

振幅展開法を用いた砂州の弱非線形解析

泉 典洋¹・Adichai PORNPRONMIN²

¹正会員 Ph.D. 東北大学大学院工学研究科(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

²M.Eng. 名古屋大学大学院地圈環境科学研究科(〒464-8601 名古屋市千種区不老町)

単列交互砂州の非線形解析手法として従来行われてきた増幅率展開法は、増幅率を微小パラメータとして展開するため、その適用は最も小さい臨界アスペクト比近傍、すなわち単列交互砂州の近臨界域のみに限られるという欠点があった。本研究ではこの制限を除くために、振幅を微小パラメータとして展開する振幅展開法を用い、単列交互砂州のみならず複列砂州の場合にも適用できる弱非線形解析を提案した。単列交互砂州および複列砂州の波長および平衡振幅について理論結果と実験結果を比較したところ良好な一致が見られた。

Key Words : alternate bar, multiple bar, amplitude expansion method, weakly nonlinear analysis, perturbation technique

1. はじめに

河道の左右岸に交互に形成される単列交互砂州や河道横断方向に複数個形成される複列砂州は移動床上の不安定性によって形成される中規模河床形態として知られている(図-1参照)。砂州の発生を線形安定解析の手法を用いて理論的に説明した Hansen¹⁾, Callander²⁾ の研究を端緒として、その後数々の理論的研究が行われてきた^{3), 4), 5), 6), 7)}。近年の研究の中心は線形領域を越えて、有限の振幅を持つにいたった砂州の挙動特性に関する研究に移っている^{9), 10), 11), 12), 13)}。

砂州の発生をコントロールしているパラメータはアスペクト比(川幅水深比)である。この値が臨界値を超えると平坦床は不安定となり、砂州の形成が引き起こされる。この際の単列交互砂州の発生における臨界アスペクト比は約10のオーダーであり、臨界における波長は川幅の数倍から数十倍程度であることが線形解析によって明らかになっている。また非線形解析による結果として、不安定性の発生時に見られる分岐の形態は supercritical bifurcation(超臨界分岐)であり、アスペクト比が臨界値を超えた時点で、有限な振幅を持った河床横断方向および流下方向に対する周期解に移行することが明らかとなっている¹¹⁾。またその際、サイドバンド不安定が発生すること、さらにそこで導かれる Ginzburg-Landau 方程式の解は準周期解となり得ることがわかっている¹³⁾。これらの非線形解析では増幅率展開法が用いられているが、解析手法の持つ制限から最低次の不安定モードである単列交互砂州にしか適用できない。したがってこれまで複列砂州を対象とした非線形解析は行われておらず、単列交互砂州に比べて理論的研究が進んでいないのが現状である。

複列砂州は一般的に不安定であり、時間の経過とともにカオス的な特徴を持つ網状流路へ遷移すると言われている^{14), 15), 16)}。また一方で最終的に網状流路に遷移する場合でも形成初期には規則正しく並んだ單一モード(unimodal)の複列砂州が観察されており、またモードの減少がみられるだけで網状流路へ遷移しない実験例も報告されている^{14), 15)}。複列砂州から網状流路への遷移現象には多モード間の相互作用や連続分岐現象など強非線形領域におけるより複雑な物理機構が重要な役割を果たしており、理論的に扱うのは極めて困難であることが予想される。本研究では、複列砂州およびその網状流路への遷移現象解明の端緒として、單一モードの複列砂州に注目し弱非線形解析を試みる。前述したように増幅率展開は複列砂州には適用不可能である。そこで増幅率展開の制限を除いた非線形解析手法の一つである振幅展開法を用いて、単列交互砂州のみならず複列砂州の平衡砂州高さの理論解を導き、実験結果との比較検討を行う。

2. 増幅率展開法と振幅展開法¹⁷⁾

非線形解析の基本的な概念は Landau によって提唱された。それを簡単に説明すると次のようになる。流れに対して、微小な振幅 A を有する波数 k の正弦波擾乱(基本擾乱) $A \cos(kx - \omega t)$ が与えられたとする。この基本擾乱は、基本擾乱自身との非線形相互作用によって A^2 のオーダーで波数 0 の主流の変形および波数 $2k$ の第一高調波を引き起こす。これは次式からも明らかであろう。

$$A \cos(kx - \omega t) \times A \cos(kx - \omega t)$$

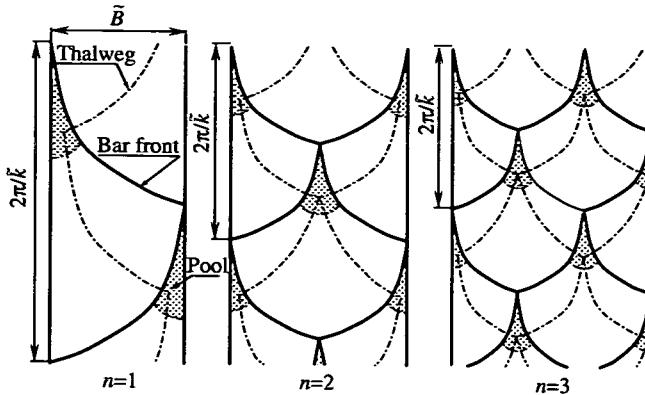


図-1 単列交互砂州 ($n = 1$) と複列砂州 ($n = 2, 3$).

$$= \frac{1}{2} A^2 [\cos 2(kx - \omega t) + 1] \quad (1)$$

そして上式にもう一度基本擾乱を乗じてみるとわかるように、主流の変形および第一高調波と基本擾乱の相互作用によって、 A^3 のオーダーで波数 $3k$ の高調波に加えて波数 k の成分が現れる。すなわち A^3 のオーダーでは波数 k の基本擾乱の振幅や位相が影響を受けることになる。さらに高次の相互作用を考えると、基本擾乱は非線形相互作用によって常に A の奇数次のオーダーの影響を受けることがわかる。このことから擾乱の振幅 A の時間発展は次のような Landau 方程式によって記述されることが予想される。

$$\frac{dA}{dt} = \lambda_0 A + \lambda_1 |A|^2 A + \lambda_2 |A|^4 A + \dots \quad (2)$$

ここで t は時間を表す。 λ_0 が線形安定解析で得られる線形増幅率であり、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ が非線形増幅過程を左右する Landau 定数と呼ばれるパラメータである。上式は A の 5 乗以上を無視すると、 A の時間発展特性は次のようになる。線形増幅率が負 ($\lambda_0 < 0$)かつ第一 Landau 定数の実部が負 ($\lambda_{1r} < 0$) のとき全ての擾乱が減衰する絶対安定、 $\lambda_0 > 0$ かつ $\lambda_{1r} < 0$ のとき安定な平衡振幅 $\sqrt{-\lambda_0/\lambda_{1r}}$ が存在し、初期条件によらず時間とともにこの平衡振幅に漸近する超臨界安定 (supercritical stability)、 $\lambda_0 < 0$ かつ $\lambda_{1r} > 0$ のとき臨界振幅 $\sqrt{-\lambda_0/\lambda_{1r}}$ が存在し、初期振幅が臨界振幅より大きければ発散、小さければ減衰する亜臨界安定 (subcritical stability)、 $\lambda_0 > 0$ かつ $\lambda_{1r} > 0$ のとき初期条件によらず発散する絶対不安定となる。

弱非線形解析手法は究極的には Landau 定数を合理的に決定することを目的とする解析手法である。その代表的な手法が増幅率展開法であり、Colombini *et al.*¹¹⁾, Schielen *et al.*¹³⁾ が単列交互砂州の解析に用いたのもこれであった。増幅率展開法では、増幅率がまだ小さい近臨界領域 (安定性ダイアグラムの中立曲線近傍) に

おいて、増幅率を微小パラメータとして展開する。砂州の解析の場合を例にとると、実際には微小パラメータ ϵ を次のように定義する。

$$\epsilon = |\beta - \beta_c|^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

ここで β は砂州の解析の場合の支配パラメータであるアスペクト比、 β_c は中立曲線上での臨界アスペクト比である。 $\beta = \beta_c$ では増幅率はゼロとなるから β が β_c より ϵ^2 のオーダーだけ離れた領域では増幅率自身も ϵ^2 のオーダーとなり、 ϵ による展開は結局増幅率を微小パラメータとして展開することに相当している。したがって臨界域から大きく離れ、増幅率が微小でなくなる領域では、理論は適用不可能となる。特に増幅率展開法を砂州の問題に適用する場合、高次モードの複列砂州の領域では最も低次モードである単列交互砂州の臨界アスペクト比を一般には大きく越えることになり、単列交互砂州以外の解析結果に関する物理的意味が不明となる。このような増幅率展開法の適用限界を除くための一手法として提案された非線形解析手法として、振幅を微小パラメータとして展開する振幅展開法がある。振幅展開法では全ての変数を振幅のみで展開するため、増幅率がいくら大きくなても振幅が小さい限り適用可能となる。ただし振幅展開法では亜臨界分岐のケースには適用出来ない可能性のあることが知られている。

単列交互砂州の形成時に見られる現象は、増幅率展開法による解析結果から超臨界分岐であることが知られている。その結果から類推して複列砂州の場合も超臨界分岐であることが予想される。本研究では振幅展開法を用いて複列砂州の場合の平衡振幅を解析的に求めるが、その結果単列交互砂州、複列砂州の中立曲線の周辺の広い領域において Landau 定数が負であることが結論され、複列砂州においても超臨界分岐をしていることが後に確かめられる。

本研究では单一モードの砂州のみを考慮し、式(2)の

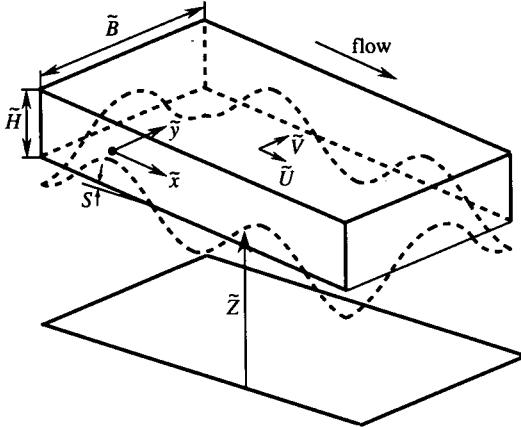


図-2 座標系と変数の定義。

形の Landau 方程式を仮定しているが、複数のモード間における相互作用を考慮すると、Landau 方程式は各モードの振幅に関する連立方程式となる。特にモードおよび流下方向波数、位相速度の間に特定の関係が存在する場合、複数モード間に共鳴が発生し、平衡振幅は振幅の 2 次のオーダーで決まり得る。福岡・山坂⁹⁾、黒木・石井・板倉¹²⁾が行った解析はこの共鳴現象のさらに特殊な例、0 次高調波共鳴に相当している。このような多モード間の相互作用が砂州の発達および変形に及ぼす影響は、ある条件下において無視し得ないほど大きなものとなり、特に複列砂州の不安定化に対しては本質的であることが予想される。これについては本研究では取り扱わないが、今後さらに解明が進められべき重要な問題である。

3. 定式化

(1) 支配方程式

固定壁と移動床を有する幅 \tilde{B} の広幅矩形水路に流れが存在する状況を考える(図-2 参照)。基準状態では流れは等流であり、等流状態での流速および水深をそれぞれ \tilde{U}_n および \tilde{H}_n と表すこととする。またこのとき河床は勾配 S を有する平坦床であるとする。この基準等流状態における河床に対して微小振幅の擾乱を与えることを考える。

準定常の仮定を用い、河床形状の時間変化は流れの時間変化に比較して十分に遅く、流れの時間微分項は十分に小さくなり無視できると仮定する。そのとき幅一定の直線水路内における流れは次の浅水流方程式および連続方程式を用いて表される。

$$\tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}} = -g \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} - g \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{\tau}_{bx} \quad (4)$$

$$\tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} = -g \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{y}} - g \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{y}} - \tilde{\tau}_{by} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{U} \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{V} \tilde{H}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (6)$$

ここで \tilde{x} および \tilde{y} はそれぞれ流下方向および横断方向の座標、 \tilde{U} および \tilde{V} はそれぞれ \tilde{x} および \tilde{y} 方向の流速、 \tilde{H} は水深、 \tilde{Z} は河床高さ、 g は重力加速度($= 9.8 \text{ ms}^{-2}$)、 ρ は水の密度である。 $\tilde{\tau}_{bx}$ および $\tilde{\tau}_{by}$ は底面剪断力ベクトルであり、次式で表される。

$$(\tilde{\tau}_{bx}, \tilde{\tau}_{by}) = \tilde{\tau}_b (\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2)^{-1/2} (\tilde{U}, \tilde{V}) \quad (7a)$$

$$\tilde{\tau}_b = \rho C_f (\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2) \quad (7b)$$

ここで C_f は河床の抵抗係数であり、次式で表されるとする。

$$C_f = \left[6 + 2.5 \ln \left(\frac{\tilde{H}}{\tilde{k}_s} \right) \right]^{-2} \quad (7c)$$

ここで \tilde{k}_s は相当粗度である。

河床高さの時間変化は次のように表される。

$$\frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{1 - \lambda_p} \left(\frac{\partial \tilde{Q}_{bx}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{Q}_{by}}{\partial \tilde{y}} \right) \quad (8)$$

ここで \tilde{t} は時間、 λ_p は空隙率、 \tilde{Q}_{bx} および \tilde{Q}_{by} はそれぞれ掃流砂量の \tilde{x} および \tilde{y} 方向成分である。

掃流砂量公式としては、芦田・道上¹⁸⁾の提案式を、任意勾配を持った河床上の流砂量に拡張した Kovacs & Parker¹⁹⁾の提案式を用いる。Kovacs & Parker の式を微小な勾配について線形化すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{Q}_{bx}}{(R_s g D_s)^{1/2} D_s} &= \frac{\alpha^{1/2}}{\mu_C} \left[\tau^* - \tau_c^* \left(1 + \frac{1}{\mu_C} \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{x}} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left[\tau^{*1/2} - \tau_c^{*1/2} \left(1 + \frac{1}{2\mu_C} \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{x}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. / \left(1 + \frac{1}{\mu_C} \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{x}} \right) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{Q}_{by}}{(R_s g D_s)^{1/2} D_s} &= \frac{\alpha^{1/2}}{\mu_C} (\tau^* - \tau_c^*) \left(\tau^{*1/2} - \tau_c^{*1/2} \right) \\ &\quad \times \left[\frac{\tilde{V}}{\tilde{U}} - \frac{1}{\mu_C} \left(\frac{\tau_c^*}{\tau^*} \right)^{1/2} \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{y}} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

ここで τ^* はシールズ数($= \tilde{\tau}_b / \rho R_s g D_s$)であり、 R_s は砂粒子の水中比重、 D_s は砂の粒径、 τ_c^* は平坦床における限界シールズ数、 α は底面付近での代表速度と摩擦速度の比、 μ_C はクーロン摩擦係数である。ここでは Kovacs & Parker にならって $\tau_c^* = 0.035$ 、 $\mu_C = 0.84$ 、 $\alpha = 11.9$ とする¹⁹⁾。式(9)および(10)は微小な勾配について線形化された式であり、掃流砂量における勾配

の影響に関する非線形性は既に無視されている。この影響はこれまでの非線形解析でも無視されており、現象の本質には大きな影響がないものと思われる。ここでも解析を容易にするために無視する。

(2) 無次元化

次の無次元化を導入する。

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{B}(x, y), \quad (\tilde{U}, \tilde{V}) = \tilde{U}_n(U, V) \quad (11a, b)$$

$$(\tilde{H}, \tilde{Z}, \tilde{k}_s) = \tilde{H}_n(H, Z, k_s), \quad \tilde{t} = \frac{(1 - \lambda_p)\tilde{H}_n}{\tilde{Q}_{bn}} t \quad (11c, d)$$

ここで前述したように \tilde{U}_n および \tilde{H}_n は等流流速および等流水深、 \tilde{B} は川幅である。また \tilde{Q}_{bn} は等流状態における掃流砂量であり次式で表される。

$$\tilde{Q}_{bn} = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\mu_C} (\tau_n^* - \tau_c^*) \left(\tau_n^{*\frac{1}{2}} - \tau_c^{*\frac{1}{2}} \right) (R_s g D_s)^{\frac{1}{2}} D_s \quad (12)$$

上記の無次元化を用いると浅水流方程式および連続の方程式は次のように無次元化される。

$$F^2 \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = - \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} - \beta S \frac{(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}} U}{\left(1 + 2.5 C_{fn}^{\frac{1}{2}} \ln H \right)^2 H} \quad (13)$$

$$F^2 \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = - \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial y} - \beta S \frac{(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}} V}{\left(1 + 2.5 C_{fn}^{\frac{1}{2}} \ln H \right)^2 H} \quad (14)$$

$$\frac{\partial U H}{\partial x} + \frac{\partial V H}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

ここで F は等流状態におけるフルード数、 β はアスペクト（川幅水深）比、 S は河床勾配である。また C_{fn} は基準等流状態における抵抗係数であり、次式で表される。

$$C_{fn} = \left[6 + 2.5 \ln \frac{1}{k_s} \right]^{-2} = \left[6 + 2.5 \ln \frac{\tilde{H}_n}{\tilde{k}_s} \right]^{-2} \quad (16)$$

河床高さの時間変化は次のように表される。

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{by}}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

ここで

$$Q_{bx} = \left[\frac{U^2 + V^2}{\left(1 + 2.5 C_{fn}^{\frac{1}{2}} \ln H \right)^2} - \Theta - \frac{\Theta}{\mu_C \beta} \frac{\partial Z}{\partial x} \right]$$

$$\times \left[\frac{(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}}}{1 + 2.5 C_{fn}^{\frac{1}{2}} \ln H} - \Theta^{\frac{1}{2}} - \frac{\Theta^{\frac{1}{2}}}{2 \mu_C \beta} \frac{\partial Z}{\partial x} \right] \\ / \left[\left(1 + \frac{1}{\mu_C \beta} \frac{\partial Z}{\partial x} \right) (1 - \Theta) (1 - \Theta^{\frac{1}{2}}) \right] \quad (18)$$

$$Q_{by} = \left[\frac{U^2 + V^2}{\left(1 + 2.5 C_{fn}^{\frac{1}{2}} \ln H \right)^2} - \Theta \right] \\ \times \left[\frac{(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}}}{1 + 2.5 C_{fn}^{\frac{1}{2}} \ln H} - \Theta^{\frac{1}{2}} \right] \\ \times \left[\frac{V}{U} - \frac{\left(1 + 2.5 C_{fn}^{\frac{1}{2}} \ln H \right) \Theta^{\frac{1}{2}}}{(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}} \mu_C \beta} \frac{\partial Z}{\partial y} \right] \\ / \left[(1 - \Theta) (1 - \Theta^{\frac{1}{2}}) \right] \quad (19)$$

ここで Θ は正規化された限界シールズ数 ($= \tau_c^*/\tau_n^*$)、 τ_n^* は基準等流状態でのシールズ数である。

4. 弱非線形解析

(1) 摆動展開

等流状態に対して次のような揆動を与える。

$$(U, V, H, Z) = (1, 0, 1, -\beta S x) + (U_1, V_1, H_1, Z_1) \\ + (U_2, V_2, H_2, Z_2) + (U_3, V_3, H_3, Z_3) \quad (20)$$

ここで添字 1 および 2, 3 はそれぞれ $O(A)$ および $O(A^2, AA^*)$, $O(A^3, A^2 A^*)$ の項を表している。

揆動の振幅 A が比較的小さい範囲では振幅 A の時間変化が、振幅 A 自身を用いて次のように展開されると仮定できる。

$$\frac{dA}{dt} = \lambda_0 A + \lambda_1 A^2 A^* = \lambda_0 A + \lambda_1 |A|^2 A \quad (21)$$

ここで上付き添字として現れる * はその項目自体の複素共役を表している。また A の二次の項が出てこない理由については 2. で述べた通りである。

(2) $O(A)$ の解

式 (20) を (13)–(15) に代入すると、 A の一次のオーダーについて次のような式が得られる。

$$F^2 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial Z_1}{\partial x} + 2\beta S U_1 - \beta S \left(1 + 5 C_{fn}^{\frac{1}{2}} \right) H_1 = 0 \quad (22)$$

$$F^2 \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial y} + \beta S V_1 = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

式(20)を式(17)–(19)に代入すると A の一次のオーダーについて次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_1}{\partial t} + \theta_{1,0} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{5}{2} C_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{1,0} \frac{\partial H_1}{\partial x} \\ - \frac{1}{2} \theta_{3,1} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2} - \theta_{2,1} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial y^2} = 0 \quad (25) \end{aligned}$$

式(22)–(25)は次の形の解を持つ。

$$\left. \begin{aligned} (U_1, H_1, Z_1) &= AE_1 C_n (u_{111}, h_{111}, z_{111}) + * \\ V_1 &= AE_1 S_n v_{111} + * \end{aligned} \right\} \quad (26a, b, c, d)$$

ここで単独で現れる * はその前の項の複素共役を表している。また E_n および C_n , S_n は次のように表される。

$$E_n = \exp ni(kx - \omega t), \quad C_n = \cos n\pi y \quad (27a)$$

$$S_n = \sin n\pi y \quad (27b, c)$$

式(26)および(27)を式(22)–(25)に代入すると次式が得られる。

$$(2\beta S + ikF^2) u_{111} - [\beta S (1 + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}}) - ik] h_{111} \\ + ikz_{111} = 0 \quad (28)$$

$$(\beta S + ikF^2) v_{111} - n\pi h_{111} - n\pi z_{111} = 0 \quad (29)$$

$$iku_{111} + n\pi v_{111} + ikh_{111} = 0 \quad (30)$$

$$ik\theta_{1,0}u_{111} + n\pi v_{111} - \frac{5}{2}ikC_{fn}^{\frac{1}{2}}\theta_{1,0} \\ + [\lambda_0 - i\omega + \theta_{2,1}(n\pi)^2 + \frac{1}{2}\theta_{3,1}] z_{111} = 0 \quad (31)$$

マトリックスで書くと次のようになる。

$$L_{111} \begin{bmatrix} u_{111} \\ v_{111} \\ h_{111} \\ z_{111} \end{bmatrix} = 0 \quad (32)$$

ここで

$$L_{abc} = \begin{bmatrix} 2\beta S + ibkF^2 & 0 \\ 0 & \beta S + ibkF^2 \\ ibk & cn\pi \\ ibk\theta_{1,0} & cn\pi \\ & \\ ibk - \beta S (1 + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}}) & ibk \\ -cn\pi & -cn\pi \\ ibk & 0 \\ -\frac{5}{2}ibkC_{fn}^{\frac{1}{2}}\theta_{1,0} & a\lambda_0 - ib\omega \\ & + \theta_{2,1}(cn\pi)^2 \\ & + \frac{1}{2}\theta_{3,1}(bk)^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

上式中 a および b , c は 1 から 3 までの整数を意味し、後述の高次解に出てくるマトリックスも上式で表される。また $\theta_{i,j}$ については付録 I に示した。式(32)が自明でない解(0以外の解)を持ったためには次の可解条件を満たす必要がある。

$$\det L_{111} = |L_{111}| = 0 \quad (34)$$

式(34)より λ_0 は次式のように表されることがわかる。

$$\lambda_0 = \lambda_0(k, n, \beta; S, \Theta, F) \quad (35)$$

(3) $O(A^2, AA^*)$ の解

$O(A^2, AA^*)$ では次の式が得られる。

$$\begin{aligned} F^2 \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{\partial Z_2}{\partial x} + 2\beta S U_2 \\ - \beta S (1 + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}}) H_2 \\ = -F^2 U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - F^2 V_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} \\ - \beta S \left[U_1^2 + \frac{1}{2} V_1^2 - 2 (1 + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}}) U_1 H_1 \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{15}{2} C_{fn}^{\frac{1}{2}} + \frac{75}{4} C_{fn} \right) H_1^2 \right] \\ = A^2 E_2 (C_{2n} p_{222} + p_{220}) + * \\ + AA^* (C_{2n} p_{202} + p_{200}) + * \quad (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial Z_2}{\partial y} + \beta S V_2 \\ = -F^2 U_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} - F^2 V_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} \\ - \beta S \left[U_1 V_1 - (1 + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}}) V_1 H_1 \right] \\ = A^2 E_2 (S_{2n} q_{222} + q_{220}) + * \\ + AA^* (S_{2n} q_{202} + q_{200}) + * \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} \\ = -\frac{\partial U_1 H_1}{\partial x} - \frac{\partial V_1 H_1}{\partial y} \\ = A^2 E_2 (C_{2n} r_{222} + r_{220}) + * \\ + AA^* (C_{2n} r_{202} + r_{200}) + * \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_2}{\partial t} + \theta_{1,0} \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{5}{2} C_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{1,0} \frac{\partial H_2}{\partial x} \\ - \frac{\theta_{3,1}}{2} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x^2} - \theta_{2,1} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial y^2} \\ = -2\theta_{4,0} U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - \theta_{1,0} V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} \\ + \theta_{4,1} \frac{\partial}{\partial x} \left(U_1 \frac{\partial Z_1}{\partial x} \right) - \theta_{5,2} \frac{\partial Z_1}{\partial x} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2} \\ - \frac{5}{2} C_{fn}^{\frac{1}{2}} (\theta_{1,0} + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{7,0}) H_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} \\ - \frac{5}{2} C_{fn}^{\frac{1}{2}} \left[\theta_{4,1} \frac{\partial}{\partial x} \left(H_1 \frac{\partial Z_1}{\partial x} \right) - \theta_{6,0} \frac{\partial U_1 H_1}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\theta_{3,0} \frac{\partial U_1 V_1}{\partial y} + \theta_{2,1} \theta_{3,0} \frac{\partial}{\partial y} \left(U_1 \frac{\partial Z_1}{\partial y} \right) \\
& + \frac{5}{2} C_{f,n}^{\frac{1}{2}} \left[\theta_{1,0} \frac{\partial V_1 H_1}{\partial y} - \theta_{2,1} \theta_{3,0} \frac{\partial}{\partial y} \left(H_1 \frac{\partial Z_1}{\partial y} \right) \right] \\
= & A^2 E_2 (C_{2n} s_{222} + s_{220}) + * \\
& + AA^* (C_{2n} s_{202} + s_{200}) + * \quad (39)
\end{aligned}$$

式(26)を式(36)–(39)の右辺に代入すると、右辺の非齊次項は E_2 および C_{2n} , S_{2n} を持つ項、定数項、そしてそれらを組み合わせた項で構成されていることがわかる。ここで p_{2ij} , q_{2ij} , r_{2ij} , s_{2ij} ($i, j = 0, 2$) は非齊次項であり、付録IIに示したように A の1次の解 u_{111} および v_{111} , h_{111} , z_{111} 、その他のパラメータの組み合わせで表される定数である。上記のことから次の形の解が仮定できる。

$$\begin{aligned}
U_2 = & A^2 E_2 (C_{2n} u_{222} + u_{220}) + * \\
& + AA^* (C_{2n} u_{202} + u_{200}) + * \quad (40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2 = & A^2 E_2 (S_{2n} v_{222} + v_{220}) + * \\
& + AA^* (S_{2n} v_{202} + v_{200}) + * \quad (41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_2 = & A^2 E_2 (C_{2n} h_{222} + h_{220}) + * \\
& + AA^* (C_{2n} h_{202} + h_{200}) + * \quad (42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_2 = & A^2 E_2 (C_{2n} z_{222} + z_{220}) + * \\
& + AA^* (C_{2n} z_{202} + z_{200}) + * \quad (43)
\end{aligned}$$

式(40)–(43)を(36)–(39)に代入すると、次式が得られる。

$$L_{222} \begin{bmatrix} u_{222} \\ v_{222} \\ h_{222} \\ z_{222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{222} \\ q_{222} \\ r_{222} \\ s_{222} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$L_{220} \begin{bmatrix} u_{220} \\ v_{220} \\ h_{220} \\ z_{220} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{220} \\ q_{220} \\ r_{220} \\ s_{220} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$L_{202} \begin{bmatrix} u_{202} \\ v_{202} \\ h_{202} \\ z_{202} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{202} \\ q_{202} \\ r_{202} \\ s_{202} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$L_{200} \begin{bmatrix} u_{200} \\ v_{200} \\ h_{200} \\ z_{200} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{200} \\ q_{200} \\ r_{200} \\ s_{200} \end{bmatrix} \quad (47)$$

ここで前述したように L_{222} および L_{220} , L_{202} , L_{200} はそれぞれ式(33)で $(a, b, c) = (2, 2, 2)$ および $(2, 2, 0)$, $(2, 0, 2)$, $(2, 0, 0)$ として得られる。

$O(A^2, AA^*)$ でユニークな解を求めるためには次の境界条件を満足する必要がある。

1. V_2 が壁面でゼロとなる条件から次式が要請される。

$$v_{220} = v_{222} = 0 \quad (48)$$

2. 壁面を横切る土砂輸送量がゼロである条件は現在仮定されている解によって自動的に満足されている。

3. 摹動が成長した後、流量が変化しない条件は次のようになる。

$$\int_0^1 U H \, dy = 1 \quad (49)$$

4. 平均的な河床勾配が変化しない条件は次式で表される。

$$\int_0^{2\pi/k} \int_0^1 Z \, dy \, dx = \text{const.} \quad (50)$$

以上の条件の下で式(44)–(47)を解いて2次のオーダーの解 u_{2ij} , v_{2ij} , h_{2ij} , z_{2ij} ($i, j = 0, 2$) を求める。

(4) $O(A^3, A^2 A^*)$ の解

$O(A^3, A^2 A^*)$ では次式が得られる。

$$\begin{aligned}
& F^2 \frac{\partial U_3}{\partial x} + \frac{\partial H_3}{\partial x} + \frac{\partial Z_3}{\partial x} + 2\beta S U_3 \\
& - \beta S \left(1 + 5C_{f,n}^{\frac{1}{2}} \right) H_3 \\
= & A^3 E_3 (S_{3n} p_{333} + S_n p_{331}) + * \\
& + A^2 A^* E_1 (S_{3n} p_{313} + S_n p_{311}) + * \quad (51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F^2 \frac{\partial V_3}{\partial x} + \frac{\partial H_3}{\partial y} + \frac{\partial Z_3}{\partial y} + \beta S V_3 \\
= & A^3 E_3 (S_{3n} q_{333} + S_n q_{331}) + * \\
& + A^2 A^* E_1 (S_{3n} q_{313} + S_n q_{311}) + * \quad (52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U_3}{\partial x} + \frac{\partial H_3}{\partial x} + \frac{\partial V_3}{\partial y} \\
= & A^3 E_3 (C_{3n} r_{333} + C_n r_{331}) + * \\
& + A^2 A^* E_1 (C_{3n} r_{313} + C_n r_{311}) + * \quad (53) \\
& \frac{\partial Z_3}{\partial t} + \theta_{1,0} \frac{\partial U_3}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} - \frac{5}{2} C_{f,n}^{\frac{1}{2}} \theta_{1,0} \frac{\partial H_3}{\partial x} \\
& - \frac{1}{2} \theta_{3,1} \frac{\partial^2 Z_3}{\partial x^2} - \theta_{2,1} \frac{\partial^2 Z_3}{\partial y^2} \\
= & A^3 E_3 (C_{3n} s_{333} + C_n s_{331}) + * \\
& + A^2 A^* E_1 [C_{3n} s_{313} + C_n (s_{311} + \lambda_1)] + * \quad (54)
\end{aligned}$$

上式の非齊次解は次のような形をしていると予想される。

$$\begin{aligned}
U_3 = & A^3 E_3 (C_{3n} u_{333} + C_n u_{331}) + * \\
& + A^2 A^* E_1 (C_{3n} u_{313} + C_n u_{311}) + * \quad (55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_3 = & A^3 E_3 (S_{3n} v_{333} + S_n v_{331}) + * \\
& + A^2 A^* E_1 (S_{3n} v_{313} + S_n v_{311}) + * \quad (56)
\end{aligned}$$

$$H_3 = A^3 E_3 (C_{3n} h_{333} + C_n h_{331}) + *$$

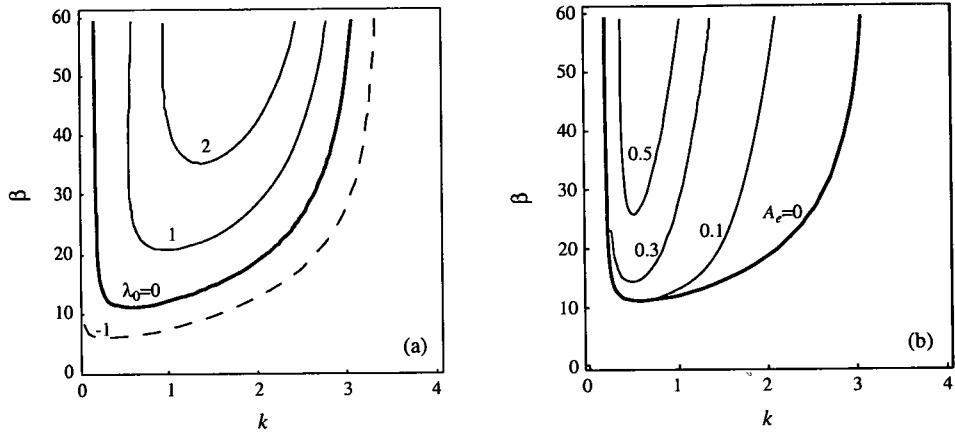


図-3 単列交互砂州 ($n = 1$) の (a) 線形増幅率 λ_0 および (b) 平衡振幅 A_e . $S = 0.005$, $F = 0.7$, $\Theta = 0.5$.

$$+ A^2 A^* E_1 (C_{3n} h_{313} + C_n h_{311}) + * \quad (57)$$

$$\begin{aligned} Z_3 &= A^3 E_3 (C_{3n} z_{333} + C_n z_{311}) + * \\ &+ A^2 A^* E_1 (C_{3n} z_{313} + C_n z_{311}) + * \quad (58) \end{aligned}$$

上式を式 (51)–(54) に代入すると次式が得られる.

$$L_{333} \begin{bmatrix} u_{333} \\ v_{333} \\ h_{333} \\ z_{333} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{333} \\ q_{333} \\ r_{333} \\ s_{333} \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$L_{331} \begin{bmatrix} u_{331} \\ v_{331} \\ h_{331} \\ z_{331} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{331} \\ q_{331} \\ r_{331} \\ s_{331} \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$L_{313} \begin{bmatrix} u_{313} \\ v_{313} \\ h_{313} \\ z_{313} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{313} \\ q_{313} \\ r_{313} \\ s_{313} \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$L_{311} \begin{bmatrix} u_{311} \\ v_{311} \\ h_{311} \\ z_{311} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{311} \\ q_{311} \\ r_{311} \\ s_{311} - z_{111} \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

ここで p_{3ij} , q_{3ij} , r_{3ij} , s_{3ij} , ($i, j = 1, 3$) は非齊次項を表しており、付録 III に示してある。また L_{333} より L_{331} , L_{313} , L_{311} は式 (33) でそれぞれ $(a, b, c) = (3, 3, 3)$ および $(3, 3, 1)$, $(3, 1, 3)$, $(3, 1, 1)$ としたものである。式 (34) より $\det L_{111} = 0$ であり、式 (33) からわかるように一般に $\det L_{311} \neq 0$ である。したがって

式 (62) は容易に解けて次のようになる。

$$\begin{bmatrix} u_{311} \\ v_{311} \\ h_{311} \\ z_{311} \end{bmatrix} = L_{311}^{-1} \begin{bmatrix} p_{311} \\ q_{311} \\ r_{311} \\ s_{311} - z_{111} \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

上式からだけでは Landau 定数 λ_1 をユニークに求めることが出来ない。これは長らく振幅展開法の問題点の一つであった。Herbert²⁰⁾はこの問題点を振幅の意味をより明確にすることによって解決した。すなわち、あらためて A を基本擾乱 ($E_1 C_n$ の変動) の振幅と定義する。そのとき次式が成立する。

$$z_{111} = 1, \quad z_{311} = 0 \quad (64a, b)$$

したがって次式を得る。

$$\begin{bmatrix} u_{311} \\ v_{311} \\ h_{311} \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = L_\lambda^{-1} \begin{bmatrix} p_{311} \\ q_{311} \\ r_{311} \\ s_{311} \end{bmatrix} \quad (65)$$

ここで

$$L_\lambda = \begin{bmatrix} 2\beta S + ikF^2 & 0 \\ 0 & \beta S + ikF^2 \\ ik & n\pi \\ ik\theta_{1,0} & n\pi \\ ik - \beta S \left(1 + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}}\right) & 0 \\ -n\pi & 0 \\ ik & 0 \\ -\frac{5}{2}ikC_{fn}^{\frac{1}{2}}\theta_{1,0} & 1 \end{bmatrix} \quad (66)$$

上式を解けば λ_1 が得られる。

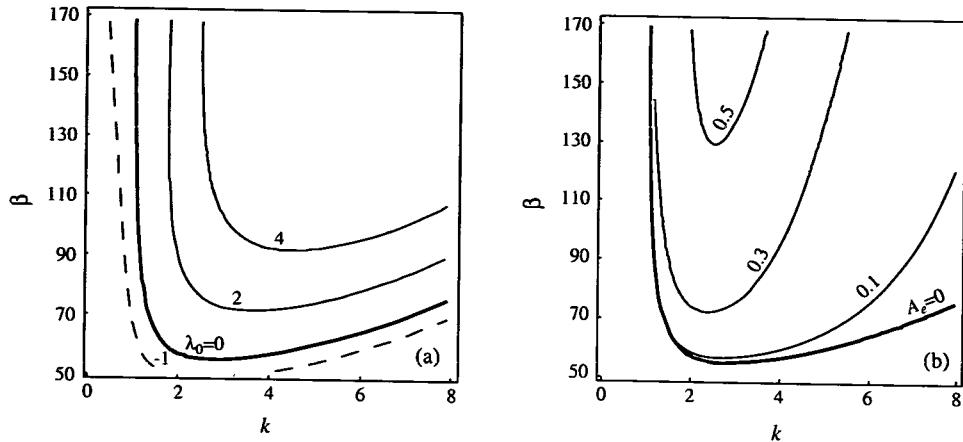


図-4 複列砂州 ($n = 5$) の (a) 線形増幅率 λ_0 および (b) 平衡振幅 A_e . $S = 0.005$, $F = 0.7$, $\Theta = 0.5$.

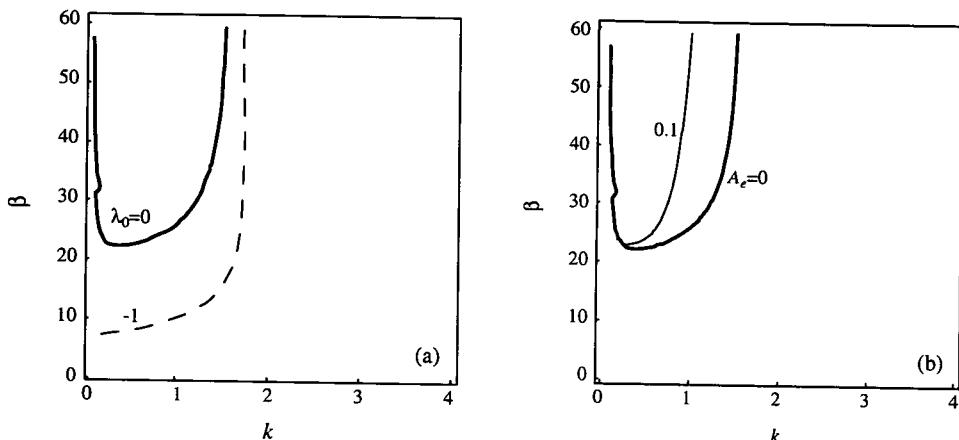


図-5 単列交互砂州 ($n = 1$) の (a) 線形増幅率 λ_0 および (b) 平衡振幅 A_e . $S = 0.005$, $F = 1.5$, $\Theta = 0.5$.

5. 結果と考察

(1) 特性波数と平衡波高

図-3(a) および (b) は、それぞれ交互砂州 ($n = 1$) の場合の線形増幅率 λ_0 および平衡振幅 A_e ($= \sqrt{-\lambda_0/\lambda_{1r}}$) である。ここでは $F = 0.7$ および $S = 0.005$, $\Theta = 0.5$ としてある。二つの図を比較すると振幅展開法を用いた本解析ではアスペクト比が大きくなるにつれて、増幅率の最大となる波数と振幅の最大となる波数が大きくずれしていくことがわかる。アスペクト比の大きな範囲では増幅率最大となる波数に比べると振幅が最大となる波数の方が小さくなる。

図-4(a) および (b) はそれぞれ複列砂州 ($n = 5$) の場合における線形増幅率および平衡振幅である。図-3 の単列交互砂州の場合と比較すると、アスペクト比の増

加に伴う増幅率の増加率は一般に単列交互砂州の方が緩やかであるが、平衡振幅の増加率は複列砂州の方が緩やかであることがわかる。例えば平衡振幅が 0 から 0.3 に増加するためには単列交互砂州では β は臨界値から 4 増加すればよいが、複列砂州では 18 増加しなければならない。このことだけから直ちに結論できないが、一般的に複列砂州の方が波高が小さいといわれる原因是この性質に関連しているものと予想される。

図-5(a) および (b) にはフルード数 F を 1.5 としたときの単列交互砂州の増幅率と平衡振幅をそれぞれ示してある。図-3 との比較から、フルード数が増加すると臨界アスペクト比が増加し、とり得る波数も小さい範囲に限定されることがわかる。これは波長が増加することを意味している。また増幅率も波高も一般に小さくなることがわかる。

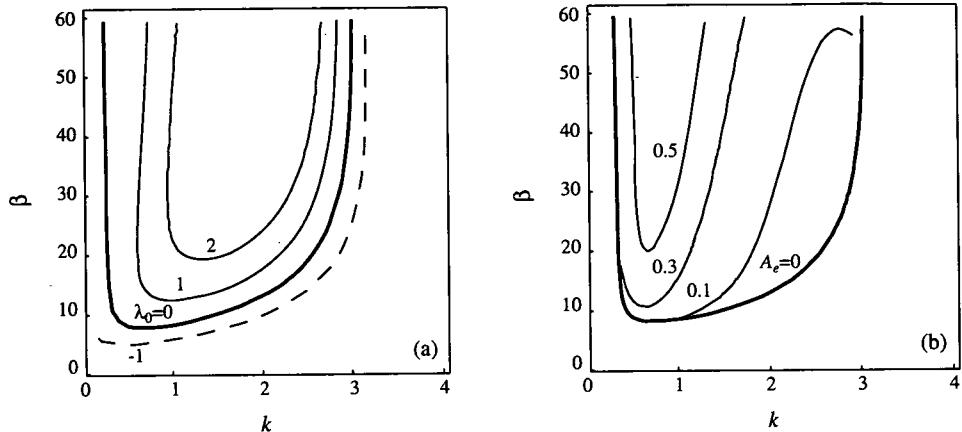


図-6 単列交互砂州 ($n = 1$) の (a) 線形増幅率 λ_0 および (b) 平衡振幅 A_e . $S = 0.01$, $F = 0.7$, $\Theta = 0.5$.

図-6(a) および (b) には勾配 $S = 0.01$ としたときの単列交互砂州の増幅率と平衡振幅をそれぞれ示した。図-3 と比較すると臨界アスペクト比が若干減少し、増幅率は一般的に増加するものの卓越波数（増幅率が最大となる波数）や平衡振幅に大きな影響はないことがわかる。

(2) 実験値との比較

図-7(a) は単列交互砂州における無次元波長について理論と実験を比較したものである。ここでは理論で得られた卓越波長（増幅率最大となる波長）が河床上に実際に現れる波長であると考え、本理論から得られた卓越波長 \tilde{L}_{th} と Ikeda およびその他の実験で得られた実測波長 \tilde{L}_{exp} ²¹⁾を比較している。また図中の実線および点線はそれぞれ +40 % および -40 % の誤差を有する領域を表している。データはほぼ ±40 % の範囲に収まっており、理論値と実験値の一一致は合理的な範囲にあると言つてよいだろう。

本理論では任意の勾配を有する河床上の掃流砂量について理論的に導いた Kovacs & Parker¹⁹⁾の掃流砂量式を用いて、これまで考慮されてこなかった砂州の形成と発達に対する流下方向勾配の影響を取り入れている。この流下方向勾配の影響について初めて言及したのは Schielen et al.¹³⁾である。しかし彼らは実際にどの程度の影響があるのかについて実験値との比較は行っていない。そこで砂州量における流下方向勾配の影響を調べるために流下方向勾配の影響を無視した結果を図-7(b) に示した。(b) では理論値は全体的に過小評価する傾向にあり、場合によっては二、三割小さく見積もることがわかる。同様に流下方向勾配の影響を考慮していない Colombini et al.¹¹⁾の結果もこの図と良く似たものとなっている。流下方向勾配の影響は底面をよ

り平坦にする方向に作用し砂州を減衰させる効果をもつが、この効果は波長が短く勾配が大きい砂州ほど大きくなる。流下方向の勾配を考慮しない理論では波長の短い砂州の形成を許してしまうため、一般的に波長を短く見積もってしまうのである。

図-8 には無次元砂州波高について実測値と理論値の比較を示した。振幅については実験によって定義が若干異なっている場合が存在する (\tilde{H}_B および \tilde{H}_{BM})²¹⁾。図ではそれぞれの実験値の定義に対応した理論値を求め比較を行っている。データはほぼ ±40 % の範囲に入っていることがわかる。また振幅展開法は振幅が比較的小さな領域でなければ適用できることになっているが、図によれば水深の数倍に及ぶ範囲まで比較的良好な一致を示していることがわかる。

以上のように、波長および振幅について理論は実験値の平均的な値を再現し得るもの、実験値のばらつきは非常に大きいことがわかる。その理由として次のようなことが考えられる。藤田ら²²⁾、長谷川・山岡²³⁾によれば、平衡状態の交互砂州では $n = 2$, $k = 0$ のモードが発達しているという。この 0 次モード（流下方向波数 k が 0 であるモード）と単列砂州のモード ($n = 1$ で流下方向波数が k のモード) との間には前述した 0 次高調波共鳴が生じる可能性があり、振幅は両モードの相互作用によって決定される。本理論ではこのような場合は想定していない。また竹林・江頭・黒木²⁴⁾、竹林・江頭²⁵⁾によれば、砂州の発達には横断方向の二次流や混合砂の分級も大きな影響を与えるという。しかしこれらの影響についても本理論では無視されている。実験値に大きなばらつきを与えていているのは以上のような要因であると考えられる。

複列砂州は一般に安定的に長期間存在できないと言

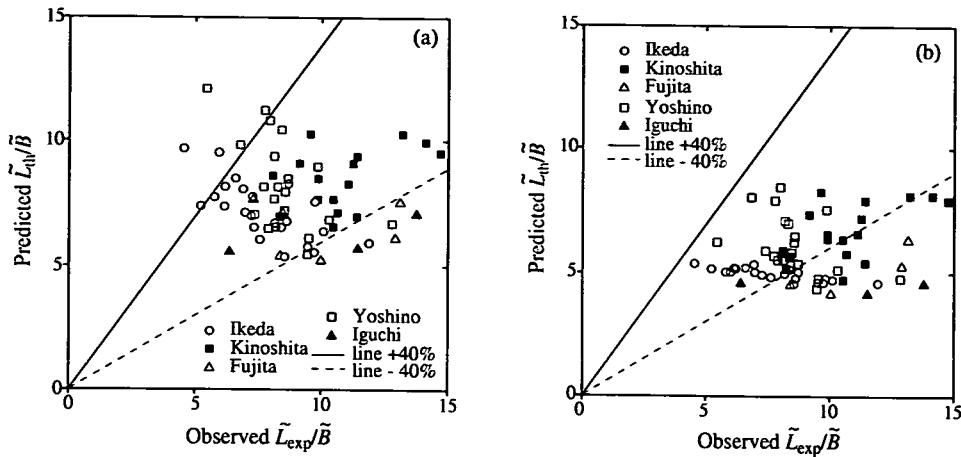


図-7 単列交互砂州における無次元波長の理論値と実験値の比較. (a) 流砂量における流下方向勾配の影響を考慮, (b) 流砂量における流下方向勾配の影響を無視.

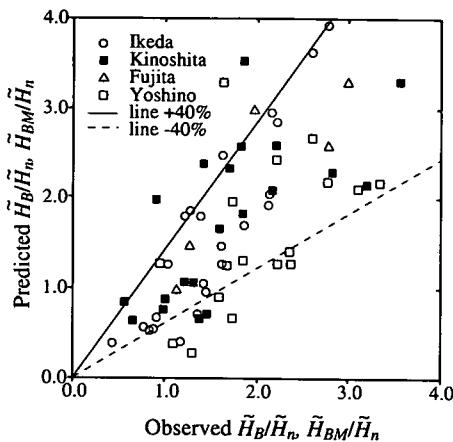


図-8 単列交互砂州における無次元平衡波高の理論値と実験値の比較.

われており、実験において観察された例は多いが、定量的に測定された例はあまり多くない。数少ない研究の一つとして Fujita¹⁴⁾の研究がある。Fujita は長さ 15 m、幅 180 cm の水路を用いて複列砂州および網状流路の形成実験を行い、砂州の形成および時間変化の詳細な測定を行っている。その結果によるとほとんどのケースで実験開始後間もなく規則的な複列砂州の形成が観察され、時間の経過とともにモードの変化（主として減少）や網状化が観察されている。彼は実験の中で主要なケースについて波長や波高の測定を行っているが、それに加えて河床形状のスケッチや河道断面形状などから抽出した波長および波高のデータを表-1に示した。またこれらのデータと本解析で得られた理論値との比較を行ったのが図-9 および図-10 である。図-9 および

表-1 藤田の実験における複列砂州の波長と波高.

Run No.	時間	モード n	砂州波長 L (m)	砂州波高 H_B (cm)
B-2	3 hr 39'	2	12.75	8.5
B-4	32'	5	3	1.1
B-4	2 hr 33'	4	5	4
B-4	4 hr 15'	2	12	9
C-1	2 hr 10'	2	-	3
C-4	30'	5	2	2.5
C-5	5'	8	1.6	-
C-7	10'	6	3	-
C-7	17'	4	3.2	-
C-8	40'	3	2.75	-
C-10	4'	8	1.5	1.7

図-10 は、それぞれ複列砂州における無次元波長および無次元砂州波高の比較結果である。いずれもデータはほぼ $\pm 40\%$ の範囲にあることがわかる。データの数は少ないものの理論値と実験値の一一致は良好であると言つてよいだろう。前述したように単一モードの複列砂州は安定的に存在できず、時間の経過とともにモードが変化したり、十分な時間が経過した後には網状を呈したりする場合が多い。そこで実験経過の記述からあるモードの複列砂州の形成がある程度落ち着いて平衡に達したと考えられるようなデータを選び出して比較を行っている。したがって同一の実験ケースでも時間の経過に伴って複数の波長や波高が観察されている

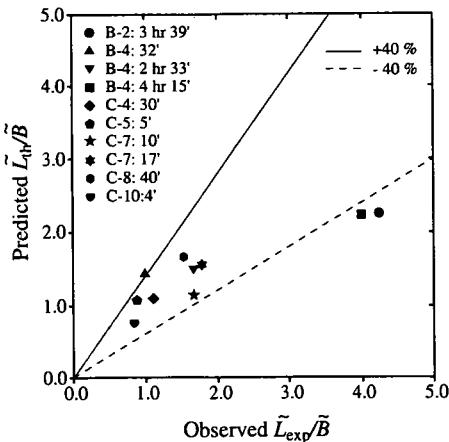


図-9 複列砂州における無次元波長の理論値と実験値の比較.

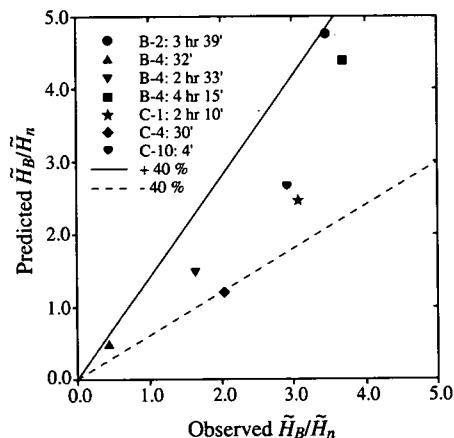


図-10 複列砂州における無次元平衡波高の理論値と実験値の比較.

ことに注意する必要がある.

(3) 複列砂州のモードの減少

藤田・永田・村本¹⁵⁾は実験の中で砂州のモードの減少が起きる原因について次のように説明付けている。砂州形成初期には線形安定解析の結果から導かれるように高モードの砂州が大きな増幅率を持ち河床上に卓越して現れるが、時間の経過とともに大きな波高を持つと推測される低モードの砂州が卓越するようになる。この藤田の説について本理論を用いて検討してみる。

図-11(a)および(b)にFujitaの実験におけるRun No. B-2とB-4に対応する擾乱の増幅率 λ_0 および平衡振幅 A_e をそれぞれ示した。表-1に示したようにRun No. B-4では最初に $n=5$ の複列砂州が形成されてお

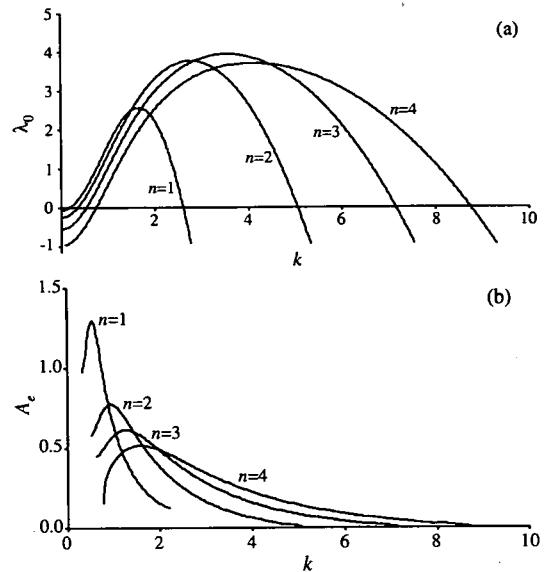


図-11 複列砂州の (a) 線形増幅率 λ_0 および (b) 平衡振幅 A_e の波数 k およびモード n による変化。藤田の実験の B-2 および B-4 に対応。

り、その後時間とともに $n=4, n=2$ とモードが減少する様子が観察されている。図-11(a)をみると擾乱の線形増幅率は $n=3$ のモードで最大となっていることがわかる。ところが(b)の図によれば平衡振幅は $n=1$ のモードで最大となる。すなわち擾乱の発達初期には比較的大きな $n=3$ のモードの砂州が早く発達するが、時間が経過するにつれて振幅が大きい、より小さなモードが支配的となり、平衡状態に近づくと $n=1$ のモードが卓越すると予想される。実際の実験結果とはモードがあまり一致していないが、実験のいくつかのケースでモードの減少が見られたのは、このように成長初期の増幅率に対応する卓越モードと平衡状態における振幅に対応する卓越モードの違いが原因だったと考えられる。本理論の結果は藤田の説に合致したものとなっている。

(4) 単列交互砂州と複列砂州の幾何学的特徴

図-12に本理論で得られた砂州の幾何形状について典型的な例を示した。(a)が単列交互砂州であり、(b)が $n=5$ の複列砂州である。コンタを描くに当たっては A の三次のオーダーまでの解を用いてある。(a)の単列交互砂州では砂州前縁部や深掘部の形状など実験室で見られるような理想的な状況下で作られる単列交互砂州の幾何学的特徴を非常に良く表しているのがわかる。また複列砂州は上流方向に開口した三日月型の形状を有することが、実験水路や実際の河川で観察されているが、その幾何学的特徴が良く表されている。

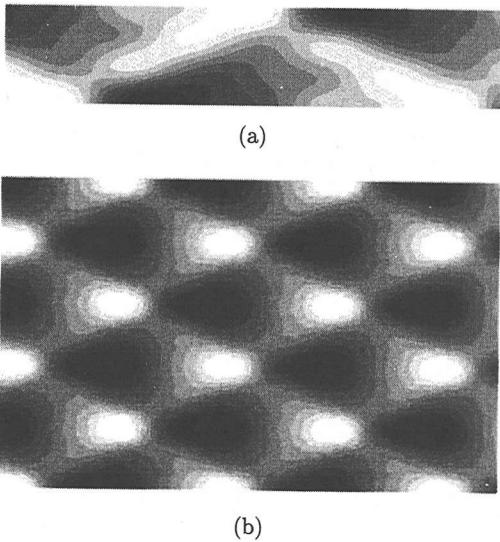


図-12 三次までの非線形解から得られる典型的な砂州のコンタ. (a) 単列交互砂州 ($n = 1$), (b) 複列砂州 ($n = 5$). 図中, 明暗はそれぞれ河床の高低に対応している. また流れは左から右である.

6. 結論

単一モードの単列交互砂州および複列砂州を対象にして, 適用範囲に強い制限のあった増幅率展開法ではなく, 振幅展開法を用いて非線形解析を行い, 単列交互砂州および複列砂州の波長および平衡振幅について理論的に導いた. それによって次のことが明らかとなった.

- 単列交互砂州および複列砂州の平衡振幅は一般的にアスペクト比が大きくなると増加するが, その増加率は複列砂州の方が緩やかである.
- 流砂量の算定に流下方向の勾配の影響を取り入れることによって単列交互砂州の卓越波長に関する理論値と実験値の一一致は改善された. また流下方向勾配の影響は卓越波長を大きくする効果を有することがわかった.
- 単列交互砂州および複列砂州の平衡振幅(波高)について理論値と実験値を比較したところ, いずれも良好な一致を示した.
- 形成初期に形成された高モードの複列砂州が, 時間の経過とともに低モードの砂州へ遷移する現象は, 成長初期の増幅率に対応する卓越モードと, 平衡状態の振幅に対応する卓越モードの違い(後者が前者より小さい)が原因と考えられていたが, 本理論からそれを支持する結果が得られた.

謝辞 : 本研究は第一著者がアジア工科大学に在任中に実行した研究であり, 国際協力事業団(JICA)の全面的な援助を得て行われた. また第二著者のアジア工科大学における修士論文の一部であり, DANIDA から奨学金および研究費の援助を受けている. ここに記して謝意を表する.

付録 I

$$\theta_{1,0} = \frac{3 + \Theta^{\frac{1}{2}}}{1 - \Theta} \quad (I.1)$$

$$\theta_{2,1} = \frac{\Theta^{\frac{1}{2}}}{\mu_C \beta} \quad (I.2)$$

$$\theta_{3,0} = \frac{2 + \Theta^{\frac{1}{2}} + \Theta}{1 - \Theta} \quad (I.3)$$

$$\theta_{3,1} = \frac{2 + \Theta^{\frac{1}{2}} + \Theta}{\mu_C \beta (1 - \Theta)} \quad (I.4)$$

$$\theta_{4,0} = \frac{3 - \Theta^{\frac{1}{2}}}{1 - \Theta^{\frac{1}{2}} - \Theta + \Theta^{3/2}} \quad (I.5)$$

$$\theta_{4,1} = \frac{3 - \Theta^{\frac{1}{2}}}{\mu_C \beta (1 - \Theta^{\frac{1}{2}}) (1 - \Theta)} \quad (I.6)$$

$$\theta_{4,2} = \frac{3 - \Theta^{\frac{1}{2}}}{\mu_C^2 \beta^2 (1 - \Theta^{\frac{1}{2}}) (1 - \Theta)} \quad (I.7)$$

$$\theta_{5,0} = \frac{2 - \Theta^{\frac{1}{2}}}{(1 - \Theta^{\frac{1}{2}}) (1 - \Theta)} \quad (I.8)$$

$$\theta_{5,2} = \frac{2 - \Theta^{\frac{1}{2}}}{\mu_C^2 \beta^2 (1 - \Theta^{\frac{1}{2}}) (1 - \Theta)} \quad (I.9)$$

$$\theta_{5,3} = \frac{2 - \Theta^{\frac{1}{2}}}{\mu_C^3 \beta^3 (1 - \Theta^{\frac{1}{2}}) (1 - \Theta)} \quad (I.10)$$

$$\theta_{6,0} = \frac{9 - 4\Theta^{\frac{1}{2}} - \Theta}{(1 - \Theta^{\frac{1}{2}}) (1 - \Theta)} \quad (I.11)$$

$$\theta_{7,0} = \frac{6 - 3\Theta^{\frac{1}{2}} - \Theta}{(1 - \Theta^{\frac{1}{2}}) (1 - \Theta)} \quad (I.12)$$

$$\theta_{8,0} = \frac{1 - \Theta^{\frac{1}{2}} + \Theta}{(1 - \Theta^{\frac{1}{2}})^2} \quad (I.13)$$

$$\theta_{9,0} = \frac{4 - \Theta^{\frac{1}{2}} + \Theta^{3/2}}{(1 - \Theta^{\frac{1}{2}}) (1 - \Theta)} \quad (I.14)$$

$$\theta_{10,0} = \frac{10 - 4\Theta^{\frac{1}{2}} - \Theta}{(1 - \Theta^{\frac{1}{2}}) (1 - \Theta)} \quad (I.15)$$

$$\theta_{11,0} = \frac{18 - 6\Theta^{\frac{1}{2}} - \Theta}{(1 - \Theta^{\frac{1}{2}}) (1 - \Theta)} \quad (I.16)$$

$$\theta_{12,0} = \frac{9 - 2\Theta^{\frac{1}{2}}}{(1 - \Theta^{\frac{1}{2}}) (1 - \Theta)} \quad (I.17)$$

$$\theta_{12,1} = \frac{9 - 2\Theta^{\frac{1}{2}}}{\mu_C \beta (1 - \Theta^{\frac{1}{2}}) (1 - \Theta)} \quad (I.18)$$

$$\theta_{13,0} = \frac{3 + \Theta}{(1 - \Theta^{\frac{1}{2}}) (1 - \Theta)} \quad (I.19)$$

$$\theta_{14,1} = \frac{4 - \Theta^{\frac{1}{2}}}{(1 - \Theta^{\frac{1}{2}})(1 - \Theta)} \quad (\text{I.20})$$

$$\theta_{15,1} = \frac{6 - \Theta^{\frac{1}{2}}}{\mu_C \beta (1 - \Theta^{\frac{1}{2}})(1 - \Theta)} \quad (\text{I.21})$$

$$\theta_{16,0} = \frac{1}{(1 - \Theta^{\frac{1}{2}})(1 - \Theta)} \quad (\text{I.22})$$

付録 II

$$p_{222} = -\frac{1}{2}n\pi F^2 u_{111} v_{111} + \frac{1}{4}\beta S v_{111}^2 - \frac{1}{2}(\beta S + ikF^2) u_{111}^2 + \beta S (1 + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}}) u_{111} h_{111} - \frac{1}{8}\beta S (4 + 30C_{fn}^{\frac{1}{2}} + 75C_{fn}) h_{111}^2 \quad (\text{II.1})$$

$$q_{222} = -\frac{1}{2}n\pi F^2 v_{111}^2 - \frac{1}{2}(ikF^2 + \beta S) u_{111} v_{111} + \frac{1}{2}\beta S (1 + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}}) v_{111} h_{111} \quad (\text{II.2})$$

$$r_{222} = -iku_{111} - n\pi v_{111} h_{111} \quad (\text{II.3})$$

$$s_{222} = \frac{5}{2}n\pi C_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{1,0} v_{111} h_{111} + \frac{1}{2}ik\theta_{1,0} v_{111}^2 - n\pi\theta_{3,0} u_{111} v_{111} - ik\theta_{4,0} u_{111}^2 - (n^2\pi^2\theta_{2,1}\theta_{3,0} + k^2\theta_{4,1}) u_{111} z_{111} + \frac{5}{2}C_{fn}^{\frac{1}{2}} (n^2\pi^2\theta_{2,1}\theta_{3,0} + k^2\theta_{4,1}) h_{111} z_{111} + \frac{1}{2}ik^3\theta_{5,2} z_{111}^2 + \frac{5}{2}ikC_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{6,0} u_{111} h_{111} - \frac{5}{4}ikC_{fn}^{\frac{1}{2}} (\theta_{1,0} + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{7,0}) h_{111}^2 \quad (\text{II.4})$$

$$p_{220} = \frac{1}{2}n\pi F^2 u_{111} v_{111} - \frac{1}{4}\beta S v_{111}^2 - \frac{1}{2}(\beta S + ikF^2) u_{111}^2 + \beta S (1 + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}}) u_{111} h_{111} - \frac{1}{8}\beta S (4 + 30C_{fn}^{\frac{1}{2}} + 75C_{fn}) h_{111}^2 \quad (\text{II.5})$$

$$q_{220} = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$r_{220} = -iku_{111} h_{111} \quad (\text{II.7})$$

$$s_{220} = -\frac{1}{2}ik\theta_{1,0} v_{111}^2 - ik\theta_{4,0} u_{111}^2 + \frac{5}{2}k^2 C_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{4,1} h_{111} z_{111} - k^2\theta_{4,1} u_{111} z_{111} + \frac{1}{2}ik^3\theta_{5,2} z_{111}^2 + \frac{5}{2}ikC_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{6,0} u_{111} h_{111} - \frac{5}{4}ikC_{fn}^{\frac{1}{2}} (\theta_{1,0} + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{7,0}) h_{111}^2 \quad (\text{II.8})$$

$$p_{202} = -\frac{1}{2}n\pi F^2 u_{111}^* v_{111} + \frac{1}{4}\beta S v_{111} v_{111}^* - \frac{1}{2}(\beta S + ikF^2) u_{111} u_{111}^* \quad (\text{II.9})$$

$$+ (\beta S + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}} \beta S) u_{111}^* h_{111} - \frac{1}{8}\beta S (4 + 30C_{fn}^{\frac{1}{2}} + 75C_{fn}^{\frac{1}{2}}) h_{111} h_{111}^* \quad (\text{II.9})$$

$$q_{202} = -\frac{1}{2}n\pi F^2 v_{111} v_{111}^* - \frac{1}{2}(\beta S + ikF^2) u_{111}^* v_{111} + \frac{1}{2}\beta S (1 + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}}) v_{111}^* h_{111} \quad (\text{II.10})$$

$$r_{202} = -n\pi v_{111}^* h_{111} \\ s_{202} = \frac{5}{4}n\pi C_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{1,0} v_{111} h_{111}^* + \frac{5}{4}n\pi C_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{1,0} v_{111}^* h_{111} + \frac{1}{2}ik\theta_{1,0} v_{111} v_{111}^* - n\pi\theta_{3,0} u_{111}^* v_{111} + \frac{5}{2}n^2\pi^2 C_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{2,1} \theta_{3,0} h_{111}^* z_{111} - n^2\pi^2\theta_{2,1} \theta_{3,0} u_{111}^* z_{111} - ik\theta_{4,0} u_{111} u_{111}^* - \frac{1}{2}ik^3\theta_{5,2} z_{111} z_{111}^* + \frac{5}{4}ikC_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{6,0} u_{111} h_{111}^* + \frac{5}{4}ikC_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{6,0} u_{111}^* h_{111} - \frac{5}{4}(ikC_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{1,0} + 5ikC_{fn} \theta_{7,0}) h_{111} h_{111}^* \quad (\text{II.11})$$

$$p_{200} = \frac{1}{2}n\pi F^2 u_{111}^* v_{111} - \frac{1}{4}\beta S v_{111} v_{111}^* - \frac{1}{2}(\beta S + ikF^2) u_{111} u_{111}^* + \beta S (1 + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}}) u_{111}^* h_{111} - \frac{1}{8}\beta S (4 + 30C_{fn}^{\frac{1}{2}} + 75C_{fn}) h_{111} h_{111}^* \quad (\text{II.12})$$

$$q_{200} = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$r_{200} = 0 \quad (\text{II.14})$$

$$s_{200} = \frac{5}{4}n\pi C_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{1,0} v_{111} h_{111}^* - \frac{5}{4}n\pi C_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{1,0} v_{111}^* h_{111} - \frac{1}{2}ik\theta_{1,0} v_{111} v_{111}^* - ik\theta_{4,0} u_{111} u_{111}^* - \frac{1}{2}ik^3\theta_{5,2} z_{111} z_{111}^* + \frac{5}{4}ikC_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{6,0} u_{111} h_{111}^* + \frac{5}{4}ikC_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{6,0} u_{111}^* h_{111} - \frac{5}{4}ik(C_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{1,0} + 5C_{fn} \theta_{7,0}) h_{111} h_{111}^* \quad (\text{II.15})$$

付録 III

付録IIIはスペースの都合上割愛した。第一著者のところに別冊として用意してあるので、希望者は問い合わせられたい。

参考文献

- 1) Hansen, E.: The formation of meanders as a stability problem, *Basic Res. Prog. Rep.*, No. 13, Hydraul. Lab., Tech Univ. Denmark, pp. 9-13, 1967.
- 2) Callander, R. A.: Instability and river channels, *J. Fluid Mech.*, Vol. 36, pp. 465-480, 1969.
- 3) 林 泰造: 河川蛇行の成因についての研究, 土木学会論文報告集, 第180卷, pp. 61-70, 1970.
- 4) 鮎川 登: 河川蛇行の発生限界に関する研究, 土木学会論文報告集, 第181号, pp. 67-76, 1970.

- 5) Engelund, F. and Skovgaard, O.: On the origin of meandering and braiding in alluvial streams, *J. Fluid Mech.*, Vol. 57, pp. 289–302, 1973.
- 6) Parker, G.: On the cause and characteristic scales of meandering and braiding in rivers, *J. Fluid Mech.*, Vol. 76, Part 3, pp. 457–480, 1976.
- 7) Fredsøe, J.: Meandering and braiding of rivers, *J. Fluid Mech.*, Vol. 84, Part 4, pp. 609–624, 1978.
- 8) 渡邊康玄, Tubino, M.: 掃流砂・浮遊砂を伴う流れの交互砂州発生に関する研究, 水工学論文集, 第 36 卷, pp. 7–14, 1992.
- 9) 福岡捷二, 山坂昌成: 河床形状・流れ・流砂量の非線形関係を考慮した交互砂州の平衡波高の理論, 土木学会論文集, 第 357 号/II-4, pp. 45–54, 1985.
- 10) 福岡捷二, 山坂昌成, 清水義彦: 平衡形状に着目した中規模河床形態の卓越波数と形成領域区分, 土木学会論文集, 第 363 号/II-4, pp. 115–124, 1985.
- 11) Colombini, M., Seminara, G. and Tubino, M.: Finite amplitude alternate bars, *J. Fluid Mech.*, Vol. 150, pp. 150–260, 1987.
- 12) 黒木幹男, 石井千万太郎, 板倉忠興: 砂州波高に関する理論的研究, 水工学論文集, 第 36 卷, pp. 1–6, 1992.
- 13) Schielen, R., Doelman, A. and de Swart, H. E.: On the nonlinear dynamics of free bars in straight channels, *J. Fluid Mech.*, Vol. 252, pp. 325–356, 1993.
- 14) Fujita, Y.: Bar and channel formation in braided streams, *River Meandering*, Ikeda, S. and Parker, G. eds., Water Resources Monograph, AGU, pp. 500–560, 1985.
- 15) 藤田裕一郎, 永田順宏, 村本嘉雄: 多列砂州の形成・変化過程と細砂河床の影響, 水工学論文集, 第 36 卷, pp. 23–28, 1992.
- 16) Egashira, S. and Takebayashi, H.: Self-formed low water channel in straight channel, *Proc. 1st Symposium of River Coastal and Estuarine Morphodynamics, IAHR*, pp. 509–518, 1999.
- 17) 藤村 薫, 水島二郎, 後藤金英: 2 次元平行流に対する非線形安定性理論, ながれ, Vol. 4, pp. 213–223, 1985.
- 18) 芦田和男, 道上正規: 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第 206 号, pp. 59–69, 1972.
- 19) Kovacs, A. and Parker, G.: A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels, *J. Fluid Mech.*, Vol. 267, pp. 153–183, 1994.
- 20) Herbert, T.: On perturbation methods in nonlinear stability theory, *J. Fluid Mech.*, Vol. 126, pp. 167–186, 1983.
- 21) Ikeda, S.: Prediction of alternate bar wavelength and height, *J. Hydr. Eng.*, Vol. 110, HY4, pp. 371–386, 1984.
- 22) 藤田裕一郎, 村本嘉雄, 堀池周二, 小池 剛: 交互砂州の発達機構, 第 26 回水理講演会論文集, pp. 25–30, 1982.
- 23) 長谷川和義, 山岡 熟: 発達した交互砂州の性状に関する実験と解析, 第 26 回水理講演会論文集, pp. 31–38, 1982.
- 24) 竹林洋史, 江頭進治, 黒木幹男: 単列砂州の形状特性値と伝播特性値の予測手法に関する比較研究, 水工学論文集, 第 43 卷, pp. 761–766, 1999.
- 25) 竹林洋史, 江頭進治: 混合砂河床における砂州の動態, 水工学論文集, 第 45 卷, pp. 727–732, 2001.

(2001. 11. 8 受付)

WEAKLY NONLINEAR ANALYSIS OF BARS WITH THE USE OF THE AMPLITUDE EXPANSION METHOD

Norihiro IZUMI and Adichai PORNPROMMIN

The application of the existing weakly nonlinear theories of sand bars with the use of the growth rate expansion method, in which the growth rate of perturbations is taken as a small parameter for expansion, is limited to the vicinity of the minimum critical aspect ratio (width/depth); the theory is only applicable to the case of alternate bars. In this study, weakly nonlinear analysis with the use of the amplitude expansion method, in which the amplitude of perturbations is taken as a small parameter for expansion, is presented in order to extend theories to the case of multiple bars. It is shown that the reasonably good agreement between experimental and theoretical results of bar wavelength and height.