

# コロケート格子配置を用いた MAC系解法の計算スキームに関する考察

牛島 省<sup>1</sup>・竹村 雅樹<sup>2</sup>・瀬津 家久<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 正会員 工博 京都大学大学院 助教授 環境地球工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

<sup>2</sup> 学生員 京都大学大学院 環境地球工学専攻

<sup>3</sup> フェロー会員 工博 京都大学大学院 教授 環境地球工学専攻

コロケート格子を用いた MAC 系解法による流体計算において、予測・圧力計算・修正段階における複数の計算スキームと計算手順を示した。予測段階において、セル中心で圧力勾配を評価する CCP スキームと、セル境界で圧力勾配を評価する CBP スキームを比較し、後者ではより局所的な圧力が用いられること、さらに、この相違が圧力  $p^n$  の離散化表示に影響し、計算で捕えられる圧力・水面変動の最小波長が両者で異なることを示した。閉領域内の流れと自由水面流れを対象とした計算の結果、予測段階で CBP スキーム、そして修正段階ではセル中心で圧力勾配を考慮する PG スキームが有効であること、さらに圧力計算段階では HSMAC 法を用いて流体の連続性に対する誤差を制御することが、特に自由水面流れに対して効果的であることが示された。

**Key Words** : *collocated grid, MAC method, computational scheme, cavity flow, free surface flow*

## 1. 緒言

コロケート格子配置を用いた数値計算は、チャンネル内および各種の乱流計算<sup>1),2)</sup>、また自由水面流れ<sup>3)</sup>などに利用され、その有効性が示されつつある。この格子配置では、流速成分と圧力がセル中心上で共通に定義されるため、スタガード格子で必要とされる変数の一部の空間的な内・外挿計算が不要となること、自由液面近傍などにおける境界条件の設定が容易になるなどの利点を有する。

一方、コロケート格子配置では、セル中心とセル境界の内挿計算が必要であり、この空間内挿に伴って発生する計算上の問題点が指摘されてきた<sup>4),5)</sup>。これに対して、コロケート格子を用いた場合の保存特性の改善方法が提案され<sup>6)</sup>、空間内挿方法<sup>7)</sup>や一般座標系における適切な離散化法<sup>2)</sup>についても考察が行われている。このような状況を考慮すると、コロケート格子配置は流体計算において有用であるが、空間内挿に伴うスキームの構成などに関してはなお明らかにすべき課題が残されていると考えられる。

Rhie and Chow<sup>8)</sup>による初期のコロケート格子配置は、定常流を対象とする陰的解法に用いられたが、乱流や自由水面変動などの非定常流れを対象とする最近の計算では MAC 法およびそれに類似の計算アルゴリズムが利用されることが多い。MAC 法と同様の手法に分類される計算法としては、Fractional-Step

法<sup>9)</sup>、SMAC 法<sup>10)</sup>、また流速と圧力を同時に修正する HSMAC 法<sup>11)</sup>などが良く知られている。ここでは、これらの一連の解法を MAC 系<sup>12)</sup>の計算法と表記することとする。MAC 系の解法では、運動方程式中の圧力は陰的に扱われる。計算手順は、最初に流速の推定値を求める段階、次にこの推定値に基づいて圧力場を計算する段階が続き、最後に得られた圧力を用いて次の時間ステップの流速値を求める段階がある。本研究では、便宜的にこれらの各段階をそれぞれ予測段階、圧力計算段階、修正段階と表記することとする。

コロケート格子配置を用いる場合には、セル中心とセル境界における空間内挿が行われるため、予測段階と修正段階において計算スキームの構成にいくつかの自由度がある。このような計算スキームの構成や計算手順は、計算結果に何らかの影響を及ぼすと考えられる。しかし、これらのうちの特定のスキームにおいて細部の精度向上を図る検討はなされているものの、共通の条件下で複数のスキームを比較した例は見られず、不明な点が少なくない。このため、本研究では、スキームの基本的な特性を離散化式に基づいて考察し、空間的な離散化の相違などを明らかにする。さらに、閉領域内の流れおよび自由液面を有する流れを対象とした計算を行い、コロケート格子配置の空間内挿に関連する計算スキームと圧力計算手法について、最適と考えられる構成を示す。

## 2. 計算スキームと解法

MAC 系解法の予測段階、圧力計算段階、修正段階の各段階において、セル中心とセル境界における空間内挿に関連する計算スキームと圧力計算に関連する解法を示し、それらに考察を加える。

### (1) 予測段階

MAC 系解法においては、予測段階において陽的に流速の推定値が求められる。コロケート格子を利用する場合には、通常セル中心で推定値が計算されるが、圧力の扱いに関して次の 3 種類の方法が考えられる。

- 1) CCP (Cell Center Pressure) スキーム：セル中心における流速の推定値を求める際に、セル中心で評価した  $n$  ステップの圧力  $p^n$  の圧力勾配を用いる方法<sup>4),6),12)</sup>。圧力計算段階においては  $\phi = p^{n+1} - p^n$  の計算が行われる。
- 2) CBP (Cell Boundary Pressure) スキーム：セル中心では圧力勾配を含まない仮の予測値を求め、これをセル境界に空間内挿した後に、セル境界で評価した  $p^n$  の圧力勾配を加えて流速の予測値とする方法<sup>3)</sup>。CCP スキームと同様に、圧力計算段階においては  $\phi$  が計算される。
- 3) FSC (Fractional Step in Collocated grid) スキーム：スタガード格子の Fractional Step 法と同様に、予測段階では圧力を全く考慮しない方法<sup>2),13),14)</sup>。圧力計算段階においては圧力  $p$  が計算対象となる。

各スキームの本質的な特徴を把握するため、図-1 に示す 1 次元場の等間隔コロケート格子上で基礎式の離散化を考える。MAC 系の解法における、時間方向にのみ離散化した 1 次元の連続式と運動方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$u^{n+1} = u^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} + CD^n \Delta t \quad (2)$$

ここに、 $\Delta t$  は 1 ステップの時間増分、 $\rho$  は流体の密度である。式 (2) の  $CD$  は移流項と拡散項、そして外力

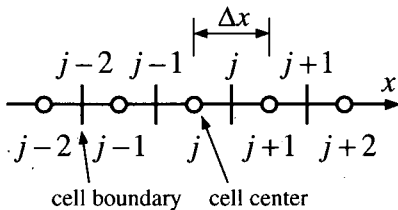


図-1 1次元場におけるコロケート格子配置

項を含む項であり、コロケート格子配置では通常セル中心で評価される。式 (2) では、簡単のため  $CD$  には  $n$  ステップの値を用いる。

CCP スキームでは、式 (2) の圧力に  $p^n$  を用いて、流速の推定値  $u^*$  を次式から求める。

$$u^* = u^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x} + CD^n \Delta t \quad (3)$$

セル中心を基準として式 (3) の空間的な離散化を行うと次式が得られる。

$$u_{c,j}^* = u_{c,j}^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{j+1}^n - p_{j-1}^n}{2\Delta x} + CD_j^n \Delta t \quad (4)$$

ここで、下添字の  $c$  は、セル中心で定義された変数であることを示す。なお、 $p$ 、 $\phi$  および  $CD$  は常にセル中心で定義されるので、下添字の  $c$  を略している。

コロケート格子配置に基づく流体計算では、式 (4) で得られた  $u_{c,j}^*$  をセル境界へ空間内挿して、これを次の圧力計算段階で用いる。等間隔格子であるので、空間内挿として単純平均を用いる。実際に代入計算を行って、セル境界へ空間内挿された離散化式を求めると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} u_{b,j}^* &= \frac{u_{c,j+1}^* + u_{c,j}^*}{2} \\ &= \frac{u_{c,j+1}^n + u_{c,j}^n}{2} + \frac{CD_{j+1}^n + CD_j^n}{2} \Delta t \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\rho} \left( \frac{p_{j+2}^n - p_j^n + p_{j+1}^n - p_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

下添字  $b$  は、セル境界で定義された変数であることを示す。式 (5) の  $u_{b,j}^*$  が、CCP スキームで得られる流速の推定値である。

次に、CBP スキームでは、式 (3) の代りに次式を用いる。

$$u^* = u^n + CD^n \Delta t \quad (6)$$

これに対して、 $\hat{u}$  を次のように定義する。

$$\hat{u} = u^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x} \quad (7)$$

CBP スキームでは、式 (6) をセル中心、式 (7) をセル境界で離散化する。同様に代入計算を行うと、式 (7) の離散化式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{u}_{b,j} &= \frac{u_{c,j+1}^n + u_{c,j}^n}{2} + \frac{CD_{j+1}^n + CD_j^n}{2} \Delta t \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{j+1}^n - p_j^n}{\Delta x} \end{aligned} \quad (8)$$

式 (8) の  $\hat{u}_{b,j}$  が、CBP スキームにおける流速の推定値に相当する。式 (5) と式 (8) で示されるセル境界における流速の推定値を比較すると、CBP スキームで

は近接する圧力からその勾配が評価されており、CCP スキームよりもコンパクトな構成となっている。このため、CBP スキームの方が、圧力勾配を適切に評価できると推察される。

一方、FSC スキームでは予測段階で圧力を考慮しない。このため、推定値  $u^*_{b,j}$  は次式から計算される。

$$u^*_{b,j} = \frac{u^n_{c,j+1} + u^n_{c,j}}{2} + \frac{CD^n_{j+1} + CD^n_j}{2} \Delta t \quad (9)$$

なお、式 (9) により計算された  $u^*_{b,j}$  は圧力を含まないので、厳密には流速の予測値となっていない。このため、スタガード格子配置の場合と同様に、 $u^*_{b,j}$  の境界条件の設定には若干の配慮を要する<sup>12)</sup>。

## (2) 圧力計算段階

圧力計算段階では、予測段階で得られたセル境界上の流速の推定値  $u^*_{b,j}$  あるいは  $\hat{u}_{b,j}$  と連続式から導かれる  $\phi$  あるいは  $p^{n+1}$  に関する連立 1 次方程式を解く。

CCP スキームでは、まず式 (2) と (3) から次式を導く。

$$u^{n+1} = u^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (10)$$

式 (10) はセル境界を基準として次のように離散化される。

$$u^{n+1}_{b,j} = u^*_{b,j} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta x} \quad (11)$$

式 (1) の連続式をセル境界流速を用いて離散化する。

$$\frac{u^{n+1}_{b,j} - u^{n+1}_{b,j-1}}{\Delta x} = 0 \quad (12)$$

式 (11) を式 (12) へ代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta x^2} \\ &= \frac{\rho}{\Delta t} \frac{u^n_{c,j+1} - u^n_{c,j-1}}{2\Delta x} + \rho \frac{CD^n_{j+1} - CD^n_{j-1}}{2\Delta x} \\ & - \frac{p^n_{j+2} - 2p^n_j + p^n_{j-2}}{4\Delta x^2} \end{aligned} \quad (13)$$

式 (13) が CCP スキームを用いた場合の  $\phi$  の連立 1 次方程式であり、これを適当な解法で解くことにより、圧力計算段階における解を得る。

次に、CBP スキームでは、式 (2) と式 (6) から次式が得られる。

$$u^{n+1} = u^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \quad (14)$$

さらに、式 (7) と式 (14) から次式が得られる。

$$u^{n+1} = \hat{u} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (15)$$

式 (15) をセル境界で離散化する。

$$u^{n+1}_{b,j} = \hat{u}_{b,j} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta x} \quad (16)$$

式 (16) を式 (12) へ代入すると、次式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta x^2} \\ &= \frac{\rho}{\Delta t} \frac{u^n_{c,j+1} - u^n_{c,j-1}}{2\Delta x} + \rho \frac{CD^n_{j+1} - CD^n_{j-1}}{2\Delta x} \\ & - \frac{p^n_{j+1} - 2p^n_j + p^n_{j-1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (17)$$

式 (17) が CBP スキームの圧力計算段階の基礎式に相当する。式 (13) と式 (17) の右辺第 3 項を比較すると、圧力の 2 階微分の離散化式として、CBP スキームでは隣接する  $p^n$  が用いられているが、CCP スキームでは 1 セルずつ左右に離れた格子点の  $p^n$  が使用されていることがわかる。

なお、式 (13) と式 (17) の右辺第 1, 2 項は、格子幅  $2\Delta x$  の中央差分で評価されている。稲垣と安部<sup>7)</sup> は、これらの項の高次精度化について考察しているが、本研究ではコロケート格子配置の空間内挿に関連する CBP および CCP スキームの比較に主眼をおくので、各スキームの細部の精度改善は扱わない。

FSC スキームの場合は、CBP スキームとほぼ同様であり、次のように  $p^{n+1}$  の連立 1 次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{p^{n+1}_{j+1} - 2p^{n+1}_j + p^{n+1}_{j-1}}{\Delta x^2} \\ &= \frac{\rho}{\Delta t} \frac{u^n_{c,j+1} - u^n_{c,j-1}}{2\Delta x} + \rho \frac{CD^n_{j+1} - CD^n_{j-1}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (18)$$

圧力計算段階では、以上のようにして得られた  $\phi$  あるいは  $p^{n+1}$  に関する連立 1 次方程式に反復法などの解法を用いることにより、それらの解を求める。CBP スキームあるいは CCP スキームにおいて、圧力の時間変化分である  $\phi$  を計算する方法が、スタガード格子配置における SMAC 法に相当する。また、両スキームでは、HSMAC 法に相当する計算法も適用できる。この場合、CBP スキームでは式 (16) と式 (17)、また CCP スキームでは、式 (11) と式 (13) を用いて、流速と圧力を同時に修正する。HSMAC 法を利用することで、流体質量の保存性に関する精度を向上させ得ることが示されている<sup>3)</sup>。なお、FSC スキームでは、式 (18) に示すように、 $\phi$  ではなく  $p^{n+1}$  が扱われるため、HSMAC 法に相当する計算方法を利用するのは基本的には困難である。

## (3) 修正段階

修正段階においては、計算された  $\phi$  あるいは  $p^{n+1}$  を用いてセル中心における  $n+1$  ステップの流速を求める。このときの計算方法としては、式 (10) をセル中心

を基準として離散化した式から求める方法と、式 (11) から  $u_b^{n+1}$  を計算してこれを空間内挿する方法が考えられる。以下では、前者を PG (Pressure Gradient) スキーム、後者を SI (Spatial Interpolation) スキームと表記する。

予測段階に CCP スキームを用いた場合、PG スキームでは、 $u_{c,j}^{n+1}$  は次式から計算される。

$$u_{c,j}^{n+1} = u_{c,j}^n + CD_j^n \Delta t - \frac{\Delta t}{\rho} \left( \frac{p_{j+1}^n - p_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{2\Delta x} \right) \quad (19)$$

また、SI スキームでは、代入計算を行えば次式により  $u_{c,j}^{n+1}$  が計算されていることがわかる。

$$u_{c,j}^{n+1} = \frac{u_{c,j+1}^n + 2u_{c,j}^n + u_{c,j-1}^n}{4} + \frac{CD_{j+1}^n + 2CD_j^n + CD_{j-1}^n}{4} \Delta t - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{j+2}^n + 2p_{j+1}^n - 2p_{j-1}^n - p_{j-2}^n}{8\Delta x} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{2\Delta x} \quad (20)$$

上記のように、SI スキームではより広い範囲の流速と圧力を利用している。離散化の精度が同じ場合、利用する変数が広範囲に分布すると一般に精度が低下する。このため、SI スキームは PG スキームと比べると精度が低下する可能性がある。同様の指摘は梶島ら<sup>2)</sup>により示されているが、ここで導かれた式 (19) と式 (20) から、利用する変数の範囲の相違を明確に把握することができる。

次に、予測段階で CBP スキームを用いる場合には以下ようになる。修正段階で PG スキームを使用するときには、CCP スキームの場合と同様に式 (19) から  $u_{c,j}^{n+1}$  が計算される。また、SI スキームを用いるときには次式から  $u_{c,j}^{n+1}$  が計算される。

$$u_{c,j}^{n+1} = \frac{u_{c,j+1}^n + 2u_{c,j}^n + u_{c,j-1}^n}{4} + \frac{CD_{j+1}^n + 2CD_j^n + CD_{j-1}^n}{4} \Delta t - \frac{\Delta t}{\rho} \left( \frac{p_{j+1}^n - p_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{2\Delta x} \right) \quad (21)$$

式 (21) で示される CBP スキームを用いた場合の SI スキームでは、式 (20) で表される CCP スキームによる同様の結果と比較して、利用する  $p^n$  の範囲はコンパクトになっている。しかし、PG スキームと比較すればより広い範囲の流速と移流拡散項を利用しており、精度が低下する可能性がある。

予測段階で FSC スキームを利用する場合には、 $u_{c,j}^{n+1}$  は以下のように計算される。PG スキームを利用する

場合には、次式が用いられる。

$$u_{c,j}^{n+1} = u_{c,j}^n + CD_j^n \Delta t - \frac{\Delta t}{\rho} \left( \frac{p_{j+1}^{n+1} - p_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \quad (22)$$

また、SI スキームでは次式が用いられる。

$$u_{c,j}^{n+1} = \frac{u_{c,j+1}^n + 2u_{c,j}^n + u_{c,j-1}^n}{4} + \frac{CD_{j+1}^n + 2CD_j^n + CD_{j-1}^n}{4} \Delta t - \frac{\Delta t}{\rho} \left( \frac{p_{j+1}^{n+1} - p_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \quad (23)$$

CBP および CCP スキームと同様に、SI スキームを利用する場合の方が、広範囲の変数を使用している。

### 3. スキームの精度と解法の比較

#### (1) 閉領域内の流れに対する各スキームの適用性

閉領域内の流れとして、ここでは自由液面を持たないキャピティ内の 2 次元流動<sup>15)</sup> を計算対象とし、これに各スキームを適用する。各スキームの相違を明確にするため、セル数が  $11 \times 11$  という比較的粗い等間隔の格子分割を設定した。対象とする流れの Reynolds 数は 100 とし、移流項に 1 次風上差分、拡散項に中央差分を用いる。また、CBP および CCP スキームでは、圧力計算段階における  $\phi$  の求解法として HSMAC 法を利用し、 $\phi$  の連立方程式の解法には SOR 法を適用する。SOR 法の収束判定のしきい値  $\epsilon_P$  と、HSMAC 法における流速ベクトルの発散値  $D$  の絶対値に対するしきい値  $\epsilon_H$  は、ともに  $10^{-10}$  とする。

初期値は圧力および流速ともに 0 とした。この初期値より非定常計算を進め、計算ステップ間の流速変化量の絶対値の最大値  $\Delta u$  が  $10^{-10}$  以下となったときに定常解が得られたと判定する。時間刻み  $\Delta t$  は  $2.0 \times 10^{-2}$  とした。水平および鉛直方向の流速分布をそれぞれ図-2 と図-3 に示す。

ここでは粗い格子分割を用いているため、図-2 と図-3 に示される計算結果は、Ghia ら<sup>15)</sup> の結果とは一致していない。修正段階に PG スキームを用いた場合には、差はわずかではあるが、CBP および FSC スキームの計算結果が CCP スキームの結果よりも Ghia の数値に近い。一方、修正段階に SI スキームを用いると、計算精度が大きく低減することが示されている。

次に、各スキームの圧力計算段階における反復計算回数の時間的な変化を図-4 に示す。既報<sup>3)</sup>にも詳述したように、HSMAC 法は、1)  $\phi$  の連立方程式を解き、2) 得られた  $\phi$  を用いて流速を修正し、3) 修正された流速ベクトルの発散値がしきい値を満足すれば終了、そうでなければ再び 1) へ戻る、という手順を取る。

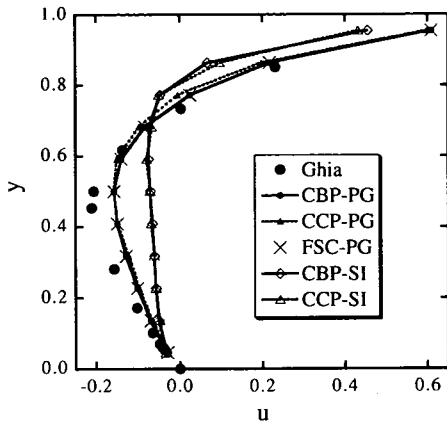


図-2 流速  $u$  の比較 ( $x = 0.5$ , セル数  $11 \times 11$ )

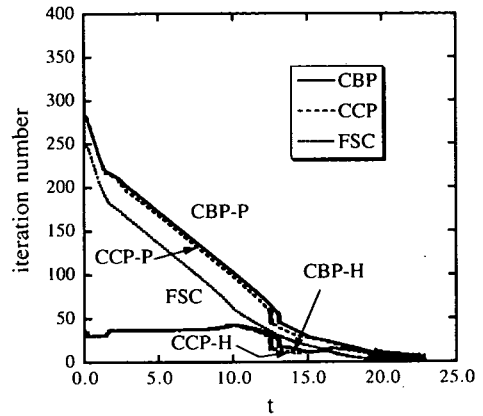


図-4 圧力計算段階の反復計算回数

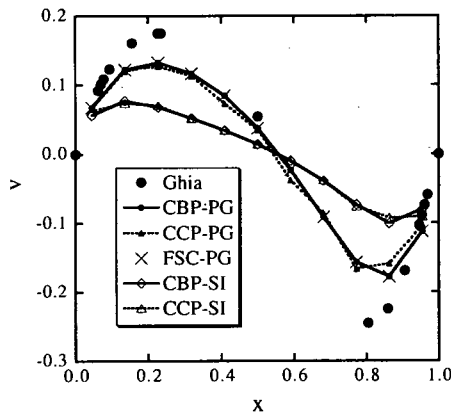


図-3 流速  $v$  の比較 ( $y = 0.5$ , セル数  $11 \times 11$ )

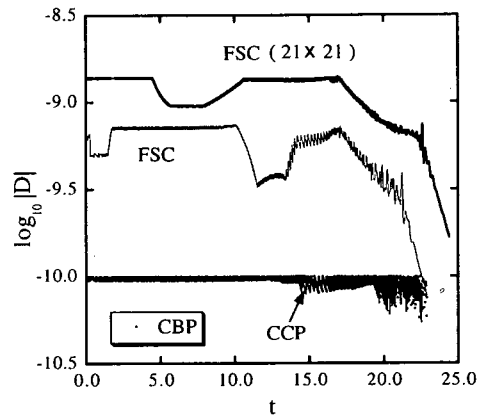


図-5 流速ベクトルの発散値の時間的な変化

このように、HSMAC 法では上記 1) から 3) までの反復計算が行われるため、この反復回数を図-4 では記号 -H を付して示した。また、1) の計算には SOR 法を適用しており、HSMAC 法の反復計算が終了するまでの SOR 法の総反復回数を、同図中では記号 -P を付して示した。図-4 の結果から、これらの反復計算回数の変化は CBP および CCP スキームではほぼ同様となっている。なお、参考として示した FSC スキームの SOR 法の反復計算回数は、CBP および CCP スキームより少ない。これは、FSC スキームでは HSMAC 法を利用していないので、上記 1) から 3) までの反復計算がなく、SOR 法による  $p^{n+1}$  の連立方程式の計算が 1 ステップに 1 度だけ行われるためである。

図-5 に、連続性の誤差の時間的な変化を示す。図中の  $|D|$  は、各計算セルにおける流速ベクトルの発散値の絶対値が、計算領域内で最大となる値である。CBP および CCP スキームでは、HSMAC 法を用いている

ため、すべての計算ステップにおいて  $|D|$  の値は  $\epsilon_H$  以下に納まる。しかし、FSC スキームでは HSMAC 法を利用できないため、 $\epsilon_P$  により間接的に  $|D|$  が制御される。このときの問題点として、1) 非定常計算の計算過程で  $|D|$  が変化し、2)  $\epsilon_P$  と  $|D|$  の関係が明らかでない。つまり図-5 に示したように、 $\epsilon_P$  が同じでもセル数を変えると  $|D|$  は変化する、という特性がある。

上記と同様のキャピティ流れに対して、セル数を  $21 \times 21$  とし、 $\Delta t$  を  $1.0 \times 10^{-2}$  としたときの計算結果を図-6 と図-7 に示す。他の計算条件はセル数  $11 \times 11$  の場合と同一である。格子分割を細かくすると、CBP、FSC および CCP スキームの計算結果はほぼ同様のものとなる。また、SI スキームの解析結果は、格子分割を変えてもさほど改善せず、PG スキームより精度が低い。

以上の閉領域内の計算結果から、修正段階には PG スキームを用いるのが適切であることが明らかとなった。また、ここで取り上げたキャピティ流れに対して

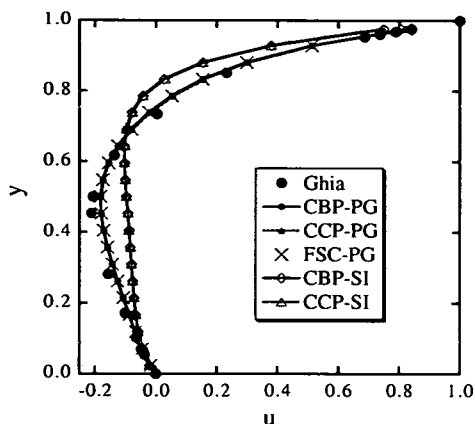


図-6 流速  $u$  の比較 ( $x = 0.5$ , セル数  $21 \times 21$ )

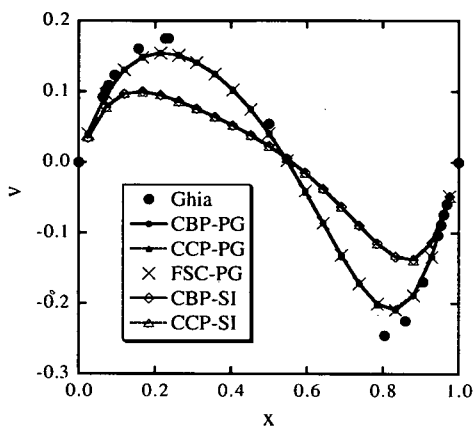


図-7 流速  $v$  の比較 ( $y = 0.5$ , セル数  $21 \times 21$ )

は、格子分割が粗い場合には CBP および FSC スキームが CCP スキームより若干高精度であるが、格子間隔が細くなると両者の差は小さくなることが示された。圧力計算段階における計算反復回数は、CBP および CCP スキームでほぼ同様であった。

## (2) 自由水面流れに対する各スキームの適用性

自由水面を有する流れに対する各スキームの適用性を比較するため、最初に図-8 に示す矩形容器内の微小静振波<sup>3)</sup>の計算を行った。なお、基礎方程式は前報<sup>3)</sup>と同様に、平均水深、重力加速度、流体密度などの代表量で無次元化されている。容器幅  $l$  と平均水深  $h$  はともに 1.0 で、初期水面形状は次式で与えられる。

$$\eta = 0.01 \cos\left(\frac{\pi x_1}{l}\right) \quad (24)$$

ここに、 $\eta$  は平均水深を基準とする水面高さであり、 $x_1$  は容器左端を原点とする水平方向の座標成分である。ここでは、復元力として重力 ( $g = 1.0$ ) のみを考慮し、

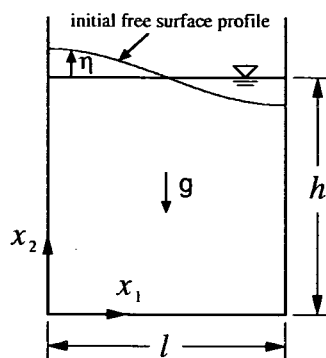


図-8 矩形容器と座標系

流体は完全流体とする。自由液面の取り扱いなど、本研究で考察の対象とするスキーム以外の計算手法は、既報<sup>3)</sup>と同様とした。計算セル数は  $10 \times 10$ 、 $\Delta t$  は 0.01 とする。圧力計算段階の収束判定基準は、 $\epsilon_P$  および  $\epsilon_H$  とともに  $10^{-10}$  とする。なお、閉領域内の流れの計算で、SI スキームは計算精度を低下させることが明らかとなったので、以下の計算ではすべて修正段階に PG スキームを用いる。

最初に、CBP スキームと FSC スキームを用いて計算された容器両端における  $\eta$  の時系列を図-9 に示す。CBP スキームによる計算結果は、完全流体であるため波高が減衰しない妥当な変動を示しており、周期も微小振幅波における理論値とほぼ一致する。FSC スキームでは、CBP スキームの結果と比較して、周期は概ね一致するが、水位が時間とともに低下する。これは、FSC スキームでは HSMAC 法を利用できず、容器内の流体質量が十分正確に保存されないためである。すなわち、CBP スキームによる結果では、流速ベクトルの発散値  $|D|$  は常にしきい値  $\epsilon_H$  以下となるが、FSC スキームでは比較的大きい値となる。FSC スキームを自由液面流れに用いる場合には、閉領域内の流れでも示されたように、 $\epsilon_P$  と  $|D|$  の関係が明確でないため、 $|D|$  を制御するためには、計算手法に新たな工夫が必要となると考えられる。

次に、CBP スキームと CCP スキームで得られた  $\eta$  の時系列を比較した結果を図-10 に示す。CCP スキームでは HSMAC 法が利用できるため、FSC スキームで見られた水位の低下は生じない。しかし、CCP スキームでは周期が短く、しかも波高が時間とともに減衰してしまう不適切な結果となった。CCP スキームで水面変動が正確に捕らえられないのは、前述したように、式 (5) および式 (13) で示される流速の推定値と  $\phi$  の連立 1 次方程式で利用される圧力  $p^n$  の空間配置に原因があると考えられる。

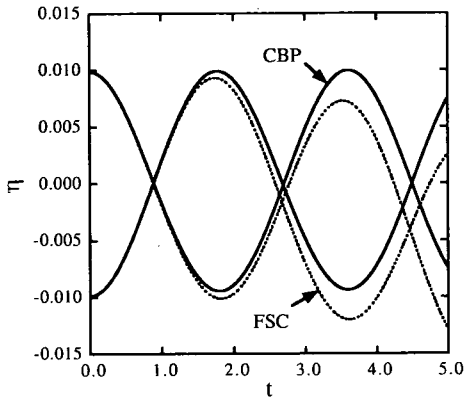


図-9 ηの時系列の比較 (CBP および FSC スキーム)

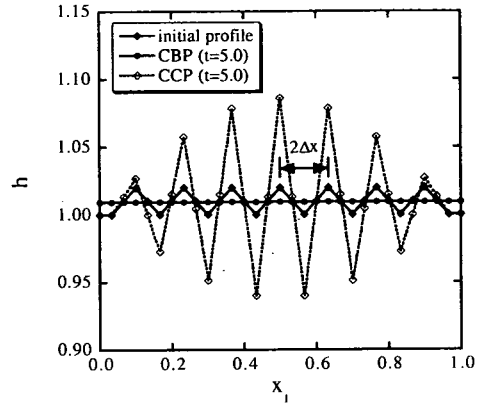


図-12 水面形の比較

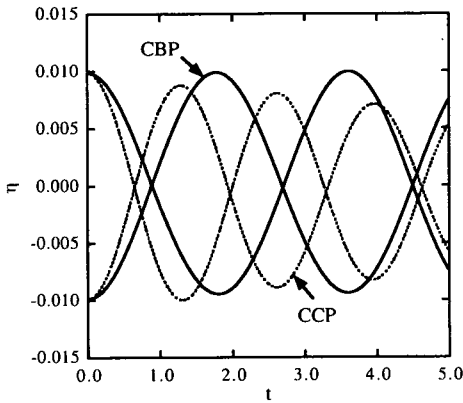


図-10 ηの時系列の比較 (CBP および CCP スキーム)

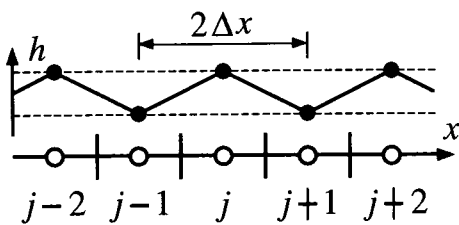


図-11 波長  $2\Delta x$  の水面振動と格子配置

式 (13) と式 (17) の比較から明らかなように、CCP スキームでは圧力  $p^n$  の 2 階微分値がセル幅  $2\Delta x$  の中央差分で評価されている。このため、CCP スキームでは図-1 の格子配置で表現できる最小波長  $2\Delta x$  の水面振動が生じたときに、これを正しく検出できない可能性がある。図-11 は、このときの水面振動と格子配置を模式的に示したものである。

上記の問題点を確認するため、波長  $2\Delta x$  の水面変動を初期値として与えた場合の計算を行った。計算セル数は  $15 \times 15$  とし、 $\Delta t$  は 0.01 とした。また、動粘性係数を 0.01 とすることにより、流体の粘性によって初期の水面変動が徐々に減衰する条件とした。図-12 に初期状態 ( $t = 0.0$ ) の水面形状と、 $t = 5.0$  における計算結果を示す。同図中では、プロット点は  $\Delta x/2$  ごとに付されている。図-12 に示すように、CBP スキームによる計算では、初期条件により引き起こされた水面変動は減衰して、 $t = 5.0$  ではほぼ水平な水面形状となる。一方、CCP スキームによる計算結果では、図-12 に示されるように、 $t = 5.0$  では水面変動が増幅してしまう不自然な結果となった。このように、CCP スキームでは波長  $2\Delta x$  の水面振動や圧力変動を適切に扱えない場合があることが示された。

より一般的な自由水面流れにおける各スキームの特性を把握するため、底面が移動壁となる容器内の自由水面流れ<sup>16)</sup>の計算を行った。水面の変形が明瞭となるよう外力は  $g = 0.5$  とし、Reynolds 数は 100 とした。計算セル数は  $20 \times 20$ 、また  $\Delta t = 0.01$  とした。静止状態から非定常計算を開始し、 $t = 5.0$  となったときの流速ベクトルと水面形の分布を図-13 と図-14 に示す。CBP スキームでは、底部の移動壁によって発生した流れにより、初期には水平であった水面がある連続的な分布形状を示すようになる。一方、CCP スキームでは、図-14 の結果に示されるように、水面に波長がほぼ  $2\Delta x$  の微小な変動が発生している。Reynolds 数が十分低いため、このような水面変動は非物理的な挙動であると考えられる。また、この水面変動は条件によっては数値的な発散につながる可能性がある。

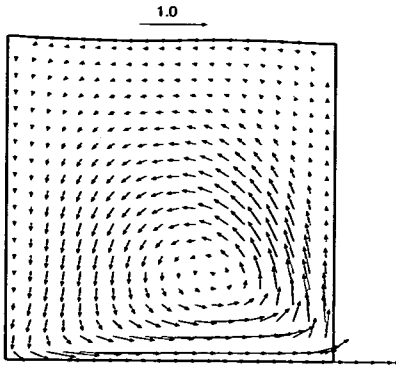


図-13 自由水面流れの計算結果 (CBP スキーム)

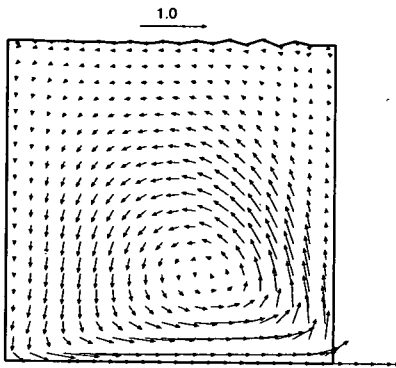


図-14 自由水面流れの計算結果 (CCP スキーム)

#### 4. 結言

コロケート格子配置を用いる場合に、MAC 系解法の予測段階、圧力計算段階、そして修正段階において、内挿計算と関連する複数の計算スキームと計算手順を示し、閉領域の流れと自由水面流れを対象としてそれらの比較を行った。主な結果は以下のように要約される。

- 1) 予測段階において圧力を考慮する場合、CBP スキームでは隣接するセル中心の圧力  $p^n$  を用いてその勾配が評価されるのに対し、CCP スキームではより広範囲の  $p^n$  が使われる。
- 2) 圧力計算段階で扱われる  $\phi$  の離散化式中の  $p^n$  の 2 階微分量は、CBP スキームでは格子幅  $\Delta x$  の中央差分で評価されるのに対し、CCP スキームでは格子幅  $2\Delta x$  で同様に評価されている。
- 3) 修正段階においては、SI スキームは計算結果の精度を大幅に低減させるので、PG スキームを利用することが必要である。
- 4) 閉領域内の定常流速分布に関しては、格子の空間

解像度が低いときには CBP スキームは CCP スキームより若干解析精度が高い。しかし、空間解像度が十分な場合には、両者の差はほとんど見られなくなる。FSC スキームでは、流体の連続性に対する誤差を制御するのが困難であるが、流れ場に対してその影響が小さい場合には、流速分布に関しては CBP スキームとほぼ同様の解析精度を有する。

- 5) 自由水面流れに対しては、FSC スキームでは流体の連続性に対する誤差を小さく保つことが困難な場合があり、水位に影響が生ずることがある。CBP および CCP スキームでは、HSMAC 法を利用することで、この問題を回避することが可能である。
- 6) CCP スキームでは、波長  $2\Delta x$  の水面振動あるいは圧力変動を捕えることが困難である。このため、波長  $2\Delta x$  の初期水面振動が増幅したり、自由水面流れの計算過程で同様の水面振動が生ずる場合がある。

上記の結果を考慮すると、コロケート格子配置を利用して MAC 系解法による流体計算を行う場合には、予測段階で CBP スキーム、そして修正段階で PG スキームを利用する構成が望ましい。また、圧力計算段階では、HSMAC 法を用いて流体ベクトルの発散値を十分小さく制御することが、特に自由水面流れに対しては重要である。ただし、閉領域内の流れ等においては、連続性の誤差が流れ場に及ぼす影響が小さい場合には、SMAC 法の利用、あるいは FSC スキームの選択も考えられる。

なお、各計算段階におけるより細部の計算手法の精度の向上は、本研究で示された基本的な枠組みの上で検討されるのが望ましいと考えられる。

#### 参考文献

- 1) Zang, Y., Street, R. L. and Koseff, J. R.: A Non-staggered Grid, Fractional Step Method for Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations in Curvilinear Coordinates, *J. Comp. Phys.*, Vol. 114, pp. 18-33, 1994.
- 2) 梶島岳夫, 太田貴士, 岡崎和彦, 三宅裕: コロケート格子による非圧縮流れの高次差分解析, 機械学会論文集 B 編, Vol. 63, No. 614, pp. 3247-3254, 1997.
- 3) 牛島省, 瀬津家久: 移動一般座標系を用いたコロケート格子による自由水面流れの数値解析手法, 土木学会論文集, No. 698/II-58, pp. 11-19, 2002.
- 4) 大岡龍三, 村上周三, 持田灯: LES におけるコロケーショングリッドのエネルギ非保存性の検討, 生産研究, Vol. 49, No. 1, pp. 19-26, 1997.
- 5) 森西洋平: 非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性, 機械学会論文集 B 編, Vol. 62, No. 604, pp. 4098-4105, 1996.



- 6) 森西洋平：コロケート格子系差分の運動エネルギー保存特性の改善方法，日本機械学会論文集 B 編，Vol. 65，No. 630，pp. 505-512，1999.
- 7) 稲垣昌英，安倍賢一：コロケーション格子を用いた LES の計算精度改善に関する一考察，日本機械学会論文集 (B 編)，Vol. 64，No. 623，pp. 1981-1988，1998.
- 8) Rhie, C. M. and Chow, W. L.: Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.
- 9) Temam, R.: *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, 2nd. ed., North-Holland, Amsterdam, 1979.
- 10) Amsden, A. A. and Harlow, F. H.: A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations, *J. Comp. Phys.*, Vol. 6, pp. 322-325, 1970.
- 11) Hirt, C. W. and Cook, J. L.: Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain, *J. Comp. Phys.*, Vol. 10, pp. 324-340, 1972.
- 12) 梶島岳夫：乱流の数値シミュレーション，養賢堂，1999.
- 13) 牛島省，禰津家久，山上路生，坂根由季子：局所 5 次スプライン内挿法 (QSI 法) を利用したコロケート格子による流体解析手法，土木学会論文集，No. 691/II-57，pp. 73-83，2001.
- 14) Fuchs, L. and Tillmark, N.: *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, Vol. 5, p. 311, 1985.
- 15) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T.: High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387-411, 1982.
- 16) 牛島省，禰津家久，吉田圭介，池田大輔：自由水面流れの数値計算における内部流動の解析精度に関する考察，水工学論文集，Vol. 46，pp. 409-414，2002.

(2002.2.22 受付)

## INVESTIGATION ON COMPUTATIONAL SCHEMES FOR MAC METHODS WITH COLLOCATED GRID SYSTEM

Satoru USHIJIMA, Masaki TAKEMURA and Iehisa NEZU

Multiple computational schemes associated with the spatial interpolation in a collocated grid system are investigated in a MAC method. The simultaneous linear equations of the scalar potential  $\phi = p^{n+1} - p^n$  include the second derivatives of the pressure  $p^n$  discretized by the central difference with the interval of  $\Delta x_i$  in the the CBP (Cell-Boundary Pressure) scheme, which utilizes  $p^n$  on cell boundaries in the prediction stage. However, the same derivatives are evaluated with the interval of  $2\Delta x_i$  in the CCP (Cell-Center Pressure) scheme that estimates the pressure gradient at the cell center points. It has been shown that the CCP scheme is likely to cause the free-surface or pressure instabilities, although the CBP scheme deals with them. Conclusively, the combination of the CBP scheme and PG scheme, which calculates  $u_i^{n+1}$  with the pressure gradient at the cell center points in the correction stage of the MAC method, is particularly effective together with the HSMAC method for the velocity-pressure relaxation.