

# 「多重解像度-固有直交関数」の複合展開を用いた 開水路凹部流れの階層構造解析

宮本仁志<sup>1</sup>・神田 徹<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 博士(工学) 神戸大学助手 工学部建設学科 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

<sup>2</sup>フェロー会員 工博 神戸大学教授 工学部建設学科 ( 同上 )

開水路凹部流れを対象として、多重解像度近似(MRA)と固有直交関数展開(POD)を複合的に用いる新しい方法(MR-PO複合展開)によって流れの解析を行った。まず、MRAを適用することにより、PIV計測で得られた流速時系列を以下の三つの周波数帯階層成分に分解した：①低周波変動を含む準平均流、②凹部混合層での組織乱流、③高周波変動の非組織乱流。次に、組織乱流の変動成分にPODを適用して変動の主成分を抽出し、各モードの固有ベクトルとその振幅の相互関係を調べることにより組織運動の空間/時間構造、凹部形状の影響など乱流特性を明らかにした。以上の結果から、MR-PO複合展開は乱流中の組織的な構造を抽出・解析する方法として有効であることが確認できた。

**Key Words :** analysis, coherent structure, open-channel turbulent flow, concave, wavelets, empirical eigenvectors

## 1. 序 論

近年の河川整備においては、人々の環境問題に対する意識の高揚を背景として、水環境の保全・創造という観点からの改修工法が積極的に取り入れられつつある。このような河道設計を行う際には、生態系や景観などに配慮した河道形状の空間的多様性が要求されるとともに、その治水安全性に対しても十分に検討を加えることが必要となる。このための水理設計においては、平均化された水理量だけではなく、流れの時間的・空間的な変動特性を把握することが本質的に重要となろう。瀬や淵、わんど等での流れはその典型と考えられるが、このような断面急変部において、流れの場所的変化や乱流構造を的確に把握することが、環境創造面からも洪水制御の面からも要求される。

本研究の目的は、このような河道断面変化部での流れの挙動を解明することにある。著者らは、これまで、水路床に凹部をもつ開水路流れ(以下、「開水路凹部流れ」と略記)を対象として、particle image velocimetry (PIV)による画像計測で得られた流速場を解析し、その流況特性を検討してきた<sup>1)-3)</sup>。ウェーブレット理論<sup>4)-6)</sup>を用いた解析<sup>1)-2)</sup>では、主流-凹部境界のせん断混合層(以下、「凹部混合層」と略記)における流れの組織運動を対象にして、その空間、時間の特性スケール、移流速度など

組織運動の非定常特性を検討し、また、離散変換である多重解像度近似(multiresolution approximation; MRA)により流速時系列が組織運動の階層を含む三つの階層構造に分解できることを示した。一方、固有直交関数展開(proper orthogonal decomposition; POD)<sup>6)-7)</sup>を用いた解析<sup>3)</sup>では、流速変動の主成分分析を行い、凹部内の循環流に起因する変動成分および凹部混合層での組織運動による変動成分が卓越することを示すとともに、それら変動成分の寄与率のレイノルズ数への依存性を明らかにした。

これら二つの解析方法は、どちらも対象とする信号を正規直交関数系に展開するものである；ウェーブレット理論におけるMRAではウェーブレットおよびその補空間で構成されるスケーリング関数が、PODでは得られる固有ベクトル(empirical eigenvectors)が、それぞれ正規直交関数系となる。したがって、それぞれの方法に固有的な特徴を活かしつつ、これらを併用することにより、開水路凹部での乱流現象が明確に整理されると期待できる。

本論文では、MRAとPODを複合的に用いることによって、PIVで得られた流速から凹部混合層での組織構造を効果的に抽出するハイブリッド的な解析方法(「多重解像度-固有直交関数」複合展開(“multiresolution-proper orthogonal” hybrid expansion))、以下、「MR-PO複合展開」と略記)を新しく提案する。具体的には、まず、MRAを適用することにより流速時系列を組織運動の成分を含む

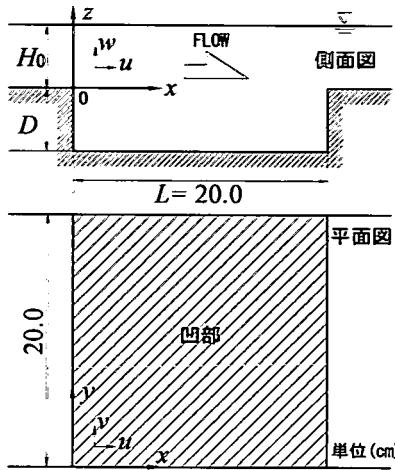


図-1 計測対象とする開水路凹部

表-1 実験条件

CASE	D(cm)	L/D	$Q = 758 \text{ (cm}^3/\text{sec)}$
1	2.0	10.0	$H_0 = 3.0 \text{ (cm)}$ $U_0 = 12.6 \text{ (cm/sec)}$ $Re = 3800$
2	5.0	4.0	$Fr = 0.23$

$Q$  : 流量,  $H_0$  : 流入水深,  $U_0$  : 流入部での断面平均流速,  
 $Re$  : Reynolds 数 =  $U_0 H_0 / \nu$ ,  $Fr$  : Froude 数 =  $U_0 / (g H_0)^{1/2}$ ,  
 $L$  : 凹部長さ,  $D$  : 凹部水深,  $L/D$  : 凹部形状比.

三つの周波数階層別の成分に分解し、さらに、得られた組織運動の成分に POD を施すことによりその時空間構造を調べる。これによって凹部混合層での乱流特性を明らかにするとともに、MR-PO 複合展開の有用性を検証する。

本研究で用いたウェーブレット理論の流体力学・乱流分野への応用に関しては、Farge<sup>9</sup>が、連続ウェーブレット変換・離散ウェーブレット変換の概要および流れの解析への適用性・方向性についてレビューを行っている。そこでは、組織運動の解析に対するウェーブレット理論の有効性が示されており、また、彼らは二次元乱流中における組織構造の抽出を行っている<sup>9</sup>。さらに、航空・機械など流体工学の分野においても、ウェーブレット変換を用いた組織構造の解析がなされている<sup>9,10</sup>。

一方、POD は、多変量解析の分野における主成分分析と同じであり、応用数学的には因子分析の確率関数的表現である Karhunen - Loeve 展開の一種である<sup>9,11</sup>。Berkooz・Holmes・Lumley<sup>9</sup>は POD の数学的基礎を示すとともに、境界層乱流、自由せん断流れ、対流など種々の流れにおける組織構造に対する POD 適用結果のレビューを行っている。彼ら自身は、乱流境界層の壁面近傍領域を対象として、POD で得られた固有直交関数を基底

関数とする low dimensional model と力学系理論を用いることによって境界層での組織構造の解析を試みている<sup>11</sup>。また、Deane ら<sup>12</sup>は、レイノルズ数が小さい二次元キャビティ流れの DNS 結果を対象として、その流速値に POD を適用することにより、主流とキャビティ境界の組織構造を解析している。

以上のウェーブレット変換・POD を用いた既往の研究においては、単純な境界形状をもつ境界層流れや自由せん断層流れ、もしくは、キャビティ流れであっても乱れが十分発達していない層流など、比較的単純な流れの構造をもつ場が対象となっている。しかしながら、水工水理学の分野で対象とする現実の流れは複雑な境界形状における発達した乱流であり、本文で対象とする開水路凹部流れを含め、そのような複雑乱流に対して有効となる流れの構造解析手法の開発が望まれる。

本研究で対象とする開水路凹部流れに関しては、その他に、筆者ら<sup>13</sup>が PIV と large eddy simulation (LES) を用いた乱流解析を、福津・山本<sup>14</sup>がレーザー流速計、PIV、LES を用いた乱流構造の研究を行っている。以上の研究では、凹部混合層に発生する組織運動の挙動、凹部内の循環流と組織運動の関連性について興味ある知見が示されている。しかしながら、時間・空間の特性スケールや流れ内部での動力学的機構は十分整理されておらず、流れの構造解析に課題が残されている。

## 2. 対象とする流れ場

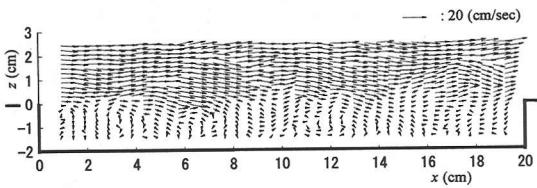
### (1) 開水路凹部および実験条件

図-1に、本実験における開水路凹部の計測区間を示す。実験水路は全長500cm、幅20cmのアクリル製であり、上流水槽より330cmの位置に長さ  $L = 20\text{cm}$ 、深さ  $D = 2.0, 5.0\text{cm}$  の凹部が設けられている。PIV の計測断面は凹部の鉛直中央 ( $y = 10\text{cm}$ ) であり、画像のサンプリング周波数は60Hz、計測時間は約33秒間(2000画像)、一画素の実長は約0.42~0.48mmである。実験条件を表-1に示す。

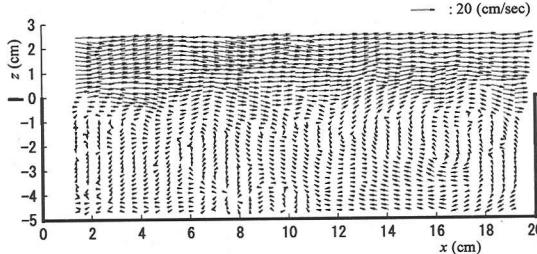
### (2) 瞬間流速、平均流速および乱流諸量

PIV により計測された瞬時の流速ベクトル  $\mathbf{v}(x, z, t) (= (u(x, z, t), w(x, z, t)))$  の例を図-2に示す。主流-凹部境界において流速ベクトルは激しく変動しており、混合層が流下方向に発達している。図-2(a)に示す浅い凹部(凹部形状比  $L/D = 10.0$ )においては、凹部内に深さスケール  $D$  より小さな渦が点在している。図-2(b)の深い凹部( $L/D = 4.0$ )の場合には、 $x = 10\text{--}20\text{cm}$  の底面付近に逆流部が存在しており、凹部全体の循環流が形成されている。

図-3~5に、各 CASE における平均流速ベクトル  $\mathbf{V}(x, z) (= (U(x, z), W(x, z)))$ 、 $x$ -方向乱れ強度  $\sqrt{u'^2}$ 、

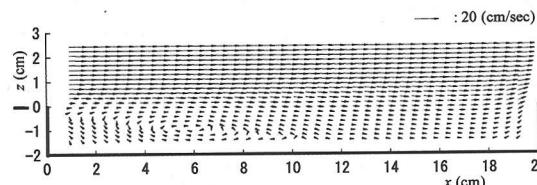


(a) CASE 1 ( $L/D=10.0$ )

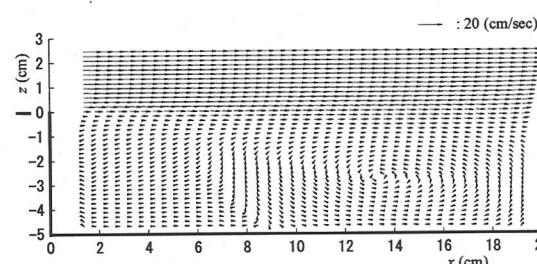


(b) CASE 2 ( $L/D=4.0$ )

図-2 瞬間流速ベクトルの例



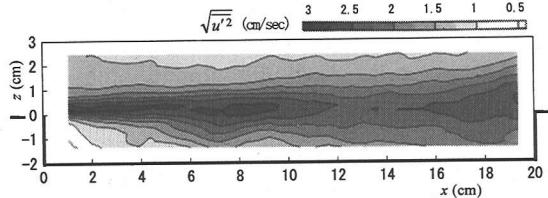
(a) CASE 1 ( $L/D=10.0$ )



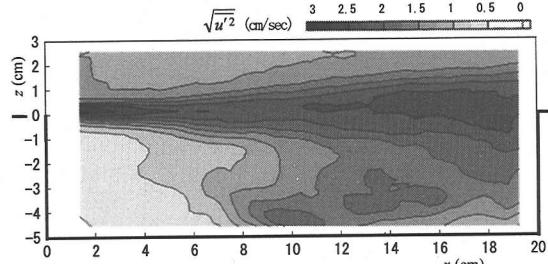
(b) CASE 2 ( $L/D=4.0$ )

図-3 時間平均流速分布（約33秒間）

レイノルズ応力 $-\overline{u'w'}$ の空間分布を示す(約33秒間の時間平均)。図-3に示すように、浅い凹部(図-3(a);  $L/D=10.0$ )の場合、平均流速は凹部上流端で剥離した流線が凹部の底に再付着しているのに対して、深い凹部(図-3(b);  $L/D=4.0$ )では、凹部内の下流側で大きな循環流が形成されている。一方、図-4,5では、主流一凹部境界に沿って $\sqrt{\overline{u'^2}}$ ,  $-\overline{u'w'}$ が大きくなり、凹部混合層の顕著な発達が認められる。また、深い凹部(図-4(b), 5(b))では、循環流に伴う乱れが凹部の下流領域に存在している。以上の結果は、実験条件がほぼ同じケースについての著者ら<sup>13)</sup>や福津・山本<sup>14)</sup>の計測結果と同じ分布傾向を示し

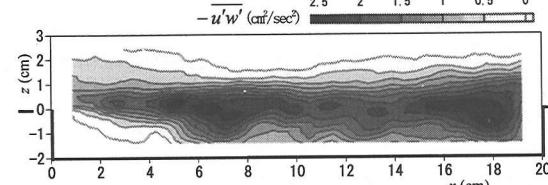


(a) CASE 1 ( $L/D=10.0$ )

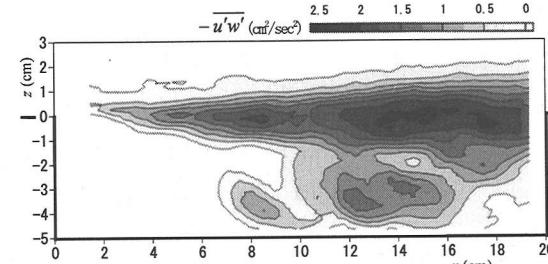


(b) CASE 2 ( $L/D=4.0$ )

図-4  $x$ -方向乱れ強度



(a) CASE 1 ( $L/D=10.0$ )



(b) CASE 2 ( $L/D=4.0$ )

図-5 レイノルズ応力

ており、本研究においても統計平均的な流況特性はほぼ捉えられていると考えられる。しかし、本研究ではPIVにより瞬時の流速値を測定しているため、福津・山本<sup>14)</sup>のレーザー流速計測による高精度計測に比べると、高周波数側に測定誤差が含まれると考えられる(後述)。また、さらに、これらレイノルズ分解による統計平均(時間平均)操作によっては、組織運動のような大スケールの変動成分やそれに伴う二次的な小スケール成分などを单一の変動成分として取扱って平均するため、凹部混合層に発達する組織運動の構造特性を知ることはできない。

本論文では、図-2に示すような時々刻々の流速分布

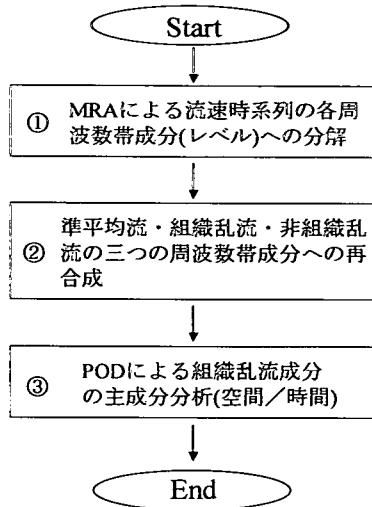


図-6 解析のフローチャート

$\mathbf{v}(x, z, t)$ にMR-PO複合展開を適用して、凹部混合層での組織運動の時空間変動特性を調べるとともに、凹部形状の変化が組織運動の構造に及ぼす影響を検討する。

### 3. 解析方法

#### (1) 概要

本文で提案するMR-PO複合展開のフローチャートを図-6に示す。手順は以下のようである。

- ① 各点(x, z)での流速時系列 $\{u(x, z, t), w(x, z, t)\}$ にMRAを適用することにより、それら時系列を各周波数帯(レベル)別の変動成分に分解する。本文では、MRAの各周波数帯を表す指標として『レベル』という用語を用いる。
- ② 各周波数帯の変動成分を、変動強度や共分散などの統計量によって、組織運動を含む三つの周波数帯階層別の変動成分に再合成する。
- ③ 得られた変動成分にPODを適用して主成分を抽出し、各モードの主成分(固有ベクトル)の空間分布とその振幅(時系列)を用いて、組織運動の時空間構造を調べる。ここでは、PODの各主成分を表す指標として『モード』という用語を用いる。

以下に、解析の各段階で用いるMRAおよびPODの概要を記す。

#### (2) Multiresolution Approximation (MRA)

MRAは、正規直交ウェーブレット $\psi$ とその補空間で構成されるスケーリング関数 $\phi$ を基底関数として用いて、関数 $f$ を基底関数で構成される空間に展開するものである<sup>4)</sup>。本文ではMRAを流速時系列に適用するため、以下

では、独立変数に時間 $t$ を用いて説明する。

MRAは次式で定義される。

$$f(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle \phi_{ni} | f \rangle \phi_{ni}(t) + \sum_{j=0}^{-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle \psi_{ji} | f \rangle \psi_{ji}(t) \quad (1)$$

ここに、

$$\langle \phi_{ji} | f \rangle = \bar{f}_{ji} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_{ji} dt \quad (2)$$

$$\langle \psi_{ji} | f \rangle = \tilde{f}_{ji} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{ji} dt \quad (3)$$

$$\phi_{ji}(t) = 2^{jn} \phi(2^j t - i), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1 \quad (4)$$

$$\psi_{ji}(t) = 2^{jn} \psi(2^j t - i), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (5)$$

であり、 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は内積、 $\phi_{ni}$ はスケーリング関数、 $\psi_{ji}$ は正規直交ウェーブレット、 $\bar{f}_{ji}$ と $\tilde{f}_{ji}$ は離散変換によって得られるスケーリング係数とウェーブレット係数、 $n$ は最も低い周波数帯のレベル(負の整数)、 $j$ は各周波数帯のレベル( $n \leq j \leq -1$ )、 $i$ は任意の整数である。また、スケーリング関数 $\phi$ と正規直交ウェーブレット $\psi$ の間に以下のような正規直交関係がある。

$$\langle \phi(t) | \phi(t-p) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(t-p) dt = \delta_{p,0} \quad (6)$$

$$\langle \psi(t) | \psi(t-p) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \psi(t-p) dt = \delta_{p,0} \quad (7)$$

$$\langle \phi(t) | \psi(t-p) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \psi(t-p) dt = 0 \quad (8)$$

ここに、 $\delta$ はクロネッカーデルタ、 $p$ は任意の整数である。式(4),(5)の $\phi_{ji}$ ,  $\psi_{ji}$ は、式(6)～(8)に示すように離散移動 $2^j i$ に対して直交する関数である。これら $\phi_{ji}$ ,  $\psi_{ji}$ を周波数帯域分割フィルターと考えれば、前者は周波数帯を二分割するローパスフィルター、後者はハイパスフィルターとなる<sup>11)</sup>。したがって、式(1)は、これらのフィルターを用いて、時系列 $f(t)$ を各レベル(周波数帯)別の変動成分に展開したものと考えられる。ただし、これらフィルターは、フーリエ変換と異なり、対象とする周波数帯をきっちりと二分割するものではなく、カットオフの周波数帯前後でローパス・ハイパスそれぞれの周波数帯が混在する部分がある。この部分は用いる基底関数 $\phi_{ji}$ ,  $\psi_{ji}$ のもつ周波数特性により異なる。なお、本論文では、Daubechiesの正規直交ウェーブレット $\psi$ およびスケーリング関数 $\phi$ ( $N = 10$ )<sup>4)</sup>を基底関数として用いている。

#### (3) Proper Orthogonal Decomposition (POD)

PODは、変動成分の空間相関関数の固有方程式を解く

ことによって、変動成分を各モードに分解し、主要な変動成分の空間分布を抽出する統計解析手法である<sup>6,7</sup>。本文ではPIVの計測値を解析対象とするため、以下では、離散値に対するPODを要約する。

PODにおける固有ベクトル $\varphi_m$ は次式より求められる。

$$[\mathbf{R}_u]\{\varphi_m\} = \lambda_m \{\varphi_m\} \quad (9)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_u] &= [\mathbf{R}_{i,j,k,l}] = \left[ \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M u'^k(x_i, t_p) u'^l(x_j, t_p) \right], \\ i, j &= 1, 2, \dots, N; k, l = 1, 2 \end{aligned} \quad (10)$$

は流速変動成分 $u'^k$ と $u'^l$ の分散共分散行列であり( $u'^1, u'^2$ は、 $x$ -、 $z$ -方向の変動成分 $u'$ 、 $w'$ をそれぞれ表す)、 $m$ はPODのモードの次数、 $\lambda_m$ はモード $m$ の固有値、 $x_i$ はPIV計測点の位置ベクトル、 $N$ は全計測点数、 $t_p$ は離散時間(PIVの計測時間間隔(ここでは、1/60sec)ごとの時刻)、 $M$ は全離散時間点数である。 $[\mathbf{R}_u]$ は、 $2N \times 2N$ の実対称行列となる。本研究における実験CASE1、2での $N$ は、それぞれ819、1395であり、凹部流れにおける大規模な組織構造を解析するのに十分な空間解像度であると考える。固有ベクトル $\varphi_m$ は正規直交系であるので、流速変動成分 $u'^k$ が次式のように再合成される。

$$\begin{aligned} u'^k(x_i, t_p) &= \sum_{m=1}^{2N} u'_m{}^k(x_i, t_p) \\ &= \sum_{m=1}^{2N} a_m(t_p) \varphi_m^k(x_i) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、

$$a_m(t_p) = \sum_{k=1}^2 \langle u'^k(x_i, t_p) | \varphi_m^k(x_i) \rangle / \langle \varphi_m(x_i) | \varphi_m(x_i) \rangle \quad (12)$$

はモード $m$ の係数(振幅)、 $u'_m{}^k$ はモード $m$ における $u'^k$ の成分、 $\varphi_m^k$ は $u'^k$ に対応する $\varphi_m$ の値である。固有値 $\lambda_m$ はモード $m$ における変動成分のエネルギーを表しており、全変動エネルギーに対するモード $m$ までの寄与率 $C_m$ は次式で与えられる。

$$C_m = \sum_{q=1}^m c_q = \sum_{q=1}^m \lambda_q / \sum_{l=1}^N \lambda_l \quad (13)$$

ここに、

$$c_q = \lambda_q / \sum_{l=1}^N \lambda_l \quad (14)$$

はモード $q$ での寄与率である。

なお、本研究での固有値計算には、MATLABを用いた。

#### 4. 解析結果と考察

3. (1)で示した手順にしたがって、凹部混合層における組織運動の時空間構造解析を行った。

##### (1) MRAによる流速時系列の三つの階層構造(準平均流・組織乱流・非組織乱流)への分解

MRAの分解・再合成の機能を用いることによって、PIVで得られた流速時系列を三つの周波数帯の階層構造、すなわち『準平均流』・『組織乱流』・『非組織乱流』の変動成分、に分解する。ここでは、階層構造をなす各変動成分を以下のように定義した;『準平均流』とは、図-3に示す流線の再付着、凹部内の循環流など平均流構造の特徴を保持しながら低周波で変動する擬似的平均流速成分、『組織乱流』とは、凹部混合層での組織構造が含まれる周波数帯の流速変動成分、『非組織乱流』とは、組織乱流に伴って二次的に生成される変動を含む、高周波数帯のbackground turbulenceの流速変動成分。

まず、PIVで計測された各点 $\mathbf{x}$ (= $(x, z)$ )での流速時系列 $u(x, z, t)$ 、 $w(x, z, t)$ にMRAを施すことによって、これらを各周波数帯(レベル)別の近似流速成分 $\mathbf{v}_{\Phi_j}$ (= $(u_{\Phi_j}, w_{\Phi_j})$ )と流速変動成分 $\mathbf{v}_{\Psi_j}$ (= $(u_{\Psi_j}, w_{\Psi_j})$ )に分解した。ここで、 $j$ は周波数帯のインデックスを表す。図-7に結果の一例(凹部中央の混合層内;  $x = 9.6\text{cm}$ ,  $z = 0.93\text{cm}$ の $u(x, z, t)$ )を、表-2に各レベル $j$ に対応する周波数帯の目安を、それぞれ示す。ここで、表-2に示す各周波数帯は、3. (2)で述べたように、厳密なものではなく、カットオフ周波数付近で $\mathbf{v}_{\Phi_j}$ と $\mathbf{v}_{\Psi_j}$ のもつ周波数が混在する部分があり、あくまで目安としての値である。図-7より、各周波数帯(レベル $j$ )の流速変動成分 $u_{\Psi_j}$ が近似流速成分 $u_{\Phi_{j+1}}$ から分離されていることがわかる。近似流速成分 $u_{\Phi_{-8}}$ (図-7における左下の時系列)では、およそ0.1Hz以下の低周波成分を含むが、ほぼ長時間平均的な流速時系列が得られている。一方、 $j = -3 \sim -7$ の流速変動成分 $u_{\Psi_j}$ では、時系列上で間歇的に大きな変動が発生している。これより、これらの周波数帯においては、凹部混合層での組織運動が卓越していることが推察できる。なお、 $j = -1$ の高周波数帯において流速変動成分 $u_{\Psi_{-1}}$ が局所的に大きく変動している部分があるが、これはPIVの計測限界による誤差に起因していると考えられる。すなわち、PIVのパターンマッチングにおけるサブピクセル内の移動量の推定誤差やパターンマッチングの失敗によるエラーベクトル、などが原因と考えられる。MRAは、信号

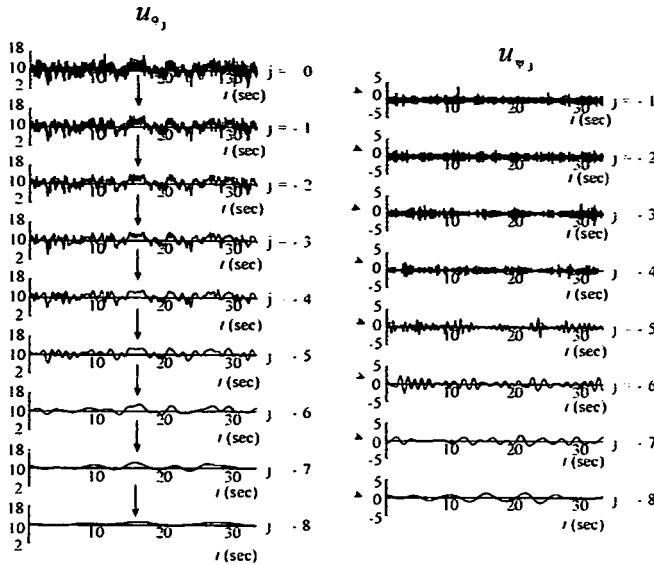


図-7 MRAによる流速時系列の各周波数帯(レベル)への分解

(CASE 1;  $x$ -方向流速成分  $u$ ,  $x=9.6\text{cm}$ ,  $z=0.93\text{cm}$ )

の時系列構造を大きく変化させることなくレベル別の局所的な変動成分を抽出し、それらを再合成できる。したがって、この誤差を含むと考えられるレベル  $j = -1$  の高周波成分は再合成(後述)では除外した。

MRAの各レベルに分解した時系列を組織乱流など三つの階層に的確に再合成するためには、各レベルの変動成分の空間的な分布を検討することが必要である。そこで、レベル  $j = -3 \sim -7$  の流速変動成分  $v_{\psi_j}$  の統計量(標準偏差  $\sqrt{v_{\psi_j}^2}$  ( $= (\sqrt{u_{\psi_j}^2}, \sqrt{w_{\psi_j}^2})$ ) および共分散  $-\overline{uw}_{\psi_j}$ )を次式から算出する。

$$\sqrt{u_{\psi_j}^2}(x_i) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{p=1}^M u_{\psi_j}^2(x_i, t_p)} \quad (15)$$

$$\sqrt{w_{\psi_j}^2}(x_i) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{p=1}^M w_{\psi_j}^2(x_i, t_p)} \quad (16)$$

$$-\overline{uw}_{\psi_j}(x_i) = -\frac{1}{M} \sum_{p=1}^M u_{\psi_j} \cdot w_{\psi_j} \quad (17)$$

これらは、レイノルズ分解における乱れ強度  $\sqrt{u'^2}, \sqrt{w'^2}$  およびレイノルズ応力  $-\overline{uw'}$  にそれぞれ対応する。図-8に結果の例(CASE 1)を示す。これらの分布はレベル(周波数帯)ごとの変動強度、共分散を表しているため、スペクトルを計算したものに類似している。レベル  $j$  (周波数帯) が小さくなるに従い、抽出された変動事象の空間スケールが大きくなっている。レベル  $j = -3$  に

表-2 各レベルに対応する周波数帯の目安

レベル $j$	近似流速成分 $v_{\phi_j}$	変動流速成分 $v_{\psi_j}$
0	30Hz以下	
-1	15Hz以下	15~30Hz
-2	7.5Hz以下	7.5~15Hz
-3	3.8Hz以下	3.8~7.5Hz
-4	1.9Hz以下	1.9~3.8Hz
-5	0.9Hz以下	0.9~1.9Hz
-6	0.5Hz以下	0.5~0.9Hz
-7	0.2Hz以下	0.2~0.5Hz
-8	0.1Hz以下	0.1~0.2Hz

おいては、 $\sqrt{u_{\psi_j}^2}$  は凹部流入部の主流-凹部境界において大きくなっている。これはせん断不安定に起因する流速変動に対応していると考えられる。 $\sqrt{w_{\psi_j}^2}$ 、 $-\overline{uw}_{\psi_j}$  の分布では、凹部混合層において多数の極大値が存在し、その空間スケールが小さいことから、組織運動に伴う二次的な流速変動(小スケールの渦)が抽出されていると推察できる。 $\sqrt{u_{\psi_j}^2}$  と  $\sqrt{w_{\psi_j}^2}$ 、 $-\overline{uw}_{\psi_j}$  の分布特性が異なるのは、前者が卓越する凹部流入部においては、このレベルに対応する比較的高周波の鉛直方向流速変動が発達していないことによると考えられる。レベル  $j = 4 \sim -6$  における各統計量の空間分布では、主流-凹部境界に極値が流下方向へ連なっていることが確認できる。この傾向は、特に、共分散  $-\overline{uw}_{\psi_j}$  の分布で顕著に現れている。このことから、組織運動がこれらの周波数帯において特に卓越していることが示唆される。レベル  $j = -7$  では、凹部下流側の段上がり部周辺において各統計量が大きくなっている。その空間スケールは他のレベルに比べると大きい。これは、凹部の段上がりに伴う流速変動に相当すると考えられる。

CASE 2 の流速時系列に対しても同様の検討を行った結果、同一レベル  $j = 4 \sim -6$  であらわされる流速変動がほぼ組織運動だけによることを確認した。

以上のことでより、本論文では、MRAの各レベルの流速時系列を以下に示す三つの階層に分類し、MRAの再合成アルゴリズムによって各階層の流速成分を得た；①準平均流の成分  $V_l(x, z, t)$ ：レベル  $j = -6$  の近似流速  $v_{\phi_j}$ 、

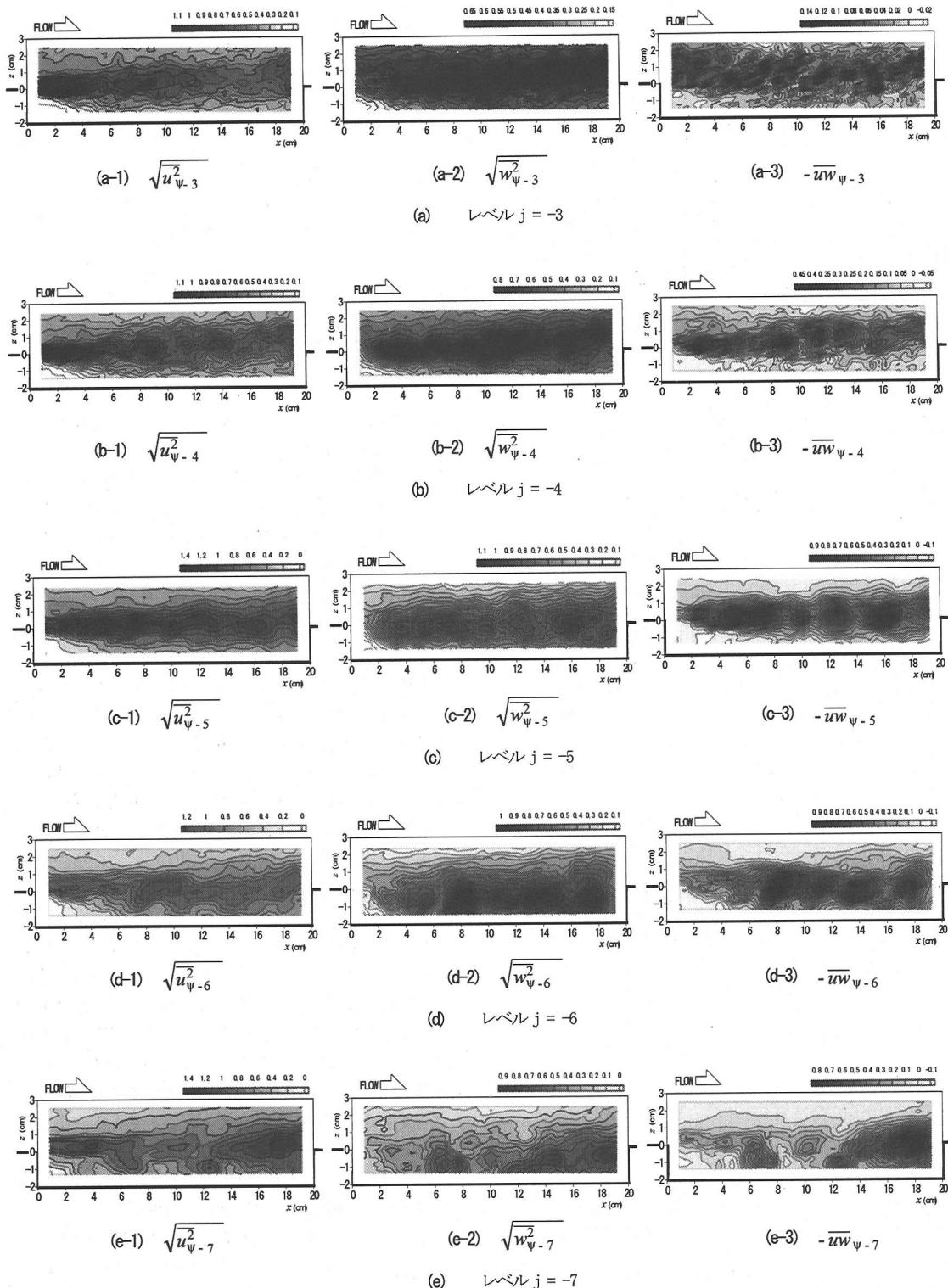


図-8 各MRAレベルにおける流速変動成分の統計量の空間分布 (CASE1)

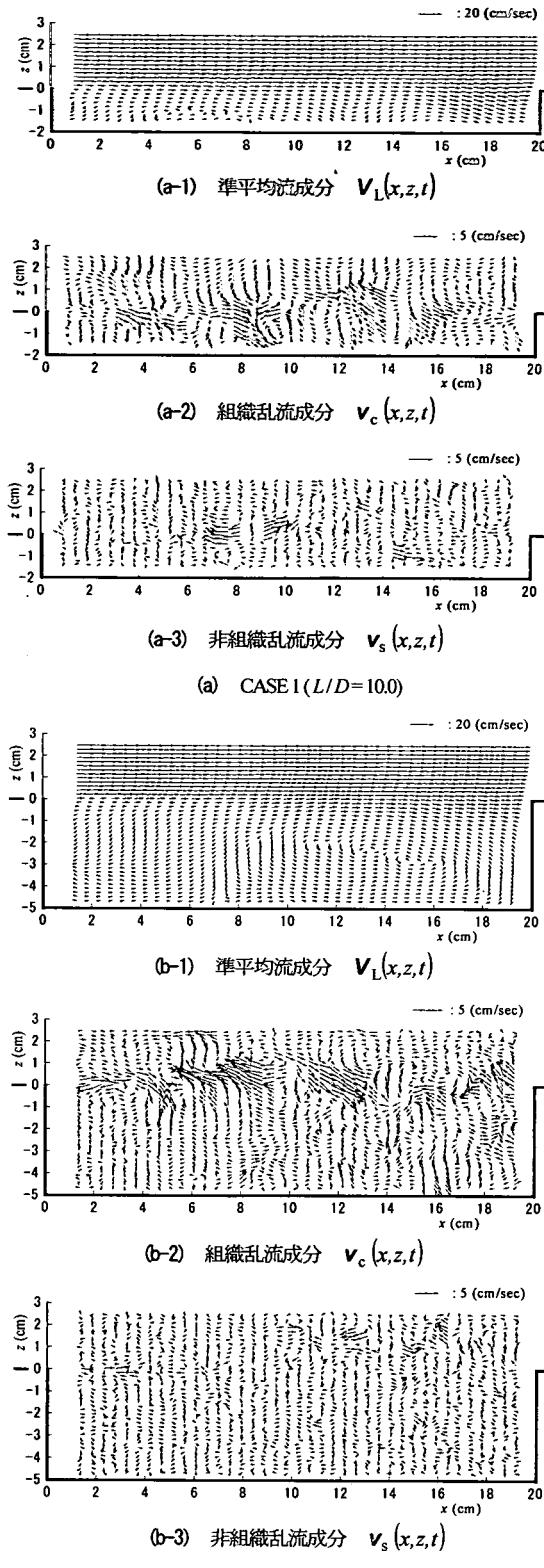


図-9 三層分解された流速変動成分の空間分布

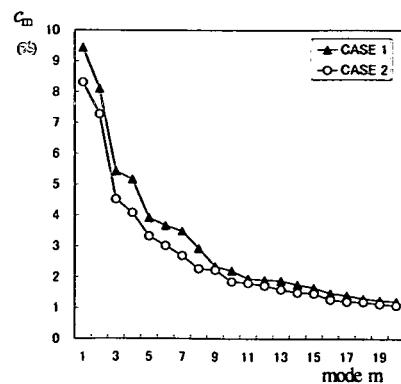


図-10 全変動エネルギーに対する寄与率

(対応する周波数帯(目安)  $f \approx 0.5 \text{ Hz}$ 以下), ②組織乱流の変動成分  $v_c(x, z, t)$  :  $j = 4 \sim 6$ の流速変動  $v_{pj}$  の再合成 ( $f \approx 0.5 \sim 3.8 \text{ Hz}$ ), ③非組織乱流の変動成分  $v_s(x, z, t)$  : レベル  $j = -3$ 以下の変動成分  $v_{pj}$  の再合成 ( $f \approx 3.8 \text{ Hz}$ 以上). なお、この三層分解は、図-8を考察することにより、主流-凹部境界での組織運動のうち、小スケールの渦を除き、大規模な組織渦のみが  $v_c(x, z, t)$  に含まれることを意図してMRAによる再合成を行ったものである。従って、以下のPOD解析では、カットされた小規模の組織渦から大規模組織渦への合体などは捉えられないが、その反面、小さい渦による流速変動がなくなったことによって大規模組織渦の空間/時間構造が明確に検出されることが予想される。また、 $V_L(x, z, t)$ ,  $v_c(x, z, t)$ ,  $v_s(x, z, t)$  の各成分はお互いに関連しているので、その関連の詳細についてはNavier-Stokesの運動方程式など流れの動力学特性を考慮した検討が必要であり、今後の課題となる。

図-9(c),  $V_L(x, z, t)$ ,  $v_c(x, z, t)$ ,  $v_s(x, z, t)$  の空間分布を示す。これより、主流-凹部境界での組織運動を含む変動成分のみが  $v_c(x, z, t)$  として元の流速時系列  $\mathbf{v}(x, z, t)$  から的確に抽出されているのが確認できる。また、図-9(a-1), (b-1) ( $V_L(x, z, t)$ )と図-3(a), (b) (平均流速ベクトル  $\mathbf{V}(x, z)$ )をそれぞれ比較すると、本解析で得られた流速成分  $V_L(x, z, t)$  には、凹部下流側段上がり部による変動成分(CASE 1)および凹部内の時間平均的な循環流に起因する変動成分(CASE 2)が含まれていることが確認される。

## (2) PODによる組織運動の空間構造の解析

分散共分散行列  $[\mathbf{R}_u]$  (式(10))の算出に組織乱流の変動成分  $v_c(x, z, t)$  を用いることによりPOD解析を行い、組織運動の主要な空間構造を抽出した。

図-10に、全変動エネルギーに対するPODの各モード  $m$  の寄与率  $c_m$  (式(14); モード  $m = 20$ まで)を示す。 $m = 1$

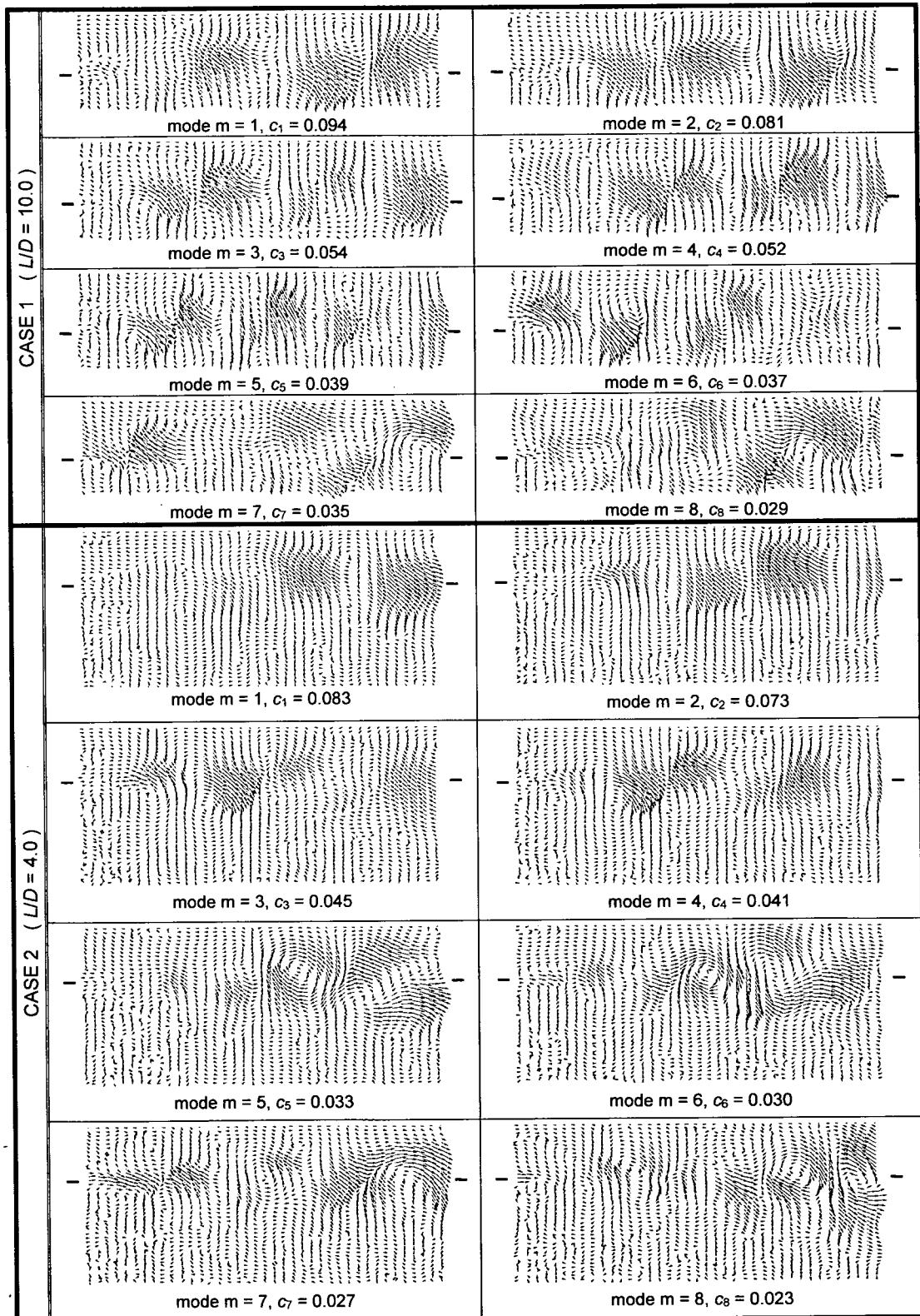


図-11 固有ベクトルの空間分布  $\varphi_m(x, z)$  (枠内のベクトルは各 CASE の固有ベクトルの空間分布を、また、各図の左右にある太線は主流-凹部境界を表している。各図の下に、モードの次数  $m$  および対応する寄与率  $c_m$  を示す。)

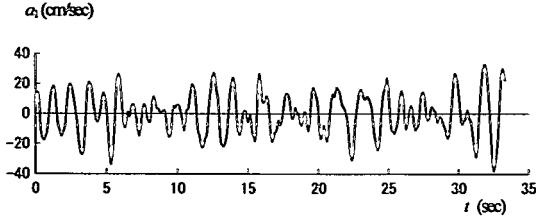


図-12 POD モードにおける係数(振幅)の時系列  
の一例(CASE 1, mode m=1)

での $c_m$ は約10%程度であり、モードの次数が大きくなるに伴って $c_m$ は指数関数的に小さくなる。このことは、次数の低いモードに組織運動の特徴が反映されていることを示唆している。

図-11に、各CASEにおけるモード $m = 1 \sim 8$ の固有ベクトル $\phi_m(x, z)$ の空間分布を示す。ここで、各図のベクトルの位置は図-3などと同じであり、側面の主流一凹部境界を示す太線のみを除いて座標軸などは省略されている。各図での $\phi_m$ の分布は、凹部混合層での組織運動の主要成分を示している。CASE 1( $L/D = 10.0$ )において最も変動が卓越する $m = 1, 2$ の $\phi_m$ は、凹部中央から下流側の主流一凹部境界で大きな値をとり、主流(高速流体)の凹部への潜り込みと凹部内の低速流体の巻き上げを反映していると考えられる。モードの次数が大きくなるに従い $\phi_m$ の卓越する空間スケールが小さくなり、 $m = 6$ では凹部流入部から中央部分において $\phi_m$ が卓越するようになる。 $m = 7, 8$ においては、上述のような空間スケールが減少する傾向とは異なり、凹部の全水深程度のスケールをもつ変動が卓越するようになる。さらに、連続する奇数・偶数のモード(たとえば、 $m = 1$ と $2, 3$ と $4$ など)を比較すると、それらモード間で $\phi_m$ の卓越部の位相が流下方向に半波長( $\pi$  rad)ずれているのが確認できる。このことより、これら奇数・偶数モード間どうしには強い相互関係があることが示唆される(後述)。一方、CASE 2( $L/D = 4.0$ )における $\phi_m$ の空間分布に関しても、CASE 1の $\phi_m$ と同様の特徴があることがわかる。すなわち、① $m = 1 \sim 4$ において、モードの次数が大きくなるに伴い $\phi_m$ の卓越領域が凹部混合層の中・下流域から上・中流域へと変化し、卓越領域自体も小さくなしていくこと、②連続する奇数・偶数のモードの対どうしは、 $\phi_m$ の卓越部が流下方向に半波長ずれていること、である。また、相違点として、 $m = 5, 6$ においてCASE 1では明確ではなかった渦構造が凹部混合層の中・下流域に存在していることが挙げられる。この差異は、凹部形状比 $L/D$ が大きいCASE 1では組織運動が底面の影響を受けるのに対して、CASE 2では $L/D$ が小さく深い凹部であるために組織運動が底面によってあまり影響を受けないためと考えら

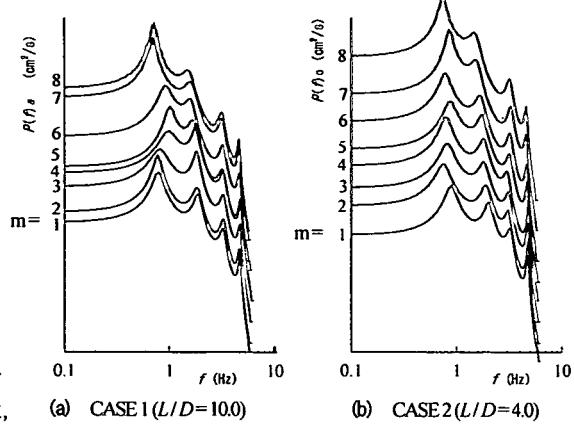


図-13 各 POD モード間の周波数遷移(パワースペクトル)

れる。

### (3) 各モード間の相互関連(時系列構造)

次に、固有ベクトル $\phi_m$ を用いることによって、式(12)から各モード $m$ の振幅 $a_m(t)$ を算出し、各モード間の $a_m(t)$ どうしの関係を検討した。

図-12に $a_m(t)$ の例(CASE 1,  $m = 1$ )を示す。これより、 $a_1$ はかなり周期的な挙動を示すことがわかる。この傾向は、CASE 1, 2における低次モードについて、同様に確認された。

図-13に、各モード $m$ における $a_m$ のパワースペクトルを示す。ここでは、モード間の卓越周波数の遷移について考察することが目的であるので、縦軸の値を調整して各モードのスペクトルを重ね合わせている。また、MRAによるバンドパスフィルターをかけた変動成分 $v_d(x, z, t)$ を用いてPOD解析を行っているため、除去された低周波・高周波のMRAレベルの周波数帯ではピークは現れない(3. (2)および4. (1)参照)。図-13に示すように、全てのスペクトルで四つのピークが存在し、その中で低周波のものが最も卓越する周波数となっている(ただし、CASE 1の $m = 3, 4$ では、低周波とそれに続く高周波のピークは同程度の値となる)。低周波の卓越周波数に着目すると、CASE 1ではモードの次数が増加するに従い、 $m = 6$ までは卓越周波数の値が増加する傾向を示し、 $m = 7, 8$ においては再び低周波数側に遷移している。一方、CASE 2においては、CASE 1でみられたモード間の卓越周波数の遷移傾向ではなく、ほぼ1Hz程度の周波数の変動が卓越している。この差異は、CASE間の実験条件の違いが凹部形状比のみであることから、上述の凹部底面の影響による空間構造の変化に対応していると推察される。なお、この遷移現象の詳細については、 $v_L(x, z, t)$ 、

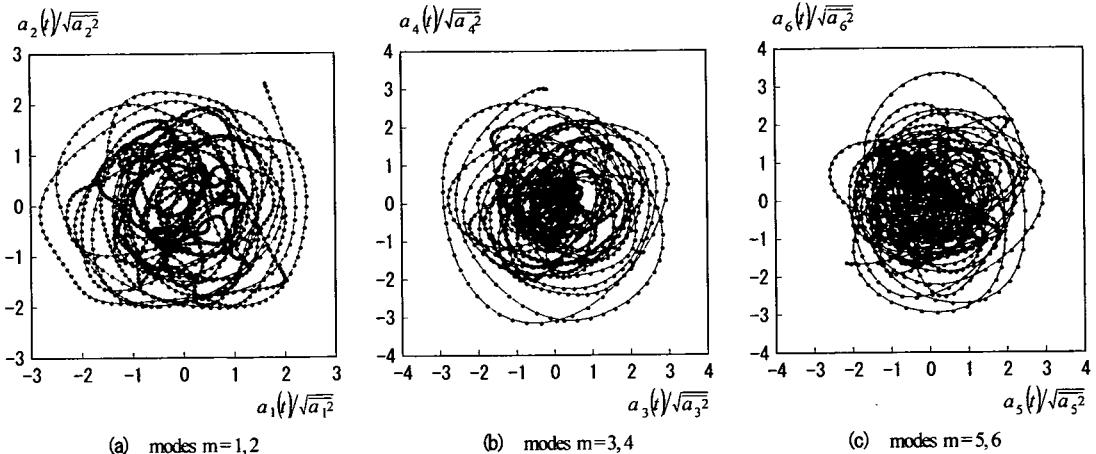


図-14 各 POD モード間の位相関係 (約33秒間, CASE 1,  $L/D=10.0$ )

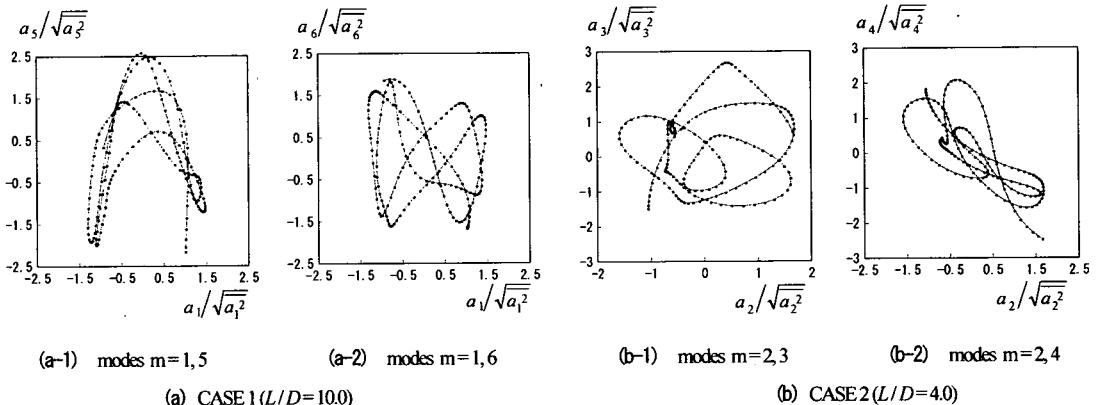


図-15 各 POD モード間の位相関係 (約3秒間)

$v_d(x, z, t)$ ,  $v_s(x, z, t)$  の各成分間の相互関連を含めて、流れの動力学特性を考慮した検討が必要と考えられ、今後の課題である。

次に、各モード間の相互関連を調べるために、二つのモード間の位相関係を考察する。図-14に、連続する奇数・偶数のモード  $\phi_m$  間の卓越部が流下方向に半波長ずれる二対のモードにおける位相関係を示す(CASE 1, 長時間; 約33秒間)。各図において、二つのモード  $a_{2n-1}$ ,  $a_{2n}$  ( $n=1, 2, 3$ )は、原点を中心とする円軌道を描いている。また、長時間(約33秒間)にわたってこの円軌道が維持されていることから、二対のモード間の相互作用はかなり安定していると考えられる。ただし、モードの次数が増加するに伴ってその円軌道は徐々に崩れている。以上のことより、低次モードで固有ベクトル  $\phi_m$  が半波長ずれる二対のモード成分  $a_{2n-1}$ ,  $a_{2n}$  は、ほぼ同一周波数で位相差が  $\pi/2(\text{rad})$  の変動となっており、その相互作用はかなり安定していることがわかる。換言すれば、

$a_{2n-1}$ ,  $a_{2n}$  のペアは、主流-凹部境界で周期的に変動する大規模な組織的運動のうち、運動する主成分の一対を表しているものと考えられる。なお、以上のことは、CASE 2においても確認されている。

図-15は短時間(約3秒間)における二つのモード間の位相関係である。図-15(a) (CASE 1)において、 $a_1 - a_5$  の描く軌道は「逆 U 字」型、 $a_1 - a_6$  は「横8字」型となっている。これらのこととは、 $a_5$ ,  $a_6$  は  $a_1$  の倍周波数成分に相当すること、 $a_1$  と  $a_6$  は位相0の時刻が同期しており、 $a_5$  は  $a_6$  に対して位相差  $\pi/2(\text{rad})$  を伴いながら変動していることを示している。これら  $a_1 - a_5$ ,  $a_1 - a_6$  の関係は、図-13(a)に示す卓越周波数が第一ピーク(約1Hz)から第二ピーク(約2Hz)に遷移することにほぼ対応していると推察される。一方、図-15(b) (CASE 2)において、 $a_2 - a_3$  は円軌道を、 $a_2 - a_4$  はほぼ左肩上がりの直線軌道を描いている。したがって、 $a_2$  と  $a_3$ ,  $a_4$  の変動はほぼ同一の周波数を有し、それらの位相差はそれ

ぞれ  $\pi/2$ ,  $\pi$  (rad) となる。ただし、これらの位相関係は長時間の位相図を描くと崩されてしまうため、ある程度の短時間スケールのみで安定している。以上より、 $\phi_m$  がペアをなさないモード間では、長時間の安定した時空間構造は形成されないものの、やや短い時間スケールでは相互作用が存在することが推察される。

## 5. 結論

開水路凹部流れを対象として、PIVで計測した流速値にMRAとPODを複合的に用いることによって(MR-PO複合展開)、凹部混合層における組織運動の時空間構造を解析した。本研究で得られた結果をまとめると、以下のようである。

- (1) 開水路凹部における組織運動の時空間構造について ;
  - (i) MRAを適用することにより、流速時系列を以下の三つの階層構造に分解した ; ①低周波変動を含む準平均流成分、②凹部混合層での組織運動を含む組織乱流成分、③高周波・小空間スケールの非組織乱流成分。
  - (ii) (i)で得られた組織乱流成分にPODを適用することにより、組織運動の空間構造の主成分を定量的に抽出した。低次モードの空間構造は、双対(ペア)になる変動の階層で構成されていることがわかった。
  - (iii) 凹部形状比の異なるCASEにおいて、組織運動の空間構造パターンを比較した結果、深い凹部では、底面の影響によって渦運動が制約されることがわかった。
  - (iv) 各PODモード間の振幅(時系列)を解析することにより、各モード間の時間軸上での相互作用を定量的に明らかにした。(ii)で抽出された双対(ペア)をなす変動パターンは、組織運動を構成する主成分の中でもかなり安定性の高い構造であることがわかった。

### (2) MR-PO複合展開の適用性について ;

MRAとPODの複合展開は、上記のごとく、PIVで得られた流速から凹部混合層における組織運動の時空間構造(特徴ある部分)を解析する手法として、かなり有効であることが確認できた。良好な結果が得られた理由は、個々の解析法を単独で用いるのではなくそれらの特徴を活かしつつ併用したこと、すなわち、まずMRAによって注目する組織運動のみを含む変動成分を抽出し、さらにこれに統計的な手法であるPODを適用したことにある。

以上より、本研究で提案したMR-PO複合展開は、多様な河道形状における流れの時空間変動特性を抽出・解析する上で、きわめて有用な手法であると考えられる。

今後は、得られた組織運動の主成分と準平均流、非組織乱流との関連について流体の動力学的な考察を含めた検討を行い、複雑な乱流場における流れの構造や乱流混合の特性を明らかにしていきたい。

## 参考文献

- 1) 神田 徹, 宮本仁志, 横野 渉 : 開水路凹部のせん断混合層における乱流構造のウェーブレット解析, 土木学会論文集, No.656/II-52, pp.121-133, 2000.
- 2) 宮本仁志, 神田 徹 : 開水路凹部における流れの組織運動の二次元ウェーブレット解析, 水工学論文集, 第45巻, pp.499-504, 2001.
- 3) 宮本仁志, 神田 徹, 兵頭伸幸 : 開水路凹部流れにおける乱れの主成分分析, 水工学論文集, 第45巻, pp.505-510, 2001.
- 4) たとえば(応用数学関連), Daubechies, I.: *Ten lectures on wavelets*, CBMS Lecture Notes Series, SIAM, 1991.
- 5) たとえば(流体力学関連), Farge, M.: Wavelet transforms and their application to turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol.24, pp.395-457, 1992.
- 6) Berkooz, G., Holmes, P. and Lumley, J. L.: The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol.25, pp.539-575, 1993.
- 7) 田村幸雄 : 固有直交関数展開のランダム変動場への応用のすすめ, 日本風工学会誌, 第65号, pp.33-41, 1995.
- 8) Farge, M., Schneider, K. and Kevlahan, N.: Coherent structure extraction in wavelet-based two-dimensional turbulent flows, *Dynamics of slender vortices*, ed. Krause, Kluwer, pp.65-83, 1998.
- 9) Lewalle, J., Petagna, P. and Buresti, G.: Wavelet statistics and the near-field structure of coaxial jets, *AIAA paper*, 94-2323, 1994.
- 10) 章 忠, 浜本嘉輔, 川端洋昭, 富田栄二 : ウェーブレット変換による非定常乱流解析, 日本機械学会論文集(B編), 第64巻, 618号, pp.295-302, 1998.
- 11) Antbry, N., Holmes, P., Lumley, J. L. and Stone, E.: The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, Vol.192, pp.115-173, 1988.
- 12) Deane, A. E., Kevrekidis, I. G., Karniadakis, G. E. and Orszag, S. A.: Low-dimensional models for complex geometry flows: Application to grooved channels and circular cylinders, *Phys. Fluids*, pp.2337-2354, 1991.
- 13) 藤田一郎, 神田 徹, 門脇正夫, 森田卓光 : 開水路凹部流れのPIVおよびLESによる乱流解析, 土木学会論文集, No.653/II-35, pp.79-88, 1996.
- 14) 補津家久, 山本義暢 : 開水路キャビティー流れの乱流構造に関する研究, 土木学会論文集, No.614/II-46, pp.51-63, 1999.
- 15) 柳原 進 : ウェーブレットビギナーズガイド, 東京電機大学出版局, 225p, 1995.

(2001. 9. 12 受付)

ANALYSIS ON HIERARCHICAL FLOW STRUCTURE  
IN OPEN-CHANNEL WITH CONCAVE BED BY USING  
A "MULTIRESOLUTIONAL - PROPER ORTHOGONAL" HYBRID EXPANSION

Hitoshi MIYAMOTO and Tohru KANDA

Turbulent structures in open-channel flows over a concave bed are analyzed by using a hybrid method that combines a proper orthogonal decomposition (POD) with a multiresolution approximation (MRA). The flows over a shallow concave and a deep one are measured by a particle image velocimetry. At first, the time-series of the velocities are clearly classified into three components by using the MRA, including the fluctuation component due to the organized turbulence in a mixing shear layer between the main-channel and the concave. Then, the POD of the organized turbulence component successfully extracts their characteristics, such as the predominant spatial structures and their temporal interactions, as well as the effect of the concave shape. These results strongly suggest that the present hybrid method is effectively available for detecting the spatiotemporal coherent structures in the flows.