

高減衰積層ゴム支承の3次元有限要素解析法

吉田純司¹・阿部雅人²・藤野陽三³

¹正会員 博士(工) 山梨大学講師 工学部土木環境工学科 (〒400-8511 山梨県甲府市武田 4-3-11)

²正会員 Ph.D. 東京大学助教授 工学系研究科社会基盤工学専攻
(〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

³フェロー会員 Ph.D. 東京大学教授 工学系研究科社会基盤工学専攻 (同上)

高減衰積層ゴム支承の解析は、幾何学非線形とともに複雑な材料非線形を考慮しなければならず、困難なものとなる。そのためこれまで精緻なモデルは構築されていない。本研究では材料レベルからの高減衰積層ゴム支承のモデルの構築を目的とした。1) まず、著者らが提案した構成則を有限要素法に組み込むための定式化を示し、2) 増分型の構成則によりモデル化される圧縮性材料のための混合型有限要素法を構築した。3) 次いで支承の3次元有限要素モデルを構築し、載荷実験結果と比較してモデルを検証した。4) 最後に、本モデルを応用して支承のねじれ、回転変形における力学特性を把握した。また、それらの変形および鉛直変形について、支承の設計に利用できる理論的な簡易式を提案した。

Key Words: finite element method, slight compressibility, base-isolation, high damping rubber, laminated rubber bearing, constitutive law, design code

1. はじめに

近年、高減衰積層ゴム支承を用いた免震構造を採用している橋梁、建築物が増加している。高減衰積層ゴム支承は、微圧縮性を有する高減衰ゴムと鋼板を積層状にすることで、ゴム層の体積変形を制限し構造物を常時支持している。また、地震時においては、高減衰ゴムの柔軟性およびエネルギー吸収性能により、慣性力を低減し、大変形下において地震エネルギーを吸収する。そのため、材料レベルから支承の地震時挙動を精緻に予測するためには、ゴム材料の微圧縮性、幾何学非線形、材料非線形を同時に考慮する必要がある。

しかし、これまで高減衰ゴムの材料非線形を精度よく再現できる構成則は存在せず、超弾性体を代用して、微圧縮性および幾何学非線形のみを考慮した支承のモデル化が行われてきた^{1),2),3)}。ゴムの力学挙動を粘弾性ダメージモデル⁴⁾で近似する研究もみられるものの、このモデルでは高減衰ゴムが数百%以上の大ひずみ領域で示す大きな履歴エネルギー吸収性能や塑性的性質を再現できない⁵⁾。

以上のことから従来の有限要素法においても超弾性体の使用を前提とした手法が主となっており、履歴依存性を考慮した増分型の構成則を適用するための定式化は希少である⁶⁾。また、増分型の構成則を適用できる既往の手法においても、数値計算上不安定であるなどの欠点がありこれまで信頼性の高い結果を得ることが困難であった。そのため実務

においては、数値計算に依存せず、支承1つ1つについて手間と費用のかかる載荷実験により性能の確認が行われている。しかし、載荷実験では、実況に即したねじれ変形・回転変形等を再現することは非常に困難となり、それらの変形における支承の力学特性は、これまでほとんどわかっていないのが現状である。

以上のことから著者らは、まず材料試験を体系化しその結果を基に高減衰ゴムの精緻な構成則を構築した⁷⁾。本研究では、文献7)での成果を有限要素解析において生かすために、

- 1) 提案した構成則を有限要素法に適用するための定式化を示す。
- 2) 提案した構成則を適用可能な有限要素法を構築する。
- 3) 高減衰積層ゴム支承の有限要素モデルを構築し、さらに支承の載荷実験結果と比較することでモデルを検証する。
- 4) 載荷実験自体が困難な、支承のねじれ変形や、回転変形等の複雑な変形に対する力学特性を解析的に把握する。さらに、これらの変形における力学特性を支承の設計段階において考慮可能にする理論的な簡易式を提案する。

ことを目的とした。

本文においては、まず、文献7)で提案した高減衰ゴムの構成則、ならびに鋼材の構成則について簡潔に説明する。次いで構成則を有限要素法に適用する場合に必要な構成則テンソルを導出する。

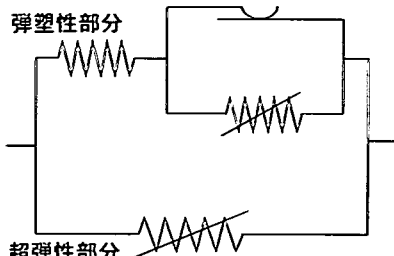


図-1 高減衰ゴムの構成則の概念図

次に既往の混合型有限要素法を拡張し、提案した構成則に対応可能な updated Lagrange 法による混合型有限要素法を示す。

上述した構成則と有限要素を用いて高減衰積層ゴム支承の3次元有限要素モデルを構築し、既往の多軸載荷実験結果⁸⁾と比較してモデルを検証する。

最後に、本モデルを用いて高減衰積層ゴム支承のねじれ変形および回転変形に対する力学特性を数値計算により把握する。また、支承を設計する段階において、これらの変形ならびに鉛直変形を考慮するために理論的な簡易式を提案する。

2. 構成則

積層ゴム支承は、ゴム層と鋼板とを交互に積層状に組み合わせた複合構造部材である。本節ではまず、文献 7)で著者らが開発した高減衰ゴムの構成則を簡潔に述べる。次いで本構成則を有限要素法に適用するための構成則テンソルを導出する。最後に鋼材料の構成則として用いた弾塑性体について説明する。

(1) 高減衰ゴムの構成則

高減衰ゴムの構成則として図-1 に示すような弾塑性体と圧縮型を有する超弾性体を並列に組み合わせるモデルを用いた。このモデルでは、弾塑性体と超弾性体に同一のひずみ場が生じる。また、共通するひずみ場において、各構成則から得られる Cauchy 応力テンソルの和が、モデルの Cauchy 応力テンソルとなるものとする。なお、以下の a)、b) で述べる構成則の導出過程ならびにその妥当性については、文献 7)を参照されたい。

a) 超弾性部

超弾性部においては、ひずみエネルギー密度関数として以下に示す \bar{W} を用いた。

$$\bar{W} = gW_1 + hW_2 + \frac{\chi}{2}(W^V)^2 \quad (1a)$$

ここに W_1 、 W_2 および W^V は以下のように右 Cauchy-Green テンソル \mathbf{C} の不変量 I_C 、 II_C 、 III_C の関数である。

$$W_1 = c_1(\bar{I}_C - 3) + c_2(\bar{II}_C - 3) \quad (1b)$$

$$W_2 = \frac{c_3 c}{n+1} \left(\frac{\bar{I}_C - 3}{c} \right)^{n+1} \quad (1c)$$

$$W^V = 2(\sqrt{III_C} - 1) \quad (1d)$$

ただし $\bar{I}_C = I_C / III_C^{1/3}$ 、 $\bar{II}_C = II_C / III_C^{2/3}$ である。また、 g および h はダメージ関数であり次式のものを用いた。

$$g(x) = \beta + (1 - \beta) \frac{1 - e^{-x/\alpha}}{x/\alpha} \quad (2a)$$

$$x(t) = \max_{s \in (-\infty, t]} \sqrt{2W_1(s)} \quad (2b)$$

$$h(y) = 1 - \frac{1}{1 + \exp\{-a_H(y - b_H)\}} \quad (2c)$$

$$y(t) = \max_{s \in (-\infty, t]} (\bar{I}_C(s) - 3) \quad (2d)$$

ここに χ 、 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c 、 n 、 α 、 β 、 a_H および b_H は材料定数である。また t は現時刻を表すものとする。以上の式を用いると第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} と Green-Lagrange ひずみテンソル \mathbf{E} の関係は以下ようになる。

$$\mathbf{S} = g \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{E}} + h \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}} + \chi W^V \frac{\partial W^V}{\partial \mathbf{E}} \quad (3)$$

さらに上式を現配置で定義される Cauchy 応力テンソル \mathbf{T} を算出する型に変換すると、

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \left(g \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{E}} + h \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}} + \chi W^V \frac{\partial W^V}{\partial \mathbf{E}} \right) \cdot \mathbf{F}^T \quad (4)$$

となる。ただし、 \mathbf{F} は変形勾配テンソルであり $J = \det(\mathbf{F})$ である。

b) 弾塑性部

高減衰ゴムのエネルギー吸収性能を再現するために既往の弾塑性体を拡張したモデルを提案した。以下に具体的な数式を示す。

$$\dot{\mathbf{T}}_{(t)} = \mathbf{C}^{(E)} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) \quad (5)$$

ここに

$$\mathbf{D}^p = (3K_2)^{1/2} (3J_2)^{(N-1)/2} \frac{\mathbf{T}'_y}{\tau_y} \quad (6a)$$

$$K_2 = \frac{\mathbf{D}' : \mathbf{D}'}{2} \quad (6b)$$

$$J_2 = \frac{\mathbf{T}' : \mathbf{T}'}{2\tau_y^2} \quad (6c)$$

$$\tau_y = \tau_0 \left\{ 1 + \left(\frac{\bar{I}_C - 3}{c} \right)^b \right\} \quad (6d)$$

である。ただし \mathbf{D} 、 \mathbf{T} および $\dot{\mathbf{T}}_{(t)}$ はそれぞれ変形速度テンソル、Cauchy 応力テンソルおよび Cauchy 応力テンソルの Jaumann 速度である。また \mathbf{A} および \mathbf{B} を任意のテンソル、 \mathbf{I} を単位テンソルとすると、 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I}$ 、 $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T)$ である。

ここで式(5)の $\mathbf{C}^{(E)}$ は弾塑性部全体のひずみ量に依存する非線形の弾性構成則テンソルであり、次式を用いている。

$$C_{pqrs}^{(E)} = \frac{1}{J} F_{pi} F_{qj} F_{rk} F_{sl} C_{ijkl}^{(0)} + \delta_{pq} T_{sp}^{(h)} + \delta_{qs} T_{pr}^{(h)} - \delta_{rs} T_{pq}^{(h)} \quad (7a)$$

$$\mathbf{C}^{(0)} = \frac{\partial^2 W_E}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} \quad (7b)$$

$$\mathbf{T}^{(h)} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W_E}{\partial \mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^T \quad (7c)$$

$$W_E = c_4 (\bar{I}_c - 3) + c_3 (\bar{II}_c - 3) + \frac{c_4 c}{m+1} \left(\frac{\bar{I}_c - 3}{c} \right)^{m+1} \quad (7d)$$

ただし c_4 , c_3 , m , b , τ_0 および N は材料定数である。上式において \mathbf{F} および \mathbf{E} は、それぞれ弾塑性部全体に作用する変位から得られる変形勾配テンソルと Green-Lagrange ひずみテンソルである。したがって式(7c)における $\mathbf{T}^{(h)}$ は、ひずみエネルギー密度関数 W_E を有する超弾性体が弾塑性部全体の変位を受けた場合に生じる Cauchy 応力テンソルを意味している。

c) 構成則テンソルの導出

構成則を実際に有限要素法に適用するためには、構成則テンソルを導く必要がある。超弾性部については文献 7) ですでに得られているので以下では弾塑性部における構成則テンソルを導出する。

まず、式(6a)の $(3K_2)^{1/2}$ を以下のように変形する。

$$(3K_2)^{1/2} = \frac{3K_2}{(3K_2)^{1/2}} \quad (8)$$

ここで K_2 は、

$$K_2 = \frac{D'_{ij} D'_{ij}}{2} = \frac{D'_{ij} D_{ij}}{2} \quad (9)$$

のように記述できることを用いると式(16a)の \mathbf{D}^p は、

$$D_{ij}^p = \frac{D'_{ij} D_{ij}}{2(3K_2)^{1/2}} (3J_2)^{(N-1)/2} \frac{T'_{ij}}{\tau_y} \quad (10)$$

となる。従って上式を式(5)に代入して整理すると

$$\dot{T}_{ij} = C_{ijkl}^{pp} D_{kl} \quad (11)$$

ただし、

$$C_{ijkl}^{pp} = C_{ijkl}^{(E)} - \frac{D'_{ij} (3J_2)^{(N-1)/2}}{2(3K_2)^{1/2}} \cdot \frac{C_{ijpq}^{(E)} T'_{pq}}{\tau_y} \quad (12)$$

となり構成則テンソルを得ることができた。式(12)を用いることで、文献 7) で提案した高減衰ゴムの構成則を有限要素法に適用することが可能となった。ただし、式(12)の弾塑性構成則テンソルには、変形速度テンソル \mathbf{D} に関係する量が含まれている。しかし、有限要素法により構成則テンソルを作成する段階では、 \mathbf{D} は未知量である。そのため、実際の数値計算では過去の値を用いることになるものの、繰り返し計算を行うことで収束した解を得ることがで

きる。また $C_{ijpq}^{pp} \neq C_{pqij}^{pp}$ であるため、接線剛性マトリクスは非対称となる。

(2) 鋼材料の構成則

現在の設計手法では、積層ゴム支承に用いられている内部鋼板の厚さを明確に決定する基準はない。そのため、薄肉の鋼板を用いている支承では、地震時に繰り返し载荷を受けることで大きな塑性ひずみを生じ、それが支承全体の挙動に影響している可能性を有している。

本研究では鋼材料が塑性変形して大ひずみを生じる場合を考慮し、Chaboche らが提案した弾塑性モデル⁹⁾を大ひずみ状態に適用できるように拡張して用いた。Chaboche らの提案したモデルは、特に繰り返し载荷における鋼材の移動硬化、等方硬化およびラチェット現象を精緻に再現でき、かつ有限要素法にも適用できる汎用的なモデルである。以下に拡張した構成則の概要を示す。

a) 加算分解

大ひずみ状態に適用するために変形速度テンソルの加算分解を用いる¹⁰⁾。ただし、ここでは作成する接線剛性マトリクスを対称にするために、Cauchy 応力テンソルの Jaumann 速度 $\mathbf{T}_{(j)}$ の代わりに、現時刻を基準とした相対 Kirchhoff 応力テンソルの Jaumann 速度 $\hat{\mathbf{T}}_{(j)}$ を用いる。

b) 降伏関数

降伏条件としては、以下に示す Mises 型のものを用いた。

$$F = \bar{\sigma} - R - \sigma_y \geq 0 \quad (13)$$

ただし

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{3}{2} \hat{\mathbf{T}}' : \hat{\mathbf{T}}' \right)^{1/2} \quad (14a)$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \dot{\mathbf{b}} \quad (14b)$$

$$\hat{\mathbf{T}}' = \hat{\mathbf{T}} - \frac{\text{tr}(\hat{\mathbf{T}})}{3} \mathbf{I} \quad (14c)$$

である。ここに σ_y は初期降伏応力、 R は等方硬化による降伏応力の変化量であり、 \mathbf{I} は単位テンソルを表すものとする。また、 $\dot{\mathbf{b}}$ は背応力であり相対 Kirchhoff 応力テンソルと同形のものである。

c) 関連流れ則

塑性流れは、 $F=0$ かつ $(\partial F / \partial \hat{\mathbf{T}}) : \hat{\mathbf{T}}_{(j)} \geq 0$ の場合に生じる。塑性ひずみ速度の垂直条件に従うと、変形速度テンソルの塑性成分は、

$$\mathbf{D}^p = \dot{p} \frac{\partial F}{\partial \hat{\mathbf{T}}} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\hat{\mathbf{T}}'}{\sigma_y + R} \quad (15)$$

となる。ここに \dot{p} は塑性係数であり Mises 型の降伏条件を用いる場合には、以下に示す塑性相当ひずみ速度と一致する。

$$\dot{p} = \left(\frac{2}{3} \mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p \right)^{1/2} \quad (16)$$

d) 移動硬化則

塑性曲面の移動硬化則として次式を用いる。

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{2}{3} c \mathbf{D}^p - \gamma \Phi(p) \dot{p} \hat{\mathbf{b}} \quad (17a)$$

$$\Phi(p) = 1 - (\Phi_\infty - 1) R / q \quad (17b)$$

ここに c , γ および Φ_∞ は材料定数であり, $\hat{\mathbf{b}}$ は背応力テンソル $\hat{\mathbf{b}}$ の Jaumann 速度を表す. R および q は後述する等方硬化則で定義する. 式(17)は非線型移動硬化則と呼ばれる硬化則で, 金属材料の繰り返し載荷で現れるラチェット現象⁹⁾などを再現することが可能である.

e) 等方硬化則

塑性曲面の大きさの変動量 $R(t)$ に関する成長則は, 次式で示すものを用いる.

$$\dot{R} = \beta(q - R) \dot{p} \quad (18)$$

ここに, q および β は材料定数である. 特に q は, 塑性変形が無限に進行した場合の R の極限值であり, このとき降伏応力は $q + \sigma_y$ となる. 上式を初期条件 $R|_{t=0} = 0$ のもとで積分すると, 次式が得られる.

$$R = q(1 - e^{-\beta p}) \quad (19)$$

f) 適合条件式

塑性変形が進行している間は $F = 0$ であることより, $\dot{F} = 0$ となる. よって

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} : \dot{\mathbf{T}}_{(j)} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} = 0 \quad (20)$$

が成立する. 上式は, 適合条件式とよばれ, 塑性係数を算出する際に用いられる.

g) 弾塑性構成則テンソル

弾塑性体では弾性部と塑性部が直列に連結していることから, 応力テンソルの客観速度と変形速度テンソルの関係は次式のように記述できる.

$$\dot{\mathbf{T}}_{(j)} = \mathbf{C}^{(e)} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) \quad (21)$$

ここに $\mathbf{C}^{(e)}$ は弾性構成則テンソルであり, ここでは次式の線形弾性体のもを用いる.

$$C_{ijkl}^{(e)} = \lambda_0 \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu_0 \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (22)$$

ただし λ_0 および μ_0 は Lamé 定数である.

上述の a)~f) の関係を用いると塑性係数 \dot{p} は,

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{\varphi_{ij} D_{ij}}{\partial R / \partial p + \varphi_{ij} C_{ijkl} \varphi_{kl} + \varphi_{ij} M_{ij}} \\ &= \frac{3\mu}{R + \sigma_y} \cdot \frac{\tilde{T}_{ij} D_{ij}}{\beta q e^{-\beta p} + 3\mu_0 + \varphi_{ij} M_{ij}} \end{aligned} \quad (23)$$

となる. ここに,

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{T}_{ij}} = \frac{3\tilde{T}'_{ij}}{2(R + \sigma_y)} \quad (24a)$$

$$M_{ij} = \frac{2c}{3} \varphi_{ij} - \dot{h}_{ij} \quad (24b)$$

である. さらに, 式(23)の塑性係数 \dot{p} から \mathbf{D}^p を求め, 式(21)に代入すると構成則は,

$$\dot{\mathbf{T}}_{(j)} = C_{ijkl}^p D_{kl} \quad (25)$$

のように記述できる. ただし C_{ijkl}^p は次式で示す弾塑性構成則テンソルである.

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^p &= C_{ijkl} - \frac{C_{ijkl} \varphi_{ab} \varphi_{cd} C_{abcd}}{\partial R / \partial p + \varphi_{ab} C_{abcd} \varphi_{cd} + \varphi_{ab} M_{ab}} \\ &= C_{ijkl} - \frac{9\mu_0^2}{(R + \sigma_y)^2} \cdot \frac{\tilde{T}'_{ij} \tilde{T}'_{kl}}{\beta q e^{-\beta p} + 3\mu_0 + \varphi_{ab} M_{ab}} \end{aligned} \quad (26)$$

3. 有限要素定式化

以下では, まず文献 11) で提案されている圧縮性を有する超弾性体を対象とした射影混合法のための弱形式について説明する. この弱形式を離散化した手法では, 材料の圧縮性を考慮でき, かつ文献6)などで提案されている手法と比較して, 大変形下においても非常に安定した数値計算結果が得られるという利点を有する.

ただし, 上述高減衰ゴムの構成則のように履歴依存性を有する構成則を適用する場合には, この手法を直接利用することができない. そこで, 本研究では, 射影混合法による弱形式を現配置で定義される量に変換した後, updated Lagrange 法を用いた. 以下では, updated Lagrange 法のための基礎式を示し, 最後に有限要素法による離散化について簡潔に述べる.

(1) 射影混合法

モデル化される物体 A が基準配置において占める領域を Ω , Ω の境界を $\partial\Omega$ とし, $\partial\Omega$ の部分集合 $\partial\Omega_D$ 上では変位境界条件が与えられているものとする. このような系に表面力 \mathbf{t} , 体積力 \mathbf{g} が作用するとき釣り合い条件を満たす変位を $\mathbf{u} \in V$, 静水圧を $p \in Q$ とする. ただし, V および Q は, それぞれ変位, 静水圧の許容関数全体の集合である.

$$V = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v}_i \in L^2(\Omega), \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \ i, j = 1, 2, 3, \mathbf{v} = 0 \text{ on } \partial\Omega_D \right\} \quad (27a)$$

$$Q = L^2(\Omega) \quad (27b)$$

このとき圧縮性を有する超弾性体の全ポテンシャルエネルギーは次のようになる.

$$\Phi = \int_{\Omega} \left\{ W + \frac{\chi}{2} (W^v)^2 \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \quad (28)$$

ただし上式において W は, 一般の超弾性体において体積変形以外の変形により生じたひずみエネルギー

一密度を表す関数である。この全ポテンシャルに停留ポテンシャル原理を適用することで変位法による離散化が可能である。しかしゴムのように非圧縮性に近い性質を有する材料に変位法を適用すると圧力のロッキングが起こることが知られている^{6),11)}。

射影混合法は、以下のように全ポテンシャルエネルギーを修正し、変位とともに圧力を内挿することでロッキング現象を解決する手法である。

まず、 χW^ν の Q への正射影を λ とおく。すなわち λ は、

$$\int_{\Omega} \left(W^\nu - \frac{\lambda}{\chi} \right) \delta \lambda d\Omega = 0 \quad \forall \delta \lambda \in Q \quad (29)$$

を満足し、不定静水圧を $(-1/2)$ 倍したものに相当する^{10),11)}。ここで χW^ν を λ に対応させる作用素を P とする。すなわち作用素 P は、

$$P(\chi W^\nu) = \lambda \quad (30)$$

である。式(29)より P は明らかに線形変換である。この作用素 P を用いて全ポテンシャルエネルギーを以下のように修正する。

$$\Phi = \int_{\Omega} \left\{ W + \frac{\chi}{2} P(W^\nu)^2 \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (31)$$

このとき停留ポテンシャル原理により、釣り合いを満たす \mathbf{u} は、次式を満足する。

$$\delta \Phi = \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \delta C_{ij} d\Omega + \chi \int_{\Omega} P(W^\nu) P(\delta W^\nu) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad (32)$$

以下では、上式から作用素 P を消去した形を導く。まず、 $P(W^\nu) = \lambda / \chi$ かつ $P(\delta W^\nu) \in Q$ なので

$$\int_{\Omega} \left(P(W^\nu) - \frac{\lambda}{\chi} \right) P(\delta W^\nu) d\Omega = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V \quad (33)$$

であり、これより式(32)の右辺第2項は、

$$\chi \int_{\Omega} P(W^\nu) P(\delta W^\nu) d\Omega = \int_{\Omega} \lambda P(\delta W^\nu) d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V \quad (34)$$

となる。次いで P の定義に従うと $\forall \delta \mathbf{u} \in V$ に対し、

$$\int_{\Omega} \left\{ \delta W^\nu - P(\delta W^\nu) \right\} \delta \lambda d\Omega = 0 \quad \forall \delta \lambda \in Q \quad (35)$$

が成立する。 $\lambda \in Q$ であることを考慮して、式(35)の $\delta \lambda$ に λ を代入し、それを用いて式(34)の右辺を変形すると、最終的に式(32)の第2項は、

$$\chi \int_{\Omega} P(W^\nu) P(\delta W^\nu) d\Omega = \int_{\Omega} \lambda \delta W^\nu d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V \quad (36)$$

のように作用素 P を含まない形に変形できる。上式を式(32)に代入し、さらに

$$\delta W^\nu = \frac{\partial W^\nu}{\partial C_{ij}} \delta C_{ij} \quad (37)$$

を用いると次式を得る。

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial W^\nu}{\partial C_{ij}} \right) \delta C_{ij} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \quad (38a)$$

$$\int_{\Omega} \left(W^\nu - \frac{\lambda}{\chi} \right) \delta \lambda d\Omega = 0 \quad (38b)$$

上式は、内力ベクトルを導くための基礎式となる弱形式である。次に接線剛性マトリクスを導出するための基礎式となる弱形式の時間導関数を示す。 \mathfrak{R} を

$$\mathfrak{R} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (39)$$

のように定義し、式(38a)の左辺を時間について微分すると

$$\delta \dot{\mathfrak{R}} = \int_{\Omega} \left[\delta C_{ij} \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \lambda \frac{\partial^2 W^\nu}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \right) \dot{C}_{kl} + \frac{\partial W^\nu}{\partial C_{kl}} \dot{\lambda} \right\} + \delta F_{ij} \left(2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + 2\lambda \frac{\partial W^\nu}{\partial C_{ij}} \right) \dot{F}_{ij} \right] d\Omega \quad (40a)$$

のようになる。また、式(38b)の左辺を時間について微分すると

$$\int_{\Omega} \delta \lambda \left(\frac{\partial W^\nu}{\partial C_{kl}} \dot{C}_{kl} - \frac{\dot{\lambda}}{\chi} \right) d\Omega = 0 \quad (40b)$$

を得る。

(2) 現配置への変換

以下では、上述した射影混合法の弱形式および弱形式の時間導関数について、時刻 $t=0$ における配置 \mathbf{X} で定義される量で、現時刻 $t=t$ における配置 \mathbf{x} で定義される量に変換し、混合型の Updated Lagrange 法の基礎式を導く。

a) 弱形式の変換

式(38a)の全ポテンシャルの変分形式より、第2Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} は、

$$S_{ij} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + 2\lambda \frac{\partial W^\nu}{\partial C_{ij}} \quad (41)$$

となる。これが射影混合法を超弾性体を用いる場合の応力-ひずみ関係式となる。上式を用いると式(38a)の左辺は、以下のように記述できる。

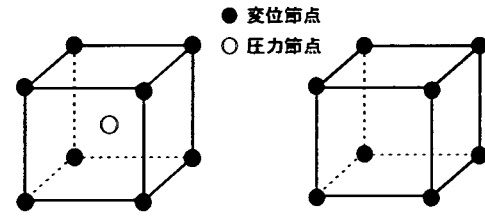
$$\delta \mathfrak{R} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial W^\nu}{\partial C_{ij}} \right) \delta C_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{S_{ij}}{2} \delta C_{ij} d\Omega \quad (42)$$

上式および式(38b)を配置 \mathbf{x} で定義される量に変換する¹⁰⁾と次のようになる。

$$\delta \mathfrak{R} = \int_{\Omega} T_{ij} \delta A_{ij} dv \quad (43a)$$

$$\int_{\Omega} \left(W^\nu - \frac{\lambda}{\chi} \right) \frac{\delta \lambda}{J} dv = 0 \quad (43b)$$

のように記述できる。ただし \mathbf{T} は Cauchy 応力テンソル、 dv は配置 \mathbf{x} における微小体積を表す。また $\delta \mathbf{A}$ は、Almansi ひずみテンソルの線形部分 \mathbf{A} の変位に関する変分であり、



8/1混合型ソリッド要素
8節点ソリッド要素
図-2 有限要素モデルに用いた要素の概念図

$$\delta A_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (44)$$

である。

b) 弱形式の時間導関数の変換

構成則テンソル \mathbf{D}^0 を、第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソルの時間導関数 $\dot{\mathbf{s}}$ と Green-Lagrange ひずみテンソルの時間導関数 $\dot{\mathbf{E}}$ の間に成立する 4 階の構成則テンソルと定義する。すなわち

$$\dot{S}_{ij} = D_{ij\mu\nu}^0 \dot{E}_{\mu\nu} \quad (45)$$

を満たすテンソルとする。すると射影混合法による超弾性体では、式(41)の時間導関数を取り、式(45)と比較することで

$$D_{ij\mu\nu}^0 = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial C_{ij} \partial C_{\mu\nu}} + 4\lambda \frac{\partial^2 W^v}{\partial C_{ij} \partial C_{\mu\nu}} \quad (46)$$

を得る。上式の \mathbf{D}^0 および式(41)を用いると(40a)は、

$$\delta \dot{\mathbf{r}} = \int_{\Omega} [\delta E_{ij} D_{ij\mu\nu}^0 \dot{E}_{\mu\nu} + \delta F_{ik} S_{ij} \dot{F}_{kj} + 2\delta E_{ij} \frac{\partial W^v}{\partial C_{ij}} \dot{\lambda}] d\Omega \quad (47)$$

と記述できる。

式(46)および式(40b)を配置 \mathbf{x} で定義される量により書き換える¹⁰⁾と以下ようになる。

$$\delta \dot{\mathbf{r}} = \int_V [\delta A_{ij} D'_{ij\mu\nu} \dot{A}_{\mu\nu} + \delta F_i(t)_{,j} T_{ij} L_{kj} + \delta A_{ij} T'_{ij} \dot{\lambda}] dv \quad (48a)$$

$$\int_V \delta \lambda \left(T'_{ij} \dot{A}_{ij} - \frac{\dot{\lambda}}{\chi J} \right) dv = 0 \quad (48b)$$

ただし、

$$D'_{ij\mu\nu} = \frac{1}{J} F_{ip} F_{jq} F_{kr} F_{ls} D_{pqrs}^0 \quad (49a)$$

$$L_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (49b)$$

$$\delta F_i(t)_{,j} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \quad (49c)$$

$$\mathbf{T}^p = \frac{2}{J} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W^v}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^T \quad (49d)$$

である。

(3) 有限要素法による離散化

式(43)、式(48)を混合型有限要素法により離散化すると次のような変位と圧力に関する要素レベルでの増分方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} [K] & [H] \\ [H]^T & [G] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{\dot{\lambda}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{ext}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{FD\} \\ \{FP\} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

ただし $[K]$ 、 $[H]$ 、 $[G]$ は、式(48)を離散化して得られる接線剛性マトリクスのサブマトリクスであり、 $\{FD\}$ および $\{FP\}$ はそれぞれ式(43a)、(43b)を離散化して得られる内力ベクトル、 $\{F_{ext}\}$ は変位節点に作用する外力ベクトルである。また $\{\dot{u}\}$ 、 $\{\dot{\lambda}\}$ はそれぞれ節点における変位および圧力の時間導関数である。

式(50)は変位のみを内挿する変位法の定式化も含んでおり、圧力の内挿が不要な構成則を用いる場合には、内力ベクトルとして $\{FD\}$ 、接線剛性マトリクスとして $[K]$ のみを採用すればよい。また、本文 2 節で述べた高減衰ゴムの構成則を適用する場合には式(50)の $[K]$ および $\{FD\}$ に、弾塑性部の構成則から得られる内力ベクトルおよび接線剛性マトリクスを加えることで上述の定式化を適用できる。

(4) 数値計算手法

実際の数値計算においては、ゴム材料に変位節点 8、圧力節点 1 (要素内一定圧力) の混合型 6 面体要素、鋼材料に変位節点 8 の 6 面体アイソパラメトリック Lagrange 要素¹⁰⁾を用いた。図-2 に上述した 2 つの要素の概念図を示す。また増分方程式の数値解法では、Newton-Raphson 法を用いた¹⁰⁾。弾塑性体の応力積分は、積分経路を分割するサブインクリメント積分を用いて forward-Euler 法により行った¹²⁾。

積層ゴム支承では、上下面を水平に維持した状態で鉛直荷重が載荷されている。すなわち、荷重を載荷している面では鉛直方向の変位量が同一となる。ただしこの変位量は未知であり、鉛直方向の荷重のみがわかっている。

この境界条件をモデル化するために本研究では、既成の接線剛性マトリクスを操作し、面に作用する荷重を対応する 1 自由度に集中させる Multi-Point-Constraint 法を用いた¹¹⁾。以下に簡単な例を用いて Multi-Point Constraint 法を説明する。

式(50)の要素レベルにおける増分方程式を組み合わせて得られる全体の連立一次方程式において、全体剛性マトリクスを $[A]$ 、圧力増分および変位増分を含む解を $\{x\}$ 、内力ベクトルを $\{Q\}$ 、外力ベクトルを $\{F\}$ とおくと方程式は、

$$A_{ij} x_j = F_i - Q_i \quad (51)$$

と記述できる。ここに、総自由度を m として $1 \leq i, j \leq m$ である。式(51)を $x_p = x_q$ の拘束条件の下で上式を解くことを考える。ただし、 A_{ij} および Q_i はすべて既知であり、外力ベクトルの成分のうち F_p および F_q は未知であるが両者の和 $F_p + F_q$ はわかっているものとする。また、以下では p および m につい

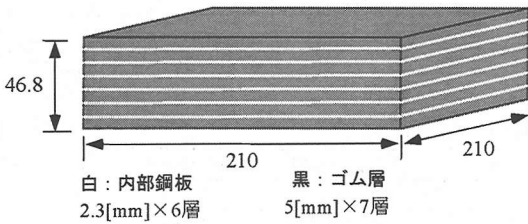


図-3 解析対象の高減衰積層ゴム支承

ては総和をとらないものとする。

まず上式に $x_p = x_q$ を代入して、

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + (A_{p1} + A_{q1})x_p + \dots + A_{mm}x_m = F_i - Q_i \quad (52)$$

を得る。

次いで $F_p + F_q$ は既知であることより、 $i = p$ および $i = q$ の式を足し合わせて、

$$(A_{p1} + A_{q1})x_1 + \dots + (A_{pp} + A_{qq} + A_{pq} + A_{qp})x_p + \dots + (A_{pm} + A_{qm})x_m = (F_p + F_q) - (Q_p + Q_q) \quad (53)$$

を得る。この操作は拘束されている面に作用する荷重増分(上式の右辺)を、 p 番目と q 番目の自由度が剛性マトリクスの分布に従って分散して支持していることを意味する。

従って最終的に解くべき式は、

$$A_{11}x_1 + \dots + (A_{p1} + A_{q1})x_p + \dots + A_{mm}x_m = F_i - Q_i \quad (54a)$$

$$(A_{p1} + A_{q1})x_1 + \dots + (A_{pp} + A_{qq} + A_{pq} + A_{qp})x_p + \dots + (A_{pm} + A_{qm})x_m = (F_p + F_q) - (Q_p + Q_q) \quad (54b)$$

ただし、 $1 \leq i \leq m$, $i \neq p$, $i \neq q$ である。

以上のように $x_p = x_q$ の拘束条件下においては、まず全体剛性マトリクス $[A]$ の p 列と q 列の和をとり、次いで p 行と q 行の方程式を足し合わせている。

これを3自由度以上が等しい値になるように拘束する条件に一般化すると、「1) 全体剛性マトリクスのなかで、拘束する自由度番号に等しい列ベクトルを足し合わせて1列にまとめる。2) 拘束する自由度番号に等しい行番号の方程式を足し合わせて1行にまとめる。」というプロセスにより、拘束条件を含む方程式を得ることができる。

特に拘束する自由度について最終的に残る方程式では、右辺の内力、外力ベクトルは力の総和になる。そのため、力の分布は不明でも作用する荷重がわかっているならば本手法を利用できる。

4. 実験結果との比較

本文で述べた構成則ならびに有限要素法を用い

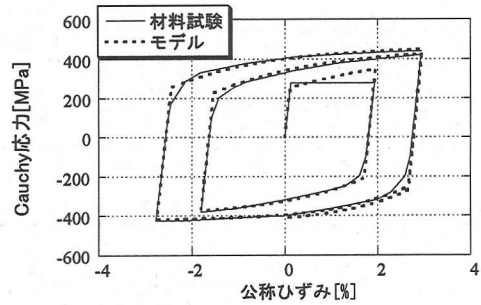


図-4 SS400の繰返し引張り圧縮試験結果とモデルによるシミュレーション結果の比較

て高減衰積層ゴム支承の有限要素モデルを構築した。ここではモデルを検証するために、本有限要素モデルを用いた解析結果と、高減衰積層ゴム支承の多軸載荷実験結果ならびにハイブリッド地震応答載荷実験結果⁸⁾との比較を行う。

(1) 解析対象

今回、解析の対象としたのは、図-3に示す形状の高減衰積層ゴム支承である。この支承は、著者らが行った積層ゴム支承の載荷実験⁸⁾で利用したものである。解析対象とした支承において用いられているゴムの材料定数⁷⁾を以下に示す。

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.323[\text{MPa}], \quad c_2 = 0.127[\text{MPa}], \quad c_3 = 0.0686[\text{MPa}] \\ \chi &= 16.0[\text{MPa}], \quad c = 6.59, \quad n = 2.71, \quad \alpha = 0.800 \\ \beta &= 0.302, \quad a_H = 0.138, \quad b_H = 14.0 \\ \tau_0 &= 0.588[\text{MPa}], \quad N = 0.400, \quad c_4 = 0.206[\text{MPa}] \\ c_5 &= 1.67, \quad m = 1.43, \quad b = 1.72 \end{aligned}$$

これらの材料定数を本文 2. (1) で述べた構成則に適用した場合の精度については、文献 7) を参照されたい。

(2) 鋼材の材料定数

対象としている高減衰積層ゴム支承は、内部鋼板の材料として構造用鋼材 SS400 を用いている。本研究では、既往の SS400 の繰返し引張り圧縮試験結果¹³⁾を用い、試験結果と 2. (2) で述べた構成則による解析結果の差が最小になるよう材料定数を同定した。得られた材料定数を以下に示す。

$$\begin{aligned} E &= 20.7[\text{MPa}], \quad \sigma_y = 250[\text{MPa}], \quad Q = 108[\text{MPa}], \\ b &= 13.5, \quad c = 5880[\text{MPa}], \quad \gamma = 55.0, \\ \Phi_\infty &= 0.800, \quad \nu = 0.3 \end{aligned}$$

また、同定した材料定数を用いた弾塑性体による数値計算結果と試験結果の比較を図-4に示す。図-4をみると、実験結果は初期降伏点周辺のみにおいて完全弾塑性的な挙動を示している。この挙動は、2. (2) で述べた構成則では再現することができない。一方、その後の繰返し載荷時の挙動については、本構成則により精度よく再現されていることがわ

表-1 多軸載荷実験における載荷条件

実験項目	水平変位	載荷速度[Hz]	載荷振幅* [%]	鉛直荷重 [kN]
水平1方向載荷	正弦波3サイクル	0.01	50, 100, 150, 200	一定値: 17.5
水平2方向載荷	8の字経路3サイクル	0.01	8の字: 50, 100, 150	一定値: 17.5
鉛直載荷実験	—	0.01	—	繰り返し載荷: 17.5~35.0

*水平変位を支承の総ゴム厚で除し基準化した値

表-2 有限要素解析において用いた解析条件

	水平1方向載荷	水平2方向載荷	鉛直載荷
対称性を考慮したモデルのサイズ	1/2	1/1 (full)	1/4
平面方向の要素数	5×10	10×10	5×5
ゴム層の厚さ方向の要素数	5	5	5
鋼板の厚さ方向の要素数	1	1	1
総要素数	2050	4100	1025
総節点数	4822	9182	2537

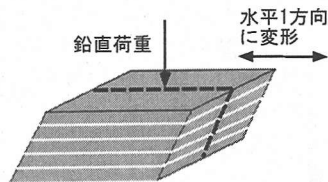


図-5 水平1方向載荷実験の載荷状態

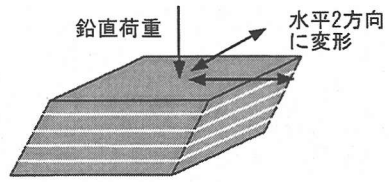


図-6 水平2方向載荷実験の載荷状態

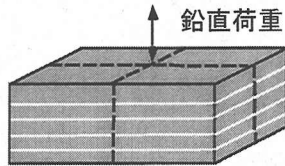


図-7 鉛直載荷実験の載荷状態

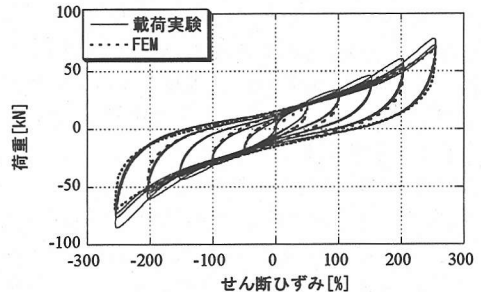
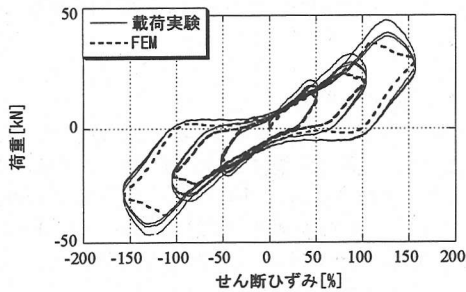
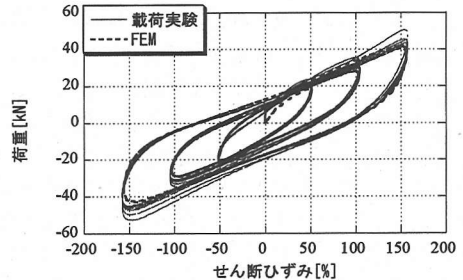


図-8 FEMと水平1方向載荷実験結果との比較



(a) X方向



(b) Y方向

図-9 FEMと水平2方向載荷実験結果との比較

かる。ここで大地震時において、積層ゴム支承は主として大振幅の繰り返し載荷を受ける。そのため支承全体の挙動を予測する場合には本構成則でも十分な近似精度であると考えられる。このことから支承の有限要素モデルの構築には、2. (2) の構成則に上述した材料定数を適用したモデルを用いた。

(3) 多軸載荷実験結果との比較

FEMモデルを検証するために、多軸載荷実験結果とモデルによる解析結果との比較を行った。比較に用いた各実験の載荷条件を表-1に示す。また、各実験における載荷状態の概略図を図-5~図-7に示す。ただし図中の点線は、変形の対称性を示しておりFEMでは点線で分割された部分のみモデル化した。

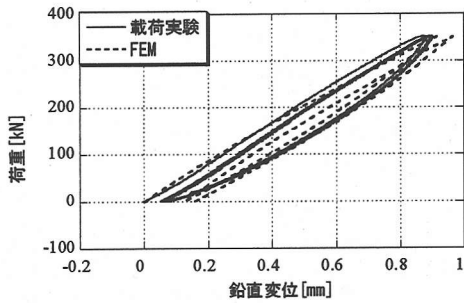


図-10 FEMと鉛直載荷実験結果との比較

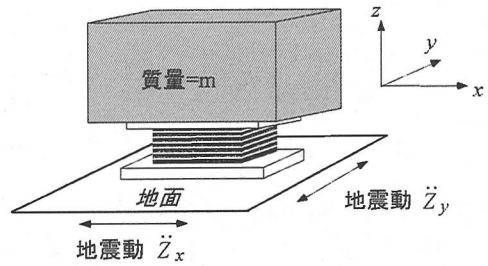
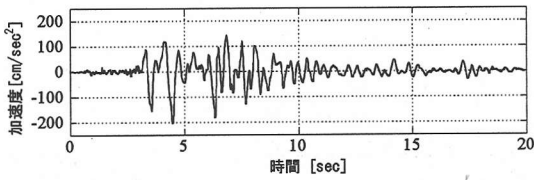
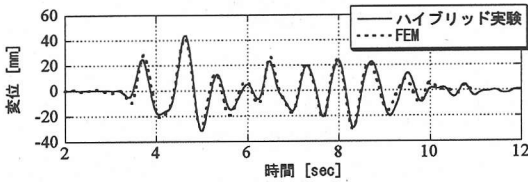


図-11 ハイブリッド地震応答載荷実験で想定した構造系

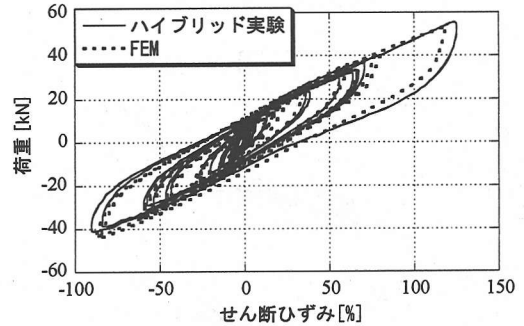


(a) 入力した地震動



(b) 変位応答

図-12 水平1方向ハイブリッド地震応答載荷実験結果とFEMとの比較



(c) 復元力特性の比較

用いたモデル、および要素分割数など有限要素解析において用いた解析条件を表-2にまとめて示す。

また、図-8、図-9 および図-10 にそれぞれ水平1方向載荷実験、水平2方向載荷実験および鉛直載荷実験の実験結果とFEMによる解析結果を比較したグラフを示す。

まず、図-8 および図-9 をみると実験結果と解析結果はよく一致しており、本FEMモデルにより多軸載荷下での積層ゴム支承の水平方向の復元力特性を精度よく再現できていることがわかる。

次に図-10において、載荷実験結果とFEMとを比較すると両者の鉛直方向の剛性は概ね一致していることがわかる。特に本文2.(1)で述べた高減衰ゴムの構成則では、式(1a)および式(1d)に示すように体積変形と圧力の関係を弾性体としてモデル化している。このことは、図-10において履歴によるエネルギー吸収が実験結果と解析結果で同程度であることから、妥当であると判断できる。ただし荷重が零となる位置の近傍ではFEMと実験結果との間に明確な差がみられる。この原因は、ゴムの構成則において粘性を含むエネルギー吸収性能を等価な塑性で置き換えているため、本来回復するはずのひずみが永久変形として残ったものと推測される。な

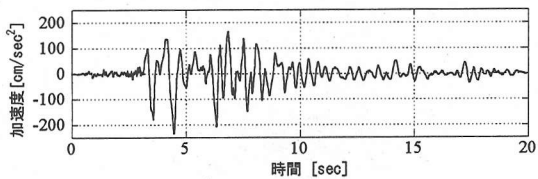
お、この鉛直載荷状態において、鋼板に生じる応力は、最大で初期降伏応力の1/3程度である。そのため、実験結果に現れた残留変形は鋼板の降伏挙動とは関係していない。

(4) ハイブリッド地震応答載荷実験との比較

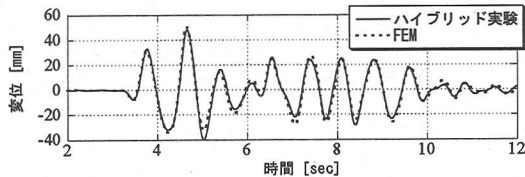
図-11に示す構造を想定したハイブリッド地震応答載荷実験⁸⁾と、FEMモデルによる地震応答解析結果との比較を行い、モデルの地震応答予測性能を検討した。ハイブリッド実験では、支承の最大せん断ひずみが150[%]前後になるように、神戸海洋気象台で1995年兵庫県南部地震時に観測された地震動を1/3.5倍にスケールリングして、入力地震動とした。また載荷は実地震の20倍の時間で準静的に行った。

図-12に水平1方向に地震動を入力した場合の入力地震動、実験と解析による応答、ならびに復元力特性の比較を示す。また、図-13に水平2方向に地震動を入力した場合の入力地震動、実験と解析による応答および復元力特性の比較を示す。

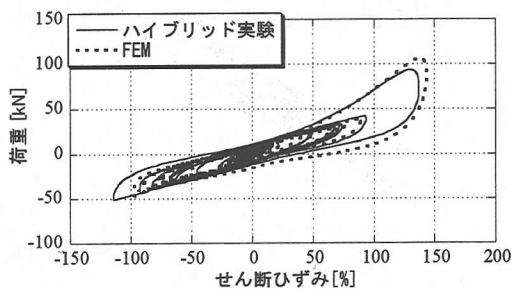
図-12、図-13をみると、水平1方向および水平2方向の地震動を入力した場合もFEMにより応答が精度よく再現されている。このことから本モデルの地震応答予測性能を検証することができた。



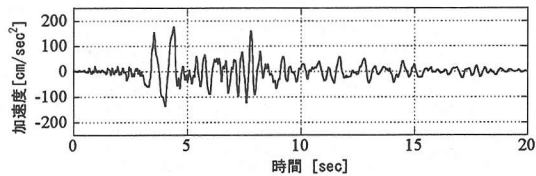
(a) X方向に入力した地震動



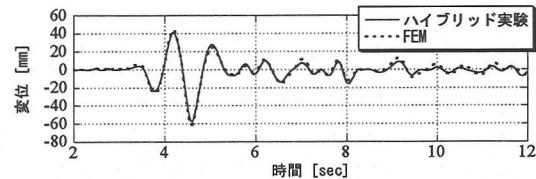
(c) X方向の変位応答



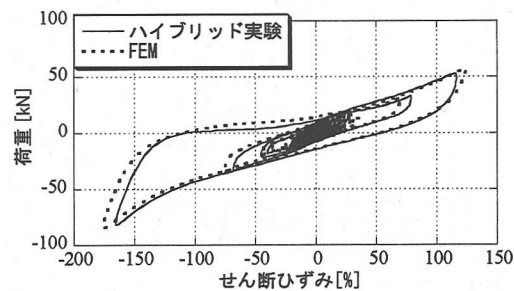
(e) X方向の復元力特性



(b) Y方向に入力した地震動



(d) Y方向の変位応答



(f) Y方向の復元力特性

図-13 水平2方向ハイブリッド地震応答載荷実験結果とFEMとの比較

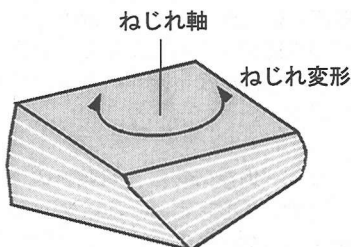


図-14 ねじれ変形の概念図

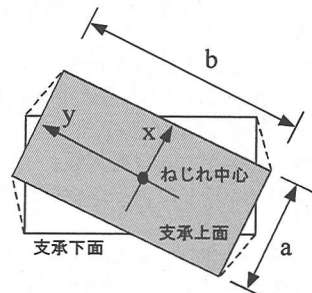


図-15 支承のねじれ変形の概念図

5. ねじれ変形、鉛直変形および回転変形における力学特性の把握と簡易式の提案

免震設計では、実地震時に免震支承に生じる変形について支承の力学特性を精緻に把握するモデルに加え、支承を設計する段階においてそれらを簡易的に把握できる設計式が必要となる。ここでは免震橋梁において実際に積層ゴム支承に生じ、かつ載荷実験の実行が困難なねじれ、回転変形に対する高減衰積層ゴム支承の力学特性を本有限要素モデルによる解から把握する。また、これらの変形に加え支承の鉛直変形について支承の設計段階において考慮するために、マクロ的な力学関係に関する理論的

な簡易式を提案する。

(1) ねじれ変形

免震橋梁では、桁の剛体運動により積層ゴム支承に図-14のようなねじれ変形が生じる。既往の研究において特に逆L字型橋脚を有する免震橋梁において支承がねじれ変形を生じることが報告されている¹⁴⁾。しかし支承のねじれ変形を近似する式はこれまで提案されておらず、その影響を設計において考慮していない。以下では、構造力学におけるねじれ変形の扱い¹⁵⁾に従い、設計に利用するための簡易式を示し、有限要素解と比較することで簡易式の妥当性を検討する。

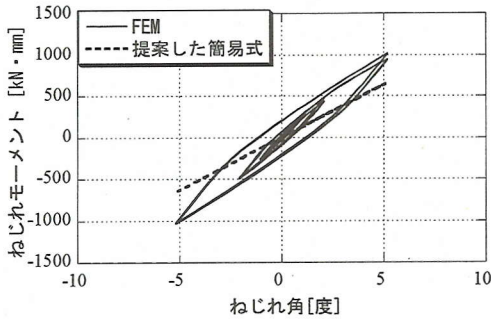


図-16 ねじれ変形におけるFEMと簡易式との比較

図-15に示すように断面が矩形の積層ゴム支承において、断面の中心を軸とするねじれ変形が生じる場合を考える。このときねじれ変形は微小であり支承のゴム部に生じる変形が単純せん断で近似できるものと仮定する。

ここでねじれの中心軸を原点として支承の断面内に2次元の直交座標を設置し、断面内の任意の点を $\mathbf{p}=(x,y)$ とする。このとき断面全体に生じるねじれモーメント M_T は、点 \mathbf{p} に作用するせん断応力を τ として

$$M_T = \int_x \tau R dA \quad (55)$$

ただし、

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (56)$$

である。ここに式(55)の積分は断面全体についての面積分を示す。

積層ゴムのゴム層数を N とし、ねじれ変形が各ゴム層ともに同一であるとするときせん断ひずみ γ は、

$$\gamma = \frac{R\theta_T}{Nt_0} \quad (57)$$

と記述できる。ただし、 t_0 はゴム層厚であり θ_T は支承全体に生じるねじれ角である。ここでゴムの静的せん断弾性係数を G としてゴム層に生じるせん断応力 τ を設計式^{16),17)}

$$\tau = G\gamma \quad (58)$$

から計算する。上式を(55)に代入すると、ねじれモーメント M_T とねじれ角 θ_T の関係は、最終的に次式のようになる。

$$M_T = \frac{G\theta_T}{Nt_0} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} R^2 dy dx = \frac{ab(a^2 + b^2)G}{12t_0N} \theta_T \quad (59)$$

なお、上式の2重積分は、構造力学において断面極2次モーメントと呼ばれ、矩形断面以外の場合の結果も文献15)などに示されている。

一方、支承に図-14のようなねじれ変形を与え、それに対するねじれ角とねじれモーメントの関係をFEMにより把握した。図-16に得られたねじれ角とねじれモーメントの関係について、FEMの解から

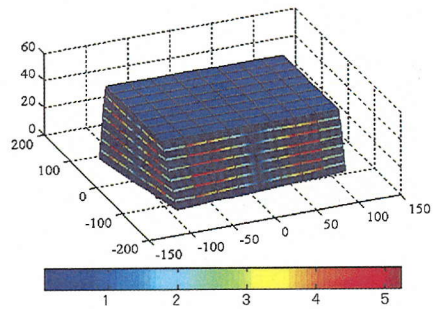


図-17 ねじれ角5度でのMisesの相当応力場[MPa]

得られた結果および簡易式(59)から算出した結果を示す。またこのときのMisesの相当応力場を図-17に示す。

図-16をみると提案した簡易式は、FEMの結果と比較して誤差が20[%]程度である。このことより設計式(59)は精緻であるとは言い難いが、現在の免震設計¹⁷⁾における近似式として十分であると思われる。次に図-17をみるとねじれ変形において内部鋼板の応力は、中央付近に対称に応力が最大となる点を有していることがわかる。

(2) 鉛直変形

免震橋梁において積層ゴム支承は、その鉛直方向の力学特性により構造物を支持するとともに、上部構造に生じる鉛直変形を吸収する役割を有している。そのため免震構造では、従来から支承の鉛直方向における力学特性を考慮して設計が行われている。以下に支承の鉛直変位 $\Delta z^{(B)}$ と鉛直荷重 $F_z^{(B)}$ の関係についての設計式¹⁷⁾を示す。

$$F_z^{(B)} = \frac{(3 + 6.58S^2)GA}{Nt_0} \Delta z^{(B)} \quad (60)$$

ただし上式中において S は

$$S = \frac{A}{2(a+b)t_0} \quad (61)$$

のように定義される1次形状係数であり、 A は支承の支圧面積である。

しかし、上式は実験結果に基づく経験式であるため理論的な根拠が希薄であり、また精度も十分とは言えない。ここでは既往の理論¹⁸⁾に本文3.(1)で述べたゴム材料の圧縮性を導入し、支承の設計に利用可能な簡易式を導く。

a) 基礎方程式

以下では図-18に示すように $a \times b$ の矩形断面を有するゴム層が、上下の面全体を水平方向(x, y 方向)に拘束された状態で鉛直方向(z 方向)に微小な変形を受ける場合を考える。ただし側面の境界に拘束はなく自由に変形できるものとする。

また、ゴム層が鉛直方向に変形を受ける場合にお

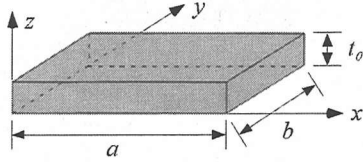


図-18 対象とする矩形断面のゴム層

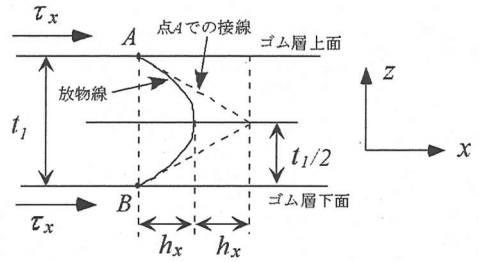


図-19 ゴム層内部に生じる放物線状の変形の幾何学的関係

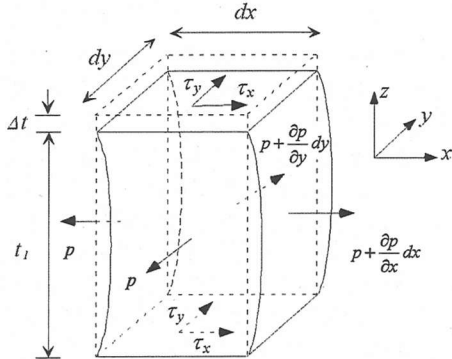


図-20 ゴム層中の微小矩形断面を有する直方体に作用する応力

いて、以下のような仮定が成立するものとする。

- 1) ゴム層の上面が鉛直方向に変形を受けると、ゴム層内部の z 軸に沿った物質点は水平方向へも変形し、2 次の放物線状に分布する。この放物線の x 軸および y 軸への射影長をそれぞれ h_x および h_y とおく。この様子を zx 平面について描いた図を図-19 に示す。
- 2) ゴム層に生じる直応力はどの方向についても同一であり、上述した放物線に沿って一定値であるものとする。この一定値は静水圧力であり、ここでは p とする。

上述したようにゴム層の上面が鉛直方向に変形を受けると、水平方向の変位が放物線状に分布する。このことから上下の端部は x 方向に $2h_x$ 、 y 方向に $2h_y$ のせん断変形を生じる。従って、ゴムを線形弾性体と仮定するとせん断変形とせん断ひずみの関係は、

$$\tau_x = G \frac{2h_x}{(t_1/2)} \quad (62a)$$

$$\tau_y = G \frac{2h_y}{(t_1/2)} \quad (62b)$$

のように記述できる。ただし G はゴム材料の静的せん断弾性係数、 τ_x および τ_y はそれぞれ x 方向、 y 方向のせん断応力である。また、 t_1 は変形後のゴム層厚であり、変形前のゴム層厚を t_0 、位置 (x, y) にお

るゴム層上面に作用する圧縮変位を $\Delta t(x, y)$ とすると $t_1 = t_0 - \Delta t$ である。

ここでゴム層中において、 $dx \times dy$ の矩形型の微小断面を有する高さ t_1 の直方体について力の釣り合いを考える。図-20 に直方体に作用する応力の概念図を示す。図-20 より

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx \times (dy \times t_1) + 2\tau_x \times dx \times dy = 0 \quad (63a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} dy \times (dx \times t_1) + 2\tau_y \times dx \times dy = 0 \quad (63b)$$

であり上式に式(62)を代入して整理すると

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -8h_x \frac{G}{t_1^2} \quad (64a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -8h_y \frac{G}{t_1^2} \quad (64b)$$

を得る。

次いで上述した微小直方体の変形前後における体積変化について考える。微小直方体の変形前の体積は、

$$V = t_0 dx dy \quad (65)$$

である。一方、変形後には、鉛直方向の真中の断面において断面積が

$$dx dy \left(1 + \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} \right) \quad (66)$$

のように表せる。このことから、変形後の微小直方体の体積は、Prismoidal formula より

$$v = \frac{t_0 - \Delta t}{6} \left[2dx dy + 4dx dy \left(1 + \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} \right) \right] \quad (67)$$

となる。従って変形前後の体積の変化率を J とおくと

$$J = \frac{v}{V} = \frac{t_0 - \Delta t}{6t_0} \left[6 + 4 \left(\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} \right) \right] \quad (68)$$

である。ここで本文 3. (1) で述べた射影混合法では、静水圧 p と体積の変化率 J の間には、材料定数 χ を用いて以下のような関係が成立する。

$$-\frac{p}{2} = 2\chi (\sqrt{III_C} - 1) = 2\chi (J - 1) \quad (69)$$

上式に式(68)を代入して

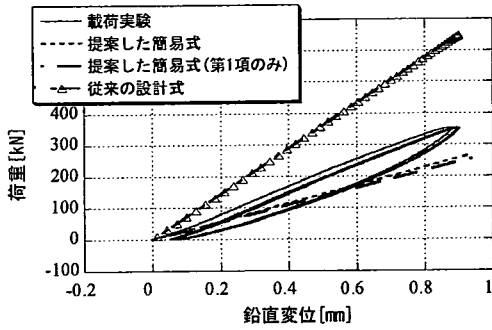


図-21 鉛直載荷実験結果と、現在の設計式および提案した簡易式との比較

$$p = 4\chi \left[\frac{\Delta t}{t_0} - \frac{2(t_0 - \Delta t)}{3t_0} \left(\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} \right) \right] \quad (70)$$

を得、さらに式(64)を代入して整理すると

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial y^2} = \frac{12G}{t_1^3} \left(\frac{t_0}{4\chi} p - \Delta t \right) \approx \frac{12G}{t_0^3} \left(\frac{t_0}{4\chi} p - \Delta t \right) \quad (71)$$

のような支配方程式が得られる。ここで

$$k = \frac{3G}{\chi t_0^2} \quad (72a)$$

$$Q(x, y) = -\frac{12G}{t_0^3} \Delta t \quad (72b)$$

と置くと支配方程式は

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial y^2} = kp + Q(x, y) \quad (73)$$

のように記述できる。上式は非同次型の Helmholtz 方程式である。

ここにゴム層の4つの側面においては、拘束がなく自由に体積変形ができることより求めるべき解 $p(x, y)$ の境界条件は、

$$p(0, y) = p(a, y) = 0 \quad (74a)$$

$$p(x, 0) = p(x, b) = 0 \quad (74b)$$

である。

以上より本境界値問題では、非同次型の Helmholtz 方程式を同次型の境界条件の下で解くことになる。

b) 境界値問題の解

上述した境界値問題では、同次型の方程式の解による固有関数展開法¹⁹⁾を用いて、以下のような解が得られる。

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(y) \phi_n(x) \quad (75a)$$

$$\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (75b)$$

$$h_n(x) = \sinh \gamma_n (b - y) \int_0^y q_n(\xi) \sinh \gamma_n \xi d\xi + \sinh \gamma_n y \int_y^b q_n(\xi) \sinh \gamma_n (b - y) d\xi \quad (75c)$$

ただし、

$$q_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a Q(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \quad (76a)$$

$$\gamma_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + k} \quad (76b)$$

である。

c) 鉛直変形に対する簡易式の導出

式(75)に示した解を用いてゴム層の上端面全体に一定の圧縮変形を与える場合を考える。圧縮変位を Δz とおくと、

$$Q = -\frac{12G}{t_0^3} \Delta z \quad (77)$$

であり式(76a)より

$$q_n = -\frac{24G}{n\pi t_0^3} (1 - \cos n\pi) \Delta z \quad (78)$$

である。上式を式(75c)に代入して積分を実行すると

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\gamma_n^2} \left\{ \frac{\sinh \gamma_n y + \sinh \gamma_n (b - y)}{\sinh \gamma_n b} - 1 \right\} \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (79)$$

を得る。

ここで圧縮変位 Δz に対応する鉛直方向の荷重 F_z は圧力の面積分であるから、

$$F_z = \int_0^b \int_0^a p dx dy = C_z \Delta z \quad (80)$$

を得る。ただし

$$C_z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{96Ga}{t_0^3 \{(2n-1)\zeta_n \pi\}^2} \left\{ b - \frac{2(1 + e^{-2\zeta_n b}) - 4e^{-\zeta_n b}}{\zeta_n (1 - e^{-2\zeta_n b})} \right\} \quad (81a)$$

$$\zeta_n = \sqrt{\left\{ \frac{(2n-1)\pi}{a} \right\}^2 + \frac{3G}{\chi t_0^2}} \quad (81b)$$

である。

上式においては、ゴム層1層のみの鉛直変形を対象としている。ゴム層数 N の積層ゴム支承を対象とし、各ゴム層が同一に鉛直変形していると仮定すると、最終的に支承の鉛直荷重 $F_z^{(B)}$ と鉛直変位 $\Delta z^{(B)}$ の関係は、

$$F_z^{(B)} = C_z \frac{\Delta z^{(B)}}{N} \quad (82)$$

となる。なお、簡易式の係数に含まれる無限級数については、 $n=i$ のときの級数を $C^{(i)}$ として、

$$\frac{C^{(i)}}{C^{(1)}} \geq 10^{-3} \quad (83)$$

を満足する $C^{(i)}$ を足し合わせて用いた。

d) 実験結果と簡易式との比較

図-21に積層ゴム支承の鉛直載荷実験結果と、提案した簡易式(82)および従来の設計式(60)との比較を示す。

まず、現在の設計式と載荷実験結果とを比較すると、すべての鉛直変位に対し鉛直荷重が実験結果の2~3倍程度の値となっている。そのため、現在の設

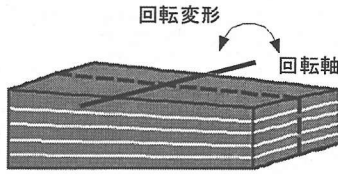


図-22 回転変形概念図

計においては、支承の鉛直剛性を過剰に見積もっていることになり、設計時には注意を要することが示唆される。一方、提案した簡易式と載荷実験結果を比較すると鉛直変位が小さい範囲において実験結果とよく一致しているものの、鉛直変位が大きくなるにつれ両者の間に差がみられる。この差は設計式において支承のせん断弾性係数を一定と仮定し、非線形性を考慮していないことに起因するものと推測される。

なお、図-21より提案した簡易式は、係数 C_r の第1項が他の項に比べ非常に大きな値であり、第1項のみを採用した場合においても同程度の精度を有していることがわかる。従って実際の使用においては第1項のみを用いたより簡易な式を利用することができる。

(3) 回転変形

免震橋梁では、上部構造のたわみ振動や橋脚のロッキング振動により支承に図-22に示すような回転変形が生じる。そのため設計においては、回転変形における支承の力学特性を考慮して行う必要がある。従来の設計においては、支承の回転変形について以下のような実験結果に基づく経験的な設計式が提案されている¹⁶⁾。

$$M_R^{(B)} = (3 + 6.58S^2) \frac{GA}{Nt_0} \theta_R^{(B)} \quad (84)$$

ここに $M_R^{(B)}$ および $\theta_R^{(B)}$ はそれぞれ支承の回転変形における回転モーメントと回転角である。また、上式中の A および S は本節(2)で定義した値である。ただし、上式は理論的な背景がなく、また後述するが精度がよいとは言い難い。そこで本研究では、ゴム材料の圧縮性を考慮し、支承の回転変形に関する簡易式を導いた。以下に詳細な導出を示す。

a) 回転変形に関する簡易式の導出

式(75)に示した解を用いてゴム層上端面に y 軸と平行な軸周りに回転角 θ_R の回転変形が生じる場合を考える。 θ_R が微小である場合には式(72b)の Q は

$$Q = \beta \left(x - \frac{a}{2} \right) \quad (85)$$

のように近似できる。ただし

$$\beta = -\frac{12G}{t_0^3} \tan \theta_R \approx -\frac{12G}{t_0^3} \theta_R \quad (86)$$

である。まず、式(85)を式(76a)に代入して積分を具体的に計算すると、

$$q_n = -\frac{a\beta}{n\pi} (1 + \cos n\pi) \quad (87)$$

を得る。次いで上式を式(75)に代入して、整理すると最終的に次式を得る。

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\gamma_n^2} \left\{ \frac{\sinh \gamma_n y + \sinh \gamma_n (b-y)}{\sinh \gamma_n b} - 1 \right\} \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (88)$$

最後に得られた圧力場を利用して、回転変形に対するモーメント M_R と回転角 θ_R の関係を求める。モーメントは、鉛直方向の圧力により生じていることから、

$$M_R = \int_0^b \int_0^a p \cdot \left(x - \frac{a}{2} \right) dx dy = C_R \theta_R \quad (89)$$

ただし

$$C_R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24G\alpha^3}{t_0^3 (2n\pi\eta_n)^2} \left\{ b - \frac{2(1 + e^{-2\eta_n b}) - 4e^{-\eta_n b}}{\eta_n (1 - e^{-2\eta_n b})} \right\} \quad (90a)$$

$$\eta_n = \sqrt{\left(\frac{2n\pi}{a} \right)^2 + \frac{3G}{\chi t_0^2}} \quad (90b)$$

を得る。

ここで上式においては、ゴム層1層のみの回転変形を対象としている。ゴム層数 N の積層ゴム支承を対象とし、各ゴム層が同一に回転変形していると仮定すると、最終的に支承の回転モーメント $M_R^{(B)}$ と回転角 $\theta_R^{(B)}$ の関係は、

$$M_R^{(B)} = C_R \frac{\theta_R^{(B)}}{N} \quad (91)$$

のようになる。

b) FEMと簡易式との比較

支承に図-22のような回転変形を与え、それに対する回転角とねじれモーメントの関係を有限要素モデルにより把握した。ただし、図-22中の点線は変形の対称性を示しており、FEMではこれを考慮して解析を行っている。このときの回転角と回転モーメントの関係と、式(84)の設計式ならびに式(91)の簡易式とを比較したものを図-23に示す。また、図-24にFEMにより求めた回転変形での圧力場を示す。

図-23をみると、式(84)に示した設計式から得られる回転モーメントの値は、FEMによる解析結果の5倍程度になっている。そのため現在の設計では、支承の回転剛性を大幅に過大評価していることとなり、式(84)を用いる場合には注意を要することが示唆される。

一方、提案した簡易式は、回転角が1度付近において有限要素解の2倍程度のモーメント値を示しているものの、0.5度以下の範囲では有限要素解とよく一致している。また、係数 C_R の第1項のみを採用した場合においても、同程度の精度が得られることがわかる。既往の研究より、積層ゴム支承を用いて

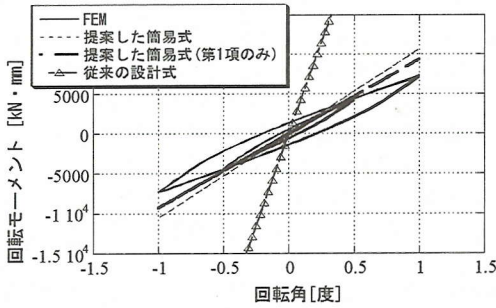


図-23 回転変形における FEM と簡易式との比較

いる免震橋梁では実地震時に最大で 0.2 度程度の回転変形を生じることが報告されている²⁰⁾ことを考慮すると、提案した簡易式は十分設計に利用可能であると考えられる。

次に図-24 の圧力場をみると内部鋼板には、ゴム部が圧縮されると引張り応力が生じ、引張られると圧縮応力が生じていることがわかる。これはゴム層が圧縮あるいは引張り変形を受け、支承側面から体積変形するのを、鋼板が拘束し水平方向に応力を生じた結果である。

6. まとめ

本研究では、材料レベルから高減衰積層ゴム支承力学特性を精緻に再現できる 3 次元有限要素モデルを構築することを目的とした。

- 1) 提案した高減衰ゴムの構成則を有限要素法に適用するための定式化を示した。これにより提案した構成則を有限要素法に適用可能となった。
- 2) 変位と圧力を独立変数とする混合型の updated Lagrange 法により、微圧縮性でかつ速度型あるいは増分型の構成則によりモデル化される材料のための有限要素法を構築した。上述した構成則ならびに本有限要素法を利用することで、ゴム材料を応用した任意のデバイスの力学特性を数値計算により予測することが可能となった。
- 3) 提案した構成則と有限要素法を用いて高減衰積層ゴム支承の有限要素モデルを構築した。さらに本モデルを検証するため、高減衰積層ゴム支承の載荷実験結果との比較を行った。その結果、本モデルにより実験結果を精度よく再現できることがわかった。
- 4) 本有限要素モデルを応用し、載荷実験を行うことが困難なねじれ、回転変形に対する高減衰積層ゴ

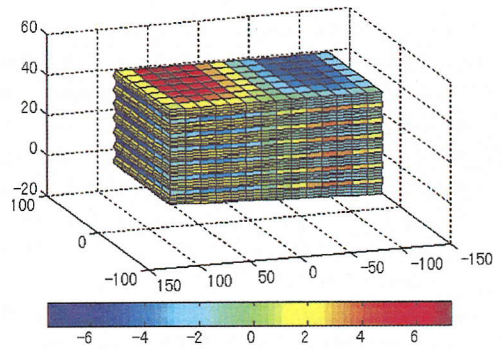


図-24 回転角 1 度を与えた場合の圧力場 [MPa]

ム支承の力学特性を把握した。また、ねじれ変形、回転変形に加え鉛直変形について、支承の設計段階において考慮できる理論的な簡易式を提案した。今後、提案した簡易式が積層ゴム支承の設計ならびに免震設計における標準的な設計式として利用されることが期待される。

なお、ゴム材料は実際、温度・速度依存性を有しており本研究では、それらを考慮していない。実際に高減衰積層ゴム支承が使用されている状況を考慮すると、熱伝導問題、時間依存問題を考慮した構成則と、それに対応した有限要素法が必要である。

謝辞：有限要素法のプログラムの開発では、東京大学新領域創成科学研究科環境学専攻の渡邊浩志講師に終始丁寧なご指導を賜りました。また載荷実験に用いた積層ゴム支承の設計・製作では川口金属(株)の比志島康久氏ならびに鶴野禎史氏、(株)ブリヂストンの須藤千秋氏、横浜ゴム(株)の遠藤和夫氏、オイレス工業(株)の伊関治郎氏、下田郁夫氏および横川英彰氏に協力して頂きました。なお、本研究は、文部科学省科学研究費ならびに日本学術振興会の助成を受けて行いました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Seki, W., Fukahori, Y., Iseda, Y. and Matsunaga, T.: A large deformation finite element analysis for multilayer elastomeric bearings, *Transaction of a meeting of the Rubber Division, American Chemical Society*, pp.856-870, 1987.
- 2) Hosam-Eddin, M.A. and Abdel-Ghaffar, A.M.: Modeling of Rubber and Lead Passive Control Bearings for Seismic Analysis, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol.121, No.7, pp.1134-1144, 1995
- 3) Takayama, M., Tada, H. and Tanaka, R.: Finite Element

- Analysis of Laminated Rubber Bearing used in Base-Isolation System, *The meeting of the Rubber Division*, American Chemical Society, Washington D.C., pp.46-62, 1990.
- 4) Simo, J.C.: On a Fully Three-Dimensional Finite-Strain Viscoelastic Damage Model: Formulation and Computational Aspect, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.60, pp.153-173, 1987.
 - 5) 松田昭博：超弾性体の大変形有限要素解析による積層ゴム免震要素の力学特性評価に関する研究，博士論文，筑波大学システム情報工学研究科，2001.
 - 6) Sussman, T. and Bathe, K.J.: A Finite Element Formulation for Nonlinear Incompressible Elastic and Inelastic Analysis, *Computer & Structure*, Vol.26, No.1/2, pp.357-409, 1987.
 - 7) 吉田純司，阿部雅人，藤野陽三：高減衰ゴムの構成則，土木学会論文集，No.710/I-60, pp.209-224, 2002.
 - 8) 阿部雅人，吉田純司，藤野陽三：免震用積層ゴム支承の水平 2 方向を含む復元力特性とそのモデル化，土木学会論文集，No.696/I-58, pp.125-144, 2002.
 - 9) Chaboche, L.J.: Constitutive Equations for Cyclic Plasticity and Cyclic Viscoplasticity, *International Journal of Plasticity*, Vol.5, pp.247-301, 1989.
 - 10) 久田俊明，野口裕久：非線形有限要素法の基礎と応用，丸善，1995.
 - 11) 渡邊浩志：非圧縮性超弾性体の混合型有限要素解析に関する研究，博士論文，東京大学工学系研究科機械工学専攻，1995.
 - 12) Crisfield, M.A.: *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and structures* volume1, John Wiley & Sons, 1991.
 - 13) 西村宣男，小野潔，池内智行：単調載荷を基にした繰り返し塑性履歴を受ける鋼材の構成式，土木学会論文集，No.513/I-31, pp.27-38, 1995.
 - 14) 土木学会鋼構造委員会 鋼構造物の耐震検討小委員会：橋梁システムの動的解析と耐震性，土木学会，2000.
 - 15) 園田恵一郎：土木工学ライブラリー 1 構造力学 II，朝倉書店，1985.
 - 16) 防振ゴム研究会編：防振ゴム，日本鉄道車両工業会，現代工学社，1998.
 - 17) 社団法人日本道路協会：道路橋支承便覧，日本道路協会，1991.
 - 18) Reicha, C.: Design of Elastomer Bearings, *PCI Journal*, pp.62-78, October, 1964.
 - 19) Richard, H.: *Elementary Applied Partial Differential Equations*, 2nd edition, Prentice-Hall, 1987.
 - 20) 庄司学，川島一彦：鉄筋コンクリート橋脚の塑性回転が高減衰積層ゴム支承の設計に及ぼす影響，土木学会 第 26 回地震工学研究発表会講演論文集，pp.1069-1072, 2001.

(2001. 8. 16 受付)

THREE-DIMENSIONAL FINITE ELEMENT ANALYSIS OF HIGH DAMPING RUBBER BEARING

Junji YOSHIDA, Masato ABE and Yozo FUJINO

A three-dimensional finite element modeling for High Damping Rubber bearings is studied. At first, the constitutive law for High damping rubber is formulated to derive the constitutive tensor. Then, a mixed finite element method is formulated, to which slightly compressible materials with rate form or incremental form of constitutive law are applied. Using the constitutive law and the finite element method developed here, a finite element model of High Damping Rubber Bearings is constructed and it has shown a good agreement with experimental results of the bearing. Finally, the torsional or rotational deformation of the bearing is simulated. In addition, simple and theoretical equations on these deformations are proposed for the design of bearings.