

津波の伝播計算を対象とした 非線形分散長波式の比較

岩瀬浩¹・見上敏文²・後藤智明³・藤間功司⁴

¹正会員 株式会社エコー 沿岸デザイン本部環境水工部 (〒 221-0052 神奈川県横浜市神奈川区栄町 10-35)

²正会員 株式会社アルファ水工コンサルタンツ 技術部技術 3 課 課長

³正会員 工博 東海大学教授 工学部土木工学科

⁴正会員 工博 防衛大学校助教授 システム工学群建設環境工学科

いくつかの断面平均および断面積分形の非線形分散長波式から線形分散関係式および孤立波に関する第 1 次近似解を導いた。断面平均形の式の孤立波解は、KdV 式の解に比べ急峻な波形になる。一方、断面積分形の式は、比較的幅広な波形となる。津波のソリトン分裂に関してこの相違は重要である。本研究では、線形分散特性および孤立波形の比較から、そして水理実験と数値解析の比較から津波の数値解析に適切な非線形分散長波式について考察した。その結果、断面積分形の Peregrine 式または Madsen & Sørensen 式が適切であるという結論を得た。

Key Words : nonlinear dispersive long wave equation, solitary-typed solution, tsunami

1. はじめに

水面波の非線形性および分散性を考慮した波浪の伝播・変形を解析する目的で非線形分散長波式が使われるようになってきた。これらの非線形分散長波式は、KdV¹⁾式と異なり任意海底形状の 2 次元平面解析を対象としたものであり、1966 年および 1967 年に発表された Mei & LéMéhauté 式²⁾や Peregrine 式³⁾を基礎としたものである。近年になり、分散項に有限振幅性を考慮した式として後藤⁴⁾が、そして線形分散特性を改善した式が Madsen & Sørensen⁵⁾、Nwogu⁶⁾、Beji & Nadaoka⁷⁾、Cruz et al.⁸⁾ などにより提案されており、沿岸波浪の変形などにこれらの修正式を利用した数値解析が多数実施されている。

本研究では、津波の伝播・変形に適した非線形分散長波式を検討することを主たる目的として、現在まで種々の解析に利用されている非線形分散長波式の比較検討を行う。津波の伝播・変形において特徴的なことは、深海域でも波数分散現象が起こること、そして浅海域の最終的な変形過程において津波がソリトン分裂を起こしたり波状段波となることである。したがって、線形分散以外に非線形性と分散性の相互作用まで踏み込んだ考察が必要である。

なお、弱非線形性そして弱分散性を仮定した非線形分散長波式は、波高水深比および相対水深がともに小さいとした摂動展開により導かれる。本研究で比較検討対象とした 8 種類の式群は、全てこの摂動展開の第

2 次近似の範囲で同一精度である。しかしながら、分散項と非線形項の大きさが拮抗してくるソリトン分裂現象では、分散項の形の違いにより波高や波形の急峻度が多少異なったものとなる。したがって、津波解析に適切な非線形分散長波式を採用しなければ、流体力や陸上遡上高といった被災のメカニズムに関する評価を正確に行うことができない。そこでまず、水平床の各非線形分散長波式から、深海域の津波伝播に重要な線形分散関係式を導く。次に、浅海域の津波伝播に重要な孤立波に関する解を導き、その波速や波形の急峻度から各非線形分散長波式の非線形項と分散項の特性を考察する。続いて、非線形性が無視可能な深海域における津波の波数分散現象に関して日本海中部地震津波を事例として複素フーリエ解析と実用レベルの平面伝播解析から検討を行う。最後に、ソリトン分裂現象に関する水理実験結果と数値解析結果の比較検討することにより、津波の数値計算に適切な非線形分散長波式を検討する。

2. 非線形分散長波式と線形分散特性

(1) 非線形分散長波式

代表的な非線形分散長波式としては、断面平均流速で記述する Peregrine 式、Beji & Nadaoka 式、Cruz 式と水深方向に積分して流量フラックス (単位幅流量) で記述する Madsen & Sørensen 式がある。これ以外にも底部流速、表面流速や任意水深流速で表した Mei &

LéMéhauté 式, Dingemans 式⁹⁾ や Nwogu 式がある。しかしながら、津波計算で重要となる防波堤からの越流や陸上遡上に対し、代表点流速で記述された方程式を使うことは技術的に難しく、構造物や地形による急激な水深変化に伴う代表点流速と流量の換算に際し精度が低下する可能性がある。Kennedy et al.¹⁰⁾ は、遡上域に細いスリットを仮定することによって、Nwogu タイプの式で遡上を計算可能にする方法を開発しているが、数値的取り扱いが煩雑であり、また、代表点流速から流量への変換に際し精度が低下する可能性も否定できない。いずれにしても、代表点流速を使用した Nwogu タイプの式は、複雑な陸上遡上や構造物を考慮する必要がある津波数値計算には不向きであると言える。

本研究において、検討の対象とした式は、断面平均流速あるいは流量フラックス表示の Peregrine 式, Beji & Nadaoka 式, Cruz 式, Madsen & Sørensen 式とその類似式である。水平床を仮定して、具体的に式形を示すと下記ようになる。すなわち、断面平均表示としては、連続式が

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta)u] = 0 \quad (1)$$

運動式は以下の 3 種類の非線形分散長波式である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{gh^2}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{2h^2}{5} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{gh^2}{15} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \quad (4)$$

断面積分表示としては、連続式が

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

運動式は以下の 5 種類の非線形分散長波式である。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{D^2}{3} \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D^2}{3} \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x} \right] \quad (8)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{gh^3}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ = \frac{2h^2}{5} \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^2} + \frac{gh^3}{15} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、 u は断面平均流速、 Q は流量フラックス ($= u(h + \eta)$)、 η は水位、 h は静水深、 D は全水深 ($= h + \eta$)、 g は重力加速度である。なお、式 (2) が本来の Peregrine 式、式 (4) が Beji & Nadaoka 式と Cruz 式 (水平床近似では同一となる)、式 (10) が Madsen & Sørensen 式に該当する。また、式 (6) は、岩瀬ら¹¹⁾ が津波解析に利用しているものであり、水深方向に積分した Peregrine 式と名付けてもよい式である。式 (7) は、式 (6) の分散項中の静水深を全水深に置き換えたものである。さらに、式 (8) は、有限振幅性を考慮した分散項で、後藤が誘導したアーセル数が大きい場合の非線形分散長波式の簡略式である。また、式 (3) および (9) は、Boussinesq によって導かれた式¹²⁾ を連続の式と運動の式に分割し、それぞれ断面平均流速および流量フラックスで表記したものである。

理論方程式の性質を検討するには、線形分散関係式、波速、群速度、2 次成分波の振幅などを比較する方法がある。ここでは、深海域の津波の挙動を再現するために重要な線形分散特性と、浅海域のソリトン分裂を再現するために重要な孤立波解とその波速を各理論方程式から導き、比較検討を行う。

(2) 線形分散特性

検討対象とした連続式そして 8 種類の運動式の非線形項を無視し、波数分散性を考慮した波速 c を用い、波高を H 、波数を k として x の正の方向へ伝播する波を $\eta = H \sin k(x - ct)$ とおくと、 $\partial/\partial t = -c\partial/\partial x$ として連続式から $Q = hu = c\eta$ である。よって、比較的簡単に各式の分散関係が求まり、式 (2), (6), (7), (8) に関して、

$$c/c_0 = \sqrt{1/(1 + \sigma_0/3)} \quad (11)$$

式 (3), (9) に関して、

$$c/c_0 = \sqrt{1 - \sigma_0/3} \quad (12)$$

そして、式 (4) および (10) に関して、

$$c/c_0 = \sqrt{(1 + \sigma_0/15)/(1 + 2\sigma_0/5)} \quad (13)$$

となる。ここに、 $c_0 (= \sqrt{gh})$ は線形長波の波速であり、また $\sigma_0 = (kh)^2$ である。なお、式 (12) は $\sigma_0 > 3$ で c が虚数になり、時間に対して水位の振幅が指数関数的に増加する解になってしまう。また、式 (13) は、 σ_0 が大きくなると、 $\sqrt{1/6}$ に漸近するから、高周波成分の波速が $c_0/\sqrt{6}$ 以下にならないという性質がある。

各式の波数分散特性の違いを図-1 に示す。図には、KdV 式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + c_0 \frac{3\eta}{2h} \frac{\partial \eta}{\partial x} + c_0 \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (14)$$

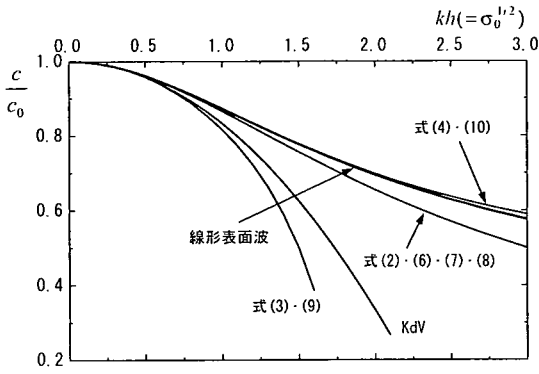


図-1 線形分散関係

の分散関係式

$$c/c_0 = 1 - \sigma_0/6 \quad (15)$$

および線形表面波の分散関係式

$$c/c_0 = \sqrt{\sigma_0^{-1/2} \tanh \sigma_0^{1/2}} \quad (16)$$

も示している。

式(3), (9)は, $kh = 0.6$ 以上で線形表面波の差は1%を越え分散効果が過大となる。また, 式(2), (6), (7), (8)の分散関係は, $kh = 1.0$ 程度までであれば線形表面波と差は1%に満たない。しかし, $kh = 1.0$ を越えると線形表面波の分散関係から外れ高周波成分の波速が遅くなり, 分散効果が線形表面波に比べ相対的に大きく評価されている。一方, 線形分散に適合するように改善された式(4), (10)は, 線形表面波の分散効果に比べ過小評価となる傾向にあるが, $kh = 2.4$ 程度までは線形表面波の差は1%未満となり良好な分散関係がみられる。よって, 線形分散特性から判断すると, 式(4), (10)が優れていると言える。また, 式(3), (9)は, $\sigma_0 > 3$ で永年項が発生するため, 高波数成分が卓越する場合, 安定した解が得られない可能性があり, 津波の数値計算への適用には問題がある。

3. 孤立波の第1次近似解

(1) 解法

遠浅な浅海域を伝播する津波は, ときによってソリトン分裂を起こす場合がある。ソリトン分裂波の挙動は, 支配方程式における非線形効果と波数分散効果の相対的なバランスが重要な役割となる。ここでは, 各支配方程式における1次近似の孤立波解を導き, 非線形項と波数分散項の相対的な大きさをKdV式との比較から検討を行う。

Peregrine式など断面平均流速で記述されている非線形分散長波式は, 全水深 D をかけると下記のように流量フラックス表示の式へ書き換えることができる。

$$D \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (17)$$

したがって, 式(2), (3), (4)は, それぞれ

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = D \left[\frac{h^2}{3} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \left(\frac{Q}{D} \right) \right] \quad (18)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = D \left[-\frac{gh^2}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right] \quad (19)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = D \left[\frac{2h^2}{5} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \left(\frac{Q}{D} \right) + \frac{gh^2}{15} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right] \quad (20)$$

と変形できる。以上のことから, 検討対象とする8種類の運動式の局所項, 移流項(非線形項), 静水圧力項は同一形となり, 違いは分散項に限定され, 本研究においては, この断面積分形の式を利用した解析を行う。

いま, 一例として最も簡単と思われる連続式(5)と運動式(6)からなる非線形分散長波式に関する孤立波の第1次近似解を導く。孤立波の波形として

$$\eta = H \operatorname{sech}^2 k(x - ct) \quad (21)$$

を仮定すると, 線形分散関係式の導出の場合と同様に $\partial/\partial t = -c\partial/\partial x$ と連続式から $Q = c\eta$ が成り立つことがわかる。ここで, $\epsilon = \eta/h$, $\epsilon_0 = H/h$, $\sigma_0 = (kh)^2$ とおくと,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (22)$$

$$gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = c_0^2 (1 + \epsilon) \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{D} \right) = c^2 [2\epsilon + O(\epsilon_0^2)] \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (24)$$

$$h^2 \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^2} = -c^2 \sigma_0 \left(4 - 12 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (25)$$

となる。故に, 非線形分散長波式(6)は,

$$\left[-c^2 + c_0^2 (1 + \epsilon) + c^2 (2\epsilon) + c^2 \frac{\sigma_0}{3} \left(4 - 12 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} + O(\epsilon_0^2) = 0 \quad (26)$$

表-1 孤立波解の比較

Equation	Dispersive Term	Relative Depth	Celerity
KdV	$\frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4}$	$\frac{c}{c_0} = 1 + \frac{2\sigma_0}{3}$
Eq.(6)	$\frac{h^3}{3} \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^2}$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4} \left(1 + \frac{\epsilon_0}{3}\right)^{-1}$	$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\sigma_0/3}}$
Eq.(7)	$\frac{D^2}{3} \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^2}$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4} \left(1 + \frac{5\epsilon_0}{3}\right)^{-1}$	$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\sigma_0/3}}$
Eq.(8)	$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D^3}{3} \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x} \right]$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4} (1 + 2\epsilon_0)^{-1}$	$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\sigma_0/3}}$
Eq.(2)	$D \left[\frac{h^2}{3} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \left(\frac{Q}{D} \right) \right]$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{3}\right)^{-1}$	$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\sigma_0/3}}$
Eq.(9)	$\frac{gh^3}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4} \left(1 - \frac{2\epsilon_0}{3}\right)^{-1}$	$\frac{c}{c_0} = 1 + \frac{3\sigma_0}{4}$
Eq.(3)	$D \left[\frac{gh^2}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right]$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4}$	$\frac{c}{c_0} = 1 + \frac{3\sigma_0}{4}$
Eq.(10)	$\frac{2h^2}{5} \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^2} + \frac{gh^3}{15} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4} \left(1 + \frac{8\epsilon_0}{15}\right)^{-1}$	$\frac{c}{c_0} = \frac{\sqrt{1 - 4\sigma_0/15}}{\sqrt{1 - 8\sigma_0/5}}$
Eq.(4)	$D \left[\frac{2h^2}{5} \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial x^2} + \frac{gh^2}{15} \right]$	$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0}{4} \left(1 - \frac{2\epsilon_0}{5}\right)^{-1}$	$\frac{c}{c_0} = \frac{\sqrt{1 - 4\sigma_0/15}}{\sqrt{1 - 8\sigma_0/5}}$

と変形できる。したがって、定常的な孤立波の解が存在するためには、 $O(\epsilon_0)$ の範囲で

$$-1 + (c_0/c)^2(1 + \epsilon) + 2\epsilon + (\sigma_0/3)(4 - 12\epsilon/\epsilon_0) = 0 \quad (27)$$

すなわち、

$$-1 + (c_0/c)^2 + 4\sigma_0/3 = 0 \quad (28)$$

および

$$(c_0/c)^2 + 2 - 4\sigma_0/\epsilon_0 = 0 \quad (29)$$

が恒等的に成立する必要がある。故に、

$$c/c_0 = 1/\sqrt{1 - 4\sigma_0/3} \quad (30)$$

および

$$\sigma_0 = (3\epsilon_0/4)(1 + \epsilon_0/3)^{-1} \quad (31)$$

であり、波高水深比 ϵ_0 が与えられれば、対応する孤立波の波形が定まったことになる。なお、式 (18)、(20) は、分散項の取り扱いが多少複雑となるが、

$$h^2 \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \left(\frac{Q}{D} \right) = -c^2 \left[h(1 + \epsilon)^{-2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right] + O(\epsilon_0^2) \quad (32)$$

であることに留意すると上述の方法で孤立波の第1次近似解を求めることができる。

(2) 孤立波の解の比較

運動式 (6) 以外の7種類の運動式に関して、上述と同様な解析により $O(\epsilon_0)$ の範囲でそれぞれの孤立波の第1次近似解を導き、相対水深と波速比の違いとして整理したものが表-1である。仮定した孤立波の解は、

$$\begin{aligned} \eta &= H \operatorname{sech}^2 k(x - ct) \\ &= H \operatorname{sech}^2(\sigma_0^{1/2} h^{-1})(x - ct) \end{aligned} \quad (33)$$

であるので、 σ_0 が小さいほど幅広の孤立波形式であり、大きいほど急峻な孤立波形式であることを意味する。したがって、KdV式に比べ、式 (6)、(7)、(8)、(10) の孤立波の解が幅広であり、式 (2)、(4)、(9) が急峻となる。特に、断面平均表示の式 (2) を利用した数値解析において、既往の研究^{11),13)}により算出される波高が過大になりすぎることが指摘されており、このことは導出した孤立波の解の形とも符合する。なお、孤立波の波形は、分散項と非線形項の相対的な大きさを表していると考えることができる。すなわち、非線形項は波形を前傾化すなわち急峻にする方向に作用し、分散項は幅広の方向になるように作用する。したがって、急峻な解は、非線形項に比べ分散項が相対的に小さいことを意味し、逆に幅広の解は非線形項に比べ分散項が相対的に大きいことになる。

また、KdV式解には保存則が成立することが知ら

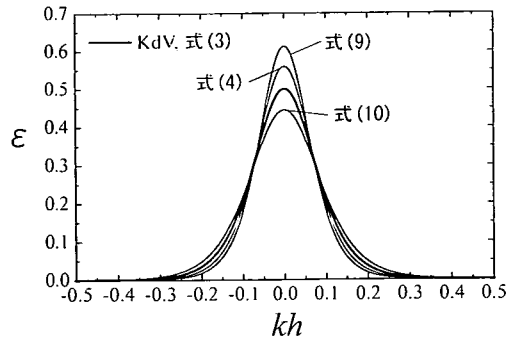
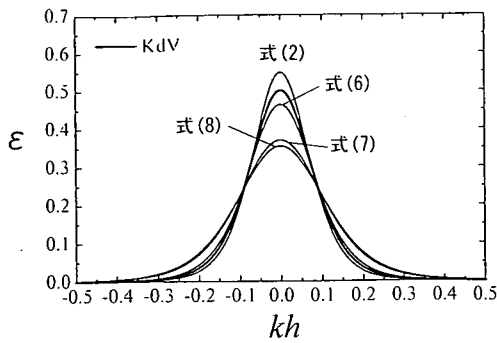


図-2 孤立波形の比較

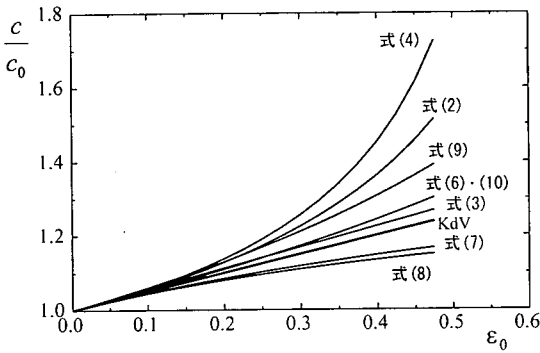


図-3 孤立波の波速に関する比較

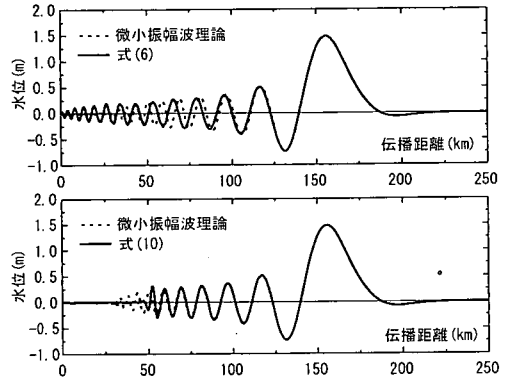


図-4 深海域における津波の伝播特性

れている。最低次の保存則は、波形の面積が一定に保たれることを意味する。検討対象とした非線形分散長波式群は、KdV 式と等価でないため、このような保存則が厳密に成立するかどうか分からないが、ここでは波形の面積が保存されると仮定して波形の急峻度を調べてみる。図-2 は、波高水深比 $\epsilon_0 = 0.5$ の KdV 式の孤立波解と等面積となる波形である。同図から、そして解の面積 S が $S = 2Hh/\sigma_0^{1/2}$ と計算でき、波高 H が $H = S\sigma_0^{1/2}/2h$ で与えられることから判断できるように、相対水深 σ_0 が小さくなる運動式がより高いソリトン波高になることがわかる。また、Laitone¹⁴⁾ の第 2 次近似ソリトン解が KdV 式の解に比べ幅広となること、そして KdV 式の解でも水理実験結果と相当良好な一致を示すことが Nagashima¹⁵⁾ の研究により明らかにされていることなどを勘案すると、少なくとも KdV の解を大きく上まわる波形には問題があると判断できる。各式の波高水深比による波速比の違いを図-3 に示す。この図から、やはり過度に急峻なソリトン波形となる非線形分散長波式は、KdV 式の波速より大幅に過大となる。

以上の結果から、あくまでも孤立波の第 1 次近似解の特性という考察範囲であるが、津波の浅海域におけるソリトン分裂としての伝播・変形を取り扱ったとき、式

(2), (4) そして (9) は過大評価、式 (7), (8) は過小評価であると考えられる。故に、式 (3), (6) そして (10) を用いることが望ましいと言える。

4. 数値解析による深海域の津波伝播

(1) フーリエ変換による数値解析

線形分散特性の比較検討により、津波解析には深海域では式 (4), (10) が適していることを示した。一般に、近地津波では波数分散効果が無視できるものと仮定しているが、近地津波であっても深海域の分散性が無視できない津波が存在することを著者らは示している¹⁶⁾。特に深海域では非線形性が無視できるため線形分散性によってのみ伝播変形の精度が決定される。そこで、深海域の津波の伝播に関して式 (6) (=式 (2), (7), (8)) と式 (10) (=式 (4)) の比較を行う。式 (9) (=式 (3)) は、線形分散特性の精度が劣り、かつ $kh = \sqrt{3}$ 以上で発散するため除外した。対象とする初期波形は、相田¹⁷⁾ により推定された日本海中部地震津波の指向性の最も大きい方向に関する断面波形であり、非線形分散長波式の水深 3000m の一定水深を 15 分間、約 150km 伝播させた場合の空間波形の比較を行う。なお、波形 η は高

速フーリエ変換により初期波形を複素フーリエ係数 A_n に分解し、

$$\eta = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} A_n \left[e^{ik_n(x-c_n t)} + e^{ik_n(x+c_n t)} \right] \quad (34)$$

と計算している。ここに、 k_n は n 番目のフーリエモードに対応する波数、そして c_n は各式のフーリエモードに対応する波速である。

図-4 は、初期波形に対する各線形分散関係を考慮した高速フーリエ変換から得られた空間波形である。図から判断できるように、式 (6) および (10) による計算値は、ともに比較的良好に線形表面波から算定した主峰と分散波列を近似している。特に、式 (10) を利用した計算値の精度が良い。ただし、式 (13) から明らかのように kh すなわち σ_0 が大きくなると線形表面波の分散関係から徐々に離れ、 $c/c_0 = \sqrt{1/6} = 0.408$ に漸近するという特性がある。通常の波浪のような水深が比較的浅く連続的な波を解析する場合には、このことをさほど重要視する必要がないと思われるが、深海域の津波のような一山一谷の波の伝播現象を取り扱う際には、ある程度以上の高波数成分がほぼ同一の伝播速度で進むため、図-4 下の $x=60\text{km}$ 付近で見られるような分散波列の終端部にエネルギーの一部が集積して生成される終端波が生じる。浅海域においては、非線形性によりさらに高周波成分が生成されるため、場合によっては、このことが大きな問題となる可能性がある。

(2) 差分式による数値解析

そこで、式 (6) および (10) を 2 次元に拡張した支配方程式を用い、日本海中部地震津波を対象とした平面伝播計算から終端波の検討を行う。差分法における計算スキームとしては混合差分法¹⁰⁾を用いる。差分式の一例として、連続式 (5) と運動式 (6) に関するものを下記に示す。混合差分法は、陽的に取り扱う 1 段目の計算と陰的な 2 段目の計算に分けられ、1 段目の連続式の計算が、

$$\frac{1}{\Delta t} [\eta_j^{n+1/2} - \eta_j^{n-1/2}] + \frac{1}{\Delta x} [Q_{j+1/2}^n - Q_{j-1/2}^n] = 0 \quad (35)$$

運動式の計算が

$$\frac{1}{\Delta t} [Q_{j+1/2}^{*n} - Q_{j+1/2}^n] + \frac{gD}{\Delta x} [\eta_{j+1}^{n+1/2} - \eta_j^{n+1/2}] = 0 \quad (36)$$

で表される。2 段目は運動式の移流項および分散項に関する計算であり、

$$\frac{1}{\Delta t} [Q_{j+1/2}^{*n+1} - Q_{j+1/2}^{*n}]$$

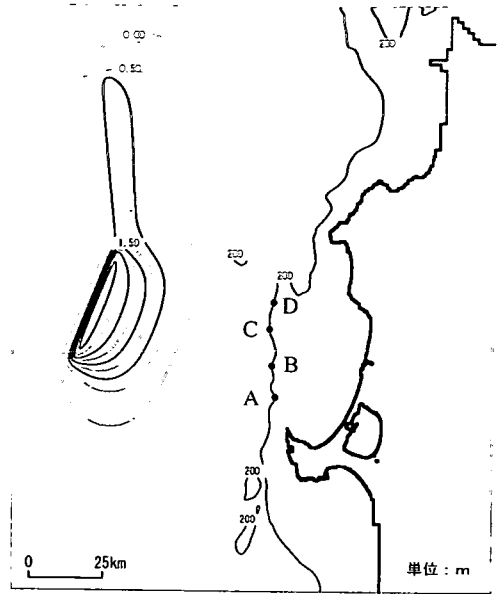


図-5 1983 年日本海中部地震津波初期分布と 200m 等深線

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{4\Delta x} \left[\left(\frac{Q}{D} \right)_{j+3/2}^n Q_{j+3/2}^{n+1} - \left(\frac{Q}{D} \right)_{j-1/2}^n Q_{j-1/2}^{n+1} \right] \\ & + \frac{1}{4\Delta x} \left[\left(\frac{Q}{D} \right)_{j+3/2}^n Q_{j+3/2}^n - \left(\frac{Q}{D} \right)_{j-1/2}^n Q_{j-1/2}^n \right] \\ & = \frac{h^2}{3\Delta t \Delta x^2} [Q_{j+3/2}^{n+1} - 2Q_{j+1/2}^{n+1} + Q_{j-1/2}^{n+1}] \\ & - \frac{h^2}{3\Delta t \Delta x^2} [Q_{j+3/2}^n - 2Q_{j+1/2}^n + Q_{j-1/2}^n] \quad (37) \end{aligned}$$

となる。ここに、 j, n は差分格子番号を表し、時間および空間の差分格子間隔を $\Delta t, \Delta x$ とおくと時間および空間座標がそれぞれ $t = n\Delta t, x = j\Delta x$ で表される。差分式を見ると明らかのように混合差分スキームは、分散項を含め全ての項が時空間に対して対称な差分形となっている。また、移流項に関しては、時空間に中央差分として計算する形式となっている。このように、各種非線形分散長波式の比較に混合差分法を用いた理由としては、打ち切り誤差 (数値分散) が ADI 法などのほかのスキームに比べ小さいことによる。なお、混合差分法の打ち切り誤差特性の詳細に関しては別の機会に報告する。

図-5 は津波初期波形分布と 200m 深等深線を描いたものである。空間格子は実用的なレベルを考慮し、空間格子を $\Delta x = \Delta y = 400\text{m}$ の正方格子、時間ステップを $\Delta t = 0.2\text{s}$ とする。図-6 は、図-5 に示す 200m 代表水深点 (A~D) における水位経時変化を示したものである。線形分散特性と同様、式 (6) の結果は式 (10) に比べ分散波列の位相が後退するものの、第 1 波、第 2

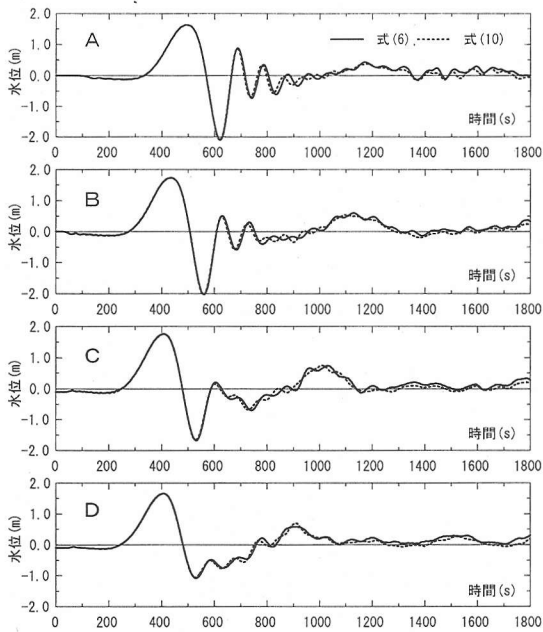


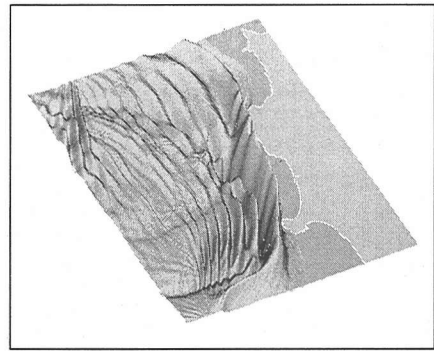
図-6 200m 水深地点の水位経時変化

波には大きな差異は見られず、終端波の影響も確認できない。また、図-7は、10分後の津波波形を示したものである。水位比較と同様、この図からも同様に終端波の影響は確認できない。平面伝播では、運動の水平方向への広がりに加え、海底地形による反射・屈折および数値分散性の影響から高周波成が分抑えられたこともあり、今回設定した空間格子の大きさ(400m)では、式(10)を津波数値計算に適用することに問題はないと言える。一方、線形分散特性は、式(10)の方が式(6)より優れているが、図-6の結果からは式(6)と式(10)の間に顕著な差が見られない。したがって、遠地津波の場合や、近地津波でも細かな格子を使った詳細な計算を行う場合には、式(10)の優位性が期待できるものの、近地津波に対して、現時点で実際に使用されている程度の格子間隔を用いる場合、両者の差はそれほど大きくないと言える。

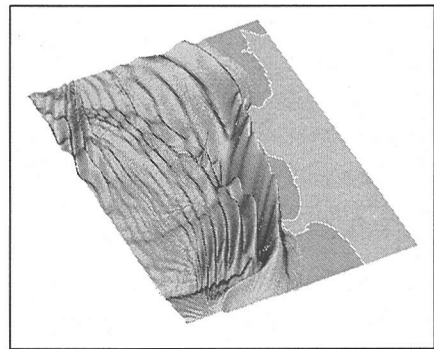
5. 数値解析による浅海域の津波伝播

(1) ソリトン分裂としての数値解析

ここでは、浅海域を伝播する津波を対象とし、水理実験と差分法による数値解析の比較を通じて、非線形効果と分散効果の相互干渉で起こるソリトン分裂現象に関する非線形分散長波式の特性について考察する。対象とする支配方程式は、式(2)、(6)、(8)および(10)である。式(4)、(7)は孤立波の第1次近似解から判断して、



式(6)による計算結果



式(10)による計算結果

図-7 10分後の津波波形

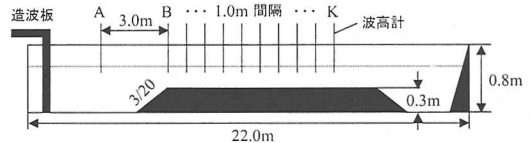


図-8 実験装置

それぞれ式(2)および(8)と同様な特性があることがわかっているため割愛した。また、式(3)および(9)は、線形分散特性が劣り深海域から浅海域までの連続的な津波解析に不向きであることから除外した。平面解析同様、差分スキームは2段階混合差分法を利用する。

(2) 水理実験

水理実験には、図-8に示す東海大学工学部土木工学科所有の全長22m、幅0.5m、高さ0.8mの両面ガラス張りの造波水槽を使用した。造波機はパソコン制御型のピストン平板タイプである。水底形状は、波形の前傾化を促すための勾配3/20の斜面部とソリトン分裂の様子を観測するための一様水深の水平床部を組み合わせ

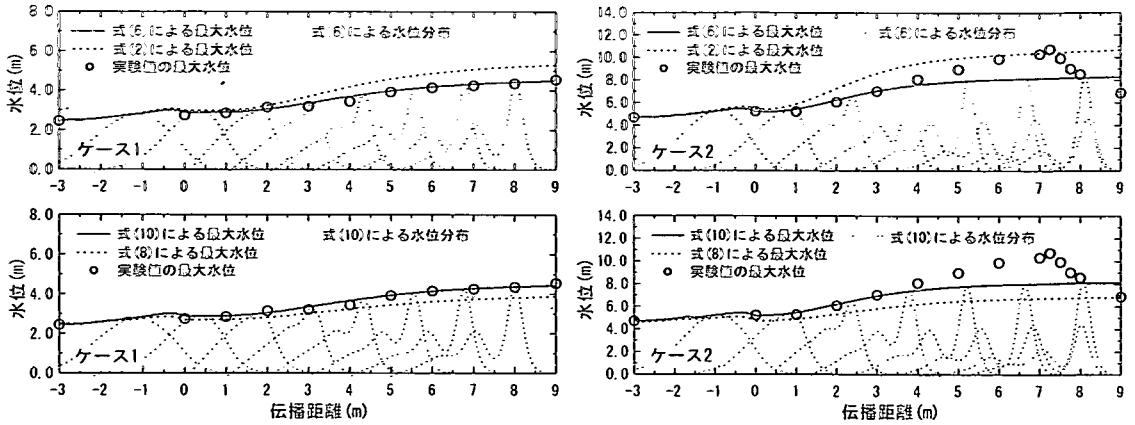


図-9 空間水位分布の比較

せたものである。ただし、実験装置の全長が22mと短いため、定常波形としての孤立波に関する観測が困難であり、比較検討はソリトン分裂の変形過程の一部に制限される。また、検討する支配方程式群は、水平床を仮定したものであるため分散項中の水深勾配項は考慮されていない。水理実験装置には勾配3/20の斜面部を有するが、式(6)の計算値と、式(6)で水深勾配を考慮した式の計算値(波高計Bの位置)との比較から、水位に大きな差が見られなかったことから、本実験装置程度の水深変化によるソリトン分裂への影響は小さいものと判断した。

数値解析と比較する実験ケースは、計測範囲で砕波が起らない事例(実験ケース1)と砕波が起る事例(実験ケース2)の2種類である。すなわち、実験ケース1は、上部水深(水平床部水深)が0.106m、A点の波高が0.024m、水平床部の波高水深比の変化が0.26から0.45であり、実験ケース2は、上部水深(水平床部水深)が0.12m、A点の波高が0.047m、水平床部の波高水深比の変化が0.44から0.86である。なお、計測には、図中のAからKの記号で示す11本の容量式波高計を利用している。ただし、図に示しているのは、実験ケース1に関する波高計の配置であり、実験ケース2に関しては砕波位置を考慮して波高計の位置を変えている。なお、便宜上水平床開始する点(波高計B)を伝播距離の原点とする。

(3) 実験値との比較

波高計A点で観測された水位時系列データを境界値とし、式(2)、(6)、(8)および(10)の運動式を用いて $\Delta t = 0.005s$ 、 $\Delta x = 0.02m$ (クーラン数は2ケースともに約0.5)として行った計算値と実験値を比較したものを図-9および図-10に示す。

図-9は、それぞれ実験ケース1(左図)および実験ケース2(右図)に関する水位の空間分布および最大水位分布であり、白丸が実験値の最大水位、破線および実線が各方程式による計算値の最大水位、そして細破線が1s毎の運動式(6)および(10)の空間水位である。なお、図の横軸は、波高計設置位置のA点を基準とする距離である。砕波が起らない比較的波高水深比が小さな実験ケース1(図-9左)では、孤立波の第1次近似解の急峻度特性から推定できるように、ソリトン分裂が始まると式(2)の計算結果は、増幅率が過大評価となり実験値に比べ波高が高く、式(8)の計算結果は、増幅率が過小評価となり実験値に比べ波高が低くなる。一方、式(6)および(10)の計算結果は、実験値とかなりの精度で実験値と一致する。砕波が起る比較的波高水深比が大きな実験ケース2(図-9右)でも、各式による計算結果による波高増幅の傾向は同じである。特に、式(6)および(10)の計算結果は、両図から判断できるように、波高水深比0.65程度までは実験値と良く一致する。しかし、波高水深比が0.65以上となる範囲では増幅率が過小評価となり、実験値との差異が見られる。

図-10は、計算値と実験値の水位水位の経時変化を表したものであり、図左は実験ケース1の6.00m地点、右図は実験ケース2の7.25m地点(砕波点)のものである。波高水深比が小さい実験ケース1の場合には、波形の形状を含めた式(6)と(10)の計算値の精度が高いことが分かる。式(2)は波高が過大評価で波速も速すぎる。式(8)は波高が過小評価で波速も遅すぎる結果を与えている。式(6)と(10)の結果を比べると、波高に関してはほとんど差が無く、位相に関しては僅かに式(6)の方が実験値に近い結果を与えている。また、実験ケース2の場合、式(6)と(10)は、砕波直前の急激な

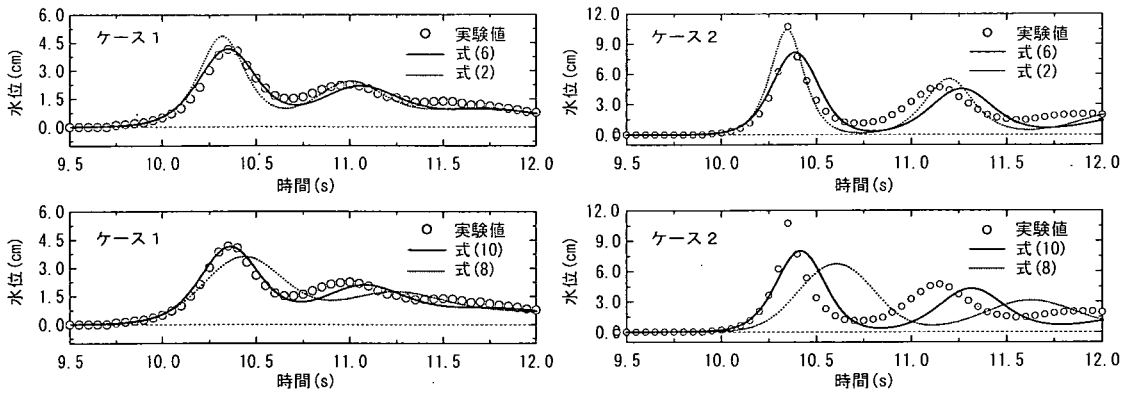


図-10 水位経時変化の比較 (ケース 1 : 6.00m 地点, ケース 2 : 7.25m 地点)

波高の増幅効果を再現できない。これは、岩瀬らによる研究¹⁸⁾から、鉛直積分型の非線形分散長波式の限界であると考えられる。なお、図-10 右上の図で、式(2)の第1波波高が実験値と一致しているが、式(2)は増幅率が過大評価のため、たまたま碎波波高と一致したものと考えられる。

以上のように、実験値と計算値の比較から、碎波点近傍における波高増幅が過小評価になるものの、浅海域のソリトン分裂については式(6)および式(10)が優れていることが分かる。式(6)と(10)の結果に大きな差はないが、ソリトン分裂波の位相まで考慮すると、僅かながら式(6)の方が式(10)に比べて優れている。ただし、第2波目以降の分裂波形および碎波直前の急激な波高増幅に伴う実験値と計算値の差異に関しては、何らかの修正モデルを検討して行く必要があり、今後水理実験との詳細な比較を通じて検討を行う予定である。

6. おわりに

非線形分散長波式は、 $O(\epsilon_0) = O(\sigma_0) \ll 1$ 、すなわちアーセル数 $U_r = \epsilon_0/\sigma_0$ が $O(1)$ と仮定して摂動展開を利用して導かれる。摂動展開の2次近似では、検討対象とした8種類の運動式はすべて同じオーダーである。しかしながら、その孤立波の第1次近似解は大きく異なる。津波の伝播・変形を対象とする場合には深海域では線形分散特性が、また、浅海域のソリトン分裂では非線形性と分散性の相対的大きさを意味する孤立波の第1次近似解の急峻度が特に重要である。これら理論的な考察および水理実験を含む数値解析との比較から、深海域では式(10)が優れている。ただし、近地津波で実用的な大きさの格子を使っている範囲では式(6)とそれほどの差はない。浅海域のソリトン分裂としては、式(6)、(10)がほぼ同程度だが、式(6)の方が僅かに優れている。したがって、深海域から浅海域まで

の連続的な津波計算として、式(6)、(10)は他の支配方程式に比べ優れており、式(6)、(10)にはそれほど大きな差はないと言える。

謝辞： 本研究をまとめるにあたり東海大学工学部土木工学科水工研究室の学部生および大学院生諸君の助力を得た。また、本研究は、文部科学省科学研究費(基盤研究(B)(1)代表:入江 功九州大学教授, 基盤研究(C)(2)代表:後藤智明)を利用して実施した。ここに記して謝意を表す。

参考文献

- 1) Korteweg, D.J. and DeVries, G.: On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, *Phil. S5*, Vol.39, No.240, pp.422-443, 1895.
- 2) Mei, C.C. and LéMéhauté, B.: Note on a equations of long waves over an uneven bottom, *J. Geophys. Res.*, Vol.71, pp.393-400, 1966.
- 3) Peregrine, D.H.: Long waves on a beach, *J.F.M.*, Vol.27, Part 4, pp.815-827, 1967.
- 4) 後藤智明: アーセル数が大きい場合の非線形分散波の方程式, 土木学会論文集, 第351号/II-2, pp.193-201, 1984.
- 5) Madsen, P.A. and Sørensen O.R.: A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Part 2, A slowly-varying bathymetry, *Coastal Eng.*, Vol.18, pp.183-204, 1992.
- 6) Nwogu, O.: An alternative form of the Boussinesq equations for nearshore wave propagation, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, Vol.119, No.6, pp.618-638, 1993.
- 7) Beji, S. and Nadaoka, K.: A formal derivation and numerical Modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth, *Ocean Eng.*, Vol.23, pp.691-704, 1996.
- 8) Cruz, E.C., 石倉正英, 青野利夫: 非線形分散モデルを用いた開境界処理に関する研究, 土木学会, 海岸工学論文集, Vol.44, No.1, pp.46-50, 1987.
- 9) Dingemans, M. W.: Water waves over an uneven bottom - A discussion of long-wave equations, Rep. R 729-II, Delft Hydr. Lab., Delft, The Netherlands, 1973.

- 10) Kennedy, A. B., Chen, Q., Kirby, J. T. and Dalrymple, R. A. : Boussinesq modelling of wave transformation, breaking, and runup. I: 1D. J. Wtrwy., *Port. Coast., and Oc. Engrg.*, ASCE, Vol. 126, No. 1, pp.39-47, 2000.
- 11) 岩瀬浩之, 見上敏文, 後藤智明: 非線形分散波理論を用いた実用的な津波計算モデル, 土木学会論文集, No.600/II-44, pp.119-124, 1998.
- 12) Boussinesq, J : Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond, *Liouville's J. Math.*, Vol. 17, pp.55-103.
- 13) 長尾昌朋, 後藤智明, 首藤伸夫: 非線形分散波の数値計算, 土木学会, 海岸工学論文集, Vol.32, pp.114-118, 1985.
- 14) Laitone, E.V. : The second approximation to cnoidal and solitary waves. *J.F.M.*, Vol.9, Part 3, 1960.
- 15) Nagashima, H. : Deformation of nonlinear shallow water waves, *Scientific Paper, Inst. of Physical and Chemical Res.*, Vol.71, pp.13-44, 1977.
- 16) 岩瀬浩之, 後藤智明, 森岡功二, 飯田邦彦: 深海域における波数分散効果が近地津波の伝播に及ぼす影響に関する考察, 土木学会論文集, II-58, 2002.
- 17) 相田 勇: 1983 年日本海中部地震津波の波源数値モデル, 東京大学地震研究所彙報, 59 号, pp.93-104, 1984.
- 18) 岩瀬浩之, 竹田勝博, 後藤智明: ソリトン分裂波の増幅機構と数値解析の誤差特性に関する一考察, 海岸工学論文集, 第 47 巻, pp.21-25, 2000.

(2001. 2. 19 受付)

A COMPARATIVE STUDY OF NONLINEAR DISPERSIVE LONG WAVE EQUATIONS FOR NUMERICAL SIMULATION OF TSUNAMI

Hiroyuki IWASE, Toshifumi MIKAMI, Chiaki GOTO and Koji FUJIMA

The dispersion relations and the approximate solutions of solitary-wave type are derived for several depth-averaged and depth-integrated nonlinear dispersive long wave equations. Solutions of depth-averaged equations for solitary wave tend to provide steep wave profile with narrow-width and high-wave height compared with KdV solution. On the other hand, solutions of depth-integrated equations for solitary wave provide wide wave profile with wide-width and low-height. On wave deformation and disintegration to the solitons, the difference is quite important. Not only theoretical examinations but also laboratory and numerical experiments show that depth-integrated Peregrine equation and Madsen & Sørensen equation are suitable for numerical analysis of tsunami.