

高減衰ゴム材料の構成則

吉田純司¹・阿部雅人²・藤野陽三³

¹正会員 博士(工) 山梨大学講師 工学部土木環境工学科 (〒400-8511 山梨県甲府市武田 4-3-11)

²正会員 Ph.D. 東京大学助教授 工学系研究科社会基盤工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

³フェロー会員 Ph.D. 東京大学教授 工学系研究科社会基盤工学専攻 (同上)

高減衰ゴムは柔軟性とエネルギー吸収性能を併せ持つ機能性材料である。本研究では、高減衰ゴムの材料試験方法ならびに構成則を構築することを目的とした。まず、高減衰ゴムの材料試験を体系化し、試験結果を基に材料の構成則を提案した。本構成則は、超弾性体と弾塑性体を並列に組み合わせ前者で応力の進展方向を、後者でエネルギー吸収性能を再現するモデルであり、本モデルにより材料試験結果を精度よく再現できることがわかった。次いで構造部材の画像計測結果と構成則を融合して材料の力学特性を定量的に把握するハイブリッド解析手法を提案し、積層ゴム支承の画像計測結果に応用して本構成則を検証した。さらに積層ゴム支承の鉛直復元力特性からゴム材料の体積弾性係数を算出した。

Key Words: *high damping rubber material, material test, constitutive law, hyper elasticity, elasto-plasticity, bulk modulus, image processing, hybrid analysis*

1. はじめに

1995年兵庫県南部地震における社会基盤施設の甚大な被害を受けて、橋梁の耐震性能を向上させるために免震・制振装置を採用する例が増加してきている。特に、柔軟性に加え大きな減衰性能を有する高減衰ゴムが開発され、積層ゴム支承やダンパーなどに広く応用されている¹⁾。

高減衰ゴムは、天然ゴムをベースにカーボンブラック、可塑剤、オイルなどの添加剤を加え、加硫することで製作される。この添加剤の影響により、高減衰ゴムは、天然ゴムの持つ微圧縮性、応力進展方向の最大経線ひずみ依存性およびハードニング特性など²⁾に加え、エネルギー吸収性能を有し、その力学特性は複雑なものとなる。

しかし、高減衰ゴムの応力-ひずみ関係・疲労特性・破断特性などを把握するために必要な試験方法は未だ確立されておらず、その力学特性は未知の部分が多い。また、1%前後の微小ひずみ下から数百%以上の大ひずみ下において上述した複雑な力学特性を有することから、そのモデル化は困難なものとなる。そのため、高減衰ゴムの精緻な構成則は存在せず、材料のエネルギー吸収性能を全く考慮しない非圧縮性の超弾性体が代用されてきた^{3), 4), 5), 6)}。ゴムの力学挙動を粘弾性ダメージモデルで近似する既往の研究⁷⁾もみられるものの、このモデルでは高減衰ゴムが、数百%以上の大ひずみ領域で示す大きな履歴エネルギー吸収性能、ならびに塑性的性質を再現で

きない。このことから高減衰ゴムを応用した免震・制振装置では数値解析により信頼性の高い予測結果を得ることができず、1つ1つの製品に対して手間・費用のかかる性能確認試験がこれまで実施されてきた。

しかし、載荷実験においては、高減衰ゴムが大ひずみを生じることからひずみゲージを利用できない。そのため、これまで変形場を計測する手段がなく、載荷実験においても詳細な情報を得られなかった。

本研究では、

- 1) ゴム材料のモデル化に必要な材料試験を体系化する。
- 2) 材料試験結果を基に高減衰ゴムの構成則を構築する。
- 3) 画像計測結果と数値計算を融合する手法を提案し、本構成則の妥当性を検証するとともに、ゴム材料の体積弾性係数を把握する。

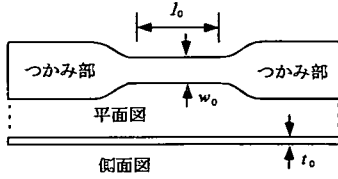
ことを目的とする。

具体的には、まず高減衰ゴムを弾性、粘性および弾塑性の混在する材料であると考え、それぞれの性質を把握するため、単軸引張り試験、一軸固定二軸引張り試験、繰り返し単純せん断試験およびリラクゼーション試験を行う。

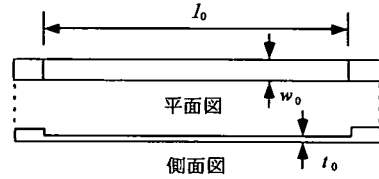
次いで材料試験結果から得られた力学特性を基に構成則を構築する。材料試験結果から、今回対象とした速度・温度範囲で速度依存性が軽微であることが確認された。このことから本研究では高減衰ゴムの履歴エネルギー吸収性能を弾塑性により表現し、

表-1 各材料試験の目的

	単軸引張り試験	一軸固定 二軸引張り試験	繰り返し 単純せん断試験	リラクゼーション 試験
目的	<ul style="list-style-type: none"> ・単軸応力状態において応力が進展する方向を把握. ・大ひずみ領域におけるハードニングの評価. 	<ul style="list-style-type: none"> ・二軸応力状態において応力が進展する方向を把握. 	<ul style="list-style-type: none"> ・繰り返し载荷における履歴特性とその速度依存性の評価. 	<ul style="list-style-type: none"> ・応力緩和曲線を用いた粘性の評価.



(a) ダンベル形状の試験片



(b) 短冊形状の試験片

図-1 引張り試験における試験片形状

超弾性体と並列に組み合わせたモデルを提案する。

最後に、著者らが構築した画像計測システムにより得られた積層ゴム支承の詳細な変位場⁸⁾と、数値解析とを融合したハイブリッドな解析手法を提案し、本構成則を積層ゴム支承に適用した場合の妥当性を検証する。さらに、積層ゴム支承がゴムの体積変形を拘束することによって荷重を支持していることに着目し、通常計測が困難なゴム材料の圧縮性を定量的に把握する。

2. 高減衰ゴムの材料試験

高減衰ゴムは、製作する会社により加硫時に加える添加剤の種類・配合が異なるため、ハードニング特性やエネルギー吸収性能などの点が異なる。本研究では橋梁用の免震用積層ゴム支承に主として用いられている4種類の高減衰ゴムを対象として材料試験を行った。

本研究では、高減衰ゴムが弾性体に粘弾塑性的なエネルギー吸収性能を追加した力学特性を有していると考え、

- 1) 弾性部の力学特性を把握するために引張り試験を行った。
- 2) ゴム材料一般の弾性は、非線形で応力-ひずみ関係が多軸方向に連成することを考慮し、二軸応力状態となる一軸固定二軸引張り試験を実施した。
- 3) エネルギー吸収性能を把握するために、安定した繰り返し载荷が可能な単純せん断試験を行った
- 4) 材料の粘性を把握するためにせん断型試験片によりリラクゼーション試験を行った。

各材料試験の目的を表-1に示す。また比較のため、天然ゴムについても引張り試験を実施した。以上の

4つの試験から高減衰ゴムの弾性的性質、履歴によるエネルギー吸収性能および粘性を把握することができる。

以下では、各材料試験における試験方法および試験結果について述べる。また、試験時に現れる変形について、理論的なひずみ場ならびにひずみ速度場について述べる。これらのひずみ場は、材料試験結果をベースとして構成則を構築する上で必要になる量である。

(1) 単軸引張り試験

a) 試験方法

単軸引張り試験は試験片に引張り変形を与えその伸びを計測する試験である。通常は試験片のつかみ部での局所変形を低減させるため、図-1(a)に示すダンベル形状の試験片が用いられる。しかしダンベル片では、つかみ部と中心で変形が異なるため変形速度を一定に保つことができない。本研究では、試験片の载荷ひずみ速度を一定に保つため、図-1(b)のようなつかみ部が厚くなっている短冊形状の試験片を主に用いた。表-2に試験片の寸法および詳細な試験条件を示す。ただしHDR-Bについては、製作上の問題から従来のダンベル片を用いている。本試験では、標線間の距離および引張り荷重を計測した。

b) 理論的な変形場

物質点の規準配置を \mathbf{X} とし、現時刻 t における物質点の位置座標を \mathbf{x} とする。このとき変位ベクトルを \mathbf{u} とおくと

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (1)$$

である。

図-2に示すように試験片を x_1 方向に载荷し引張り変形を与える。このときゴム材料に非圧縮性を仮定すると図-3より \mathbf{x} は、

表-2 単軸引張り試験の試験条件

材料の略称	HDR-A	HDR-B	HDR-C	HDR-D	NR-A	NR-B
試験片の形状	短冊	ダンベル	短冊	短冊	短冊	短冊
測定方法	標線間距離	標線間距離	標線間距離	標線間距離	標線間距離	標線間距離
試験片個数	3	3	3	3	3	3
試験片長 l_0 [mm]	95.0	20.0	80.0	80.0	20.0	20.0
試験片幅 w_0 [mm]	9.24	5.00	4.13	4.29	5.00	5.00
試験片厚 t_0 [mm]	1.95	2.09	1.59	1.57	2.00	2.00
荷速度[mm/min]	50.0	300	52.0	52.0	13	13
試験温度[°C]	23	21	23	23	22	22
過去に経験した最大ひずみ[%]	400	400	400	400	400	400

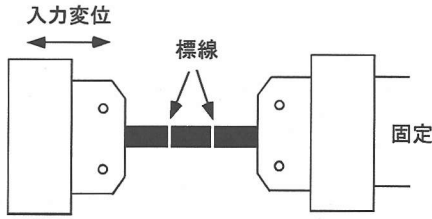


図-2 単軸引張り試験の概略図

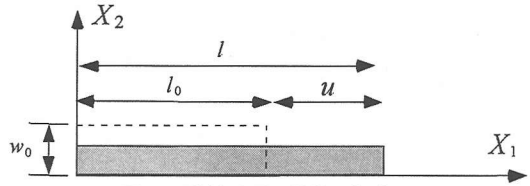


図-3 単軸引張り状態の概念図

$$x_1 = \lambda X_1 \quad (2a)$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X_2 \quad (2b)$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X_3 \quad (2c)$$

となる。ただし、 λ は伸び比であり試験片の変形前後の標線距離をそれぞれ l_0 、 l として、

$$\lambda = l/l_0 \quad (3)$$

のように定義される。式(2)を変形勾配テンソル \mathbf{F} の定義式

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (4)$$

に代入すると単軸引張り状態においては

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \quad (5)$$

を得る。ただし \mathbf{e}_i は直交デカルト座標の基底ベクトルを表し、 \otimes はテンソル積を表す。次いで、物体の変形を記述するテンソルの一つである右 Cauchy - Green テンソルは、

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (6)$$

のように定義されるから単軸引張り試験の場合には、式(5)を用いて

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix} \quad (7)$$

となる。一方、物質点の変形に伴うひずみ速度を表

す量として変形速度テンソル \mathbf{D} とスピントンソル \mathbf{W} があり各々

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (8a)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (8b)$$

と定義される。式(2)を上式に代入すると、単軸引張り状態における変形速度テンソルおよびスピントンソルは、

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}/\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\lambda}/(2\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\lambda}/(2\lambda) \end{bmatrix} \quad (9a)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (9b)$$

のようになる。これら \mathbf{F} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} および \mathbf{W} は、超弾性体、弾塑性体、粘塑性体などの構成則を利用するうえで必要なテンソルである。

c) 実験結果と考察

図-4および図-5にそれぞれHDR-A、NR-Aの単軸引張り試験におけるCauchy応力と伸び比の関係を示す。ただし図-4では点線で示す処女荷重実験結果において試験後、顕著な残留ひずみが現れ、2回目の試験における開始位置での伸び比が1ではない。

図-4の2回目の荷重試験結果をみると伸び比が小示す。ただし図-4では点線で示す処女荷重実験結果において試験後、顕著な残留ひずみが現れ、2回目の試験における開始位置での伸び比が1ではない。

図-4の2回目の荷重試験結果をみると伸び比が小

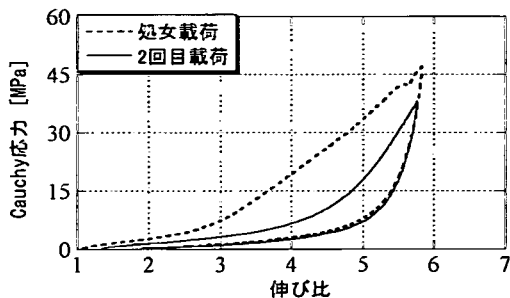


図-4 HDR-Aの単軸引張り試験結果

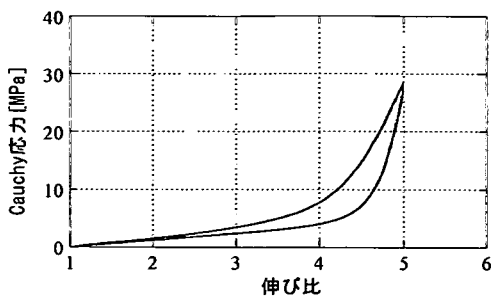


図-5 NR-Aの繰返し単軸引張り試験結果

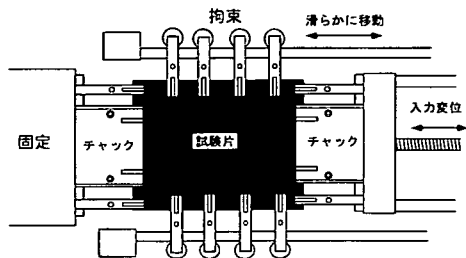


図-6 一軸固定二軸引張り試験の概略図

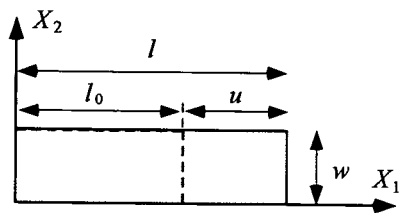


図-7 一軸固定二軸引張り状態の概念図

表-3 一軸固定二軸引張り試験における試験条件

	HDR-A	HDR-B	HDR-C	HDR-D	NR-A	NR-B
試験片の形状	シート片	シート片	シート片	シート片	シート片	シート片
試験片个数	3	3	3	3	3	3
有効長 l_0 [mm]	84.0	100	100	100	100	100
有効幅 w [mm]	90.0	100	100	100	100	100
チャック間距離 [*] [mm]	95.0	120	120	120	117	117
試験片厚 [mm]	1.95	2.23	1.59	1.57	1.03	1.04
載荷速度[mm/min]	50.0	48.0	60.0	60.0	69.5	69.5
試験温度[°C]	24	20	23	23	23	23
過去に経験した最大ひずみ[%]	350	120	200	150	200	150

* 図-6中で試験片をつかんでいるチャック間の試験前の距離

さい範囲においても履歴によるエネルギー吸収が見られる。また、大変形後に残留ひずみを生じていることがわかる。一方、図-5のNR-Aでは、ハードニング領域より小さい伸び比の範囲において極端に履歴によるエネルギー吸収性能が小さく、弾性に近い挙動を示している。そのため大変形後でも残留変形が非常に小さく、元の形状に復元していることがわかる。

(2) 一軸固定二軸引張り試験

a) 試験方法

図-6に示すように矩形シート型試験片の2辺に引張り変形を与え、他の2辺で引張りの直角方向について変形を拘束する一軸固定二軸引張り試験を行っ

た。表-3に試験片の寸法および詳細な試験条件を示す。なお、本試験では試験片の引張り変位、張り荷重および拘束荷重を計測した。

b) 理論的な変形場

図-7に示すように X_2 方向の変形を拘束し、 X_1 方向に変位 u を与え材料に非圧縮を仮定すると \mathbf{x} は

$$x_1 = \lambda X_1 \quad (10a)$$

$$x_2 = X_2 \quad (10b)$$

$$x_3 = \frac{1}{\lambda} X_3 \quad (10c)$$

のように記述できる。ただし λ は伸び比であり、 $\lambda = l/l_0$ である。上式を式(4)、(6)および式(8)に代入すると一軸固定二軸引張り状態において \mathbf{F} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} および \mathbf{W} は具体的に

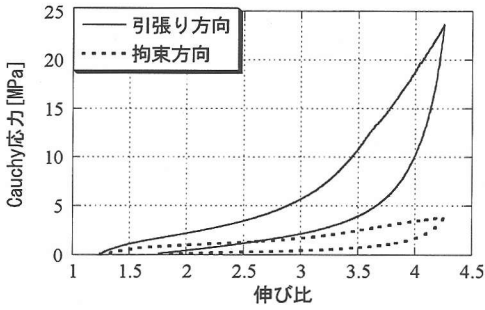


図-8 HDR-A の繰り返し二軸引張り試験結果

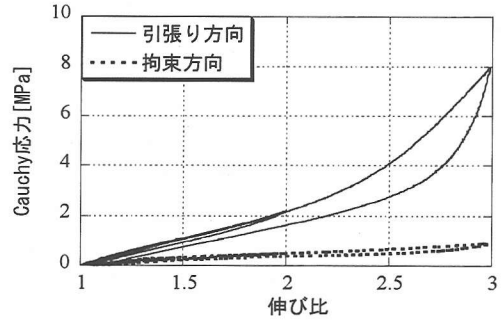


図-9 NR-A の一軸固定二軸引張り試験結果

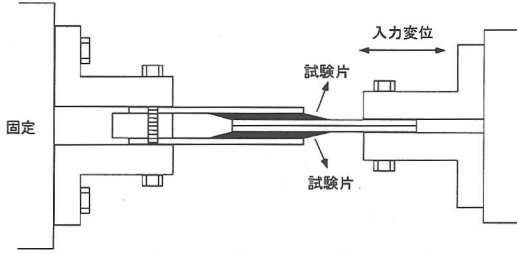


図-10 繰り返し単純せん断試験の概略図

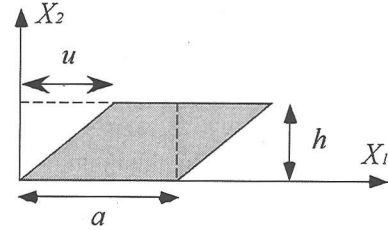


図-11 単純せん断変形状態の概念図

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix} \quad (11a)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda^2 \end{bmatrix} \quad (11b)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}/\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\lambda}/\lambda \end{bmatrix} \quad (11c)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (11d)$$

のようになる。

c) 実験結果と考察

図-8 および図-9 にそれぞれ HDR-A および NR-A の引張り側および拘束側における Cauchy 応力と伸び比の関係を示す。ただし図-8 では処女載荷時に顕著な残留ひずみが現れ、試験開始位置において伸び比が1ではない。

まず、図-8 をみると単軸引張り試験の場合と同様に、高減衰ゴムは伸び比に関わらず引張り方向、拘束方向ともに大きな履歴によるエネルギー吸収性能を有し、また変形後には残留ひずみが見られる。このことから高減衰ゴムが有するエネルギー吸収性能は、弾塑性的な性質を含んでいると考えられる。また、図-8 において、引張り方向および拘束方向における応力進展方向を比較すると、拘束方向では、引張り方向のような顕著なハードニングが表れていない。このことから式(11)に示したひずみ場において、ハ

ードニングは、拘束方向に軽微にかつ引張り方向に大きく影響する量によりモデル化できるものと考えられる。

次に図-9 をみると天然ゴムも履歴によるエネルギー吸収性能を有しており、変形後には僅かながら残留ひずみがある。また、応力進展方向は高減衰ゴムと似通っていることがわかる。このことから高減衰ゴムは、天然ゴムの弾性に近い性質にエネルギー吸収性能を付加したような力学特性を有しているものと考えられる。従ってモデル化に際しては両ゴム材料に同一のモデルが適用できることが予想される。ハードニングは右 Cauchy-Green テンソルの第1不変量に大きく依存することが知られている^{3),5)}。本研究での試験結果において、ハードニングが始まる位置での右 Cauchy-Green テンソルの第1不変量の値を単軸試験結果と一軸固定二軸引張り試験結果について概算すると、いずれのゴムについても単軸引張り試験での値は一軸固定二軸引張り試験での値の1.5~3倍程度であり、両者の間に大きな差がみられた。この差は、両試験で処女載荷時に経験した最大ひずみが異なり、ハードニングにその影響が著しく現れたことが原因であると考えている。

(3) 繰り返し単純せん断試験

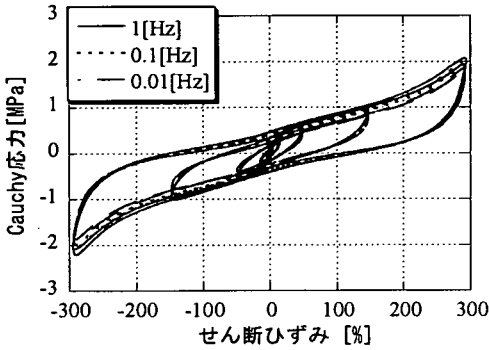
a) 試験方法

2つの鋼板間に接着されている高減衰ゴムにせん断変形を与える繰り返し単純せん断試験を行った。

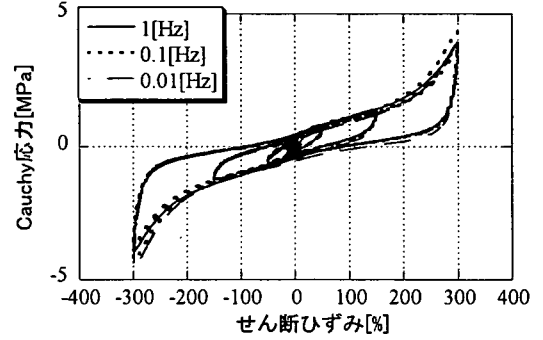
本試験では荷重の対称性を考慮して、図-10に示

表-4 高減衰ゴム(HDR)の繰り返し単純せん断試験の試験条件

材料の略称	HDR-A	HDR-B	HDR-C	HDR-D
試験片の寸法 $a \times a$ [mm]	25.4×25.4	25.4×25.4	25.4×25.4	25.4×25.4
試験片個数	3	3	3	3
試験片厚 h [mm]	2.30	4.80	5.00	5.00
入力変位	正弦波	正弦波	正弦波	正弦波
振幅 (ひずみ γ [%])	5, 15, 50, 150, 300	5, 15, 50, 150, 300	5, 15, 50, 150, 300	5, 15, 50, 150, 300
载荷振動数 [Hz]	0.01, 0.1, 1	0.01, 0.1, 1	0.01, 0.1, 1	0.01, 0.1, 1
同一振幅での载荷回数	3	3	3	3
試験温度 [°C]	22	20	20	20
経験した最大ひずみ [%]	300	300	300	300



(a) HDR-A



(b) HDR-C

図-12 高減衰ゴムの繰り返し単純せん断試験結果

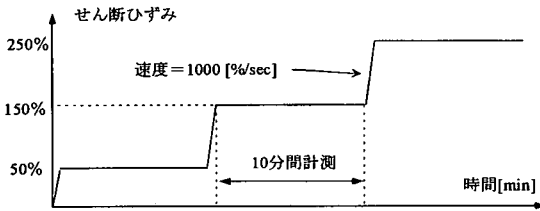


図-13 リラクゼーション試験で用いたステップ波

すように2つの試験片を向かい合わせて変形を与えた。表-4に試験片の寸法および詳細な試験条件を示す。本試験では、せん断変位を与える水平方向の変位および荷重を計測した。

b) 理論的な変形場

図-11に示すように X_1 方向に水平変位 u を与える場合を考える。このとき試験片の高さ h が長さ a と比較して小さく、せん断変形時に物質点の高さ (X_2 座標) が変化しないと仮定する。すると現配置 x と規準配置 X の間に

$$x_1 = X_1 + \frac{u}{h} X_2 \quad (12a)$$

$$x_2 = X_2 \quad (12b)$$

$$x_3 = X_3 \quad (12c)$$

の関係が成立する。これより F , C , D および W は、定義式の式(4), (6)および(8)より次のようになる。

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13a)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13b)$$

$$D = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13c)$$

$$W = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13d)$$

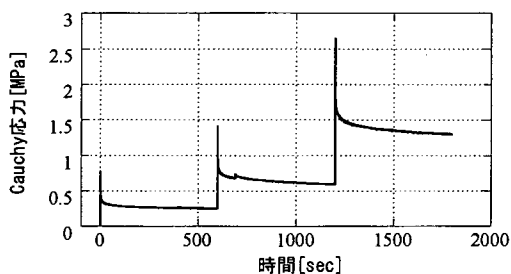
ここに $\gamma = u/h$ である。以後、本論文ではこの γ をせん断ひずみと呼ぶことにする。

c) 実験結果と考察

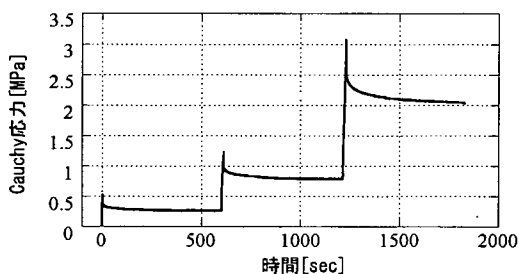
図-12に一度300[%]の変形を受けた後の、HDR-AおよびHDR-Cの単純せん断試験結果を示す。まず、図-12をみると各ひずみレベルにおいてループ形状や応力進展方向が異なっている。ただし、これらの性質は同一ひずみ内では一定していることから、過去に経験したひずみ量などに依存していることを示している。また、高減衰ゴムは载荷振動数が0.01~1[Hz]の変化に対し、概ね同一のループを描いている。

表-5 高減衰ゴム(HDR)の応力緩和試験の試験条件

材料の略称	HDR-A	HDR-B	HDR-C	HDR-D
試験片	せん断試験片	せん断試験片	せん断試験片	せん断試験片
試験片の平面寸法[mm]	25.4×25.4	25.4×25.4	25.4×25.4	25.4×25.4
試験片高さ[mm]	2.30	4.80	5.00	5.00
入力変位	3段階ステップ波	4段階ステップ波	3段階ステップ波	3段階ステップ波
振幅ひずみ [%]	50, 150, 250	50, 100, 150, 250	50, 150, 250	50, 150, 250
応力緩和時の待ち時間 [min]	10	5	10	10
ステップ波におけるひずみ速度[%/sec]	500	417	1000	1000
試験温度[°C]	22	20	20	20
処女載荷時に経験した最大ひずみ[%]	300	300	300	300



(a) HDR-A



(b) HDR-C

図-14 高減衰ゴムのリラクゼーション試験結果

このことから高減衰ゴムの安定した履歴ループは、0.01~1[Hz]の振動数範囲で速度依存性が軽微であることがわかる。

(4) リラクゼーション試験

a) 試験方法

本試験では、繰り返しせん断試験と同一の方法により、図-13 に示す多段階のステップ変位を試験片に与え、各変位における荷重値を計測した。表-5 に詳細な試験条件を示す。なお、理論的な変形場は、繰り返し単純せん断試験の場合と同一である。

b) 実験結果と考察

図-14 に HDR-A および HDR-C の応力緩和曲線を示す。図-14 をみると大きな応力緩和がみられ、このことから高減衰ゴムはエネルギー吸収性能に粘性を含んでいることがわかる。単軸および一軸固定二軸引張り試験の結果とあわせて考えると、高減衰ゴムは粘性と塑性が混在する材料であると推測される。また、応力緩和曲線の形状をみると線形の粘弾性体を示す指数型の応力緩和曲線と異なり、非線形の応力緩和を示している。具体的には、試験開始直後において、急激に応力が低下していることから短時間の応力緩和を含んでいる。さらに時間が経過しても応力緩和の勾配が零にならないことから長時間の応力緩和も含んでいるものと考えられる。

(5) まとめ

以上の4つの材料試験より、高減衰ゴムは天然ゴムと似通った応力進展方向を示し、かつ粘性と塑性の両者により履歴によるエネルギー吸収性能を発揮していると考えられる。ただし、一般的な免震橋梁の固有振動数を含む振動数範囲 0.01[Hz]~1[Hz]においては、応力進展方向およびエネルギー吸収性能のひずみ速度依存性が軽微であり、ひずみ速度によらず一定の履歴エネルギー吸収性能を示している。このことから以下に示すモデル化では、材料の応力進展方向を超弾性体により、エネルギー吸収性能を弾塑性体により表現し、高減衰ゴムが超弾性と弾塑性性の混在する材料であるとみなす。そのためモデル化においては、上述した材料試験のなかで単軸引張り試験、一軸固定二軸引張り試験および繰り返しせん断試験の結果を利用する。

3. ゴム材料の構成則

(1) モデルの概要

本研究では高減衰ゴムの構成則として、超弾性体と弾塑性体を並列に組み合わせるモデルを提案する。図-15 にモデルの概念図を示す。このモデルでは、弾塑性体と超弾性体に同一のひずみ場が生じる。こ

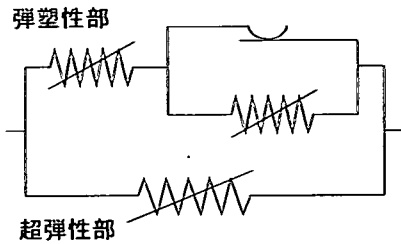


図-15 モデルの概念図

のひずみ場において、各構成則から得られる Cauchy 応力テンソルの和が、モデルの Cauchy 応力テンソルである。本モデルでは、圧縮性を仮定しており体積変形と圧力の関係は超弾性部においてモデル化する。また、弾塑性部では偏差応力分をモデル化する。以下では、図-15 に示した超弾性部分ならびに弾塑性部分の具体的な数式について説明する。

(2) 超弾性部分

a) 微圧縮性の超弾性体

実際のゴム材料は、微小ではあるが体積変化する。本研究では超弾性部分において圧縮性を仮定した構成則を用いた。圧縮性を仮定した超弾性体では、全ひずみエネルギー密度関数 \bar{w} は、体積変形に関する $\chi(W^v)^2/2$ と、それ以外の変形に関する W の和として次式のように記述することができる⁹⁾。

$$\bar{w}(\mathbf{C}) = W(\bar{I}_c, \bar{II}_c) + \frac{\chi}{2} W^v (III_c)^2 \quad (14)$$

ここに W^v は、変形勾配テンソルを \mathbf{F} として $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ で定義される右 Cauchy-Green テンソル \mathbf{C} の 3 次不変量 III_c のみの関数で無変形状態において ($III_c = 1$ のとき)、 $W^v = 0$ 、 $\partial W^v / \partial III_c = 1$ を満たすものである。 W^v の具体的な形としては以下のものが考えられる。

$$W_1^v = III_c - 1 \quad (15a)$$

$$W_2^v = \ln III_c \quad (15b)$$

$$W_3^v = 2(J - 1) \quad (15c)$$

ここに $J = \sqrt{III_c} = \det(\mathbf{F})$ である。上式で定義される W_i^v は、いずれを用いた場合にも材料が微圧縮性である場合に力学的に同一の性質を意味し、体積弾性係数 κ と式(14)の χ との間に $\kappa = 4\chi$ の関係が成立する⁹⁾。ただし、有限要素法に組み込んだ場合に、数値計算上は式(15c)を用いると安定した結果が得られるため、本研究では W_3^v を用いた。

一方、式(14)の \bar{I}_c および \bar{II}_c は、右 Cauchy-Green テンソル \mathbf{C} の低減不変量と呼ばれ、体積変形に対して不変の値である。具体的には \mathbf{C} の第 1, 第 2, 第 3 不変量をそれぞれ I_c , II_c , III_c とすると次のように定義される。

$$\bar{I}_c = I_c / III_c^{1/3} \quad (16a)$$

$$\bar{II}_c = II_c / III_c^{2/3} \quad (16b)$$

b) 超弾性ダメージモデル

高減衰ゴムにおける応力進展方向の最大経験ひずみ依存性をモデル化するために、式(14)のひずみエネルギー密度関数 W にダメージ指標を以下のように導入する⁷⁾。

$$\bar{w}^D(\mathbf{C}, \Xi_i^m) = g(\Xi_i^m) W \quad (17)$$

ここに g はダメージ指標である。ただし上式においては、ゴムの体積変形は微小であることから体積変形の最大経験ひずみ依存性は考慮しないものとした。ここでゴム材料の最大経験ひずみ依存性が等方性を有していると仮定すると、 g は以下のように右 Cauchy-Green テンソルの不変量の関数として記述できる。

$$\Xi_i^m = \max_{s \in (-\infty, t]} \Xi_i \quad (18a)$$

$$\Xi_i = \Xi_i(I_c(s), II_c(s), III_c(s)) \quad (18b)$$

ただし t は現時刻を表すものとする。上式より Ξ_i は右 Cauchy-Green テンソルの不変量の関数であり、 Ξ_i^m は Ξ_i が過去に経験した最大値である。なお、変形前の状態ではダメージを受けていないことから、ダメージ指標 g は $g(0) = 1$ を満たす関数である。

ここでダメージ基準曲面を

$$\Psi = \Xi_i - \Xi_i^m = 0 \quad (19)$$

と定義すると、ダメージ指標 g は Ξ_i^m の関数であることから、 $\Psi = 0$ かつ $\Psi > 0$ の場合に成長することがわかる。

式(17)で定義される \bar{w}^D を用い、第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} と Green-Lagrange ひずみテンソル \mathbf{E} がエネルギー共役であることを考慮すると、超弾性ダメージモデルから得られる応力-ひずみ関係は、

$$\mathbf{S} = g(\Xi_i^m) \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} + \chi W^v \frac{\partial W^v}{\partial \mathbf{E}} \quad (20)$$

となる。

材料試験結果より、高減衰ゴムの応力進展方向の最大経験ひずみ依存性はハードニング前後のひずみで異なる性質を有していると考えられる。このことから本研究では、以下に示すような線形挙動とハードニング挙動を示すひずみエネルギー関数 W_1 , W_2 それぞれにダメージ関数 g および h を導入し、その和を全ひずみエネルギー密度関数 W として用いた。

$$W = gW_1 + hW_2 \quad (21a)$$

$$W_1 = c_1(\bar{I}_c - 3) + c_2(\bar{II}_c - 3) \quad (21b)$$

$$W_2 = \frac{c_3 c}{n+1} \left(\frac{\bar{I}_c - 3}{c} \right)^{n+1} \quad (21c)$$

$$g(x) = \beta + (1 - \beta) \frac{1 - e^{-x/\alpha}}{x/\alpha} \quad (21d)$$

$$x(t) = \max_{s \in (-\infty, t]} \sqrt{2W_1(s)} \quad (21e)$$

$$h(y) = 1 - \frac{1}{1 + \exp\{-\alpha_H(y - b_H)\}} \quad (21f)$$

$$y(t) = \max_{s \in (-\infty, t]} (\bar{I}_c(s) - 3) \quad (21g)$$

ここに $c_1, c_2, c_3, c, n, \alpha, \beta, a_H$ および b_H は材料定数である。また $\max_{s \in (-\infty, t]} A(s)$ は、過去 $s = -\infty$ から現時刻 $s = t$ において $A(s)$ の最大値を示す。

上式においてひずみエネルギー関数 W_1 は、ハードニングが始まるより小さいひずみ領域における応力進展方向を再現するためのものである。ひずみが 100 [%]以下の比較的小さい領域を対象としていることから、ダメージ関数 g は文献7)で提案されているものを用いている。

一方、ひずみエネルギー関数 W_2 は、大ひずみ領域に現れるハードニング現象を近似するためのものである。従ってダメージ関数 h は大ひずみ領域において有意なダメージが現れ、かつダメージ分布が滑らかなようになるように式(21f)の関数を選択した。なお、式(21f)の関数 h は $h(0) = 1$ を厳密には満足しない。しかし、大ひずみ領域においてダメージが現れることから定数 b_H が大きな値となる。このことから $h(0) \approx 1$ が成立するため、式(21f)を用いた。

(3) 弾塑性部分

ここでは、まず微小変形を前提として提案されている既往の弾塑性構成則を、大ひずみ問題にも適用できる型に拡張する。次いで高減衰ゴムの除荷曲線やハードニングなどを再現するためにモデルを改善する。

a) 微分方程式で記述される弾塑性モデル

Graesser らは、微小変形を前提とした金属材料のための弾塑性構成則を提案している^{10,11)}。以下に完全弾塑性の場合の具体的な数式を示す。

微小ひずみを ε 、応力を τ とすると

$$\dot{\varepsilon} = \mathbf{C}^{(e)} : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad (22)$$

ここに

$$\dot{\varepsilon}^p = (3K_2)^{1/2} (3J_2)^{(N-1)/2} \frac{\tau'}{\tau_y} \quad (23a)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}' : \dot{\varepsilon}' \quad (23b)$$

$$J_2 = \frac{\tau' : \tau'}{2\tau_y^2} \quad (23c)$$

$$\mathbf{C}_{ijkl}^{(e)} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (23d)$$

ただし λ, μ はLame 定数であり、 τ_y は降伏応力、 N は弾性域から塑性域へ遷移する滑らかさを表す材料定数である。また \mathbf{A}, \mathbf{B} を任意のテンソルとして、 \mathbf{A}'

は \mathbf{A} の偏差テンソルを表し、 $\mathbf{A} : \mathbf{B}$ は、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$ のトレース、すなわち $\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T)$ を表す。

このモデルは粘弾塑性論をベースとしており、既往の弾塑性モデル¹²⁾にみられるマコーレの括弧を用いず、場合分けによらない単一の微分方程式の形で記述されている。そのため、この微分方程式を解くことで弾性域と塑性域の判定、ならびに載荷と徐荷の判定を自動的に行うことが可能である。また、古典塑性論では再現が困難である弾性域から塑性域への滑らかな変化を再現できるという利点を有する。

b) 大ひずみ問題に適用するための拡張

上述した式(22)の構成則を大ひずみ状態に適用できるように拡張する。微小変形理論における弾塑性体を拡張する手法としていくつかの定式化が知られているが^{13,14)}、ここでは変形速度テンソル \mathbf{D} を弾性成分 \mathbf{D}^e と塑性成分 \mathbf{D}^p の和

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (24)$$

のように分解する加算分解を用いる。この拡張法では微小変形弾塑性論における塑性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}^p$ を \mathbf{D}^p で、応力速度 $\dot{\varepsilon}$ を Cauchy 応力テンソルの Jaumann 速度 $\dot{\mathbf{T}}_J(t)$ で置き換える。式(22)にこの拡張方法を適用すると大ひずみを前提とした弾塑性構成則は、以下のように記述できる。

$$\dot{\mathbf{T}}_J(t) = \mathbf{C}^{(E)} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) \quad (25)$$

ここに

$$\mathbf{D}^p = (3K_2)^{1/2} (3J_2)^{(N-1)/2} \frac{\mathbf{T}'}{\tau_y} \quad (26a)$$

$$K_2 = \frac{\mathbf{D}' : \mathbf{D}'}{2} \quad (26b)$$

$$J_2 = \frac{\mathbf{T}' : \mathbf{T}'}{2\tau_y^2} \quad (26c)$$

である。また $\mathbf{C}_{\mu\nu}^{(E)}$ は弾性構成則テンソルである。

c) 弾性構成則テンソル

高減衰ゴムは天然ゴムがベースとなっていることから、各材料試験において除荷時に現れる弾性的な挙動は、天然ゴムの性質に近いものだと考えられる。微小変形を前提とした式(22)においては金属を対象としているため、微小ひずみを前提とした等方線形弾性体の構成則テンソルを用いているものの、ゴム材料の大ひずみを再現するには適切ではない。そこで式(22)の弾性構成則テンソル $\mathbf{C}_{\mu\nu}^{(E)}$ として、以下に示すひずみエネルギー密度関数 W_E の超弾性体から得られるものを用いる。ただし、本節(1)で述べたように弾塑性部から得られる応力は、圧力を除いた偏差応力であるから、この超弾性体のひずみエネルギー密度関数 W_E は体積変形-静水圧力の関係とは独立しており、

$$W_E = W_E(\bar{I}_c, \bar{II}_c) \quad (27)$$

のように式(16)で定義した右 Cauchy-Green テンソル \mathbf{C} の低減不変量 \bar{I}_c および \bar{II}_c のみの関数となる。具体的な W_E としては、

$$W_E = c_4(\bar{I}_c - 3) + c_5(\bar{II}_c - 3) + \frac{c_4 c}{m+1} \left(\frac{\bar{I}_c - 3}{c} \right)^{m+1} \quad (28)$$

を用いる⁵⁾。ただし c_4 , c_5 および m は材料定数である。このひずみエネルギー密度関数 W_E を用いると第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} は、

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W_E}{\partial \mathbf{C}} \quad (29)$$

のようになる。ただし上式における第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} は、静水圧力を除いた偏差応力テンソルである。

ここで第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソルの時間導関数 $\dot{\mathbf{S}}$ と Green-Lagrange ひずみテンソルの時間導関数 $\dot{\mathbf{E}}$ を関連付ける構成則テンソルを求めるために上式の時間について微分すると

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}^{(0)} : \dot{\mathbf{E}} \quad (30)$$

を得る。ただし、

$$\mathbf{C}^{(0)} = 4 \frac{\partial^2 W_E}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (31)$$

である。この構成則テンソル $\mathbf{C}^{(0)}$ は、規準配置で定義される応力速度 $\dot{\mathbf{S}}$ とひずみ速度 $\dot{\mathbf{E}}$ を関連付けるものであるから、式(25)の弾塑性体における弾性構成則テンソルとして利用するのは適切でない。そこでこの構成則テンソル $\mathbf{C}^{(0)}$ を、変形速度テンソルと Cauchy 応力テンソルの Jaumann 速度とを関連付けるものになるよう変形する。

まず、変形速度テンソル \mathbf{D} と Green-Lagrange ひずみの時間導関数 $\dot{\mathbf{E}}$ の間には、

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F} \quad (32)$$

が成立すし、さらに Truesdell 応力速度テンソルを $\dot{\mathbf{S}}^{(t)}$ とすると $\dot{\mathbf{S}}^{(t)}$ と第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソルの時間導関数 $\dot{\mathbf{S}}$ との間には、

$$\dot{\mathbf{S}}^{(t)} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{F}^T \quad (33)$$

のような関係がある。式(32), (33)を式(30)に代入して

$$\dot{\mathbf{S}}^{(t)} = \mathbf{C}^{(t)} : \mathbf{D} \quad (34a)$$

$$C_{pqrs}^{(t)} = \frac{1}{J} F_{pi} F_{qj} F_{rk} F_{il} C_{ijkl}^{(0)} \quad (34b)$$

を得る。ここで Truesdell 応力速度 $\dot{\mathbf{S}}^{(t)}$ と Cauchy 応力テンソルの Jaumann 速度 $\dot{\mathbf{T}}_{(t)}$ の間には、

$$\dot{\mathbf{S}}^{(t)} = \dot{\mathbf{T}}_{(t)} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + (\text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{T} \quad (35)$$

のような関係があることから¹⁴⁾

$$\dot{\mathbf{T}}_{(t)} = \bar{\mathbf{C}} : \mathbf{D} \quad (36a)$$

$$\bar{C}_{ijkl} = C_{ijkl}^{(t)} + \delta_{ik} T_{lj}^{(h)} + \delta_{jl} T_{ik}^{(h)} - \delta_{ij} T_{lk}^{(h)} \quad (36b)$$

$$\mathbf{T}^{(h)} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W_E}{\partial \mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^T \quad (36c)$$

が成立する。上式より $\bar{\mathbf{C}}_{ij}$ は、Cauchy 応力テンソルの Jaumann 速度と変形速度テンソルを関連付ける弾性構成則テンソルであることがわかる。このことより式(25)の弾性構成則テンソル $C_{ij}^{(E)}$ として式(36b)の $\bar{\mathbf{C}}_{ij}$ を用いる。

d) 等方硬化則

高減衰ゴムのエネルギー吸収性能は、ひずみに依存する。本モデルでは、降伏応力をひずみの関数とすることでこの特性を表現する。初期降伏応力を τ_0 とすると、現時刻の降伏応力 τ_y は、次式に従うものとする。

$$\tau_y = \tau_0 \left\{ 1 + \left(\frac{\bar{I}_c - 3}{c} \right)^b \right\} \quad (37)$$

ここに \bar{I}_c は式(16)で定義した値であり、 b は材料定数である。

e) 弾塑性部のまとめ

上述した拡張を行った弾塑性部の構成則を以下にまとめて示す

$$\dot{\mathbf{T}}_{(t)} = \mathbf{C}^{(E)} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) \quad (38)$$

ここに

$$\mathbf{D}^p = (3K_2)^{1/2} (3J_2)^{(N-1)/2} \frac{\mathbf{T}'}{\tau_y} \quad (39a)$$

$$K_2 = \frac{\mathbf{D}' : \mathbf{D}'}{2} \quad (39b)$$

$$J_2 = \frac{\mathbf{T}' : \mathbf{T}'}{2\tau_y^2} \quad (39c)$$

$$\tau_y = \tau_0 \left\{ 1 + \left(\frac{\bar{I}_c - 3}{c} \right)^b \right\} \quad (39d)$$

である。また $C_{ijkl}^{(E)}$ は弾性構成則テンソルで次式により与えられる。

$$C_{pqrs}^{(E)} = \frac{1}{J} F_{pi} F_{qj} F_{rk} F_{il} C_{ijkl}^{(0)} + \delta_{pr} T_{sp}^{(h)} + \delta_{qs} T_{pr}^{(h)} - \delta_{rs} T_{pq}^{(h)} \quad (40a)$$

$$\mathbf{C}^{(0)} = \frac{\partial^2 W_E}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} \quad (40b)$$

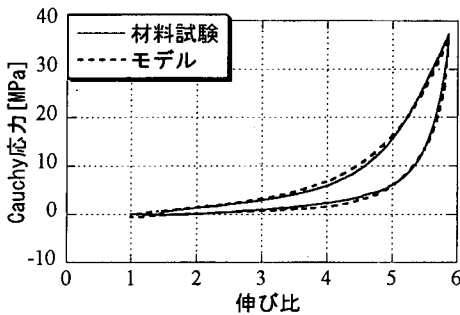
$$\mathbf{T}^{(h)} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W_E}{\partial \mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^T \quad (40c)$$

$$W_E = c_4(\bar{I}_c - 3) + c_5(\bar{II}_c - 3) + \frac{c_4 c}{m+1} \left(\frac{\bar{I}_c - 3}{c} \right)^{m+1} \quad (40d)$$

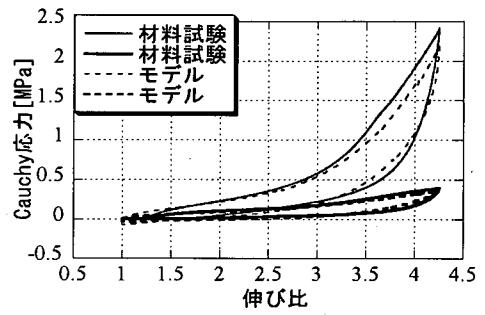
ただし c_4 , c_5 , m , b , τ_0 および N は材料定数である。なお、ここで提案した構成則が大変形・大ひずみ問題において、客観性を有し数学的に成立することを付録において示す。

表-6 材料試験結果から同定した材料定数

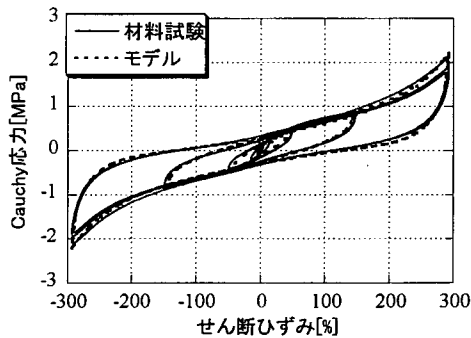
	HDR-A	HDR-B	HDR-C	HDR-D	NR-A	NR-B
c_1 [MPa]	3.23×10^{-1}	6.18×10^{-1}	6.37×10^{-1}	6.79×10^{-1}	3.17×10^{-1}	4.56×10^{-1}
c_2 [MPa]	1.27×10^{-1}	1.49×10^{-1}	0.784×10^{-1}	0.822×10^{-1}	0.0654×10^{-1}	0.131×10^{-1}
c_3 [MPa]	0.686×10^{-1}	1.49×10^{-1}	1.08×10^{-1}	1.32×10^{-1}	0.153×10^{-1}	0.320×10^{-1}
c	6.59	4.91	5.48	5.64	2.98	5.23
n	2.71	2.62	2.72	2.86	2.85	2.95
α	0.800	0.0085	0.101	0.109	0.649	0.751
β	0.302	0.302	0.299	0.308	0.345	0.423
a_H	0.138	0.200	0.323	0.411	0.201	0.230
b_H	14.0	9.00	12.1	12.7	11.2	9.00
τ_0 [MPa]	5.88×10^{-1}	6.18×10^{-1}	8.13×10^{-1}	8.35×10^{-1}	0.598×10^{-1}	0.672×10^{-1}
N	0.400	0.301	0.400	0.421	0.917	0.820
c_4 [MPa]	2.06×10^{-1}	2.98×10^{-1}	3.13×10^{-1}	3.35×10^{-1}	0.488×10^{-1}	0.562×10^{-1}
c_5 [MPa]	1.67×10^{-1}	1.51×10^{-1}	3.92×10^{-1}	2.96×10^{-1}	1.64×10^{-1}	1.83×10^{-1}
m	1.43	1.20	1.92	2.00	1.72	1.99
b	1.72	2.81	1.41	1.62	2.90	3.42



(a) 単軸引張り試験



(b) 一軸固定二軸引張り試験



(c) 繰り返し単純せん断試験

図-16 構成則とHDR-Aの材料試験結果との比較

(4) 材料定数の同定

上述したように材料定数は超弾性部で9個、弾塑性部で6個である。これらの材料定数は、単純せん断試験、単軸引張り試験、一軸固定二軸引張り試験についてそれぞれ定義した E_{shear} , E_{uni} および E_{bi} が最小になるように、最小二乗法の1つであるシンプレックス法¹⁵⁾を用いて同定した。

$$E_{shear} = \int_0^{\infty} |T_{12}^{(e)} - T_{12}^{(c)}| |D_{12}| dt \quad (41a)$$

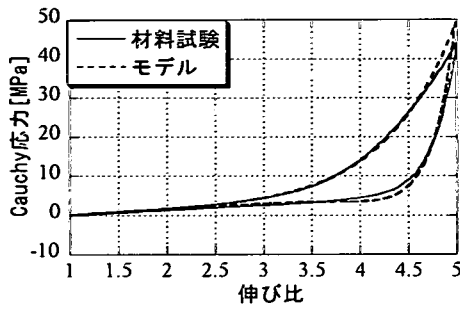
$$E_{uni} = \int_0^{\infty} |T_{11}^{(e)} - T_{11}^{(c)}| |\dot{\lambda}| dt \quad (41b)$$

$$E_{bi} = \int_0^{\infty} |T_{11}^{(e)} - T_{11}^{(c)}| |\dot{\lambda}| dt + \int_0^{\infty} |T_{22}^{(e)} - T_{22}^{(c)}| |\dot{\lambda}| dt \quad (41c)$$

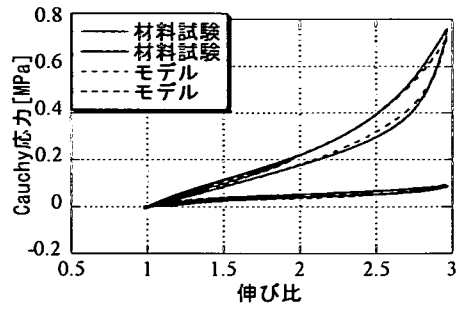
ここに $T_{ij}^{(e)}$ および $T_{ij}^{(c)}$ は、それぞれ材料試験および提案したモデルから得られる Cauchy 応力テンソルの ij 成分であり、 D_{12} は変形速度テンソルのせん断成分である。また $\dot{\lambda}$ は引張り試験における伸び比の時間導関数である。

a) 高減衰ゴム

高減衰ゴムでは、まず式(41a)を繰り返し単純せん断試験に適用して $c_1 + c_2$, $c_4 + c_5$, α , β , τ_0 および N を同定した。次いで一軸固定二軸引張り試験に式(41c)を適用して c_2 , c_3 および c を同定した。最後に単軸引張り試験に式(41b)を適用して c_3 , n , a_H , b_H , m および b を同定した。同定した材料定数を表-6に示す。ここに各試験結果を用いた同定は、材料定数が重複していないため上述した順番で、3つの材料試験結果とモデルを用いた計算値との差が十分小さくなるまで繰り返し計算を行った。



(a) 単軸引張り試験



(b) 一軸固定二軸引張り試験

図-17 構成則とNR-Aの材料試験結果との比較

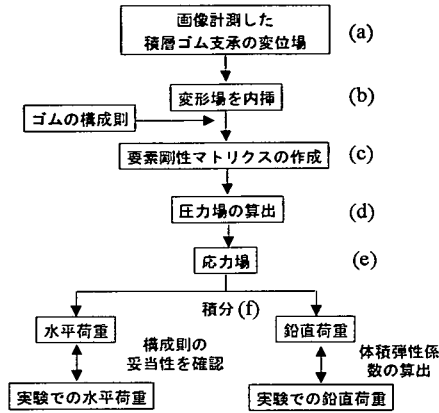


図-18 ハイブリッド解析手法のフローチャート

b) 天然ゴム

天然ゴムの材料試験では、繰り返し単純せん断試験をおこなっていないものの、単軸、および一軸固定二軸引張り試験において繰り返し载荷をおこなっている。そこでエネルギー吸収性能に関連したパラメータの同定は、両引張り試験の結果を用いた。まず式(41c)を二軸引張り試験結果に適用して c_1 、 c_2 、 c_4 、 c_5 、 α 、 β 、 c 、 τ_0 および N を同定した。次いで単軸引張り試験に式(40b)を適用して c_3 、 n 、 a_H 、 b_H 、 m 、 b を同定した。同定した材料定数を表-6に示す。ただし高減衰の場合と同様に、各試験において同定する材料定数が重複していないため上述した順番で、試験結果とモデルによる計算値との差が十分小さくなるまで繰り返し計算を行った。

(5) 構成則の再現性

表-6に示した材料定数を用いたモデルによる解析結果と材料試験結果の比較を図-16および図-17に示す。図-16および図-17をみると高減衰ゴム、天然ゴムともに材料試験結果にみられるハードニング特性や履歴ループの振幅依存性を、本構成則により精度よく再現できていることがわかる。

4. 構成則の検証と体積弾性係数の算出

ここでは画像計測により得られた積層ゴム支承の表面変位場⁸⁾と数値計算とを融合し、提案した構成則を検証する手法を提案する。さらに積層ゴム支承がゴムの体積変形を拘束して荷重を支持していることに着目し、通常計測が困難なゴム材料の体積弾性係数を算出する。

この計測結果と数値計算を融合して材料の力学特性を定量的に評価する手法を以後ハイブリッド解析手法と呼ぶこととする。

(1) ハイブリッド解析手法

具体的なハイブリッド解析手法の手順を以下に示す。

- (a) 離散的な計測点を有限要素法における節点であると考慮領域に要素を定義する。
 - (b) 内挿関数により定義した要素内の変位場を補間する補間した変位場の空間導関数からひずみ場を算出する。
 - (c) ひずみ場に構成則を適用し、変位増分と圧力増分を得るための要素剛性マトリクスを作成する。
 - (d) 画像計測で得られている変位増分を利用し、剛性マトリクスを解いて圧力増分を算出する。
 - (e) ひずみ場に構成則を適用し、さらにc)で得られた圧力場を加えることで応力場を算出する。
 - (f) 応力場を体積積分して節点力を算出する。
- である。本手法のフローチャートを図-18に示す。

以下では変位場が画像計測によりすでに得られており、かつ材料の構成則が有限要素法に適用できることを前提として、節点力を算出する方法について記述する。具体的な定式化としては updated Lagrange 法¹⁴⁾を用いる。

仮想仕事の原理から、外力による仮想仕事 δR は、現配置 \mathbf{x} で定義される量を用いて表すと以下のようになる。

$$\delta R = \int_V \delta A_{ij} T_{ij} dv_e \quad (42)$$

ここに、 dv は現配置における微小体積であり、 \mathbf{T} は Cauchy 応力テンソルである。また、 $\delta\mathbf{A}$ は仮想変位 $\delta\mathbf{u}$ に対応した Almange ひずみテンソルの線形成分であり、以下ようになる。

$$\delta A_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (43)$$

ここで $\{\delta A\}$ および $\{T\}$ を

$$\{\delta A\} = \{\delta A_{11}, \delta A_{22}, \delta A_{33}, 2\delta A_{12}, 2\delta A_{23}, 2\delta A_{31}\}^T \quad (44a)$$

$$\{T\} = \{T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{23}, T_{31}\}^T \quad (44b)$$

のように定義すると δR は、

$$\delta R = \int_V \{\delta A\}^T \cdot \{T\} dv \quad (45)$$

のように記述することができる。

一方、変位場 \mathbf{u} を内挿関数 $N^{(k)}$ および離散変位 $\mathbf{u}^{(k)}$ を用いて有限要素補間すると、

$$\mathbf{u}_i = N^{(k)} \mathbf{u}_i^{(k)} \quad (46a)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_j} u_i^{(k)} \quad (46b)$$

となり仮想変位 $\delta\mathbf{u}$ についても同様にして、

$$\delta u_i = N^{(k)} \delta u_i^{(k)} \quad (47a)$$

$$\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_j} \delta u_i^{(k)} \quad (47b)$$

を得る。ここで、

$$\{\delta u\} = \{\delta u_1^{(1)}, \delta u_2^{(1)}, \delta u_3^{(1)}, \dots, \delta u_1^{(m)}, \delta u_2^{(m)}, \delta u_3^{(m)}\}^T \quad (48)$$

とすると $\{\delta A\}$ は、以下のように記述できる。

$$\{\delta A\} = [B] \cdot \{\delta u\} \quad (49)$$

ただし、 $[B]$ はサブマトリクス $[B^{(k)}]$ を並べたもので以下のように定義される。

$$[B] = [[B^{(1)}] [B^{(2)}] \dots [B^{(m)}]] \quad (50a)$$

$$[B^{(k)}] = \begin{bmatrix} N_{,1}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & N_{,2}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & N_{,3}^{(k)} \\ N_{,2}^{(k)} & N_{,1}^{(k)} & 0 \\ 0 & N_{,3}^{(k)} & N_{,2}^{(k)} \\ N_{,3}^{(k)} & 0 & N_{,1}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (50b)$$

$$N_{,i}^{(k)} = \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_i} \quad (50c)$$

以上より式(49)を式(42)に代入すると仮想仕事の式は、

$$\delta R = \{\delta u\}^T \int_V [B]^T \cdot \{T\} dv \quad (51)$$

となる。上式より、外力と釣り合う内力ベクトル \mathbf{Q} は以下のように離散化される。

$$\mathbf{Q} = \int_V [B]^T \cdot \{T\} dv \quad (52)$$

(2) 圧力場の算出

微圧縮性材料では、内力ベクトル \mathbf{Q} の算出に必要な Cauchy 応力テンソル \mathbf{T} を得るために、変位場とは独立した圧力場を算出する必要がある。

圧力場を算出するために射影混合法⁹⁾による有限要素法の定式化を行うと、要素レベルでの増分方程式は、以下ようになる。

圧力場を算出するために射影混合法⁹⁾による有限要素法の定式化を行うと、要素レベルでの増分方程式は、以下ようになる。

$$\int_V \begin{bmatrix} [K] & [H] \\ [H]^T & [G] \end{bmatrix} dv \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{\dot{\phi}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{ext}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} - \int_V \begin{Bmatrix} \{FU\} \\ \{FP\} \end{Bmatrix} dv \quad (53)$$

ここに $\{\dot{u}\}$ および $\{\dot{\phi}\}$ はそれぞれ変位、圧力の時間導関数であり、 $[K]$ 、 $[H]$ および $[G]$ は接線剛性マトリクスの一部である。また $\{FU\}$ および $\{FP\}$ は節点における内力ベクトルであり、 $\{F_{ext}\}$ は外力ベクトルである。上式の下半分を取り出すと

$$\int_V [H]^T dv \{\dot{u}\} + \int_V [G] dv \{\dot{\phi}\} = - \int_V \{FP\} dv \quad (54)$$

が成立する。ここで画像計測結果よりすでに変位ベクトルの増分 $\{\dot{u}\}$ は既知量であると考えると

$$\{\dot{\phi}\} = \left(\int_V [G] dv \right)^{-1} \left(- \int_V \{FP\} dv - \int_V [H]^T dv \{\dot{u}\} \right) \quad (55)$$

のように圧力の増分 $\{\dot{\phi}\}$ を算出することができる。要素レベルにおいて圧力増分を算出し、それを順次加えていくことで圧力場 $\{\dot{\phi}\}$ を得ることができる。得られた圧力場を用いて Cauchy 応力テンソル \mathbf{T} を算出しさらに式(52)から節点力を得ることができる。以上の(1)、(2)における定式化は一般的な3次元のものであるが計測した画像は2次元である。ここでは実験条件から平面ひずみを仮定し、上式を2次元に縮退して利用した。

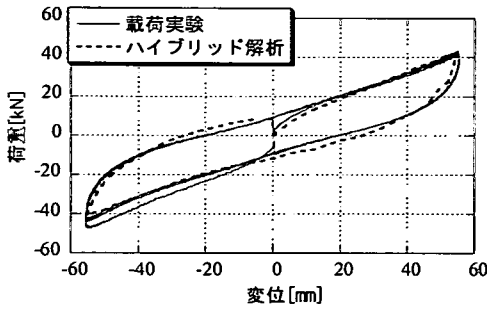
(3) 構成則の妥当性の検証

積層ゴム支承の載荷実験で得られた復元力特性と、ハイブリッド解析手法により算出した水平方向の復元力特性を図-19(a)に示す。図-19(a)をみると水平方向の復元力特性では、両者がよく一致しており提案した構成則を積層ゴム支承に適用した場合の妥当性を検証できた。

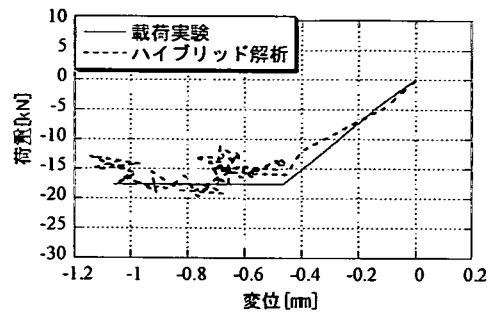
(4) 体積弾性係数の算出

積層ゴム支承はゴム層の体積変形を内部鋼板により拘束している。そのため支承に圧縮変形を与えると、その変位-荷重関係は、ゴムの圧縮性に大きく影響されることになる。ここでは上述したハイブリッド解析手法において得られる鉛直方向の変位-荷重関係を利用してゴム材料の体積弾性係数を算出した。具体的には、実験で得られた鉛直方向の変位-荷重関係とハイブリッド解析手法による変位-荷重関係との差を最小にするように体積弾性係数を同定した。

表-7 に各ゴム材料における体積弾性係数の同定



(a) 水平方向



(b) 鉛直方向

図-19 支承の復元力特性の比較

表-7 同定した体積弾性係数

	HDR-A	HDR-B	HDR-C	HDR-D	NR-A	NR-B
体積弾性係数[MPa]	627	862	510	594	313	477

結果を示す。また、図-19(b)にHDR-Aの鉛直方向の復元力特性についての比較を示す。図-19(b)をみると画像計測における量子誤差の影響で滑らかにはなっていないものの、両者は概ね一致している。以上より積層ゴム支承の画像計測結果を応用してゴム材料の体積弾性係数を実験的に得ることができた。

(5) 応力の平衡誤差の検討

ハイブリッド解析手法では、支承の载荷実験で得られた変位場に構成則を直接代入しているため、応力場が平衡している保証がない。そのため平衡方程式と等価な仮想仕事の原理

$$\int_V \mathbf{T} : \delta \mathbf{A} dv = \int_S \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} ds + \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dv \quad (56)$$

を必ずしも満足していない。ただし \mathbf{t} は境界における外部からの面積力、 ρ は質量密度、 \mathbf{g} は体積力である。ここでは式(56)の左辺と右辺をそれぞれ離散化した値を比較することにより変位場の誤差を検討する。離散化した仮想変位をベクトル表示したものを $\{\delta \mathbf{u}\}$ とすると、式(56)の左辺と右辺はそれぞれ

$$\int_V \mathbf{T} : \delta \mathbf{A}_{(i)} dv = \{\delta \mathbf{u}\}^T \{F_{in}\} \quad (57a)$$

$$\int_S \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} ds + \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dv = \{\delta \mathbf{u}\}^T \{F_{ext}\} \quad (57b)$$

のように離散化され、共通する仮想変位ベクトル $\{\delta \mathbf{u}\}$ を消去し、 $\{F_{in}\}$ と $\{F_{ext}\}$ を得る。次いで $\{F_{in}\}$ と $\{F_{ext}\}$ を用いて

$$E_{equ} = \frac{\{F_{in}\} - \{F_{ext}\}}{\{\delta \mathbf{u}\}} \quad (58)$$

のように誤差の指標を定義する。画像計測された支承の水平変位に対する E_{equ} を算出すると E_{equ} は最大で0.1程度であり、計測された変位場の誤差が小さいことがわかった。

5. まとめ

本研究では高減衰ゴムを対象として材料試験を体系化し、試験結果を基に構成則を構築した。得られた知見は、以下の通りである。

- 1) 材料試験結果から、高減衰ゴムは粘性と塑性が混在していることがわかった。また、载荷振動数が0.1~1[Hz]の範囲において履歴によるエネルギー吸収性能の変化は軽微であり粘性の影響が小さいことがわかった。
- 2) ゴム材料の力学特性を精緻に再現する構成則を構築した。このモデルは、超弾性体で応力の進展方向を再現し、弾塑性体でエネルギー吸収性能を近似している。本モデルを材料試験結果と比較したところ、本モデルによりゴム材料の力学特性を精緻に再現できることがわかった。
- 3) 画像計測結果と数値計算を融合するハイブリッドな解析手法を提案した。ここでは積層ゴム支承の画像計測結果を利用し、構成則を支承に適用した場合の妥当性を検証した。さらに材料実験から得ることが困難な体積弾性係数を算出した。

本研究では、等温状態を前提として材料試験を行い、それを基に構成則を構築している。実際のゴム材料は温度依存性を有し、温度状態によって速度依存性が有意に現れてくることがある。このことより、今後、温度・速度依存性を考慮した高減衰ゴムの構成則を構築していく必要がある。また、免震・制振デバイスの利用状況を考慮すると、材料の破断規準や疲労特性などの力学特性についても実験により把握しモデル化していく必要があると考えている。

謝辞：ゴムの材料試験では川口金属（株）の比志島康久氏および鶴野禎史氏，（株）ブリヂストンの水津洋二氏，須藤千秋氏および関互氏，東洋ゴム（株）の岡本浩二氏，横浜ゴム（株）の遠藤和夫氏，オイレス工業（株）の伊関治郎氏，下田郁夫氏，河内山修氏および横川英彰氏に協力して頂きました。また構成則の構築では，東京大学新領域創成科学研究科環境学専攻の久田俊明教授ならびに渡邊浩志講師にご指導を賜りました。なお，本研究は，文部科学省科学研究費，日本証券奨学財団ならびに日本学術振興会の助成を受けて行いました。ここに記して謝意を表します。

付録 構成則の客観性

大変位・大ひずみ問題においては，構成則が客観性を有していることが要求される。以下では本論文で提案した構成則の客観性を証明する。ここに構成則が客観性を有しているとは，「2つの規準枠 O ， O^* におけるベクトル \mathbf{x} および \mathbf{x}^* が時刻 t において

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x} \quad (59)$$

のように任意の移動ベクトル $\mathbf{c}(t)$ と回転テンソル $\mathbf{Q}(t)$ を用いて表される関係にあるとき，両規準枠からみた構成則は，同一でなくてはならない。」というものである¹⁴⁾。以下では，規準枠 O^* において定義される量の右肩に「*」を付けるものとする。なお，本構成則は超弾性部と弾塑性部を並列に連結していることから，各々の部分が客観性を満足していれば，本構成則も客観性を満足することになる。

(1) 超弾性部

超弾性部における応力ひずみ関係は，式(20)および式(21)より

$$\mathbf{S} = g \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{E}} + h \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}} + \chi W^v \frac{\partial W^v}{\partial \mathbf{E}} \quad (60)$$

であり，さらに上式を現配置で定義される Cauchy 応力テンソル \mathbf{T} のものに変換すると，

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \left(g \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{E}} + h \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}} + \chi W^v \frac{\partial W^v}{\partial \mathbf{E}} \right) \cdot \mathbf{F}^T \quad (61)$$

のように記述できる。まず \mathbf{T} ， \mathbf{E} および \mathbf{F} を規準枠 O^* から観測すると，

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (62a)$$

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} \quad (62b)$$

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \quad (62c)$$

となる。次いで W_1 ， W_2 ， W^v ， g ， h および J は，テンソルの不変量の関数であり，不変量は観測者に依存しないから，

$$W_1^* = W_1 \quad (63a)$$

$$W_2^* = W_2 \quad (63b)$$

$$(W^v)^* = W^v \quad (63c)$$

$$g^* = g \quad (63d)$$

$$h^* = h \quad (63e)$$

$$J^* = J \quad (63f)$$

を得る。以上の関係を規準枠 O^* からみた構成則

$$\mathbf{T}^* = \frac{1}{J^*} \mathbf{F}^* \cdot \left\{ g^* \frac{\partial W_1^*}{\partial \mathbf{E}^*} + h^* \frac{\partial W_2^*}{\partial \mathbf{E}^*} + \chi (W^v)^* \frac{\partial (W^v)^*}{\partial \mathbf{E}^*} \right\} \cdot (\mathbf{F}^*)^T \quad (64)$$

に代入すると，

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \left\{ \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \left(g \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{E}} + h \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}} + \chi W^v \frac{\partial W^v}{\partial \mathbf{E}} \right) \cdot \mathbf{F}^T \right\} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (65)$$

のように記述できるから，超弾性部には客観性があることがわかる。

(2) 弾塑性部

式(38)，(39)および(40)に記した弾塑性部の構成則を再度以下に示す。

$$\dot{\mathbf{T}}_{(j)} = \mathbf{C}^{(E)} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) \quad (66)$$

ただし

$$\mathbf{D}^p = (3K_2)^{1/2} (3J_2)^{(N-1)/2} \frac{\mathbf{T}'}{t_y} \quad (67a)$$

$$K_2 = \frac{\mathbf{D}' : \mathbf{D}'}{2} \quad (67b)$$

$$J_2 = \frac{\mathbf{T}' : \mathbf{T}'}{2t_y^2} \quad (67c)$$

$$\tau_y = \tau_0 \left\{ 1 + \left(\frac{\bar{I}_c - 3}{c} \right)^b \right\} \quad (67d)$$

である。ここで上式に含まれる量を規準枠 O^* から観測すると，

$$\dot{\mathbf{T}}_{(j)}^* = \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{T}}_{(j)} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (68a)$$

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (68b)$$

$$\mathbf{T}'^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{Q}^T \quad (68c)$$

$$\tau_y^* = \tau_y \quad (68d)$$

である。また J_2 ， K_2 については，

$$J_2^* = J_2 \quad (69a)$$

$$K_2^* = K_2 \quad (69b)$$

となる。さらに式(68c)，(68d)，(69a)および(69b)より

$$\mathbf{D}^{p*} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}^p \cdot \mathbf{Q}^T \quad (70)$$

を得る。一方，弾性構成則テンソルは，

$$C_{pqrs}^{(E)} = \frac{1}{J} F_{pi} F_{qj} F_{rk} F_{sl} C_{ijkl}^{(0)} + \delta_{pr} T_{sp}^{(h)} + \delta_{qs} T_{pr}^{(h)} - \delta_{rs} T_{pq}^{(h)} \quad (71)$$

であるから式(62a), (62c), (63f), (70)および

$$C^{(0)*} = C^{(0)} \quad (72a)$$

$$\delta^* = \delta \quad (72b)$$

を用いて

$$C^{(E)*} : D^* = Q \cdot (C^{(E)} : D) \cdot Q^T \quad (73)$$

を得る。式(70)より D^P は客観性を有していることから式(73)を導く過程と同様にして

$$C^{(E)*} : D^P = Q \cdot (C^{(E)} : D^P) \cdot Q^T \quad (74)$$

となる。式(68a), (73)および(74)の関係を規準枠 O^* からみた構成則

$$\dot{T}_{(j)}^* = C^{(E)*} : (D^* - D^P) \quad (75)$$

に代入すると、

$$Q \cdot \dot{T}_{(j)} \cdot Q^T = Q \cdot \{ C^{(E)} : (D - D^P) \} \cdot Q^T \quad (76)$$

となり弾塑性部においても客観性を有していることがわかる。

以上より超弾性部および弾塑性部ともに客観性を有していることから、本構成則が客観性を有していることを証明できた。

参考文献

- 1) R.I. スキナー, W.H. ロビンソン, G.H. マックベリー 著, 川島一彦, 北川良和監訳: 免震設計入門, 鹿島出版会, 1996.
- 2) Treloar, L.: *The Physics of RubberElasticity* 3rd ed, Oxford University Press, 1975.
- 3) Alexander, H.: A constitutive relation for rubber-like material, *International Journal of Engineering and Science*, Vol.6, pp.549-563, 1968.
- 4) Seki, W., Fukahori, Y., Iseda, Y., and Matsunaga, T.: A Large Deformation Finite Element Analysis for Multilayer Elastomeric Bearings, *Transaction of a meeting of the Rubber Division, American chemical Society*, pp.856-870,

1987.

- 5) 山下義裕, 川端季雄: 補強ゴムのひずみエネルギー密度関数の近似式, 日本ゴム協会誌, 第 65 巻, 第 9 号, pp.517-528, 1992.
- 6) 松田泰治, 大塚久哲, 中嶋崇之, 矢森亘: FEM を用いた積層ゴム支承の力学特性に与える形状係数の影響評価に関する研究, 土木学会第 2 回免震・制震コロキウム講演論文集, pp.123-128, 2000.
- 7) Simo, J.C.: On a Fully Three-Dimensional Finite-Strain Viscoelastic Damage Model: Formulation and Computational Aspect, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.60, pp.153-173, 1987.
- 8) 吉田純司, 阿部雅人, Chamindalal, S.L., 藤野陽三: 画像解析を利用した連続体の変形場の計測法, 土木学会論文集, No.710/I-60, 2002.
- 9) 渡邊浩志: 非圧縮性超弾性体の混合型有限要素解析に関する研究, 博士論文, 東京大学工学系研究科 機械工学専攻, 1995.
- 10) Ozdemir, H.: Nonlinear transient dynamic analysis of yielding structure, Ph.D Dissertation, University of California, Berkeley, 1973.
- 11) Graesser, E.J., and Cozzarelli, F.A.: A Multidimensional Hysteretic Model for Energy Absorbing Devices, *Technical Report NCEER-91-0006*, State University of New York at Buffalo, 1991.
- 12) Akhtar, S.K. and Sujian, H.: *Continuum Theory of Plasticity*, John Wiley & Sons, 1995.
- 13) Simo, J.C. and Hughes, T.J.R.: *Computational Inelasticity*, Springer, 1997.
- 14) 久田俊明, 野口裕久: 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995.
- 15) 佐藤郁郎: 最小 2 乗法その理論と実際 観測データの非線形解析, 山海堂, 1997.

(2001.8.16 受付)

CONSTITUTIVE MODEL OF HIGH DAMPING RUBBER MATERIALS

Junji YOSHIDA, Masato ABE and Yozo FUJINO

Modeling of High Damping Rubber materials (HDR) is studied. At first, the material tests required for modeling are systematically conducted. Based on the results of the material tests, a constitutive model of HDR is proposed. This model consists of elasto-plastic body and hyper-elastic body in parallel. The simulations by the model are found to be in good agreement with the experimental results. Then, a hybrid analysis method is proposed, in which strain field of laminated rubber bearings measured by image processing is combined with the numerical analysis to confirm the applicability of the proposed model to the bearing. In addition, by this hybrid analysis method, the bulk moduli of rubber materials used in the bearings are computed.