

# 準解析手法による動的非線形系の 初期通過確率算定

星谷勝<sup>1</sup>・丸山収<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 Ph.D. 武蔵工業大学教授 工学部都市基盤工学科 (〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)

<sup>2</sup>正会員 工博 武蔵工業大学助教授 工学部都市基盤工学科 (〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)

動的外乱を受ける構造物の安全性を議論する場合には、外乱が作用している全継続時間中に応答値が規定された一定値を超えない確率を定量的に評価する必要がある。これは、応答が一定値を越えたら限界状態に達したという基準で安全性を算定するものであり、初期通過確率を算出することに集約できる。本研究は、有限個のサンプル実現値を用い、解析的手法を併用して、非線形構造システム初期通過確率算定のための準解析手法を提案し、1自由度非線形構造系を対象とした数値計算例により手法の検証を行っている。

**Key Words** : *first excursion probability, nonlinear system reliability, Kalman filter, Monte Carlo simulation, stochastic structural dynamics*

## 1. はじめに

構造物の受ける外乱、例えば風荷重や地震動などは、多くの不確定要因を含むことから確率過程としてとらえることができる。

動的荷重を受ける構造物の安全性を議論する場合には、外乱が作用している全継続時間中に応答値が規定された一定値(限界値)を超えない確率を定量的に評価する必要がある。これは、応答値が一定値を越えたら限界状態に達したとする基準で安全性を算定するものであり、動的荷重に対する構造物の安全性すなわち動的信頼性は、初期通過確率を算定することに集約できる<sup>1)</sup>。

初期通過確率算定に関して現在のところでは、システムが線形低自由度で入力ガウス性のホワイトノイズという特殊な場合でのみ理論解が得られている。

それらの手法に注目してみると、応答過程がマルコフ性を有すると仮定した解析手法、例えば、Fokker-Planck Equation, Lin and Cai<sup>2)</sup>らの Moment Equation などがある。これとは別の方法で非線形システムにおいて近似解を得ている Closure Technique や適度のシステムサイズに適用可能な Lin and Cai<sup>2)</sup>らの Stochastic Averaging などがある。これらのマルコフ性を基にした解析手法は計算の効率および解の精度、そしてシステムのディメンションおよび非線形性について特殊な場合のみと制限されていることから適用範囲の面

から見て限定された手法である。一方、Crandall<sup>3)</sup>の Perturbation Method は、システムのディメンションによらず、弱非線形のシステムに適用可能な解析手法であるが、真値への収束が常に保証されていない。Roberts and Spanos<sup>4)</sup>らの Equivalent Linearization Technique は、システムのサイズおよび非線形性に左右されないが、解の精度が解析時に仮定する応答の分布と実際の応答の分布との適合性に依存する。このほかの手法には、Bedrosian and Rice<sup>5)</sup>らの Function Series Representation や Benaroya<sup>6)</sup>の Decomposition Method, そして Cai and Lin<sup>7)</sup>の Nonlinearization Technique などがある。これらの手法も効率および精度、そしてシステムのディメンションおよび非線形性の面で制限があり、限定された手法である。

この様に解析的手法においては、任意の非線形性や多自由度系に適用可能な解析手法を構築することは困難である。そこで、モンテカルロシミュレーションによる解析手法が一般的に用いられる。この方法は、いかなる形式のシステムも容易に解析対象として取り込むことができ、またシステムのディメンションによらないので汎用性が高いが、その反面多大な計算時間を有するという欠点を有する。この欠点を改良するために Pradlwatter and Schuëller<sup>8)</sup>らの Weight-Controlled Method, そして Bayer and Bucher<sup>9)</sup>らの Importance Sampling Method などが提案されているが、これらは効率や精度、手法自体の本質的な安定性などの検討が必要である。この様な

背景の基で、一方では近似理論解による解析が必要となってくる。

本研究では、非線形系にガウス過程でモデル化される外乱入力が入作用する場合を対象として、有限個のサンプルを用いて解析的な手法を併用しつつ、準解析解を求めていくことで計算の効率をはかることを行っている。そして、初期通過確率を求めるために、数値的に得られた応答データを逐次取り込み、カルマンフィルタのアルゴリズムを併用した準解析法 (Pseudo Analytical Method)<sup>10),11)</sup>を開発するものである。システムが非線形のため出力が非ガウス性となり問題の本質的な難しさとなっているが、それを解くために問題をガウス性に如何に帰着させるかが課題である。

まず、システムの非線形支配方程式を、確率論的等価線形化法により線形化する。次に、その振動方程式を離散型状態方程式に変換し、外乱をホワイトノイズとする。以上により、離散型状態方程式は、ホワイトノイズを入力とする Markovian 状態方程式となる。この状態方程式とオリジナルシステムから得られる応答解析データをカルマンフィルタに適用し、状態ベクトルの最適推定値および2つの隣接する時刻  $k$  と  $k+1$  の結合ガウス確率密度関数を作成することにより、ガウス性およびマルコフ性を有している故に全継続時間中の信頼性を評価するための初期通過確率を算定することが可能となる。

## 2. 準解析法 (Pseudo Analytical Method: PAM)

### (1) 問題設定

Fig. 1を用いて本研究の目的を示す。Fig. 1は、ホワイトノイズ  $w(t)$  を非線形システムへの入力とし、非線形システムの出力  $z(t)$  の関数として設定される性能関数  $g(z(t))$  が  $0 \leq t \leq T$  において負となる確率を用いて初期通過確率  $P_f$  が算出されることを示している。本研究の目的は、この  $P_f$  を準解析的に求める方法を開発することである。

構造物の振動方程式は、一般に2階微分方程式で与えられる。このモデルの状態量を状態空間表示することにより、入力  $w(t)$  をホワイトノイズとする1階のベクトル微分方程式に帰着させることができる。

$$\frac{dz(t)}{dt} = f[t, z(t)] + G(t)w(t) \quad (1)$$

ここで、 $z(t)$  はシステムの応答を要素とする状態ベクトル、 $f[t, z(t)]$  は非線形関数、 $G(t)$  は入力関係を規定する係数ベクトル、さらにホワイトノイズ  $w(t)$  は平均値 0、 $E[w(t)w(\tau)^T] = Q(t)\delta(t - \tau)$  である。

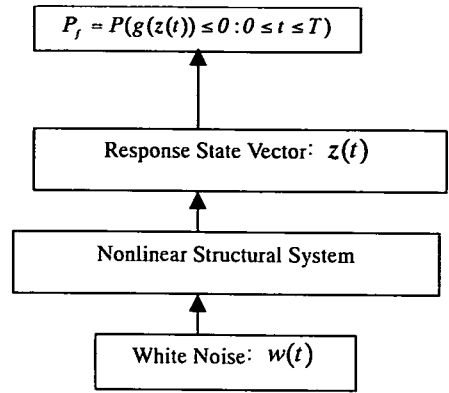


Fig. 1 Outline of Problem Statement

### (2) 解析手順

準解析法(PAM)による初期通過確率  $P_f$  算出までの計算の流れをFig. 2のフローチャートを用いて解説する。

Step(a): 非線形状態方程式を確率論的に等価な連続型の線形状態方程式に表現する。ただし、この段階では  $\hat{z}(t)$  は未知量であり、本アルゴリズムの Step(c)により算出される。

Step(b): 連続型状態方程式を離散化し、漸化型の線形状態方程式に変換する。その際異なる  $k$  ステップと  $k+1$  ステップの2時刻の状態ベクトルを考慮し、拡大系の状態ベクトル  $\tilde{z}(k) = [z(k) \ z(k-1)]^T$  に対する状態方程式と観測方程式を作成する。カルマンフィルタを適用する際に、構造モデルである式(1)による応答計算から得られるサンプル実現値  $z^*(k)$  を観測データとして用いる。

Step(c): カルマンフィルタを用いて拡大状態ベクトルの最適推定値および共分散行列を求める。解析に際して変数 STEP で定義されるサンプリング間隔で観測データを取り込みフィルタリングを行い、その他の場合には、予測アルゴリズムを適用する。

Step(d): 時刻  $k$  と  $k+1$  の結合ガウス確率密度関数  $f(z(k+1), z(k))$  を作成し、結合ガウス確率密度関数を安全または破壊領域において積分することで、サンプルごとの初期通過確率  $P_f^{(i)}$  を得ることができる。そして  $N$  サンプルセットに対する平均値を算出し、初期通過確率  $P_{f,N}^{PAM}$  を求める。

Step(a)および Step(b)は確率論的な等価線形化であり、オフラインで定式化される。非線形システムの応答解析データを観測データとして、Step(c)および Step(d)を繰り返して初期通過確率を算出する。ここで、異なる  $k$

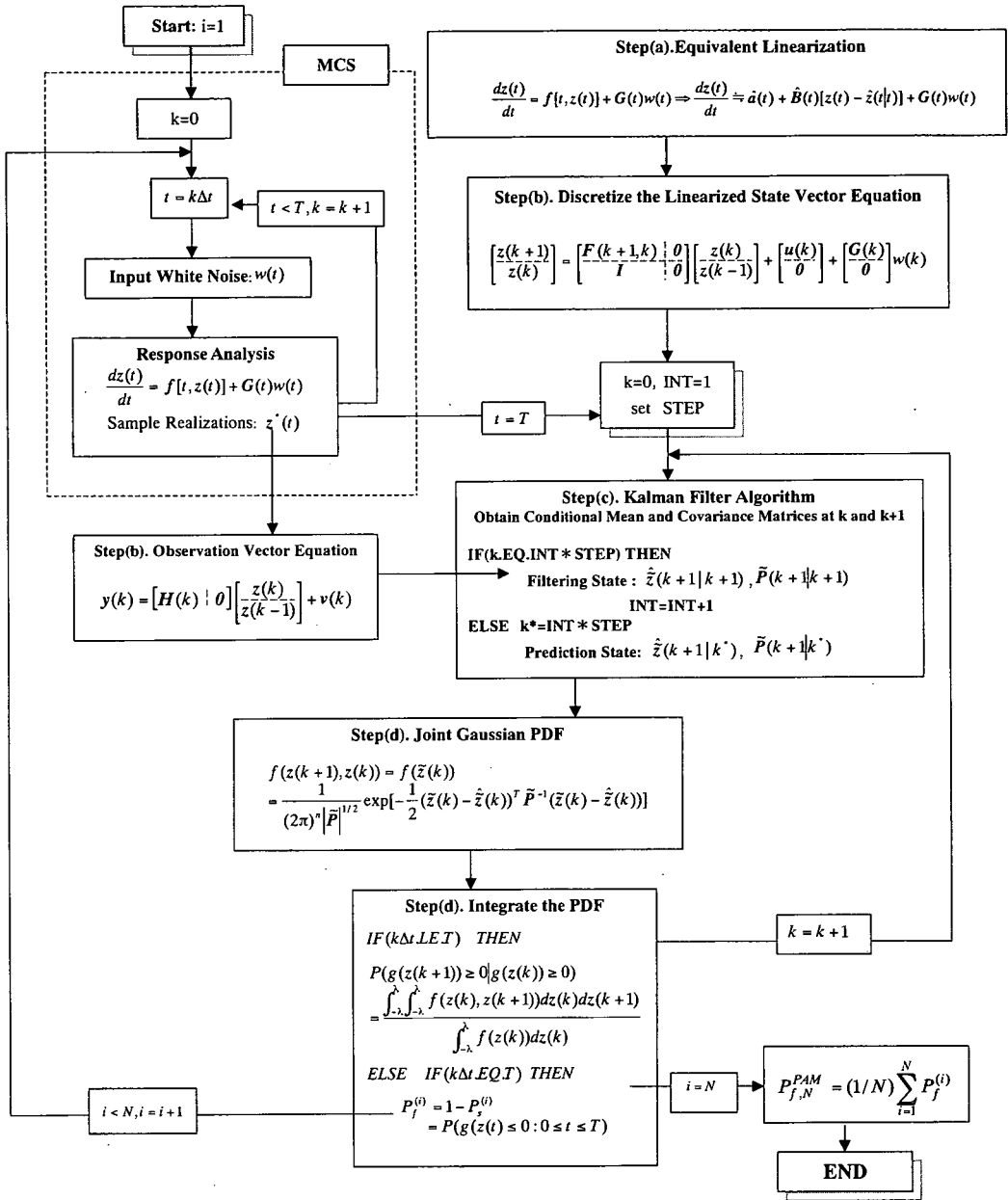


Fig. 2 Pseudo Analytical Method

ステップと  $k+1$  ステップの2時刻の状態ベクトルを考慮し、拡大系の状態ベクトルに対する結合確率密度関数を作成することは、式(1)の Markovian 状態方程式に起因しており、動的信頼性を評価する場合には、単に時刻  $k$  における平均値および共分散に関する情報では不十分であることを意味している。

PAM は、以下に述べるように従来の解析解による手法およびモンテカルロ法を包含した手法であることが理

解される。すなわち、Step(a)における等価線形化を無条件平均値または別の方法で与えられる基準軌跡のまわりで行うだけで、Step(b)における観測方程式を考慮しなければ、従来の等価線形化法による解析解を求めることになる。一方Fig. 2の左上破線部において単純に応答計算を行い、予め設定された閾値を超えるか否かを繰り返し判定すれば通常のモンテカルロ法を行っていることになる。

### (3) PAMの誘導

Fig. 2に示した PAM の各ステップの詳細を示す。

#### a) 確率論的等価線形化<sup>12),13)</sup>(Step(a))

対象とするシステムの支配方程式が、線形関係で与えられ、入力がガウス性の場合、最適推定値および推定誤差分散により、線形推定理論の理論解を得ることができる。この結果は、カルマンフィルタとなる。

しかしながら、非線形システム推定理論において、理論解を得ることは困難であり、拡張カルマンフィルタに代表される Taylor 展開などを用いた各種の近似法が導入されている。

本研究では、非ガウス性の出力をいかに精度良く、ガウス性へと近似するかが重要であり、拡張カルマンフィルタなどの各種等価線形化手法を検討した結果、より安定した手法として以下に述べる確率論的等価線形化法<sup>12),13)</sup>を用いることとした。式(1)における  $f[t, z(t)]$  が次式のように展開されるものと仮定する。

$$f[t, z(t)] = a(t) + B(t)\{z(t) - \hat{z}(t|t)\} + e(t) \quad (2)$$

ここで、 $\hat{z}(t|t) = E\{z(t)|Y(t)\}$  の  $(n \times 1)$  ベクトル、 $Y(t)$  は  $Y(t) = \{Y(s), s \in [t_0, t]\}$  である  $(\ell \times 1)$  ベクトルである。

式(2)における  $e(t)$  は、展開を第2項までで打ち切ったすべての誤差を集めたものである。また、 $a(t)$  および  $B(t)$  は、線形化による誤差項  $e(t)$  に関して、条件付確率密度関数  $P\{z(t)|Y(t)\}$  に対する自乗期待値が最小となるように決定される。

$$E\{e(t)^T e(t)|Y(t)\} = \int e(t)^T e(t) P\{z(t)|Y(t)\} dz \rightarrow \min. \quad (3)$$

実際に式(3)を計算するためには、条件付確率密度関数  $P\{z(t)|Y(t)\}$  が必要となる。しかしながら、式(1)よりシステムに対する入力がガウス性であっても、システムの入出力関係が非線形形式となっていることから、 $z(t)$  は非ガウス性となり、 $P\{z(t)|Y(t)\}$  の分布形を規定することは困難である。

ここでは、未知の条件付平均値  $\hat{z}(t|t)$  および共分散行列  $P(t|t)$  を有するガウス性確率密度関数として  $P\{z(t)|Y(t)\}$  を与えることとする。すなわち条件付平均値近傍においてガウス性を仮定していることになり、これらの値は、カルマンフィルタによりオンラインで逐次推定される。

$$P\{z(t)|Y(t)\} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |P(t|t)|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(z(t) - \hat{z}(t|t))^T P(t|t)^{-1} (z(t) - \hat{z}(t|t))\right] \quad (4)$$

式(4)の仮定の下で、式(3)の計算を行う。

$$\frac{\partial E[e^T(t)e(t)|Y(t)]}{\partial a(t)} = \int [-2f[t, z(t)] + 2a(t) + 2B(t)\{z(t) - \hat{z}(t|t)\}] P\{z(t)|Y(t)\} dz \quad (5)$$

ここで、 $\partial E[e^T(t)e(t)|Y(t)]/\partial a(t) = 0$  を満足する  $a(t)$  を  $\hat{a}(t)$  とおくと、次式を得る。

$$\hat{a}(t) = \int f[t, z(t)] P\{z(t)|Y(t)\} dz = \hat{f}[t, z(t)] \quad (6)$$

同様に、 $\partial E[e^T(t)e(t)|Y(t)]/\partial B(t) = 0$  となる  $B(t)$  を  $\hat{B}(t)$  とおくと、次式を得る。

$$\hat{B}(t) = [(f[t, z(t)]z(t)^T)^{\wedge} - \hat{f}[t, z(t)]\hat{z}(t|t)^T] P(t|t)^{-1} \quad (7)$$

ここで、 $(f[t, z(t)]z(t)^T)^{\wedge} = E\{f[t, z(t)]z(t)^T|Y(t)\}$ 、

$P(t|t) = E\{[z(t) - \hat{z}(t|t)]\{z(t) - \hat{z}(t|t)\}^T|Y(t)\}$  である。

したがって、式(1)は、次式で与えられる等価線形形式へと近似表現することが出来る。

$$\frac{dz(t)}{dt} \doteq \hat{a}(t) + \hat{B}(t)\{z(t) - \hat{z}(t|t)\} + G(t)w(t) \quad (8)$$

式(8)は線形関係式であるので、カルマンフィルタアルゴリズムを適用することが出来る。

#### b) 漸化型状態方程式および観測方程式(Step(b))

式(8)の線形連続型状態方程式を離散化することを考えて、左辺に1次差分を適用する。

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \quad (9)$$

$t = k \cdot \Delta t$  として、式(9)および式(8)から、次式の離散型状態方程式を得る。

$$z(k+1) = F(k+1, k)z(k) + u(k) + G(k)w(k) \quad (10)$$

ここで、

$F(k+1, k) = I + \Delta t \hat{B}(k)$ 、 $u(k) = \Delta t \hat{a}(k) - \Delta t \hat{B}(k)\hat{z}(k|k)$  である。 $w(k)$  は平均値 0 の離散型ホワイトノイズであるが、連続型ホワイトノイズを離散型へ変換する関係式<sup>14)</sup>に基づいて、 $E\{w(k)^2\} = Q(k) = Q(t)/\Delta t$  として与えられる。

拡大系の状態ベクトルを  $\tilde{z}(k) = [z(k) \ z(k-1)]^T$  とおくと、拡大系の状態方程式を式(10)をもとに次式で与える。

$$\begin{bmatrix} z(k+1) \\ z(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(k+1, k) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(k) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(k) \\ 0 \end{bmatrix} w(k) \quad (11)$$

式(10)より時刻  $k+1$  における状態量  $z(k+1)$  は時刻  $k$  における状態量  $z(k)$  に依存した Markovian 状態方程式となっている。したがって、初期通過確率を算定するためには異なる2時刻間の結合密度関数を求める必要があり、この目的のために拡大状態ベクトル  $\tilde{z}(k)$  に対する状態方程式を定式化した。

また観測方程式を次式で与える。式(12)における  $H(k)$  は観測される応答量に対応して規定される。

$$y(k) = [H(k); 0] \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-1) \end{bmatrix} + v(k) \quad (12)$$

ここで、 $v(k)$  は平均値 0、分散値が  $R(k)$  のガウス白色雑音である。

計算例で示すが PAM では、状態量  $z(k)$  の時系列を設定した時間間隔で観測するように定式化する。ここで、すべての状態量の全時系列がノイズ無しで観測されれば、観測量に関する不確定性は存在せず、PAM はモンテカルロ法と同一の結果を与える。

#### c) カルマンフィルタアルゴリズムへの適用 (Step(c))

式(11), (12)の拡大系にカルマンフィルタアルゴリズムを適用し、等価線形システムに対する条件付平均ベクトルおよび共分散行列を求める。

拡大状態ベクトル  $\tilde{z}(k)$  に対して、式(13)は予測過程における条件付平均値、式(14)はフィルタリング過程における条件付平均値を示している。式(13)の左辺の要素について考えると、 $z(k|k)$  は時刻  $k$  におけるフィルタリングベクトルであり、式(14)の左辺には、スムージングベクトル  $z(k|k+1)$  が含まれていることが分かる。

$$\begin{bmatrix} \hat{z}(k+1|k) \\ \hat{z}(k|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z}(k|k) + \Delta t \hat{a}(k) \\ \hat{z}(k|k) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{z}(k+1|k+1) \\ \hat{z}(k|k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z}(k+1|k) \\ \hat{z}(k|k) \end{bmatrix} + \tilde{K}(k+1) [y(k) - [H(k); 0] \hat{z}(k+1|k)] \quad (14)$$

式(14)右辺における  $\tilde{K}(k+1)$  はカルマンゲインであり、拡大系の予測過程における共分散行列  $\tilde{P}(k+1|k)$  を式(15)とおくと、式(16)により求めることが出来る。

$$\tilde{P}(k+1|k) = \begin{bmatrix} P(k+1|k) & P_{k+1,k|k} \\ P_{k,k+1|k} & P(k|k) \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここで、

$$P(k+1|k) = E\{[z(k+1) - \hat{z}(k+1|k)]\{z(k+1) - \hat{z}(k+1|k)\}^T\}$$

$$P_{k+1,k|k} = P^T_{k,k+1|k} = E\{[z(k+1) - \hat{z}(k+1|k)]\{z(k) - \hat{z}(k|k)\}^T\}$$

$$P(k|k) = E\{[z(k) - \hat{z}(k|k)]\{z(k) - \hat{z}(k|k)\}^T\}$$

$P(k+1|k) = P_{k+1,k+1|k}$ ,  $P(k|k) = P_{k,k|k}$  であり、 $P_{k+1,k|k}$  および  $P_{k,k+1|k}$  は、2つの時刻  $k, k+1$  にまたがる共分散行列である。

$$\tilde{K}(k+1) = \begin{bmatrix} P(k+1|k)H^T(k+1) \\ P_{k,k+1|k}H^T(k+1) \end{bmatrix} [H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1} \quad (16)$$

また、式(17)は予測過程における共分散行列であり、式(18)はフィルタリング過程における共分散行列である。式(17)および式(18)の各要素に注目すると、式(13)および式(14)の条件付平均ベクトルの場合と同様に、それぞれフィルタリングおよびスムージング行列が含まれていることが分かる。

$$\tilde{P}(k+1|k) = \begin{bmatrix} P(k+1|k) & P_{k+1,k|k} \\ P_{k,k+1|k} & P(k|k) \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで、

$$P(k+1|k) = \{I + \Delta t \hat{B}(k)\} P(k|k) \{I + \Delta t \hat{B}(k)\}^T + G(k)Q(k)G^T(k)$$

$$P_{k+1,k|k} = P^T_{k,k+1|k} = \{I + \Delta t \hat{B}(k)\} P(k|k)$$

$$\tilde{P}(k+1|k+1) = \begin{bmatrix} P(k+1|k+1) & P_{k+1,k|k+1} \\ P_{k,k+1|k+1} & P(k|k+1) \end{bmatrix} \quad (18)$$

ここで、

$$P(k+1|k+1) = P(k+1|k) - P(k+1|k)H^T(k+1)[H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1}H(k+1)P(k+1|k)$$

$$P_{k+1,k|k+1} = P(k|k)\{I + \Delta t \hat{B}^T(k)\}[I - H^T(k+1)[H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1}H(k+1)P(k+1|k)]$$

$$P_{k,k+1|k+1} = P^T_{k+1,k|k+1}$$

$$P(k|k+1) = P(k|k) - P(k|k)[I + \Delta t \hat{B}^T(k)]H^T(k+1)[H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1}H(k+1)P(k+1|k)$$

式(18)はカルマンフィルタアルゴリズムによりオンラインで算出することが出来る。また式(18)は文献(10)において解析的に誘導された異なる  $k$  と  $k+1$  時刻間の共分散関係式と一致している。

#### d) 破壊確率の算定 (Step(d))

対象構造系が継続時間中に安全である確率, すなわち信頼性  $P_s$  は次式で与えられる。

$$P_s = 1 - P_f = 1 - P(g(z(t)) \leq 0; 0 \leq t \leq T) \quad (19)$$

ここで,  $g(z(t))$  は, 性能関数である。

次に構造系の状態ベクトル  $z(t) = \{z_1(t), z_2(t) \cdots z_n(t)\}$  に対応して閾値  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n\}^T$  を考え, 状態ベクトルの任意成分  $z_i(t)$  のいずれかが  $\lambda_i$  を越えたら構造系の破壊  $g(z(t)) \leq 0$  であるとして, 本研究では性能関数を次式のように定義した。

$$g(z(t)) = \begin{bmatrix} g(z_1(t)) \\ g(z_2(t)) \\ \vdots \\ g(z_n(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 - |z_1(t)| \\ \lambda_2 - |z_2(t)| \\ \vdots \\ \lambda_n - |z_n(t)| \end{bmatrix} \quad (20)$$

本研究で対象とする系は, ガウス白色雑音を入力とし, 状態ベクトル  $z(t)$  は Markov 過程となる。したがって, 継続時間  $T$  における信頼性  $P_s$  を算出するためには, 次式を評価すれば良い。

$$\begin{aligned} P_s &= P(g(z(0)) \geq 0 \cap g(z(1)) \geq 0 \cap \cdots \cap g(z(m)) \geq 0) \\ &= P(g(z(0)) \geq 0) \times P(g(z(1)) \geq 0 | g(z(0)) \geq 0) \times \cdots \\ &\quad \times P(g(z(k+1)) \geq 0 | g(z(k)) \geq 0) \times \cdots \\ &\quad \times P(g(z(m)) \geq 0 | g(z(m-1)) \geq 0) \end{aligned} \quad (21)$$

ここで,  $T = m\Delta t$  であり継続時間を示す。

式(21)において,  $k$  番目の項は次式のようになる。

$$\begin{aligned} &P(g(z(k+1)) \geq 0 | g(z(k)) \geq 0) \\ &= \int_{-\lambda}^{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(z(k+1) | z(k)) dz(k) dz(k+1) \quad (22) \\ &= \frac{\int_{-\lambda}^{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(z(k+1), z(k)) dz(k) dz(k+1)}{\int_{-\lambda}^{\lambda} f(z(k)) dz(k)} \end{aligned}$$

留意すべきことは, 入力ガウス性であっても, システムが非線形のため出力  $z(t)$  は, 非ガウス性となる。また  $z(t)$  が非ガウス性であっても, その分布特性が既知となれば, 積分  $\int_{-\lambda}^{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(z(k+1) | z(k)) dz(k) dz(k+1)$  を解

析的に行うことは可能となるが,  $z(t)$  の分布特性は未知であるので, 非ガウス性の場合に式(22)を厳密に評価することは困難である。本研究では, 等価なガウス性に近似することで  $z(k)$  と  $z(k+1)$  の結合ガウス密度関数を次式で得ることが出来る。

$$\begin{aligned} f(z(k+1), z(k)) &= f(\tilde{z}(k)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n |\tilde{P}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\tilde{z}(k) - \hat{\tilde{z}}(k))^T \tilde{P}^{-1}(\tilde{z}(k) - \hat{\tilde{z}}(k))\right] \end{aligned} \quad (23)$$

ここで,  $\hat{\tilde{z}}(k)$  および  $\tilde{P}$  は拡大状態ベクトルの条件付平均値および共分散行列であるが, フィルタリングまたは予測時に対応した値を用いる。

拡大状態ベクトルを  $\tilde{z}(k) = r$  において, 線形変換  $\eta = Ar$  により互いに相関を持たない  $\eta$  に変換する。同様に  $\hat{\eta} = A\hat{r}$  とすると,

$$f(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^n |R_\eta|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\eta - \hat{\eta})^T R_\eta^{-1}(\eta - \hat{\eta})\right] \quad (24)$$

ここで,

$$\begin{aligned} R_\eta &= E[(\eta - \hat{\eta})(\eta - \hat{\eta})^T] = AE[(r - \hat{r})(r - \hat{r})^T]A^T \\ &= A\tilde{P}A^T \text{ であり, } A \text{ は } \tilde{P} \text{ の固有ベクトルとして与えられる。} \end{aligned}$$

次に,  $\xi_i = (\eta_i - \hat{\eta}_i) / \sigma_{\eta_i}$  と変換すると,  $\xi_i$  は, 互いに独立(無相関)な  $N(0,1)$  となるので, 容易に式(22)の分子の積分を行うことができる。また分母  $\int_{-\lambda}^{\lambda} f(z(k)) dz(k)$  の積分も同様にして行うことが出来る。

ここまでは, 1サンプルについての解析結果なので, 条件付初期通過確率を無条件に帰着させるために Step(c)から Step(d)の流れを所定の  $N$  回繰り返し計算し, 次式に基づいて初期通過確率  $P_{f,N}^{PAM}$  を算出する。

$$P_{f,N}^{PAM} = (1/N) \sum_{i=1}^N P_f^{(i)} \quad (25)$$

また,  $P_{f,N}^{PAM}$  のばらつきを表す標準偏差を  $SD(P_{f,N}^{PAM})$  として次式で与えることとする。

$$SD(P_{f,N}^{PAM}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{P_f^{(i)} - P_{f,N}^{PAM}\}^2} \quad (26)$$

### 3. 数値計算例

本研究では, 以下に示す非線形1自由度系を対象として解析例を示す。

$$\ddot{x}(t) + 2h\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2\phi(\dot{x}(t), x(t)) = -w(t) \quad (27)$$

ここで、 $w(t)$  はガウス性ホワイトノイズである。

非線形復元力特性として式(28)に示す Bouc and Wen<sup>15)</sup>モデルを採用して、具体的に $\hat{a}(t)$  および  $\hat{B}(t)$  を求める。

$$\dot{\phi}(\dot{x}(t), x(t)) = A\dot{x} - \beta|\dot{x}|\phi(\dot{x}, x)^{n-1}\phi(\dot{x}, x) - \gamma\dot{x}|\phi(\dot{x}, x)|^n \quad (28)$$

ここで、 $A$ 、 $\beta$  および  $\gamma$  は履歴特性をコントロールするパラメータである。また、式(28)において  $n=1$  として定式化する。

$z(t) = [x(t) \dot{x}(t) \phi(\dot{x}(t), x(t))]^T = [z_1(t) \ z_2(t) \ z_3(t)]^T$  と状態空間表示すると、式(1)に対応して次式を得る。

$$f[t, z(t)] = \begin{bmatrix} z_2(t) \\ -2h\omega_0 z_2(t) - \omega^2 z_3(t) \\ Az_2(t) - \beta|z_2(t)|z_3(t) - \gamma z_2(t)z_3(t) \end{bmatrix} \quad (29a)$$

$$G^T = [0 \ 1 \ 0]^T \quad (29b)$$

式(29)から式(6)および式(7)を用いて、以下に示すように $\hat{a}(t)$  および  $\hat{B}(t)$  を求める。なお式(30)、式(31)において $\hat{z}$  は最適推定値であり、 $P_{ij}$  は共分散行列  $P(t)$  の  $i$  行  $j$  列成分を表す。

$$\hat{a}(t) = \begin{bmatrix} \hat{z}_2(t) \\ -2h\omega_0\hat{z}_2(t) - \omega^2\hat{z}_3(t) \\ A\hat{z}_2(t) - \beta|\hat{z}_2(t)|\hat{z}_3(t) - \gamma\hat{z}_2(t)\hat{z}_3(t) \\ + \frac{1}{2} \frac{\text{trace}[P(t) \frac{\partial^2 f_3[t, z(t)]}{z(t)^2}]}{z(t)^2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

ここで、 $\frac{\partial^2 f_3[t, z(t)]}{z(t)^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{2,3} \\ 0 & F_{3,2} & 0 \end{bmatrix}$  であり各要素は

$$F_{2,3} = F_{3,2} = -\beta \frac{|\hat{z}_2(t)|}{\hat{z}_2(t)} - \gamma \frac{|\hat{z}_3(t)|}{\hat{z}_3(t)}$$

$$\hat{B}(t) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} P(t)^{-1} \quad (31)$$

ここで、 $B_{1j} = P_{j2}$ 、 $B_{2j} = -2h\omega_0 P_{j2} - \omega^2 P_{j3}$

$$B_{3,j} = P_{j,2} \left( A - \beta \frac{|\hat{z}_2|}{\hat{z}_2} - \gamma \frac{|\hat{z}_3|}{\hat{z}_3} \right) + P_{j,3} \left( -\beta \frac{|\hat{z}_2|}{\hat{z}_2} - \gamma \frac{|\hat{z}_3|}{\hat{z}_3} \right)$$

式(30)および式(31)により、式(8)の連続型等価線形

式が得られる。次に、連続型状態方程式を、式(11)に基づいて離散型に変換する。

観測方程式は、変数 STEP で定義される時間間隔で観測されるものとして次式により与えられる。ここで、Fig. 2に示すように、 $k = INT \times STEP$ 、 $INT = 1, 2, \dots$  のときのみ観測データを得るものとする。

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ z(k-1) \end{bmatrix} + v(k) \quad (32)$$

解析では  $v(k)$  の分散行列の対角成分をすべて  $1.0e-10$  にして、その他の成分は 0 とした。

構造系の動特性は  $h = 0.05$ 、 $\omega_0 = 7.07(\text{rad/sec})$ 、 $A = 1.0$ 、 $\beta = 0.05$  および  $\gamma = 0.05$  として与えた。また、入力波形は周波数帯域が 0.0 Hz から 10.0 Hz のガウス性ホワイトノイズ  $N(0, 122.5)$  として、時間刻み  $\Delta t = 0.01(\text{sec})$ 、継続時間  $T = 10.0(\text{sec})$  の初期通過確率を評価することとした。

また性能関数は式(20)を用いて、レベル  $\lambda$  を次式のように設定した。

$$\lambda_i = m\sigma_{z_i(t)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (33)$$

ここで、 $\sigma_{z_i(t)}$  は、応答波形の標準偏差、 $m$  は任意の整数である。

応答波形の標準偏差は、予め式(27)にモデルの諸元を与え、継続時間  $T = 25.0(\text{sec})$  の応答計算を1回行い、得られた波形から算出されたものを用いることとした。また、モンテカルロシミュレーションを  $10^6$  回行い、得られた初期通過確率を対象とする構造系の初期通過確率の基準値(正解値)とすることとした。

Fig. 3は、一つのサンプル波形から得られた復元力特性である。はじめにサンプリング間隔 STEP の値をパイロットシミュレーションにより決定することを行った。ここではFig. 4に示すように観測波形を 100 波用いて PAM により初期通過確率を求め、同時に 1000 回のモンテカルロシミュレーションによる結果を算出し、次式に示す指標を用いて、サンプリング間隔を決定した。

$$\varepsilon = \frac{\log_{10}(P_{f,N}^{PAM}) - \log_{10}(P_{f,N}^{MCS})}{\log_{10}(P_{f,N}^{MCS})} \times 100 \quad (34)$$

ここで、 $P_{f,N}^{PAM}$  は PAM による初期通過確率、 $P_{f,N}^{MCS}$  は、モンテカルロシミュレーションによる初期通過確率の算定結果である。

Fig. 5は、指標  $\varepsilon$  の値を示している。仮定した4ケースのサンプリング間隔の中では、STEP=25 が最も推定誤

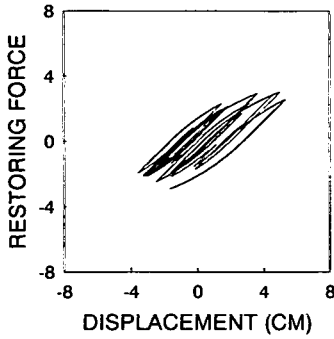


Fig. 11 Sample of Restoring Force Characteristics  
( $\beta = 0.1, \gamma = 0.1$ )

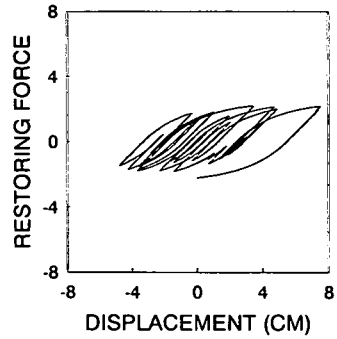


Fig. 14 Sample of Restoring Force Characteristics  
( $\beta = 0.2, \gamma = 0.2$ )

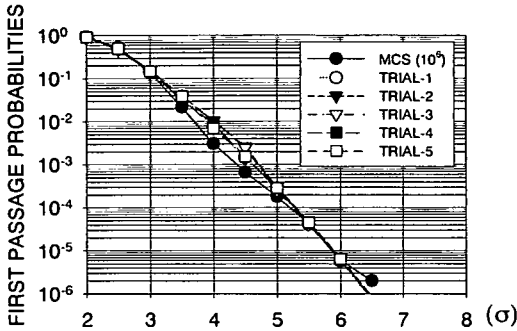


Fig. 12 First Passage Probabilities  
( $N=1000, \text{STEP}=18$ )

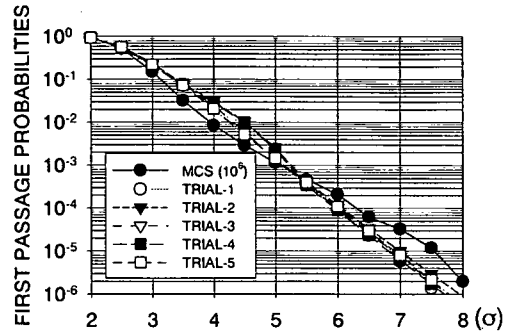


Fig. 15 First Passage Probabilities  
( $N=1000, \text{STEP}=16$ )

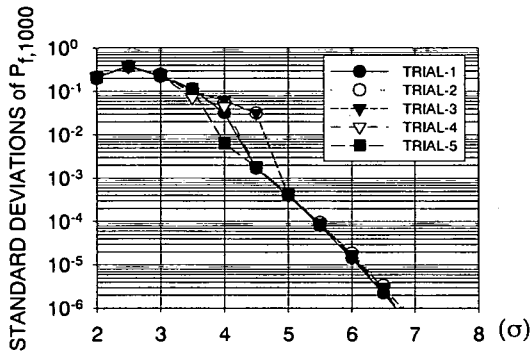


Fig. 13 Standard Deviations of  $P_{f,1000}^{PAM}$   
( $N=1000, \text{STEP}=18$ )

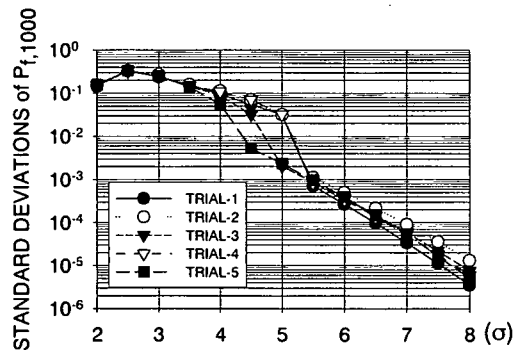


Fig. 16 Standard Deviations of  $P_{f,1000}^{PAM}$   
( $N=1000, \text{STEP}=16$ )

差が小さいことがわかる。また、Fig. 4において 100 波を用いた PAM の各推定結果は概ね  $10^{-2}$  程度のオーダーまではモンテカルロシミュレーションと良い対応を示しており、 $10^{-2}$  以下の値については基本的に外挿していることになるので、サンプリング間隔により推定結果がばらついている。線形・定常ガウス系ならば、観測情報に伴うことなくカルマンフィルタの予測アルゴリズムにより漸

化的に共分散行列の成分を求めることが出来るが、非線形・非ガウス系の場合には、対象とする系の非線形性に応じてサンプリング間隔 STEP を設定することが必要となる。以上の結果より、1000 回のモンテカルロシミュレーションとの比較であるが、STEP=25 として以下の解析を行うこととした。

Fig. 6は、PAM において1サンプル波形解析時に得



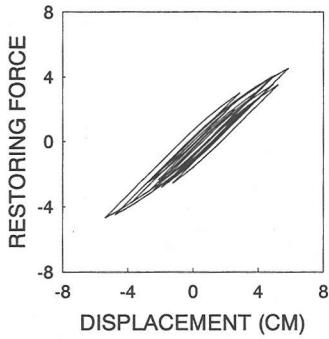


Fig. 3 Sample of Restoring Force Characteristics ( $\beta = 0.05, \gamma = 0.05$ )

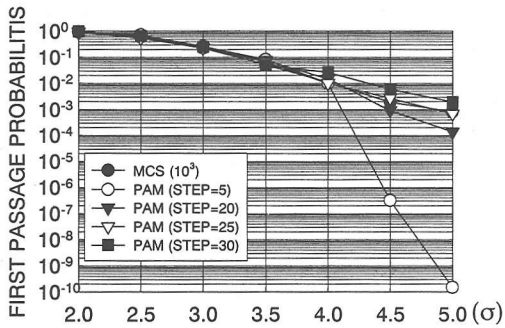


Fig. 4 First Passage Probabilities (N=100)

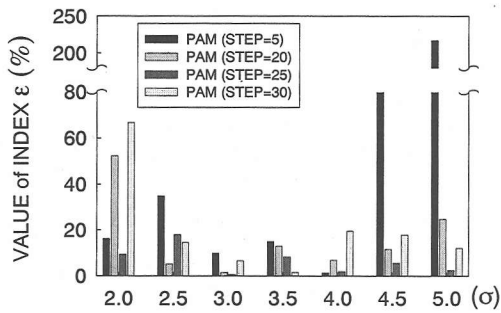


Fig. 5 Value of Index  $\epsilon$

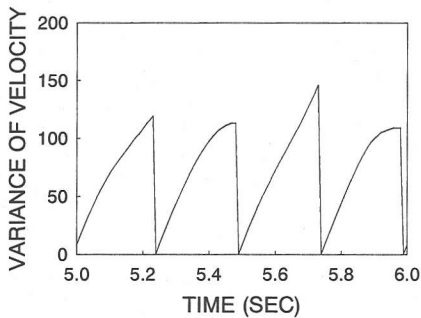


Fig. 6 Estimated Conditional Variance (STEP=25)

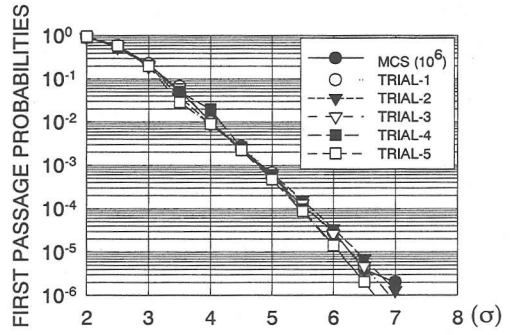


Fig. 7 First Passage Probabilities (N=100, STEP=25)

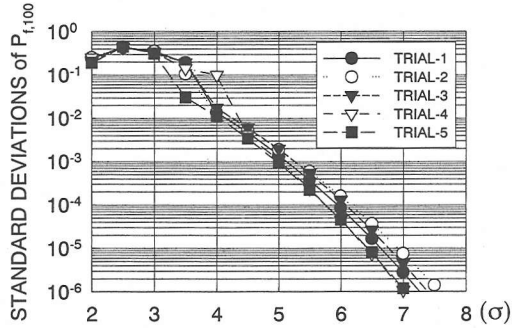


Fig. 8 Standard Deviations of  $P_{f,100}^{PAM}$  (N=100, STEP=25)

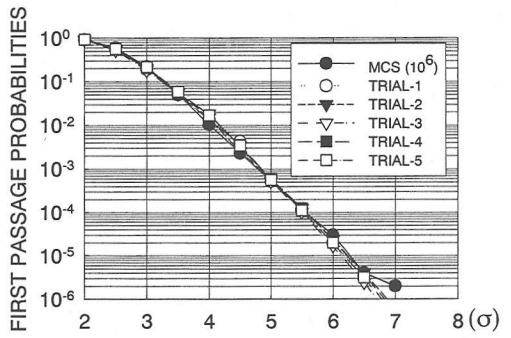


Fig. 9 First Passage Probabilities (N=1000, STEP=25)

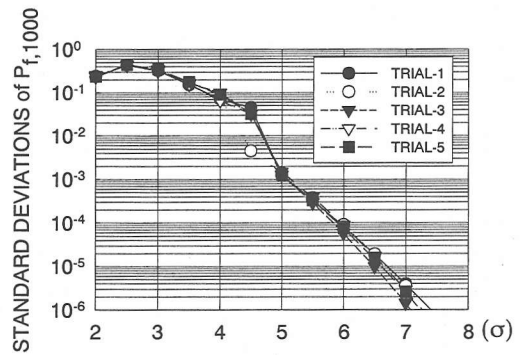


Fig. 10 Standard Deviations of  $P_{f,1000}^{PAM}$  (N=1000, STEP=25)

られた条件付平均値まわりの速度の推定誤差分散である。観測時の不確定性を考慮していないので観測がなされると決定論的になっていることがわかる。

Fig. 7に観測波形を100波用い、サンプルセットを変えて5回のPAMによる計算を行った結果を示す。ここではモンテカルロシミュレーション $10^6$ 回で得られるオーダーまでの初期通過確率を示しているが良好な結果を得ているものと思われる。

Fig. 8は、式(26)から求められた推定結果のばらつきを示している。Fig. 8において、 $SD(P_{f,100}^{PAM})$ は用いた波形数100の逆数に対応した $10^2$ 程度まで、ばらつきが見られる。これは、PAMがモンテカルロ法を援用していることに起因しているためであるが、Fig. 7より平均値である $P_{f,100}^{PAM}$ は良好な値となっている。このことより破壊領域近傍の応答データを効率的に発生させる Importance Sampling 手法などの適用が有効であると思われる。

Fig. 9およびFig. 10は、それぞれ観測波形を1000波用いた場合の初期通過確率および標準偏差を示している。PAMに用いる観測波形の増加により初期通過確率の推定精度が向上していることがわかる。

次にBouc and Wenモデルのパラメータを $\beta = 0.1$  および  $\gamma = 0.1$ として、観測波形を1000波とした場合の解析を行った。その際閾値入は、対象とする系の諸元を用いて再度応答計算を行って算出し、サンプリング間隔 STEP は、式(3)の計算を行って決定した。復元力特性のサンプルをFig. 11に示しているが、前述の例題と比較して非線形性の強いものとなっている。初期通過確率および標準偏差をFig. 12およびFig. 13に示した。さらに、Bouc and Wenモデルのパラメータを $\beta = 0.2$  および  $\gamma = 0.2$ として、観測波形を1000波とした場合の計算を行った。復元力特性のサンプルをFig. 14に示し、初期通過確率の算出結果をFig. 15およびFig. 16に示した。

非線形性が強くなることにより、等価線形システムの確率特性を推定するための最適サンプリング間隔が減少していることがわかる。ここでは共通に1000波のサンプル波形数を用いているために各推定結果については、非線形性の程度が増加するに伴い精度は多少低下している。しかしながら時間方向における中立軸の変動を伴う強度の非線形システムを対象として、提案手法の有効性は示されているものと思われる。

数値計算は富士通社製 UNIX ワークステーション GP400S-model10を用いて行った。計算時間は、精度の検証のために行った $10^6$ 回のモンテカルロシミュレーションに68時間、1000回の準解析法に1.1時間を要した。ここでは、モンテカルロ法で得られた結果と比較するために $10^{-6}$ オーダーまでの準解析法による結果を示しているが、さらに低レベルの初期通過確率を評価する

際には、有効性が増すこととなる。

#### 4. まとめ

本研究は非線形構造システムを対象に、有限個のサンプル実現値とカルマンフィルタアルゴリズムを援用した準解析法(Pseudo Analytical Method)を提案し、システムの初期通過確率を算出した。ここでは、復元力項が非線形関数で与えられる系にガウス性外乱が作用するモデルを対象として解析を行った。その結果、強度の非線形性を有する系に対しても、一般的に要求される $10^{-4}$ から $10^{-6}$ レベルの初期通過確率に関して良好な結果を得た。

PAMのアルゴリズムは、システムのディメンションによらず、非線形性を規定する関数形にも依存しないアルゴリズムとなっているので、多自由度系への拡張およびサンプル実現値をシミュレートする際の効率化などが今後の課題である。

また本手法は、外乱に対する多自由度構造物の応答が一部測定されるような場合に、条件付初期通過確率の算定に対しても適用可能である。

最後に、本研究は第一著者が理論の構築を行い、第二著者が部分的な改良および計算を行った。

#### 参考文献

- 1) 星谷 勝: 確率論手法による振動解析, 鹿島出版会, 1974.
- 2) Lin, Y.K. and Cai, G.O.: *Probabilistic Structural Dynamics, Advanced Theory and Applications*, McGraw-Hill, New York, 1995.
- 3) Crandall, S.H.: Perturbation Techniques for Random vibration of Non-linear Oscillators, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.35, pp.1700-1705, 1963.
- 4) Roberts, J.B and Spanos, P.D.: *Random Vibration and Statistical Linearization*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
- 5) Bedrosian, E. and Rice, S.O.: The output Properties of Volterra Systems (Nonlinear Systems with Memory) Driven by Harmonic and Gaussian Inputs, *Proc. IEEE*, Vol.59, pp.1688-1720, 1971.
- 6) Benaroya, H.: *Decomposition Method of Adomian-Its application to problems of Structural Dynamics*, Tech. Report2, Weidkinger, New York, 1984.
- 7) Cai, G.Q. and Lin, Y.K.: A New Approximate Solution Technique for Randomly Excited Nonlinear Oscillators, *Int. J. Nonlin. Mech.*, Vol.23, pp.409-420, 1988.
- 8) Pradwater, H.J. and Schuëller, G.I.: Assessment of Low Probabilistic Events of Dynamical Systems by Controlled Monte Carlo Simulation, *Prob. Engineering Mechanics*, Vol.14, pp.213-227, 1999.
- 9) Bayer, V. and Bucher, C.: A Simulation Procedure for First Passage Problem of Nonlinear Structures, *Proc. ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*, Frangopol, D.M. and Grigoriu, M.D. (Eds.), Worcester, Massachusetts, August 7-9, pp.816-819, 1996.

- 10) Hoshiya, M., Komiya, K. and Sutoh, A.: Pseudo Analytical Method for Stochastic Nonlinear Systems, *Proc. of the Fourth Int. Conf. on Stochastic Structural Dynamics -SSD'98*, pp.187-192, Notre Dame, August 1998.
- 11) Hoshiya, M. and Maruyama, O.: Pseudo Analytical Method for Nonlinear Structural Reliability, *Int. Conf. on Monte Carlo Simulation*, pp.295-300, Monte Carlo, June 2000.
- 12) Booton, R.C.: The Analysis of Nonlinear Control System with Random Inputs, *Proc. MRI Symposium on Nonlinear Circuits, Polytechnic Inst. of Brooklyn*, pp.341-344, 1953.
- 13) Sunahara, Y. and Ohsumi, A.: Stochastic Linearization Technique and Its Application to Optimal Control, *Mem. Kyoto Inst. of Tech*19, pp.11-27, 1970.
- 14) 加藤寛一郎:最適制御入門, 東京大学出版会, 1988年.
- 15) Wen, Y.K.: Method for Random Vibration of Hysteretic Systems, *Jour. of E.M. Div., ASCE*, Vol.102, pp. 249-263, 1976.

(2001.10.17 受付)

## ESTIMATION OF FIRST PASSAGE PROBABILITIES BY PSEUDO ANALYTICAL METHOD

Masaru HOSHIYA and Osamu MARUYAMA

A pseudo analytical method for time-dependent system reliability analysis of nonlinear stochastic structural dynamics is investigated. This method is a class of linearization approaches that linearize approximately a nonlinear state vector equation to a discrete Gaussian and Markovian state vector equation, and the optimal state vector and covariances at times  $k$  and  $k+1$  are estimated by the Kalman Filter algorithm with a set of numerically obtained response data. In this way, the probability of performance may be evaluated. Finally, a numerical example of a nonlinear structural system is demonstrated in order to examine the efficiency of the method.