

トンネル掘削解析における領域設定について

田村 武¹・足立 紀尚²

¹フェロー会員 工博 京都大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

²フェロー会員 工博 京都大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

本研究は、地盤工学の種々の問題に対し2次元有限要素法を適用する場合の領域のとり方を考察したものである。すなわち、2次元半無限領域の地盤をある大きさの範囲でモデル化し、それに対して有限要素法を適用すると、得られる変位は設定する領域の大きさに強く依存する。そのため、変位を評価する場合にどのような範囲まで要素分割するか判断基準が不明確であるばかりでなく、有限要素法自体の利用価値を大きく損なうことにもなる。ここではトンネル掘削による地表面の沈下を例にとり、問題点を明確にするとともに、どのような対処方法を取り得るかについて検討する。

Key Words : 2-dimensional finite element method, 2-dimensional elasticity, region size, tunnel excavation, elastic constant

1. はじめに

本研究は、地盤工学の諸問題に対し2次元有限要素法を適用する場合の領域のとり方を考察したものである。最近では3次元有限要素法もかなり一般化してきたが、なお、種々の地盤構造物の構築に伴う地盤の変形や応力解析には依然、2次元解析が主流であるといえる。ところが、本来、半無限領域である地盤に対し2次元有限要素法を適用する場合、特に地盤の変位を計算しようとする場合、不合理な結果を生み出す危険性がある。すなわち、要素分割を行なう領域のとり方に変位が強く依存するという問題である。しかも、単に変位の大きさばかりでなく、正負の符号まで入れ替わることもある。これは、2次元弾性論¹⁾のもつ不合理性をそのまま引き継いだ結果であって、数値解にそのような現象が現れること自体は不自然なことではない。このことはかつて、わが国でも清水らが²⁾トンネル掘削問題に関し指摘している。また、Burdら³⁾、Augardeら⁴⁾によっても注意されている。そして、Gudehusら⁵⁾は境界の範囲の取り方の重要性を指摘し、一方、Zienkiewicz and Taylor⁶⁾およびLewis and Schrefler⁷⁾は、半無限領域に対して無限要素(infinite element)の使用を提案しているが、いずれも具体的な解決方法については詳しく述べていない。久武・山崎⁸⁾は2次元有限要素法および3次元境界要素法によるトンネル掘削解析結果の比較から適切な2次元領域

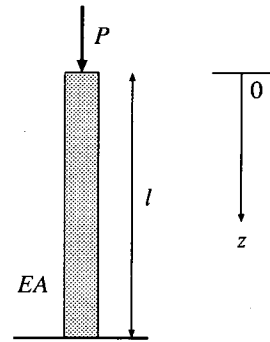


図-1 1次元の棒の圧縮

のとり方を提案しているが、まだ、実用的な解決策には至っていない。

このことは2次元有限要素法の有用性を損なう1つの重要な問題であって、慎重な検討を要する。そこで本研究では、このような問題点の原因を明らかにするとともに、特にこの問題が明確に現れるトンネル掘削に伴う地表面沈下⁹⁾解析を例に取りながら、どのような妥当な対処方法があり得るかについて基本的な考察を行なう。

まず、簡単な例を用いて問題点を説明する。図-1に示すように長さ l の1次元の棒を考える。下端を固定して上端に荷重 P を作用させる。棒の材料のYoung率を E 、断面積を A とすると、上端の沈下量 $v(0)$ は

$$v(0) = \frac{Pl}{EA} \quad (1)$$



2次元半無限領域

図-2 2次元弾性問題

で与えられる。棒に発生する応力 σ 、ひずみ ϵ はそれぞれ

$$\sigma = \frac{P}{A} = E \frac{v}{l} \quad (2)$$

$$\epsilon = \frac{P}{EA} = \frac{v}{l} \quad (3)$$

であって、これらは棒の長さには依存しないが、沈下量 $v(0)$ は棒の長さ l に比例して大きくなる。極端な場合、棒の長さが無限に大きくなると沈下量 $v(0)$ も無限に大きくなる。いいかえれば、棒の先端の沈下量は、棒の長さを変えることで任意の値にすることができる。このことに注意せず、無限に長い棒の問題をたとえば有限要素法で数値計算する場合、出てきた変位の数値解にはまったく意味がない。つまり、棒の長さをいくらに設定するかで答が決ってしまうことになる。このような単純な問題であれば容易に不合理性が明らかになるが、実は、2次元弾性論も同様な問題を抱えている。図-2 に示す一様な弾性係数を有する半無限線形弾性体の表面に分布荷重が作用した問題でも、無限遠方での変位を 0 とすれば、荷重周辺の沈下量はやはり無限大となる。したがって、2次元半無限領域を有限領域の均質弾性体に置き換え、それに有限要素法を適用する場合にも先述した1次元と同じような不合理性を含む。以下では、なぜこのような事実が生じるのか、そして、それにどのように対処すべきかについて考察する。

なお、ここでいう変位や応力は掘削等の外荷重によるものであり、自重による沈下が完了したあとの増分量を対象とする。

2. 3次元境界要素法による検討

(1) 半無限領域と基本解

図-3 のように3次元半無限領域の地盤に球形の空洞を掘削する問題を境界要素法で解く。空洞の直径を D 、地表面から空洞の天端までの距離を H とする。境界要素法¹⁰⁾ について詳しく述べないが、この方法では図-4 に示すような基本解を用いる。すなわち、領域の1点 P に単位の大さの集中荷重が作用した場合に領域内の任意の点 Q に生

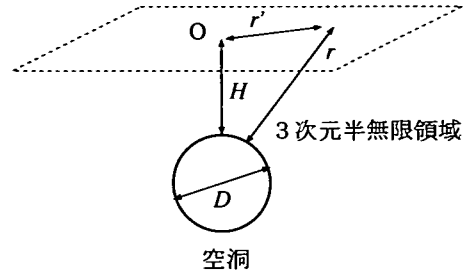


図-3 球形の空洞

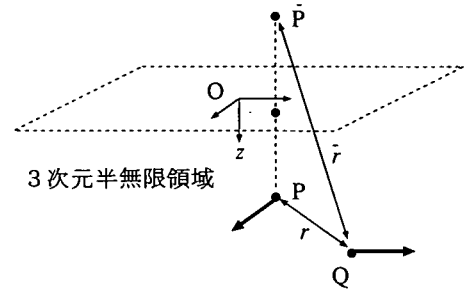


図-4 Green 関数

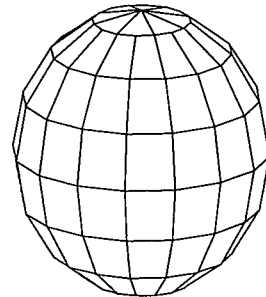


図-5 空洞境界の要素分割

じる変位場を与える関数を基本解という。無論、3次元であるから、集中荷重も3方向あり、変位も3方向ある。ここでは地表面には荷重が作用しないので、地表面では応力が発生しないような基本解を用いる。このように境界条件の一部を満たす基本解を Green 関数とよぶ。3次元の半無限弾性体の場合には、特に Mindlin 解ともいう。例えば図-4 の点 $P(x_P, y_P, z_P)$ において z 方向に単位の集中荷重が作用したとき、点 $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ に生じる z 方向の変位 v は

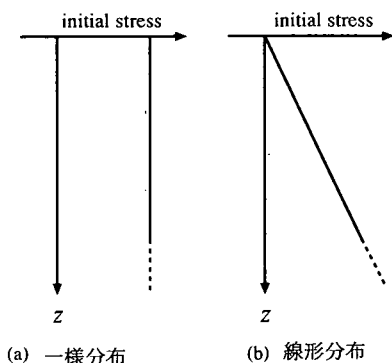


図-6 初期応力分布

$$v = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu} \left\{ \frac{3-4\nu}{r} + \frac{(z_P+z_Q)^2}{r^3} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-\nu)}{\bar{r}} + \frac{(3-4\nu)(z_P+z_Q)^2 - 2z_P z_Q}{\bar{r}^3} + \frac{6z_P z_Q (z_P+z_Q)^2}{\bar{r}^5} \right\} \quad (4)$$

のように表現される。ここに μ はせん断弾性定数、 ν はPoisson比、 r はPQ間の距離、 \bar{r} は、点Pの地表面に対する対称点 \bar{P} と点Qまでの距離である。注意すべきは上式で点Qが十分遠くにあるとき、 $\bar{r} \approx r$ であって、任意点Qにおける鉛直変位 v は $1/r$ のオーダーで0に近づくことである。これに関連したことを後述する。Green関数を用いると、境界要素法の未知関数は残りの境界のみに分布する。いまの問題では、空洞の周辺での変位のみである。ここでは空洞周辺に図-5のような面要素分割を用いた。要素数112、節点数114である。これにより空洞表面に応力を与え、その変位を解くだけで3次元半無限領域の変位や応力の分布が計算できる。用いる基本解、すなわち、Green関数の形より変位に関する境界条件として無限遠方で変位は0となる。

(2) 初期応力分布

一方、空洞周辺は応力境界であって、空洞掘削に相当する荷重を作用させる。空洞を掘削する前に存在していた初期応力を除荷するので、空洞の内部に向かう力を作用させることになる。いわゆ

る「掘削相当外力」を与えるのであるが、図-6に示す2種類の初期応力分布が考えられる。図中の(a)は深さ z に無関係に一律な初期鉛直応力：

$$\sigma_z = \sigma_0 \quad (5)$$

であって、空洞の上半面と下半面で対称な分布となる。いいかえると空洞に作用させる合力は0である。それに対し、図中の(b)は深さ方向に z に比例して初期鉛直応力が漸増していくもので

$$\sigma_z = \gamma z \quad (6)$$

と書ける。ここに γ は地盤の単位体積重量である。この場合、掘削により空洞に作用させる合力は鉛直上向きとなり、その大きさは空洞の体積を V とすると γV に等しい。いわば、空洞には「浮力」が作用することになる。無論、実際の計算には初期応力として式(6)を用いる方が合理的である。なお、水平方向の初期応力は鉛直初期応力に側方土圧係数 K_0 を乗じた値とする。

(3) 境界要素法による計算結果

以下の計算においてYoung率 $E=1$ 、Poisson比 $\nu=1/3$ を用いた。座標軸の表示はトンネルの直径 D で無次元化されている。図-7は、式(5)の初期鉛直応力と $K_0=1$ を仮定し、 $H/D=1$ の位置に球形空洞を掘削した場合の地表面の鉛直変位 v の分布である。空洞直上の地表面では陥没するような沈下が見れる。また、その範囲は比較的限定されていて、少し離れると地表面沈下はほとんど見えなくなる。一方、図-8は同様な問題に対し、初期鉛直応力として式(6)を採用したものである。図-7と比べてかなり様相が異なる。特に以下の2点には注目すべきである。

- (a) 地表面に沈下が生じずに、むしろ、上昇が見れる。
- (b) この地表の上昇が遠方まで伝わっている。図-7と比較すればより明確であるが、地表面の勾配がなだらかに遠方まで続いていることがわかる。

まず、(a)についてであるが、地下に空洞を掘削したにもかかわらず地表面が上昇するのは、実際の施工データからは不自然な印象を与えるが力学的には合理的である。なぜなら、先述したように、深さ方向に増加する初期鉛直応力を仮定すると、掘削により浮力に相当する γV の合力が鉛直上向き

に作用する。したがって、全体として地中に上向きの荷重を作用させたのであるから、地表面が上昇するのは当然であると考えられる。つぎに(b)についてであるが、これは式(4)に示した基本解の形に起因する。すなわち、荷重から遠方では荷重項にかかる係数は近似的に荷重点からの距離 r の逆数となる。(図-7の場合には、鉛直方向の合力が0であるので、遠方では r の逆数にかかる係数は0に近づく。)十分遠方では、荷重点である空洞周辺からの距離 r と、空洞直上の地上点(図-3の点O)からの距離 r' はほとんど等しい。図-9は、横軸に点Oから地表の任意点までの距離 r' 、たて軸に地表の盛り上がり量をとったものである。実線は空洞中心に浮力に相当する上向き集中荷重を与えた場合の基本解、○は $K_0 = 1$ とした場合の境界要素法による数値解、□は $K_0 = 0.5$ とした場合の境界要素法による数値解、×は実線で表される基本解から距離 r の逆数に比例する項(その係数を k とする)のみを取り出したものである。どのグラフの値も r' の大きいところではほとんど一致している。したがって、3次元半無限領域の球形空洞の掘削を計算するとき、初期鉛直応力として式(6)の分布を仮定すると、遠方では地表からの距離 r' の逆数に比例する形で地表の上昇量が減衰していくことになる。実は、この距離の逆数に比例するということ、2次元解析に不合理な結果をもたらす原因となる。なぜなら、2次元でトンネル掘削を解析するという事は、図-10に示すように半無限3次元領域で水平に並んだ無限個の空洞を掘削したものに例えることができる。いま、仮に単位長さ当たり1つずつ空洞を掘削したとすると地表の点Oにはそれぞれの空洞掘削の影響が距離の逆数に比例しながら合成される。1つの空洞の影響を c とすると

$$v|_O = c \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right) \quad (7)$$

だけの上昇量が生じることになる。無論、距離の小さいところでは必ずしも距離の逆数に比例しないが、少し離れると図-9に示すようにほぼ正しい。ところで式(7)の無限級数は項数を増やすといくらでも大きくなる。すなわち、発散する級数である。たとえ、初めの有限個の項を除去しても発散する。同様なことであるが、もし空洞掘削を連続に行なえば、上記の級数は積分：

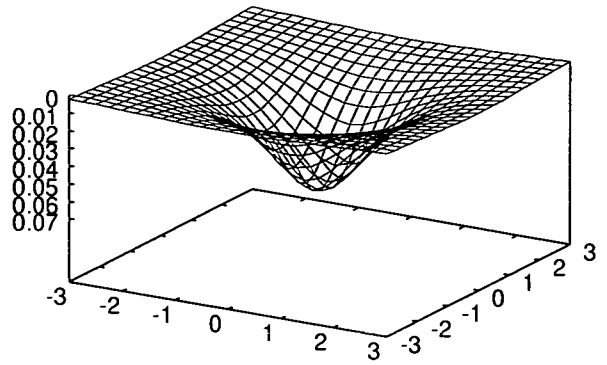


図-7 地表面の鉛直変位(式(5)を仮定)

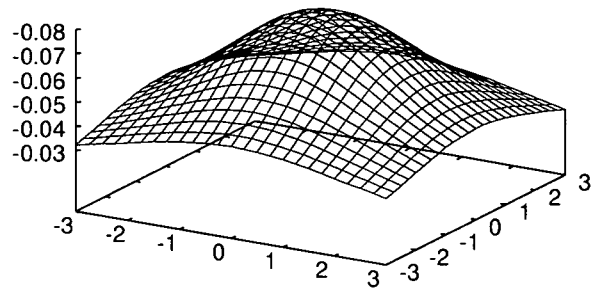


図-8 地表面の鉛直変位(式(6)を仮定)

$$v|_O = c \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{r'} dr' = c \lim_{R \rightarrow \infty} \log R \quad (8)$$

に置き換えられる。この場合にも点Oの上昇量は無限に発散する。これからわかるように、トンネルの横断面を2次元解析するとき、掘削相当外力の総和が0でなければ領域の拡大とともに変位が増大していくことになる。つまり、半無限領域でこのような問題を設定しても、有限の値をもつ解は存在しないのである。実際、境界要素法を用いて図-11のように3次元のトンネル掘削を行なうと、点Oでの上昇量は図-12のようにトンネル長さ L/D とともに対数関数のように増大していくことになる。

3. 2次元有限要素法による検討

以下、本論文では式(6)を仮定する。3次元境界要素法による計算結果を踏まえて、2次元有限要素法で解析領域の大きさを種々、変更した場合にどのような結果が得られるのか検討する。

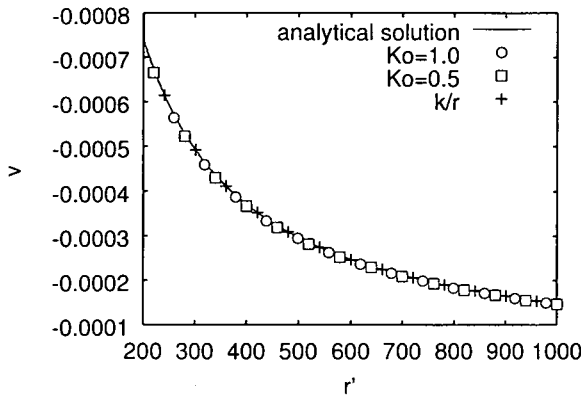


図-9 地表面の変位分布

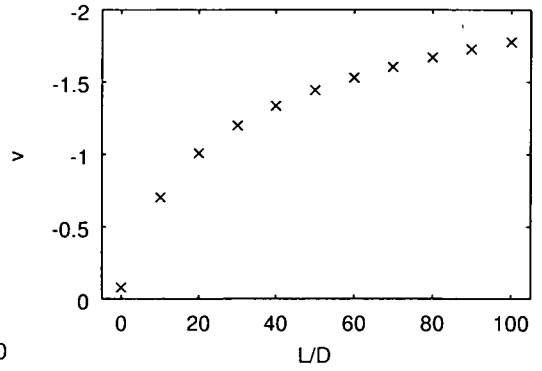


図-12 トンネル長さとお地盤の上昇量

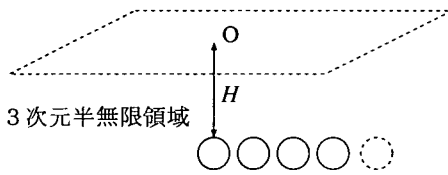


図-10 無限個の空洞

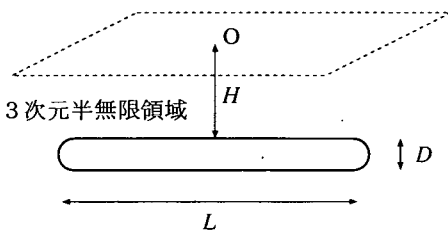


図-11 トンネル掘削

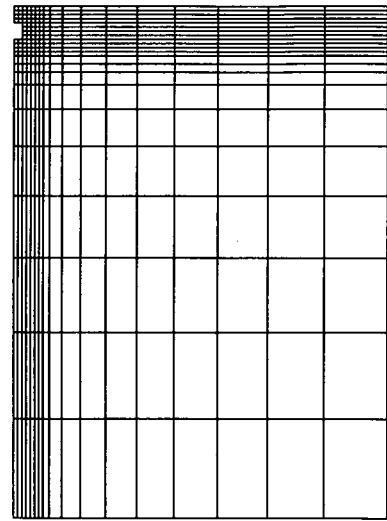


図-13 要素分割 ($H/D = 1$)

以下の2次元平面ひずみ有限要素法で用いる要素分割は図-13に示すものを用いた。各要素は4節点アイソパラメトリック要素である。簡単のためトンネルの形状は正方形としている。その1辺の長さを D 、地表からトンネル天端までの距離を H とすると $H/D = 1$ である。また、図-14は7種類の解析範囲を示す。つまり、要素分割は図-13として固定しておき、有限要素法による計算ではこの全体あるいは部分を用いる。領域の深さとともに水平方向の範囲も重要なパラメーターであるが、ここでは図-14のように両者がほぼ比例して大きくなる場合を考えた。境界条件として、左端は中心線であり対称性から水平変位には剛であり、鉛直変位にはなめらかなという条件を用いた。また、

右端、下端の境界条件の設定には注意が必要であるが、無限に広がっている領域を有限で近似するという立場から左端と同様になめらかで剛な条件を採用した。

(1) トンネル周辺の変位と応力

式(6)のように深さ方向に線形に増大する初期応力と $K_0 = 1$ を仮定したうえ、種々の解析範囲のもとでトンネル掘削に伴う変形、応力解析を実施した。図-14に示すもっとも小さい領域と、最も大きな領域を用いた場合のトンネル周辺の変形と(増分応力の)主応力の分布を描くとそれぞれ図-15、図-16のようになる。図-15の範囲は計算に用いた領域そのものであるが、図-16の範囲は解析領域のごく一部である。なお、主応力図の太

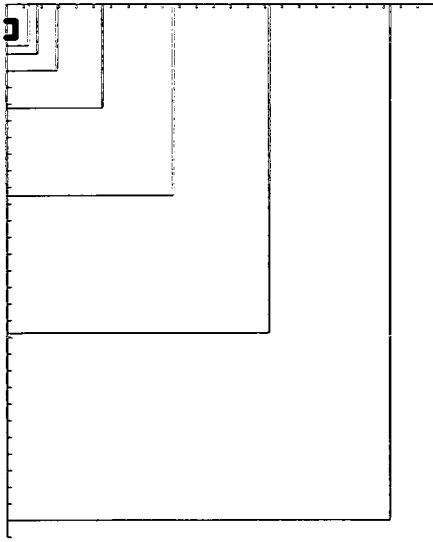
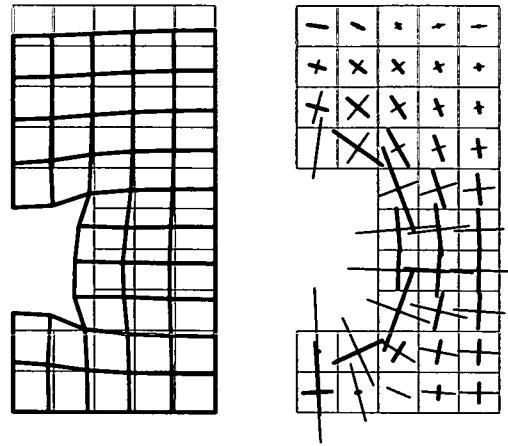


図-14 種々の解析範囲 ($H/D = 1$)

線は圧縮応力を、細線は引張応力をそれぞれ表す。両者を比較すると、全体の変形モードは類似している。実際、応力で見れば、それほど大きな違いはない。ところが、地表面の沈下性状は両者で大きく異なる。すなわち、小さい領域の場合には下端が掘削相当外力の反力壁のような働きをして、トンネル上部を沈下させている。一方、大きな領域をとった場合には、下端が深いため反力がとれず上向きの掘削相当外力により領域全体が上方へ引きずり上げられている。いかえると両者の相違点は、大きな領域の計算結果に上向きの剛体的な平行移動成分が含まれているということになる。

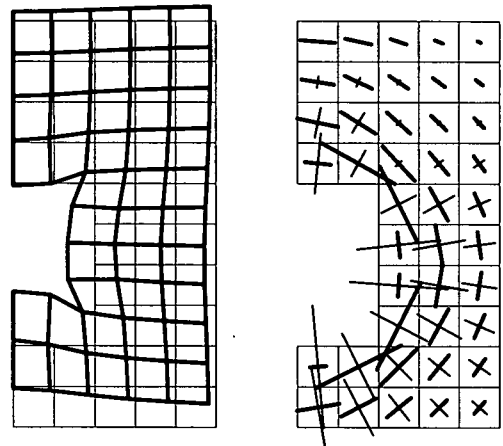
(2) 解析領域と鉛直変位

図-14 に示すそれぞれの解析領域の深さを Z とし、それをパラメータにしてトンネル中心線上の地表面、トンネル天端そしてインバートの3点に生じる沈下量 v の変化を調べると図-17 のようになる。横軸はトンネル幅（高さに等しい）で規準化した領域の深さ Z/D 、たて軸は $v/(\gamma D^2/E)$ である。つまり、沈下量は単位体積重量 γ 、トンネルの断面積 D^2 に比例し、Young 率に反比例するので、無次元化するには沈下量 v を $\gamma D^2/E$ で除すればよい。図を見ると領域の拡大とともに沈下量は徐々に減少し、やがて3つの点ですべて上昇に転じる。さらに領域を増加させればそれぞれ一定の値に収束するようにも見えるが、横軸を対数に変えて、同じ結果を眺めると図-18 のようになり、



(a) displacement (b) principal stresses

図-15 最も小さい領域による結果



(a) displacement (b) principal stresses

図-16 最も大きい領域による結果

直線的に変化を続けていることがわかる。つまり領域の大きさとともに対数のオーダーで変位が増大していることが確認された。これは2次元弾性論がもつ特異性に起因している。

ここで扱っている平面ひずみ条件の空洞は奥行き方向に無限に長いものであるが、これを軸対称条件とすると円筒形の空洞となる。そこで同じ要素分割を用い軸対称問題として同様の計算をすると図-19 のようになって領域の深さとともに変位は収束していることがわかる。すなわち、軸対称問題は本来、3次元問題であって、ここで議論して

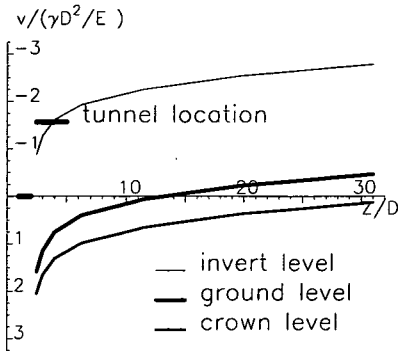


図-17 領域の深さと沈下量 ($H/D = 1, E = E_0$)

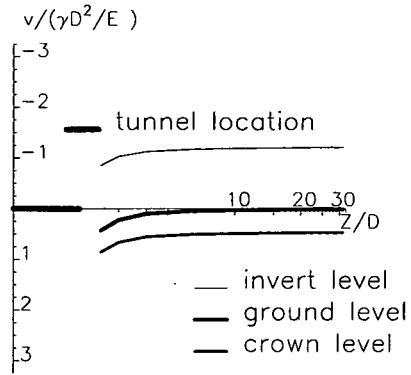


図-19 領域の深さの対数と沈下量 (軸対称, $E = E_0$)

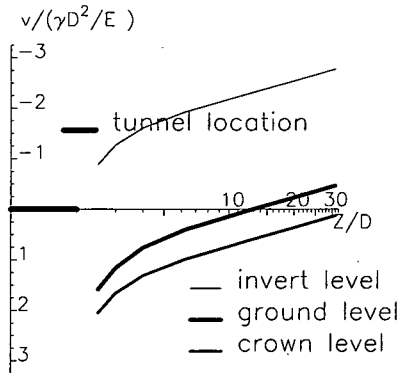


図-18 領域の深さの対数と沈下量 ($H/D = 1, E = E_0$)

いるような対数的な特異性から免れている。

4. 問題点の解消のための考察

以上のように2次元半無限領域の弾性問題は荷重条件によっては変位が無限に大きくなるという不合理な点がある。したがって、それを有限領域で置き換えて有限要素法で計算しても得られた変位にはなんら意味がないことになる。地盤材料は大きなひずみを受けると材料の有する弾性限度を超える。このような場合には適当なモデルによる弾塑性計算がされるが、荷重から十分離れた遠方の領域は弾性状態であることが一般的であるので、この不合理性を避けたことにはならない。ここではトンネル掘削を対象として検討しているが、地盤上の盛土による計算結果もやはり無限の沈下を生むことになり、一方、掘削すれば無限大のヒービングが避けられなくなる。さて、この問題に対する1つの解決法は3次元解析をすることのようにもみえる。こうすれば無限大の変位は避けられ

るが、依然、問題が残る。つまり、図-12に示したようにトンネル掘削の延長とともに地表面が徐々に上昇するという結果となる。しかし、そのような現象は実際にはほとんど観測されない。そこでここでは、2次元弾性モデルの範囲で問題を解決するために、深さ方向にYoung率が大きくなるという条件のもとで考察を行なう。

(1) 1次元問題からの類推

図-1に示す1次元の棒の問題でYoung率が深さとともに増加する場合を考える。1つの簡単な場合として

$$E(z) = E_0(1 + \alpha \frac{z}{S}) \quad (9)$$

のような線形関数で与える。ここに S は適当な代表長さ、 α は定数、また、 E_0 は上端のYoung率の値である。棒の圧縮応力 σ は P/A で一定であるので、棒の長さ z にわたってひずみ $\epsilon(z)$ を積分すると上端の沈下量 $v(0)$ が計算できる。式で書けば

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{P}{E_0 A} \lim_{Z \rightarrow \infty} \int_0^Z \frac{dz}{1 + \alpha \frac{z}{S}} \\ &= \frac{P}{E_0 A} \frac{S}{\alpha} \lim_{Z \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \alpha \frac{Z}{S} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

となり棒の長さ Z の対数のオーダーで発散するので、このYoung率の分布は1次元問題では解をもたない。このような変位 $v(0)$ が収束する1つの条件は

$$E(z) = E_0 \left\{ 1 + \alpha \left(\frac{z}{S} \right)^\beta \right\} \quad (\beta > 1) \quad (11)$$

である。β = 1 では収束しないが、1 よりわずかも大きければ収束する。式 (11) の形は一般的ではないが、z の大きいところ (深いところ) で z の冪 β が 1 より大きいことは、変位 v(0) が収束するための十分条件である。収束するのであれば、ある深さの位置 Z で棒の変位 v(Z) を 0 と仮定しても、v(0) の誤差は Z の大きさとともに小さくできる。たとえば、α = 1, β = 2 のとき

$$v(0) = \frac{P}{E_0 A} \lim_{Z \rightarrow \infty} \int_0^Z \frac{dz}{1 + \left(\frac{z}{S}\right)^2}$$

$$= \frac{PS}{E_0 A} \lim_{Z \rightarrow \infty} \tan^{-1} \left(\frac{Z}{S} \right) = \frac{\pi PS}{2 E_0 A} \quad (12)$$

のように収束するので、Z = 64S 程度で積分を打ち切っても

$$v(0) \approx 1.5552 \frac{PS}{E_0 A} \quad (13)$$

となり、誤差は 1% 以内に収まる。

(2) 2次元問題での検討

1次元の問題で解析領域を深くしていくとき、式 (11) が変位 v(0) の収束するための 1 つの基準となるが、2次元弾性論の場合、どのような Young 率の分布のもとで変位が収束するか詳しいことは知られていない。そこでここでは、以下の 5 つの場合について 2次元有限要素法により解の挙動を調べる。

$$E(z) = E_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{z}{D} \right\} \quad (14)$$

$$E(z) = E_0 \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{z}{D} \right)^2 \right\} \quad (15)$$

$$E(z) = E_0 \left\{ 1 + \frac{1}{16} \left(\frac{z}{D} \right)^2 \right\} \quad (16)$$

$$E(z) = E_0 \left\{ 1 + 0.416 \left(\frac{z}{D} \right)^{1.1} \right\} \quad (17)$$

$$E(z) = E_0 \left\{ 1 + 0.218 \left(\frac{z}{D} \right)^{1.1} \right\} \quad (18)$$

これらの Young 率の深さ方向の分布を描くと図-20 のようである。なお、ここで H/D = 1 および H/D = 3 の 2 つのトンネルの位置も示すが、これらが同時に存在するのではない。式 (14) は式 (9) に相当する場合である。それ以外はすべて式 (11) に相当する場合である。式 (14), (15) および式 (17) では、z/D = 2 で E = 2E₀ となり、式 (16) と式

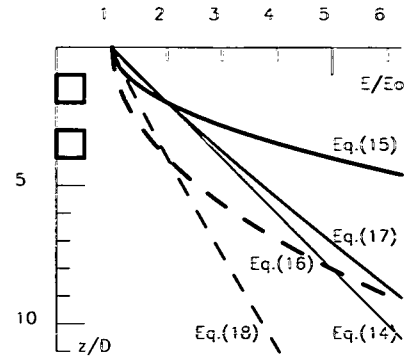


図-20 Young 率の分布形状

(18) では z/D = 4 で E = 2E₀ となるように係数 α を設定した。1次元では式 (14) の場合は地表面の変位は発散し、それ以外の場合は収束する。1次元で収束する場合は 2次元でも、当然、収束する。なぜなら、2次元問題で地表に沿って無限に長い荷重を作用させれば 1次元問題に帰着するからである。だから、興味あるのは式 (14) の場合に、2次元で解析領域を広くするとき解が収束するかどうかである。そこでこれについて領域の深さ Z を大きくしていくとき地盤内の 3 点の沈下量 v がどのように変動するかを見たのが図-21 である。この特性は少し微妙ではあるが、Z/D の大きいところでは小さな勾配の直線で上昇し続けているように見える。2次元弾性モデルでも式 (14) のような分布の Young 率では、領域の大きさとともに変位が収束するとは断定できない。それを明らかにするにはもっと深い領域による計算が必要である。もしこの条件のもとで発散するのであれば、収束発散の基準は 1次元の場合と同様に式 (11) ということになる。なお、Burdら³⁾、Augardeら⁴⁾は式 (14) に相当する式を用いて数値計算すれば地表面は沈下すると述べているが、収束するかどうかは検証していない。式 (15), (16), (17) および式 (18) に対する計算結果が図-22, 23, 24 および図-25 に示されている。深さ方向に Young 率の増加が遅い場合には、少し収束が遅くなるが、曲線はわずかに上に凸であって勾配は 0 に近付いていることがわかる。

次にトンネルの位置を少し深くして H/D = 3 の場合を調べる。要素分割と解析領域を図-26 および図-27 に示す。式 (15), (16), (17) および式 (18) に対する結果は、図-28, 29, 30 および図-31 の通りである。これらの図からわかるように、深いトンネルの場合、変位はインバート近辺での

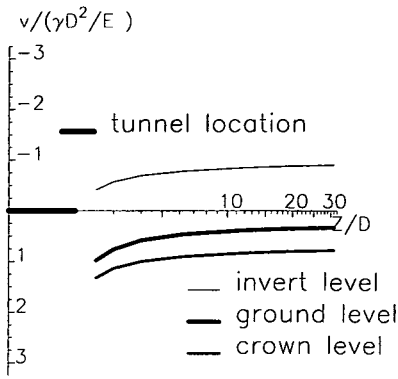


図-21 領域の深さの対数と沈下量 ($H/D = 1$, 式(14))

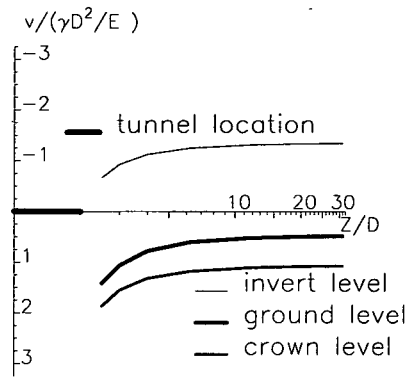


図-23 領域の深さの対数と沈下量 ($H/D = 1$, 式(16))

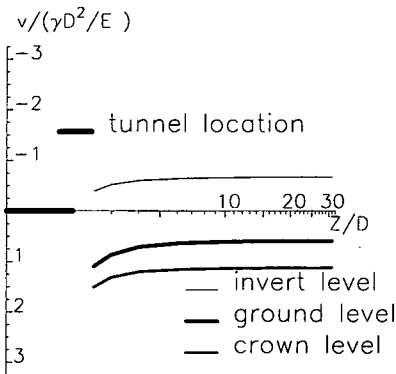


図-22 領域の深さの対数と沈下量 ($H/D = 1$, 式(15))

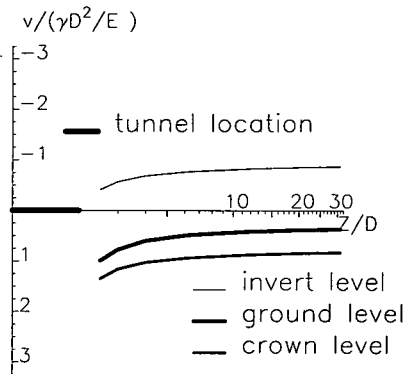


図-24 領域の深さの対数と沈下量 ($H/D = 1$, 式(17))

領域の深さに敏感であり、浅いトンネルの場合よりもインバートから深い範囲まで解析領域とすべきであることがわかる。また、図-25と図-31の $Z/D = 30$ あたりを比較すれば、同じ Young 率の分布性状でも深いトンネルの方が浅いトンネルより大きい地表面沈下を生じることもありえることに注意しなければならない。

(3) 地表面沈下から見た解析領域のとり方

実際のトンネル掘削の施工データから見ると地表面は沈下していることが多い。線形弾性論ではモデル化できないような地盤の力学特性の非線形性、非均質性などがその理由としてあげられるが、いわゆる割線弾性係数のようにそれとほとんど等価な線形弾性モデルも考えられる。すると地表面が沈下する原因は、やはり、弾性係数が深さともに増加していくとしても一般性は失わない。特殊な場合として、ある深さに硬い支持層があってそこで鉛直変位が拘束されていることもある。こ

こでは簡単のために Young 率が深さとともに単調に増加して、変位が収束することが保証されるような状況のもとで、地表面沈下を予測する場合にどのような方法があるかを考察する。ただし、あくまでも式(15)～式(18)に示すような条件のもとでの議論である。

a) インバートから $H/D = 1$ までの結果からの予測

図-22～図-25を参照すれば、被り高さ $H = 1D$ の浅いトンネルの場合、トンネルインバートから $H/D = 1$ までの狭い領域による値から最も大きな領域の変位を推定するにはそれを 0.31～0.68 倍することになる。特に深さ方向に Young 率の増大が緩やかなものは、解析領域に敏感であり、狭い領域を用いれば過大な地表面沈下を呈する。一方、図-28～図-31を参照すれば、被り高さ $H = 3D$ のトンネルの場合には 0.23～0.43 倍することになる。いずれにしてもトンネルインバートから $H/D = 1$ までの領域による結果から地表面沈下量を推定す

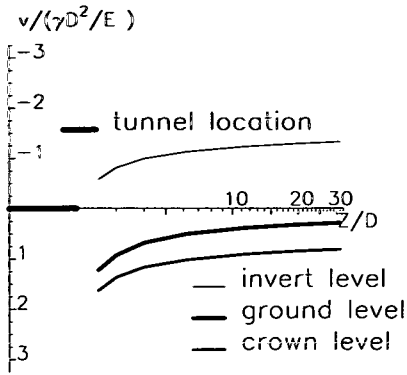


図-25 領域の深さの対数と沈下量 ($H/D = 1$, 式 (18))

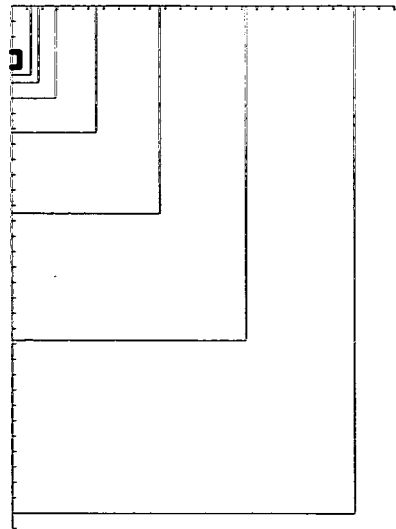


図-27 種々の解析範囲 ($H/D = 3$)

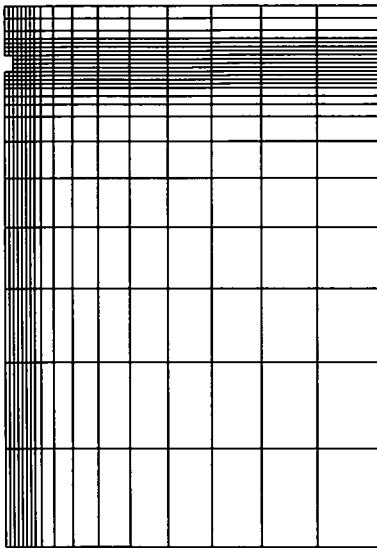


図-26 要素分割 ($H/D = 3$)

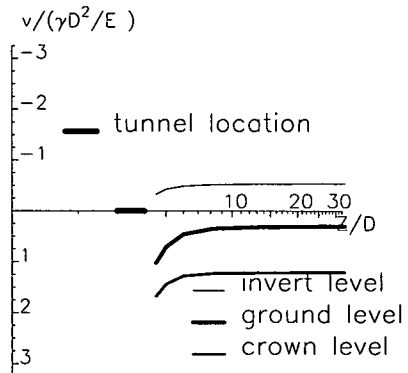


図-28 領域の深さの対数と沈下量 ($H/D = 3$, 式 (15))

るのは確実性が低い。

b) インバートから $H/D = 2$ までの結果からの予測

同様にしてトンネルインバートから $H/D = 2$ までの領域による値から最も大きな領域の変位を推定するには、浅いトンネルおよび深いトンネルの場合でそれぞれ 0.43~0.83 倍および 0.38~0.66 倍することになる。これでもまだ確実性は低い。

c) インバートから $H/D = 4$ までの結果からの予測

同様にしてトンネルインバートから $H/D = 4$ までの領域による値から最も大きな領域の変位を推定するには、浅いトンネルおよび深いトンネルの場合ともにほぼ 0.6 以上の乗数を用いればよい。こ

れでも精度は高いといえないが、得られた数値を地表面沈下の上限值と考えれば十分、工学的な意義はある。トンネルインバートからさらに下方に $4D$ というのは、これまで行われてきた数値解析の実績からみるとやや過大な深さと思われる。ただし、この深さまで要素分割をすることも、それほど細かな分割は不要である。むしろ重要なことは、この深さまでの地盤情報が必要となるということである。

(4) 応力解放率に関する考察

トンネル掘削による地盤変状を求めるために、しばしば応力解放率¹¹⁾を用いることがある。これはトンネル掘削前後のトンネル周辺土圧の変化に着

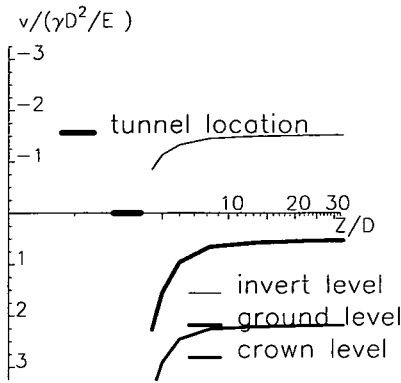


図-29 領域の深さの対数と沈下量 ($H/D = 3$, 式 (16))

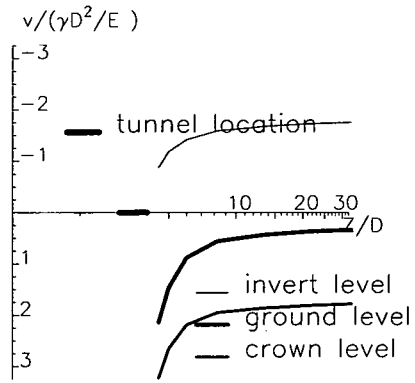


図-31 領域の深さの対数と沈下量 ($H/D = 3$, 式 (18))

して式 (5) の仮定に基づいたものである。

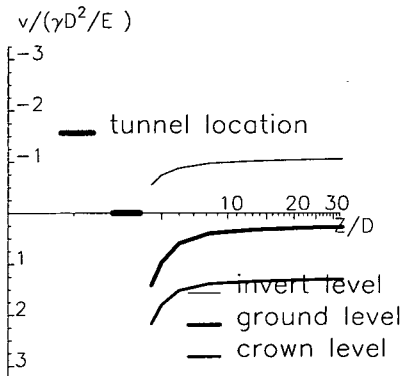


図-30 領域の深さの対数と沈下量 ($H/D = 3$, 式 (17))

目して、掘削荷重を割り引いて作用させる手法である。すなわち、覆工の存在による変形抑止効果を加味するためトンネル掘削前の初期応力の何割かのみを除荷する方法として知られている。トンネル掘削の施工過程を考慮したものであり、トンネル周辺の応力状態や変位を数値計算する際の1つの便法とも評価できるが、その定義は必ずしも定まってはいない。しかし、式 (6) の仮定のもとでこれに力学的な合理性をもたせるならば、支保のない状態で応力解放率分の掘削荷重を作用させるとともに、支保のある状態でも残りの掘削荷重を作用させなければならない。つまり、どのようにトンネルを掘削してもトンネル掘削分（から支保分を差し引いた）の重量だけ必ず軽くなるので、最終的には周辺地盤に鉛直上向きの合力を作用させなければならない。この合力の影響をいかに処理するかが、本研究の出発点であった。たとえば応力解放率が0という極端な場合に地盤の変形がまったく生じないという考え方は、初期応力に関

(5) 剛性の大きい基礎岩盤に関する考察

数値解析で地盤を有限領域に置き換える1つの理由として、ある深さに十分大きい剛性をもつ基礎岩盤の存在が上げられる。確かにそのような岩盤があれば、そこでは直ひずみは小さくなるが、もし、その岩盤の弾性係数が一定で、厚さが十分に大きいとすると同じ議論が繰り返されて、やはり、岩盤表面の沈下量は無限に大きくなる。だから、基礎岩盤というのは、単に剛性の絶対値が大きいというだけではなく、鉛直変位が有限の値に収束する程度にその剛性が深さとともに増加するものでなければならない。

5. まとめ

2次元有限要素法による変位の評価法には領域のとり方に十分な注意が必要であることを述べた。2次元特有の問題は無論あるが、3次元解析をすればすべて解決されるということではなく、たとえ3次元解析を行なう場合でも弾性定数の設定に妥当性がなければ、実際の施工時のデータをうまく説明できないことになる。すなわち、2次元解析や3次元解析にかかわらず、領域設定の問題は地盤調査から得られた弾性定数の分布との関係において議論されなければならない。

本研究より得られた知見を以下にまとめる。

- (a) 均質な弾性地盤を仮定すると、2次元有限要素法による地盤の変位は領域の大きさとともに \log のオーダーで増大する。深さ方向に線形的に増加する弾性係数を仮定しても、収束

するという確証は得られなかった。

- (b) 均質な半無限弾性地盤を仮定すると、3次元解析を行なったとしてもトンネル掘削により、地表面には鉛直上向きの変位が生じる。
- (c) 深さに対し1より大きい幂で増加する弾性定数を想定すると、領域の大きさとともに地盤変位は収束し、しかも、トンネル掘削に伴い地表面に沈下が生じるような結果が得られる。この場合には、有限領域により計算してもある一定の誤差の範囲で変位の評価が可能である。
- (d) 領域範囲の適正な設定方法は、弾性定数の深さ方向の分布との関係により判断されなければならない。
- (e) (本研究で用いた Young 率の分布のもとで) 60%程度の精度で地表面沈下の予測をするには、インパクトから $H/D = 4$ 程度下方までの地盤調査の結果が必要となる。
- (f) 変位自体は領域のとり方に依存するが、ひずみや応力はあまり大きな影響を受けない。

上記の結論を端的に言えば、地盤調査が十分に行なわれていれば数値計算を通して狭い範囲の解析結果からでも広い範囲の計算結果を推定できるが、浅いところの地盤情報だけでは地表変位の計算が困難になるという当然のことに過ぎない。

実際の地盤ではトンネル掘削によって地表面が沈下することが一般的であるとすると、均一な弾性定数を仮定する限り力学的にこれを理解することは不可能である。その1つ、そして、おそらく唯一の説明方法は深さ方向に巨視的に増加する弾性定数を仮定することである。しかし、どのような分布が適切であるかを決定するのは今後に残された大きな課題である。

なお、本研究で実施した数値解析は限られた条

件の範囲であって、一般的な結論を導くにはさらに多くの条件で数値解析を行なう必要がある。いずれにしても数値解析から変位に関する有益な情報を得るためにはここで議論された内容について慎重な考察が不可欠であることはいうまでもない。

謝辞： 本研究に関して京都大学工学研究科環境地球工学専攻 西村 直志助教授から貴重な助言を頂いた。また、境界要素法による数値解析には京都大学大学院工学研究科1年生 西藤 潤君の協力を得た。併せてここに謝意を表す。

参考文献

- 1) Muskhelishvili, N.I.: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, 1963.
- 2) 清水窓吾, 桜井春輔, 清水則一: 浅所トンネルの有限要素解析における二、三の問題点, 土木学会全国大会年次学術講演会講演集 III, pp.381-382, 1985.
- 3) Burd, H.J., Houslyby, G.T., Chow, L., Augarde, C.E. and Liu, G.: Analysis of Settlement Damage to Masonry Structures, Numerical Methods in Geotechnical Engineering, pp.203-208, 1994.
- 4) Augarde, C.E., Burd, H.J. and Houslyby G.T.: A Three-dimensional Finite Element Model of Tunnelling, Numerical Methods in Geomechanics, pp.457-462, 1995.
- 5) Gudehus, G.(edited): Finite Elements in Geomechanics, Wiley, 1977.
- 6) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: The Finite Element Method (volume 1), McGraw-Hill, 1988.
- 7) Lewis, R.W. and Schrefler, B.A.: The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media, John Wiley and Sons, 2000.
- 8) 久武勝保, 山崎康裕: トンネル沈下の FEM 結果に及ぼす解析領域の影響, トンネルと地下, Vol.32, No.11, pp.45-50, 2001.
- 9) Peck, R.B.: Deep Excavation and tunneling in soft ground, 7th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng., State of the Arts Volume, pp.225-290, 1969.
- 10) Bonnet, M.: Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids, John Wiley and Sons, 1998.
- 11) たとえば, 橋本 正, 菅田孝宏, 西沢勝己, 塩谷智広, 中廣俊幸, 新田耕司: 粘性土地盤における実測値に基づくシールド掘削時の応力解放率について, 第 31 回地盤工学研究発表会講演集, pp.2192-2093, 1996.

(2001.3.1 受付)

ON THE DOMAIN ALLOCATION OF FINITE ELEMENT METHOD FOR TUNNEL EXCAVATION

Takeshi TAMURA and Toshihisa ADACHI

The region size to be treated by the 2-dimensional finite element method is one of the serious issues in Geotechnical Engineering since the simulated value of displacement strongly depends upon the depth of the allocated domain. In this paper, the reason for such a fact is firstly clarified by using the 3-dimensional boundary element method and some numerical examples of the tunnel excavation are illustrated to show how the domain size affects the results. Finally some remedies for the problem are proposed by assuming the varying elastic modulus with the depth.