i|$  の値は定常解の判定条件  $\epsilon_U$  に関係するが、 $\epsilon_U$  を小さくすることによりさらに 0 に近づけることができる。このように、セル中心で圧力を考慮することで、残差成分  $|\bar{u}_i|$  は計算結果が定常解に近づくにつれ、実際に十分小さい値に収束することが確認された。

これらの計算で得られた流速分布を図-4 と図-5 に示す。図中に示されるように、 $\Delta t$  を標準計算の10倍の値としても、標準計算と比較した場合の流速分布の相違はごくわずかであり、移流項に用いられた QSI スキームの精度を大きく劣化させることはない。表-1 よ

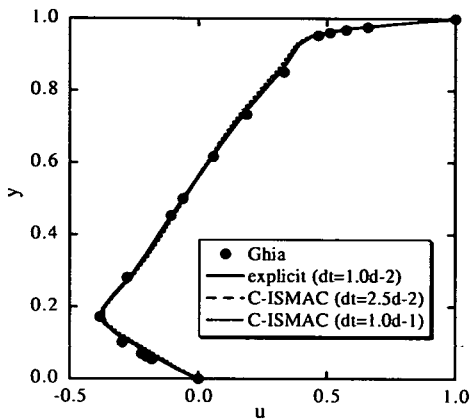


図-4 水平方向流速  $u$  の分布

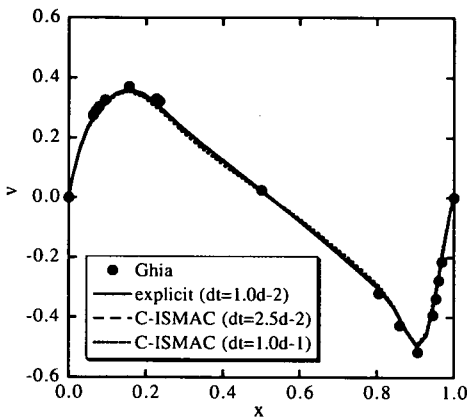


図-5 鉛直方向流速  $v$  の分布

り、本節の計算条件では CFL 条件による制約がやや強いと考えられるが、以上の計算結果から、クーラン数を 2.0 ~ 3.0 程度の値とすることにより、標準計算と同程度の精度を有する計算が 2 ~ 3 倍の計算速度で行えることが示された。

## (2) 流出入のある容器内の流れ

次に、計算領域内に流体の流出入部分があり、流入流速が時間  $T_0$  内に 0 から一定の値  $u_0$  まで線形に変化して、最終的に定常解が得られる場合の計算に C-ISMAC 法を用いる。この種の流動条件は水理構造物内の流れにも見られる一般的なものであると考えられる。

図-6 に、計算条件と領域の形状を示す。直交座標系の原点は容器の左下隅にとり、 $x, y$  方向の流速成分をそれぞれ  $u, v$  とする。各部の長さは、 $H$  および  $B$  を 0.1m、 $L$  を 0.01m とし、動粘性係数は  $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ 、密度は  $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  とした。流入流速  $u_0$  は 1.0 m/s とし、 $T_0$  は 2 秒とした。また、壁面では摩擦が作用しないものとする。

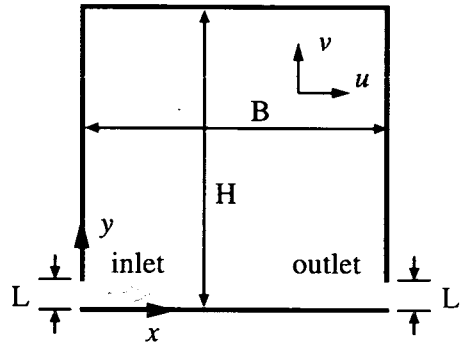


図-6 流出入口のある計算領域

表-2 計算時間、クーラン数および拡散数の比較

計算手法	$\Delta t$ (sec)	$T_n$	$1/T_n$	$C_{nm}$	$D_{nm}$
標準計算	$5.0 \times 10^{-4}$	1.00	1.00	0.25	0.17
C-ISMAC	$2.5 \times 10^{-3}$	0.35	2.85	1.23	0.85
C-ISMAC	$5.0 \times 10^{-3}$	0.21	4.82	2.44	1.70
C-ISMAC	$1.0 \times 10^{-2}$	0.13	7.41	4.86	3.40

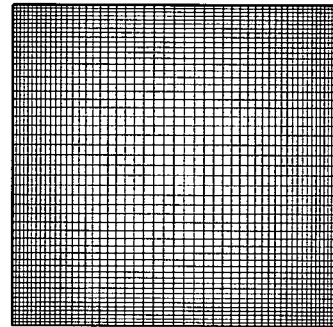


図-7 計算格子点の分布

計算では、定常解の判定値  $\epsilon_U/u_0$  は  $1.0 \times 10^{-8}$ 、圧力計算のしきい値  $\epsilon_\phi/(\rho u_0^2)$  と  $\epsilon_D/(u_0/H)$  はそれぞれ  $1.0 \times 10^{-13}$  および  $1.0 \times 10^{-9}$  とした。また、C-ISMAC 法における収束判定基準は  $\epsilon_R/u_0 = 1.0 \times 10^{-10}$  とし、 $\alpha = \beta = 1.0$  とした。セル数は  $25 \times 25$  とし、キャピティフローの計算と同様に、境界適合座標系を利用して境界付近で格子点が密に配置されるようにした。計算格子点の分布を図-7 に示す。

標準計算と C-ISMAC 法に要した計算時間、また定常解におけるクーラン数および拡散数の最大値を表-2 に示す。標準計算では、表-2 に示すように、 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-4}$  (秒) で定常解が得られたが、 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$  (秒) では計算が不安定となった。また、C-ISMAC 法では、 $\Delta t$  を  $2.0 \times 10^{-2}$  秒としても発散せずに計算が行えたが、収束誤差が  $\epsilon_U$  以下にならなかった。C-ISMAC

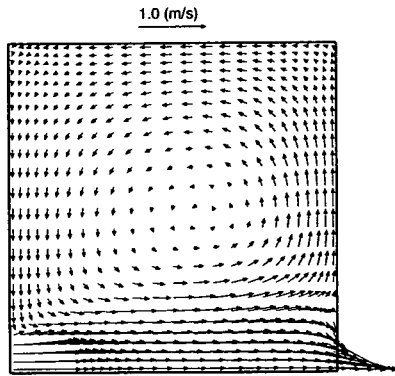


図-8 C-ISMAC 法で計算された流速ベクトル分布 ( $\Delta t$  は  $1.0 \times 10^{-2}$  秒)

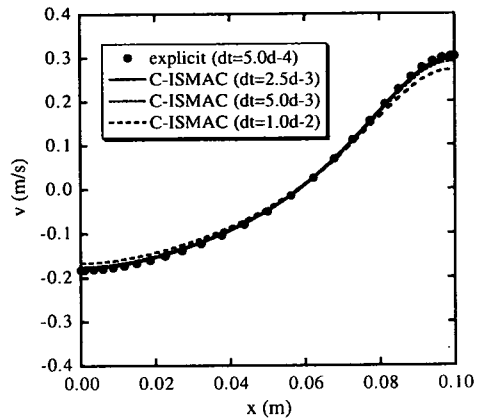


図-10  $v$  の分布 ( $y/H = 0.5$ )

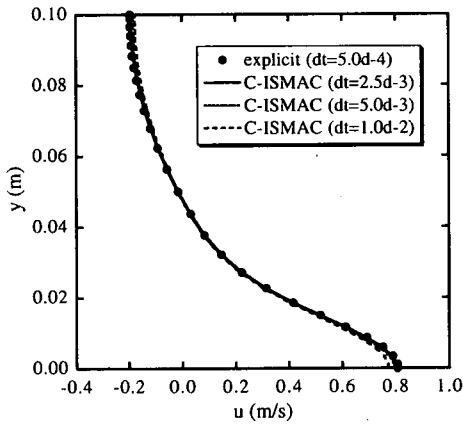


図-9  $u$  の分布 ( $x/B = 0.5$ )

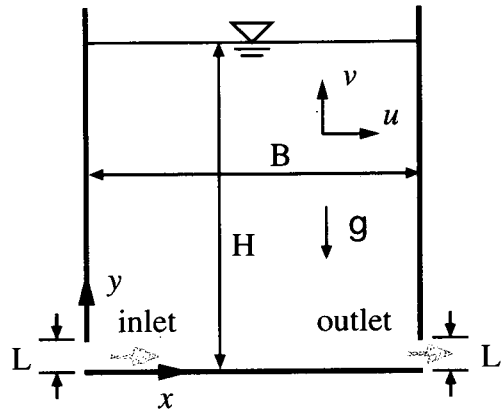


図-11 自由水面を有する容器の形状

法で得られた流速ベクトルの分布を図-8に示す。

表-2に示すように、数値的な安定性のみを考慮した場合、C-ISMAC法では標準計算の7倍以上の高速計算が可能となっている。本節の容器内の流れのように、流入流速の遷移時間が指定される場合、あるいは一般に境界条件が所定の時間内で変化して、最終的に定常解に到る場合には、指定された時刻まで計算を行う必要がある。このような条件では、 $\Delta t$ を大きく取れるC-ISMAC法は有利であり、標準計算と比較して計算時間を大幅に短縮化することが可能である。本節の計算においても、 $T_0$ がさらに大きい場合には、計算時間の差はより増大する。

次に、容器内の流速分布を比較した結果を図-9と図-10に示す。C-ISMAC法による計算では、 $\Delta t$ を  $1.0 \times 10^{-2}$  秒とすると、標準計算の結果と比較して壁面近傍で若干の相違が見られる。しかし、 $\Delta t$ を  $5.0 \times 10^{-3}$  秒以下とすると、流速分布は標準計算の結果とほぼ一致する。

表-2の数値より、本節の計算条件においてはクーラン数と拡散数の値に基づく安定性条件の制約はほぼ同程度であると見ることができ。上記の計算結果から、この場合にはクーラン数を2.0～2.5、また拡散数を約1.5の値に設定することにより、標準計算の4～5倍の計算速度で同等の精度を有する計算が可能であることが示された。

### (3) 流出入のある容器内の自由水面流れ

流出入のある容器内において、自由水面を有する流れ場の計算にC-ISMAC法を適用する。容器の形状は図-11に示すとおりである。各部の長さや座標系等は前節と同条件とした。なお、重力加速度は  $10.0 \text{ m/s}^2$  とした。利用した計算格子や流入流速の遷移条件など、他の条件は前節と同様である。計算は、流況がほぼ定常となる  $t = 6.0$  (秒) まで行った。

表-3に標準計算とC-ISMAC法に要した計算時間、そして関連するパラメータを示す。標準計算では、前

表-3 計算時間、クーラン数および拡散係数の比較

計算手法	$\Delta t$ (sec)	$T_n$	$1/T_n$	$C_{nm}$	$D_{nm}$
標準計算	$5.0 \times 10^{-4}$	1.00	1.00	0.25	0.17
C-ISMAC	$1.0 \times 10^{-3}$	0.54	1.86	0.49	0.34
C-ISMAC	$2.5 \times 10^{-3}$	0.26	3.78	1.23	0.85
C-ISMAC	$5.0 \times 10^{-3}$	0.14	7.13	2.45	1.70

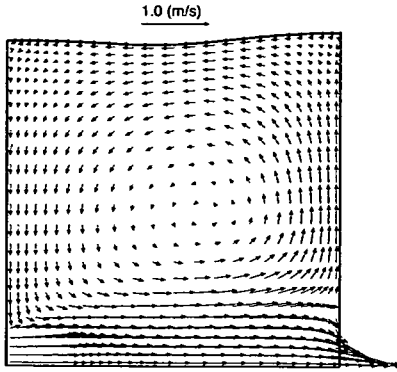


図-12 C-ISMAC法で計算された流速ベクトル分布 (計算開始から6秒後,  $\Delta t$ は $5.0 \times 10^{-3}$ 秒)

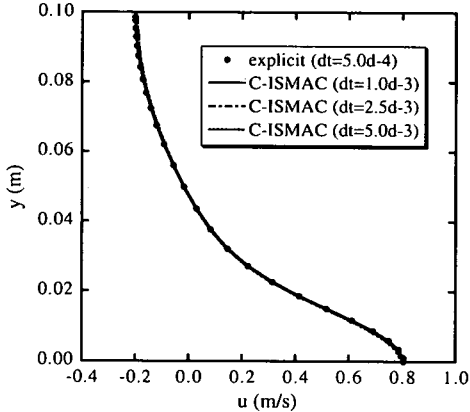


図-13  $u$ の分布 ( $y/H = 0.5$ , 計算開始から6秒後)

節の計算と同様に,  $\Delta t$ を $1.0 \times 10^{-3}$ 秒とすると計算が不安定となった。一方, C-ISMAC法では $\Delta t$ を $5.0 \times 10^{-3}$ 秒としても安定な計算が可能であった。このときの計算時間は, 標準計算の約14%であり, 計算速度は約7倍となっている。図-12にこの条件で得られた $t = 6.0$ (秒)における流速ベクトルの分布を示す。

$t = 6.0$ (秒)における容器内の流速分布を比較した結果を図-13と図-14に示す。水平方向流速の分布に関しては, 図-13に示されるように, C-ISMAC法の計算結

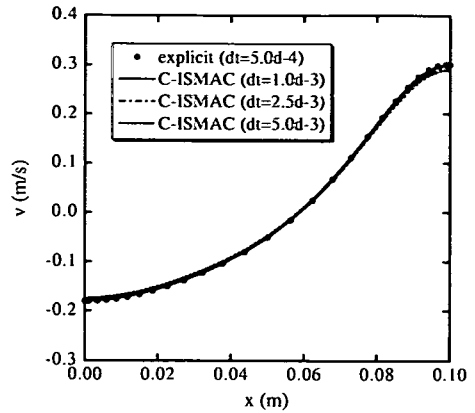


図-14  $v$ の分布 ( $x/B = 0.5$ , 計算開始から6秒後)

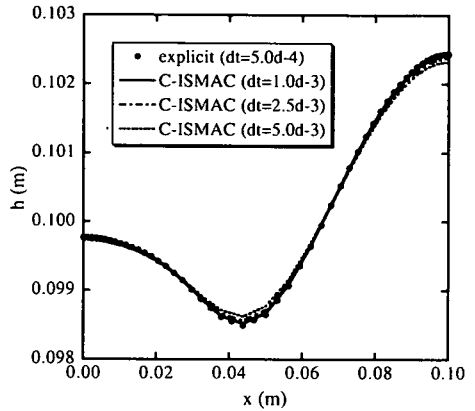


図-15 自由水面の形状 (計算開始から6秒後)

果は標準計算の結果とほぼ一致した。一方, 図-14に示される鉛直方向の流速分布においては,  $\Delta t = 5.0 \times 10^{-3}$ (秒)とした場合には, 容器右端側の上昇流速が標準計算のそれよりわずかに小さく評価されている。以上より, 流速分布に関しては, 前節の計算結果と同様に, 標準計算の4~5倍の計算速度でほぼ同程度の精度を有する計算が可能であると言えよう。

次に, 図-15は $t = 6.0$ (秒)における水面形状を比較したものである。容器左右端で水位が高く, 右端側で最大水深が生じ, 中央部のやや左側で最も水深が低くなった。 $\Delta t$ を $5.0 \times 10^{-3}$ 秒としたときには, 最大および最小水深の差がやや過小に評価されているが, これより $\Delta t$ を小さくした場合には標準計算の水面形とよく一致する計算結果が得られている。

自由水面を有する場合には, 流入流速が増加するとともに, 内部流動が変化し, 水面振動や非定常的な水面変形が生じた後, 最終的に定常な水面形が得られる。定常流れ場に到る上記の過程を確認するため, 容器左



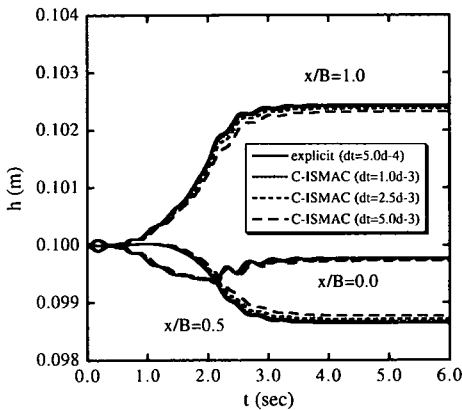


図-16  $h$  の時系列の比較

右両端と中央における水深  $h$  の時系列を比較した。その結果を図-16 に示す。容器左端における水深の変化は C-ISMAC 法によるいずれの計算でも標準計算の結果とほぼ一致しているが、 $\Delta t$  を増加させると、容器中央と右端の水位差が若干過小に評価される傾向が見られる。しかし、 $\Delta t$  が小さい場合には、水深の変化はほぼ良好に再現されている。このように、水面変動等の時間スケールが  $\Delta t$  と比較して十分大きい場合には、C-ISMAC 法は非定常流れにも適用可能と考えられる。これらの結果から、本節の計算条件では標準計算の 4 ~ 5 倍の計算速度で標準計算と同等の流速分布が得られ、さらに水面形状に関しては、クーラン数を 1.0、拡散数を 0.5 程度の値に設定することにより、2 ~ 3 倍の計算速度で標準計算と同様の精度を有する結果が得られることが示された。

#### 4. 結言

本研究では、スタガード格子で提案された Implicit SMAC 法をコロケート格子の流体計算法で利用する C-ISMAC 法を提案し、具体的な計算手順を閉領域内の流れと自由水面流れに対して示した。C-ISMAC 法では、予測段階における圧力の取り扱いに検討を加えたことで、流速の予測値の残差成分を定常解において十分小さくすることを可能とした。離散化の際には、残差成分のみを陰的に扱い、これに低次のスキームを用いる一方、高次精度スキームを適用する変数は陽的に扱うことができるため、SIMPLE 系の解法と異なり、離散化式の導出が極めて容易である。

C-ISMAC 法の有効性を確認するため、ベンチマーク計算として広く用いられている移動壁を有するキャピティフロー、流出入のある容器内の流れ、そしてこれと同様の境界条件を有する自由水面流れに本手法を

適用した。その結果、CFL 条件と拡散数に基づく安定性条件がほぼ同程度である流れ場においては、クーラン数を 1.0 ~ 3.0、拡散数を 0.5 ~ 1.5 の範囲に設定すれば、QSI スキームを用いた MAC 系解法と同等の精度を有する計算が 2 ~ 5 倍の計算速度で行えることが示された。C-ISMAC 法は、その導出過程に示されるように定常解を精度よく求めるための手法であるが、自由水面流れの計算例に示されるように、流況の時間スケールが  $\Delta t$  より十分大きい場合には、過渡現象に対しても妥当な結果が得られることが示された。なお、時間スケールが比較的小さい非定常流れへ C-ISMAC 法を適用する場合には、低次スキームを用いた残差項から生ずる誤差の影響に留意する必要がある。

以上のように、C-ISMAC 法により計算時間を大幅に短縮化できると同時に、高次精度スキームを用いた MAC 系解法と同等の精度を有する計算が可能であることが実際の流体計算を通じて確認された。C-ISMAC 法は上記の特性に加えて、コロケート格子配置の有用性を保持しているため、定常流動あるいは時間的な変化が緩やかな非定常流れの計算においては、有効な手法として位置づけられると考えられる。

#### 参考文献

- 1) 杉山均, 秋山光庸, 佐藤亮輔: 矩形断面蛇行開水路流れの三次元乱流構造に関する研究, 土木学会論文集, No. 628/II-48, pp. 149-161, 1999.
- 2) 長田信寿, 細田尚, 村本嘉雄, 中藤達昭: 3次元移動座標系・非平衡流砂モデルによる水制周辺の河床変動解析, 土木学会論文集, No. 684/II-56, pp. 21-34, 2001.
- 3) 米山望, 井上素行: 三次元数値解析による揚水発電所貯水池内水温・濁質挙動の予測手法, 土木学会論文集, No. 684/II-56, pp. 127-140, 2001.
- 4) Harlow, F. H. and Welch, J. E.: Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phys. Fluids*, Vol. 8, No. 12, pp. 2182-2189, 1965.
- 5) Caretto, L. S., Gosman, A. D., Patankar, S. V. and Spalding, D. B.: Two calculation procedures for steady, three-dimensional flows with recirculation, *Proc. 3rd Int. Conf. Numer. Meth. Fluid Dyn.*, Vol. II, pp. 60-68, 1972.
- 6) S. V. Patankar (水谷幸夫, 香月正司 共訳): コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, 森北出版, 1995.
- 7) Amsden, A. A. and Harlow, F. H.: A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations, *J. Comp. Phys.*, Vol. 6, pp. 322-325, 1970.
- 8) Hirt, C. W. and Cook, J. L.: Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain, *J. Comp. Phys.*, Vol. 10, pp. 324-340, 1972.
- 9) 寺坂晴夫: 二流体モデルを用いた多次元二相流に対する完全陰解法, 日本機械学会論文集 (B 編), Vol. 65, No. 631, pp. 847-854, 1999.
- 10) Kawamura, T. and Kuwahara, K.: Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder

- with surface roughness, *AIAA Paper*, Vol. 84-0340, , 1984.
- 11) Yabe, T. and Aoki, T.: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation II. Two- and three-dimensional solver, *Computer Physics Communications*, Vol. 66, pp. 233-242, 1991.
  - 12) 宮内敏雄, 平田徹, 店橋護: 高次精度差分法による三次元一様等方性乱流の直接数値計算 (スペクトル法および実験との比較), 日本機械学会論文集 (B 編), Vol. 61, No. 592, pp. 4400-4405, 1995.
  - 13) 荒川忠一: 数値流体工学, 東京大学出版会, 1994.
  - 14) Zang, Y., Street, R. L. and Koseff, J. R.: A Non-staggered Grid, Fractional Step Method for Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations in Curvilinear Coordinates, *J. Comp. Phys.*, Vol. 114, pp. 18-33, 1994.
  - 15) 梶島 岳夫, 太田 貴士, 岡崎 和彦, 三宅 裕: コロケート格子による非圧縮流れの高次差分解析, 機械学会論文集 B 編, Vol. 63, No. 614, pp. 3247-3254, 1997.
  - 16) Rhie, C. M. and Chow, W. L.: Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.
  - 17) 牛島省, 棚津家久: 移動一般座標系を用いたコロケート格子による自由水面流れの数値解析手法, 土木学会論文集, No. 698/II-58, pp. 11-19, 2002.
  - 18) Ikohagi, T. and Shin, B. R.: Finite-difference schemes for steady incompressible Navier-Stokes equations in general curvilinear coordinates, *Computers and Fluids*, Vol. 19, No. 3/4, pp. 479-488, 1991.
  - 19) Shin, B. R., Ikohagi, T. and Daiguji, H.: An unsteady implicit SMAC scheme for two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, *JSME International Journal*, Vol. 36, No. 4, pp. 598-606, 1993.
  - 20) 牛島省, 竹村雅樹, 棚津家久: コロケート格子配置を用いた MAC 系解法の計算スキームに関する考察, 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 11-19, 2002.
  - 21) 牛島省, 棚津家久, 山上路生, 坂根由季子: 局所 5 次スプライン内挿法 (QSI 法) を利用したコロケート格子による流体解析手法, 土木学会論文集, No. 691/II-57, pp. 73-83, 2001.
  - 22) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T.: High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387-411, 1982.

(2002.4.1 受付)

## HIGHER-ORDER IMPLICIT METHOD (C-ISMAL METHOD) FOR INCOMPRESSIBLE FLOWS WITH COLLOCATED GRID SYSTEM

Satoru USHIJIMA and Iehisa NEZU

An implicit numerical algorithm (C-ISMAL method) has been proposed for incompressible flows with a collocated grid system. The C-ISMAL method, which is based on an implicit SMAC method proposed for staggered grid system, enables us to utilize higher-order schemes for discretization as well as to largely decrease the necessary computational time. This method was applied to cavity flows, incompressible flows in an enclosed area and free-surface flows with a fifth-order QSI scheme for convection terms. As a result, it was shown that the computational speed becomes two to five times faster than a usual explicit method and that the computational accuracy of the QSI scheme is still preserved in the C-ISMAL method.