

圧縮場における弾塑性体の分岐解析と パスジャンプ挙動

山川 優樹¹・寺田 賢二郎²・池田 清宏³・鳥居 邦夫⁴

¹正会員 工修 長岡技術科学大学助手 環境・建設系 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

²正会員 Ph.D. 東北大学大学院助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

³正会員 Ph.D. 東北大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

⁴正会員 工博 長岡技術科学大学教授 環境・建設系 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

初期状態において均質な弾塑性材料の供試体が平面ひずみ条件下で圧縮せん断変形を受ける場合について、有限変形・弾塑性有限要素解析を行い、分岐モードおよび分岐後の変形挙動や供試体の荷重不安定挙動について考察した。初期不整を導入した疑似分岐解析ではなく、完全系の分岐点・分岐モードを求め、分岐経路への切替えを行った。こうした厳密な分岐解析を行い、分岐後の変形挙動を追跡することにより、幾何学的不安定現象としての拡散型分岐モードがせん断帯状の局所変形発生の変因となっていることを検証した。基本つり合い経路上では一様変形が持続するが、分岐をきっかけとして不均一な変形が発生し、次第に局所的な変形へと進展した。また、初期の変形モードとは異なるモードの経路に段階的に移行するパスジャンプ挙動についても考察を行った。

Key Words : bifurcation, elasto-plasticity, finite deformation, localized deformation, path jumping

1. はじめに

地盤材料のせん断試験では、様々な局所変形モードが観察される。例えば地盤材料の三軸圧縮試験体は、同一条件下であっても、いわゆる「袈裟切り型」、「バルジ型」、「下膨れ型」、あるいは「ダイヤモンドパターン」等の様々な破壊形態を呈する。当然、強度や変形特性もこれらの影響を強く受けているものと考えられる。一般に、初期状態の供試体はほぼ均一であると見なされるが、実際の供試体には、僅かな材料の不均質さや、形状の微小な歪み等といった、材料的・幾何学的な初期不整が供試体作成時に不可避的に入り込んでいる。こうした初期不整によってもたらされる応力やひずみ分布の不均一さは、初めはごく僅かである。しかし、材料の塑性や軟化あるいは変形形態の幾何学的な変化の影響を受けて次第に局所変形へと進展し、やがて供試体全体に渡るせん断帯を形成し、最終的な破壊に至る。供試体が破壊に至るまでのこのようなプロセスは、初期の変形形態が不安定化し、別の安定な形態へと多段階に変化していく過程であると捉えることができる。

地盤材料の圧縮せん断試験においてしばしば観察されるこうした形態変化挙動について、Ikeda and Murota¹⁾は円筒シェル座屈パターンと本質的に同種であると、"shell analogy"として群論の見地から分岐の仕組みを説明している。Yamaki²⁾による円筒シェル座屈実験では、パスジャンプ (path jump) により変形形態が段階的に変化していくことが分かっている。この現象は、あるつり合い経路 (パス) から他の変形モードの経路に突然遷移することから、そのように呼ばれる。本

論文ではこれを分岐とは区別して、元のモードが持続している経路ではジャンプ点前後で接線剛性マトリックスの負の固有値の個数が変動せず、かつ異なる変形モードに遷移した経路でその個数が変動するものをパスジャンプと呼ぶこととする。

Ikeda et al.³⁾は、砂の圧縮せん断円柱供試体における多段階的分岐 (recursive bifurcation) の観察実験を行っている。このような弾塑性分岐問題では、Hill and Hutchinson⁴⁾が指摘しているように、特異点の集積のために多数的分岐モードおよび分岐経路が近接する可能性があり、パスジャンプや多段階的分岐が起こりやすい状況にある。このことは、要素試験においてもモードが次々に変化することにより応力～ひずみ関係が大きく変動する可能性を示唆するものである。この現象のメカニズムを解明することは、要素試験結果の妥当な解釈法を議論する上で重要である。

分岐現象が各種材料の局所変形挙動に関与していることは古くから認識されている。特に金属材料の分野で盛んに研究が行われ、解の唯一性の検討により分岐発生条件とモードを求める解析的研究^{4),5)}がその先駆的な役割を果たした。のちに数値解析手法の発達により、有限要素法を用いた大変形挙動の数値シミュレーションも可能となり⁶⁾、分岐解析のための数値算法^{7),8)}も開発され、古典的解析的手法では追跡できなかった分岐後の変形挙動も再現されている⁹⁾。

地盤工学分野でも、地盤材料の典型的破壊形態であるせん断帯形成は分岐現象の一種とされ、実験的・解析的研究が行われてきた^{10),11),12)}。最近の解析的アプローチによる研究では、Yatomi and Shibi¹³⁾らによる

非共軸 Cam-clay モデルの拡散型分岐モード発生条件と供試体形状効果に関する研究, Wu¹⁴⁾によるせん断帯モード発生条件の検討, 井合・Bardet¹⁵⁾による飽和弾塑性材料の分岐モード解析等がなされている。Drescher and Vardoulakis¹⁶⁾は, せん断試験におけるピーク荷重の発現とその後の荷重不安定挙動は局所変形の発生によるものであるとし, これを“geometric softening”と呼んだ。Asaoka and Noda¹⁷⁾は水～土骨格連成有限要素解析を行い, 供試体の強度や変形モードに対する初期不整の影響と, 間隙水の移動の重要性を論じている。さらに小林¹⁸⁾は, 初期不整を有する供試体が次第に低次の変形モードへと遷移していく様子を追跡している。

これらの研究はいずれも, 供試体の変形挙動に対して分岐現象が関与していることを数値解析により検証するものである。しかしながら, 多くの研究では解析対象にあらかじめ初期不整を与え, 分岐点近傍での挙動を近似的に評価する疑似分岐解析を行っており, 完全系の分岐解析例^{19), 20)}は少ない。疑似分岐解析は実用上有用な手法であるが, 以下のような問題点がある。与える初期不整が真の分岐モードと一致している保証はないため, 必ずしも予期する経路に解が誘導される訳ではない。また, 初期不整の大きさによって, 得られる応答は大きく変化してしまう²¹⁾。従って, 疑似分岐解析の妥当性を議論するに先だて, 初期不整に頼らない完全系の厳密な分岐解析を行い, 分岐点, 分岐モード, そして分岐経路の挙動を把握する必要がある。

そこで本研究では, 初期状態において均一な弾塑性材料の平面ひずみ供試体が圧縮せん断変形を受ける場合を考え, 分岐モードおよび分岐後の変形挙動について有限変形理論に基づく弾塑性有限要素解析を行う。基本経路上では一様な応力・変形場が持続するが, 分岐をきっかけとして不均一変形が発生し, 次第に局所的な変形へと移行していく過程を完全系の分岐現象として再現し, 構造不安定現象としての拡散型分岐がせん断帯状の局所変形発生の一因となっていることを検証する。材料には等方圧依存型の降伏条件と関連流れ則・硬化則に従う一般的な弾塑性モデルを用い, 等方ひずみ硬化則を適用して軟化の可能性を排除するにも関わらず, 実験で観察される各種の分岐モードや供試体の荷重不安定挙動が再現できることを示す。また, 分岐後において元の変形モードとは異なるモードに変化するパスジャンプ挙動の解析事例についても考察する。

本研究で行う塑性不安定・局所変形解析においては, 有限ひずみ問題に対しても合理的な定式化が必要となるため, 近年の弾塑性有限変形解析で主流となりつつあり, より運動学的に厳密とされる変形勾配の乗算型分解と超弾性構成式に基づく定式化²²⁾を採用する。また, 大規模自由度の分岐解析を行うために, 計算力学分野で開発された最新の手法^{23), 24)}を用いることとした。ただし, 本研究では変位およびひずみの連続性が保た

れた条件下での拡散型分岐モードのみを対象とし, 材料不安定の要因を除外して議論することとする。材料のひずみ軟化およびせん断帯形成に対応する不連続な変位やひずみの発生条件は, 弾塑性接線係数が強積円性を喪失する条件として pointwise に判定されるものであるが^{25), 26)}, 本研究では対象外とする。

2. 有限変形弾塑性境界値問題の定式化

本章では, 有限変形を考慮した一般的な弾塑性境界値問題の定式化について簡潔にまとめる。本研究では, 運動学的に厳密とされる変形勾配の乗算型分解と超弾性構成式に基づく定式化²²⁾を採用する。定式化の詳細は, 例えば Simo²⁷⁾の文献を参照されたい。

(1) 支配方程式とその線形化

参照配置の領域 $B \subset \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ ($n_{\text{dim}} = 1, 2$ or 3) 内の物質点 $\mathbf{X} \in B$ で成立するつり合い式は,

$$\mathbf{P} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } B \quad (1)$$

と表される。ここで $\nabla_{(\cdot)}$ は下付添字の変数 (\cdot) に関する微分演算子, \mathbf{P} は第 1 Piola-Kirchhoff 応力, ρ_0 は基準配置における物体の質量密度, \mathbf{b} は単位質量当たり作用する物体力である。また, 領域の境界 ∂B に課される幾何学的・力学的境界条件はそれぞれ,

$$\varphi = \bar{\varphi} \quad \text{on } \partial_{\varphi} B, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{on } \partial_t B \quad (2)$$

と与えられ, また各境界は,

$$\partial_{\varphi} B \subset \partial B, \quad \partial_t B \subset \partial B, \quad \partial_{\varphi} B \cap \partial_t B = \emptyset \quad (3)$$

なる関係を満たす。ここで $\bar{\varphi}$ は $\partial_{\varphi} B$ 上で与えられる配置の写像, $\bar{\mathbf{T}}$ は $\partial_t B$ 上で与えられる表面力, \mathbf{N} は ∂B に対する外向き単位法線である。また変位場を \mathbf{u} とし, 変形勾配とそのヤコビアンをそれぞれ,

$$\mathbf{F} := \varphi \otimes \nabla_{\mathbf{X}} = \mathbf{1} + \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{X}}, \quad J := \det \mathbf{F} > 0 \quad (4)$$

と定義しておく。ここで $\mathbf{1}$ は 2 階の単位テンソルである。ここで, 冪次の境界条件を満たす物質表記の試験関数 η_0 の空間を,

$$\mathcal{V}_0(B) := \{ \eta_0 : B \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}} \mid \eta_0 \in [W^{1,p}(B)]^{n_{\text{dim}}}, \eta_0(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \text{ for } \mathbf{X} \in \partial_{\varphi} B \}, \quad (5)$$

と定義する。ここで $W^{1,p}(B)$ は, 一階までの導関数が p 乗 Lebesgue 可積分である関数の空間である ($p \geq 2$)。強形式のつり合い式 (1) に対して試験関数 η_0 を乗じ, Gauss の発散定理と式 (2) 中の表面力に関する境界条件を用いると, 物質表記 (基準配置参照型) の弱形式つり合い式が,

$$G_0(\mathbf{P}, \eta_0) := \int_B \mathbf{P} : (\eta_0 \otimes \nabla_{\mathbf{X}}) dV - \int_B \rho_0 \mathbf{b} \cdot \eta_0 dV - \int_{\partial_t B} \bar{\mathbf{T}} \cdot \eta_0 dS = 0, \quad \forall \eta_0 \in \mathcal{V}_0(B) \quad (6)$$

と求められる。さらに Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{\tau}$ との関係式 $\mathbf{P} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T}$ を用いると, 式 (6) は空間表記 (時刻 t

の現配置参照型) で

$$G_{\varphi_t}(\tau_t, \eta) := \int_{\varphi_t(\mathcal{B})} \tau_t : (\eta \otimes \nabla_{\mathbf{x}_t}) \frac{dv}{J} - \int_{\varphi_t(\mathcal{B})} \rho_0 b \cdot \eta \frac{dv}{J} - \int_{\partial_t \varphi_t(\mathcal{B})} \bar{\mathbf{i}} \cdot \eta \, ds = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_{\varphi_t} \quad (7)$$

と書き換えられる。ここで $\bar{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{T}}(dS/ds)$ である。また η は空間表記の試験関数であり、その空間は

$$\mathcal{V}_{\varphi_t}(\mathcal{B}) := \left\{ \eta : \varphi_t(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times \dim} \mid \eta(\varphi_t(\mathbf{X})) = 0 \text{ for } \mathbf{X} \in \partial_\nu \mathcal{B} \right\} \quad (8)$$

と定義され、また $\eta(\varphi_t(\mathbf{X})) = \eta_0(\mathbf{X}) \circ \varphi_t^{-1}(\mathbf{X})$ なる関係が成り立つ。弱形式つり合い式 (7) を解く際に必要となる線形化の手続きについては、第 3 章で述べる。

(2) 超弾性構成式・流れ則・硬化則・負荷/除荷条件

弾塑性材料の自由エネルギー Ψ が、弾性ポテンシャル \mathcal{W} と塑性ひずみ硬化ポテンシャル \mathcal{H} を用いて

$$\Psi(b^e, \xi) := \mathcal{W}(b^e) + \mathcal{H}(\xi) \quad (9)$$

と与えられるものとする。ここで $b^e := \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^{eT}$ は弾性の左 Cauchy-Green 変形テンソル、 ξ は塑性ひずみ硬化に関するひずみのオーダを持つ内部変数である。ここでは変形勾配 \mathbf{F} が、

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (10)$$

と弾性・塑性部分に乗算型分解できることを仮定している。 \mathbf{F}^p は不可逆的な塑性変形に対応し、 \mathbf{F}^e に相当する弾性変形を除いた状態 (応力解放配置) を局所的に定義するものである。このとき超弾性構成式が、

$$\tau(b^e) = 2 \frac{\partial \Psi(b^e, \xi)}{\partial b^e} \cdot b^e = 2 \frac{\partial \mathcal{W}(b^e)}{\partial b^e} \cdot b^e, \quad (11)$$

と与えられ、また、塑性ひずみによる硬化則が、

$$q(\xi) := - \frac{\partial \Psi(b^e, \xi)}{\partial \xi} = - \frac{\partial \mathcal{H}(\xi)}{\partial \xi} \quad (12)$$

と与えられる。ここで q は ξ と仕事について共役な応力のオーダを持つ塑性内部変数である。

なお、次節で述べるように本研究では Drucker-Prager の降伏規準に従う等方圧依存型モデルを用いるが、こうした材料では流れ則・硬化則の関連性は一般には成立しないものとされている¹⁰⁾。しかしながら、ここでは弾塑性応答が最大塑性散逸の原理に従い、流れ則・硬化則それぞれに関連性が成立する²⁸⁾ものとし、かつ等方硬化則のみに限定して考慮することとする。このとき塑性散逸不等式より、流れ則および硬化則はそれぞれ

$$- \frac{1}{2} (\mathcal{L}_v b^e) \cdot b^{e-1} = \gamma \frac{\partial \phi(\tau, q)}{\partial \tau}, \quad (13)$$

$$\dot{\xi} = \gamma \frac{\partial \phi(\tau, q)}{\partial q} \quad (14)$$

と導かれ、さらに Kuhn-Tucker 形式の負荷・除荷条件

$$\gamma \geq 0, \quad \phi(\tau, q) \leq 0, \quad \gamma \phi(\tau, q) = 0 \quad (15)$$

が課される。ここで $\phi(\tau, q)$ は降伏関数、 γ は塑性 consistency パラメータである。また、式 (13) 中の $\mathcal{L}_v b^e$

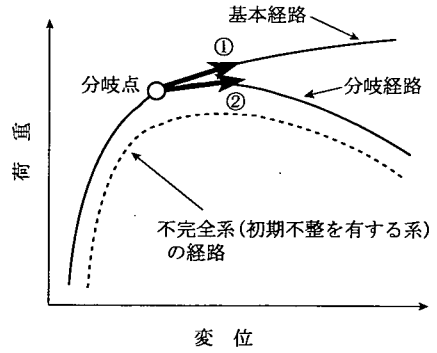


図-1 解の分岐の模式図

は b^e の変位速度 $v := \dot{\varphi}$ に関する Lie 微分である。

3. 弾塑性解析手法

本章では、数値解析を行う際に必要となるつり合い式の線形化の手続きと、本研究の数値解析で用いた材料モデル、そして弾塑性分岐解析手法について述べる。

(1) つり合い式の線形化

空間表記の弱形式つり合い式 (7) は変位に関して非線形であるため、線形化して反復的に解く必要がある。そこで、増分変位 Δu に関して線形化を行うにあたり、配置 $\varphi_t(\mathcal{B})$ から $\zeta \Delta u$ ($\zeta > 0$ はパラメータ) だけ変形した配置 $\varphi_{t+\zeta \Delta t} := \varphi_t + \zeta \Delta u$ を考え、 Δu に関して方向微分を取ることで線形化つり合い式は

$$G_{\varphi_t}(\tau_t, \eta) + \frac{d}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} G_{\varphi_{t+\zeta \Delta t}}(\tau_{t+\zeta \Delta t}, \eta, \Delta u) = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_{\varphi_t} \quad (16)$$

と求められる。つり合い状態でないとき、式 (16) 左辺第 1 項は $G_{\varphi_t}(\tau_t, \eta) \neq 0$ となり、これは残差力に相当する。また、同式左辺第 2 項の具体形は

$$\frac{d}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} G_{\varphi_{t+\zeta \Delta t}} = \int_{\varphi_t(\mathcal{B})} \left[(\eta \otimes \nabla_{\mathbf{x}_t}) : \mathcal{L}_{\Delta u} \tau_t + \tau_t : \{ (\Delta u \otimes \nabla_{\mathbf{x}_t})^T \cdot (\eta \otimes \nabla_{\mathbf{x}_t}) \} \right] \frac{dv}{J} \quad (17)$$

と与えられ、これを有限要素離散化することにより接線剛性マトリックス \mathbf{K} が得られる。式 (17) 中の $\mathcal{L}_{\Delta u} \tau_t$ は τ_t の Δu に関する Lie 微分で、増分型構成式により、

$$\mathcal{L}_{\Delta u} \tau_t = \bar{\mathbf{c}}_t^{\text{ep}} : [\Delta u \otimes \nabla_{\mathbf{x}_t}] \quad (18)$$

と表される。ここで $\bar{\mathbf{c}}_t^{\text{ep}}$ は、増分変位 Δu に整合した (consistent な) 弾塑性接線係数であり、return mapping アルゴリズムを増分変位 Δu に関して線形化することにより陽な形式で得られるもので²²⁾、時間微分により導出された古典的速度型表現とは異なる。この具体形は付録 I に示す。Newton-Raphson 法の反復解法によってつり合い式 (7) を解く際、速度形式に基づくアルゴリズムでは 1 次収束しか得られないが、本アルゴリズムでは Newton-Raphson 法本来の 2 次収束が得られ、

効率的に解析を行うことができる²⁹⁾。

(2) 超弾性モデル・塑性モデル

第2章の超弾性構成式(11)については等方弾性体を考慮し、主軸系で記述した Henky のポテンシャル関数

$$\begin{aligned} W(b^e) &= W(\varepsilon_1^e, \varepsilon_2^e, \varepsilon_3^e) \\ &:= \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e)^2 \\ &\quad + \mu \left[(\varepsilon_1^e)^2 + (\varepsilon_2^e)^2 + (\varepsilon_3^e)^2 \right] \quad (19) \end{aligned}$$

を用いることとする。ここで λ, μ は Lamé 定数, $\varepsilon_A^e := \log \lambda_A^e$ ($A = 1, 2, 3$) は弾性対数ひずみ, λ_A^e は b^e の固有値の平方根として求められる弾性の主ストレッチである。式(11), (19)より, Kirchhoff 応力 τ は

$$\tau = \sum_{A=1}^3 \left[\lambda (\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e) + 2\mu \varepsilon_A^e \right] n_{(A)} \otimes n_{(A)} \quad (20)$$

と求められる。 $n_{(A)}$ ($A = 1, 2, 3$) は b^e の主軸である。

塑性の降伏関数は Drucker-Prager の降伏規準

$$\phi(\tau, q) := \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\|\text{dev}[\tau]\| + g(\bar{\tau}) \right] - \left[\hat{\tau}_{y0} - q(\xi) \right] \leq 0 \quad (21)$$

を用いることとする^{26), 30)}。ここで $\bar{\tau} := \frac{1}{3} \text{tr}[\tau]$ および $\text{dev}[\tau] := \tau - \bar{\tau}$ はそれぞれ τ の等方成分, 偏差成分, $\|\text{dev}[\tau]\| := \sqrt{\text{dev}[\tau] : \text{dev}[\tau]}$ は偏差応力のノルム, $\hat{\tau}_{y0}$ は初期降伏応力である。また $g(\bar{\tau})$ は塑性に対する等方圧の影響を表す関数であり, ここでは

$$g(\bar{\tau}) := \beta_\phi \bar{\tau} \quad (22)$$

という形式を用いることとすると, 定数 β_ϕ は主応力空間における Drucker-Prager 降伏面による円錐の頂角に相当する。これらのパラメータ $\hat{\tau}_{y0}, \beta_\phi$ については, Mohr-Coulomb の粘着力 \bar{c} および摩擦角 $\bar{\theta}$ により,

$$\hat{\tau}_{y0} = \frac{6\bar{c} \cos \bar{\theta}}{\sqrt{3}(3 + A \sin \bar{\theta})}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_\phi = \frac{6 \sin \bar{\theta}}{\sqrt{3}(3 + A \sin \bar{\theta})} \quad (23)$$

のように決定することができる。 $-1 \leq A \leq 1$ は定数で, $A = -1, 1$ の時に Drucker-Prager 降伏面は Mohr-Coulomb 降伏面のそれぞれ外側, 内側の包絡線となる。

以上では, 超弾性構成式と, 変形勾配の乗算型分解に基づく形式の流れ則, 硬化則について述べてきた。実際の数値解析では, 各荷重ステップの反復過程において数値積分点での応力評価を行うことになるが, これについては後退型 return mapping 法を用いて厳密に降伏面上に位置する応力を求めるとともに, 変形テンソルの弾性部分 b^e をステップ毎に保存することで塑性変形履歴を更新する手続きを取る。

(3) 弾塑性分岐条件

本研究では, 初期不整を導入した疑似分岐解析ではなく, 完全系の分岐解析を行う。すなわち, 基本つり合い経路上の分岐点と分岐モードを求め, 分岐経路への切替え操作を行う。ここでは分岐点の判定条件について述べる。この条件は, 本研究で対象とした地盤材料

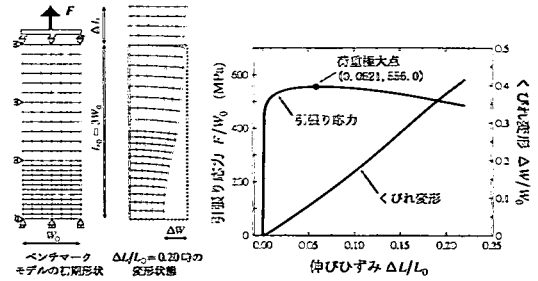


図-2 ベンチマークモデルと解析結果

だけでなく, 他の弾塑性材料の分岐解析にも構成モデルを問わず適用可能である。弾塑性境界値問題における解の唯一性の十分条件は, Hill³¹⁾により議論されている。有限変形問題に対応した速度形式の弾塑性分岐条件式⁹⁾を現配置表記で書くと,

$$\begin{aligned} I_t := \int_{\varphi_t(B)} \left\{ (v^* \otimes \nabla_{x_i}) : c_t^{ep} : (v^* \otimes \nabla_{x_i}) \right. \\ \left. + \tau_t : \{ (v^* \otimes \nabla_{x_i})^T \cdot (v^* \otimes \nabla_{x_i}) \} \right\} \frac{dv}{J} = 0 \quad (24) \end{aligned}$$

となる。ここで, c_t^{ep} は速度型の弾塑性接線係数で, 付録 I の式 (I.20) において塑性 consistency パラメータの増分を $\Delta\gamma = 0$ としたものに等しい。式 (24) を満たす非自明な変位速度の解 $v^* \neq 0$ が存在するとき, 解の唯一性が破れるとされている。ここで, 基本経路と分岐経路に対応する相異なる 2 つの解 v_I, v_{II} ($v_I \neq v_{II}$) が存在したとして (図-1 中の ①, ② に対応), 上付添字 (*) により 2 解の差を $v^* := v_{II} - v_I$ と表している。

Hill³¹⁾は, 線形比較体を導入して式 (24) を議論している。しかしながら, 分岐時における除荷発生の可能性を排除すれば, 線形比較体の接線係数を用いなくても, 式 (17) を離散化して得られる接線剛性マトリックス K の特異性条件

$$\det K = 0 \quad (25)$$

を判定することにより, 式 (24) と等価な条件として分岐点 (あるいは荷重極限点) の位置を求めることができる^{9), 19), 20), 32)}。従って本研究においても, 式 (25) を用いて分岐点の発生を判別する。

(4) 大規模解析における分岐解析手法

前節で述べたように, 分岐点の判別を行うためにはつり合い点において接線剛性マトリックス K の固有値を求め, ゼロ固有値が発生する点をモニタリングする必要がある。また分岐経路への切替えを行う際には, K のゼロ固有値に対応するクリティカルな固有ベクトル, すなわち分岐モードを求める必要がある。

藤井, 野口²⁴⁾は, 線形化つり合い式を解く際に行う K の三角分解 (LDL^T 分解) の結果から近似固有ベクトルを抽出する手法を提案している。この手法によれば, 連立方程式の解法に僅かに付加的な手続きを加えるだけで, 近接・多重分岐点であっても個別に分岐モー

ドを求めることができることから、本研究の分岐解析ではこの手法を用いて固有値解析を行う。

数値解析における分岐経路への切替え手続きは以下の通りである³²⁾。各荷重ステップのつり合い点において K の固有値の符号を確認し、ひとつでもゼロのものがあり、かつ荷重パラメータ（ここでは軸荷重）の極大・極小点でなければ、このつり合い点を分岐点と判定する。次に、分岐点においてゼロ固有値に対応するクリティカルな固有ベクトル（分岐モード）を求め、これをスケリングしたものを変位予測子の初期値として反復計算を開始し、得られた収束点が分岐経路上のつり合い点となる。経路切替えをうまく行うためには、このスケリング法は弾塑性分岐解析では特に重要である。Hill³¹⁾の線形比較体による議論に従い、分岐発生瞬間での除荷発生の可能性を排除する必要があるため、分岐モードの変位予測子を変位増分として、何回か試行的に数値積分点で応力評価を行い、全ての積分点で除荷が発生しないような最大のスケリング係数を用いることにより、効率的に経路切替えができる³²⁾。

(5) 有限要素解析コードの検証

本章で圧縮せん断供試体の分岐解析を行うのに先立ち、既述の定式化に基づく有限要素解析コードの精度検証を行った。比較対象としては、日本塑性加工学会による平面ひずみ引張りのベンチマークテスト³³⁾を用いた。構成式にはひずみ硬化型の von Mises の降伏規準（式 (22) で $\beta_\phi = 0$ とする）を用い、材料定数、有限要素の種類（4 節点アイソパラメトリック要素）、要素分割、数値積分法などは全てベンチマークと同じとした。ベンチマークモデルと本解析により得られた変形の様子、ならびに伸びひずみと引張り応力、くびれ変形との関係を 図-2 に示す。

荷重極大点および極大点以後の荷重および変形量について、数ケースのベンチマークと比較を行った結果、相対誤差は荷重で最大 0.19%、変形量で最大 1.64% であった。このことより、本研究で用いる有限要素解析コードは有限変形解析ベンチマークと同程度の精度を有することが示された。

4. 圧縮せん断時の弾塑性分岐の数値解析

本章では、初期状態において均一な弾塑性材料の供試体が、平面ひずみ条件下で圧縮せん断変形を受ける場合の弾塑性分岐挙動の数値解析を行う。基本つり合い経路上の分岐点および分岐モードを求め、さらに分岐経路への切替えを行い、分岐後のつり合い経路を追跡することにより、分岐をきっかけとした不均一変形の発生・進展、ひずみの局所化、除荷域の進展、供試体の荷重不安定（軟化）挙動について考察する。

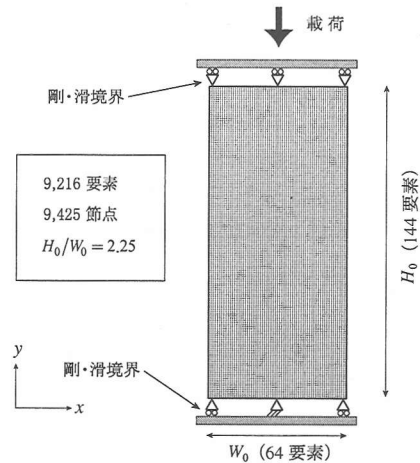


図-3 解析モデル

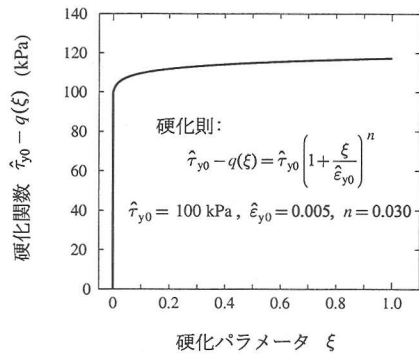


図-4 硬化関数

(1) 解析モデルと境界条件

解析モデルを 図-3 に示す。平面ひずみ状態を仮定し、幅 W_0 、高さ H_0 の矩形領域の上端に一樣な y 方向変位が与えられるものとする。地盤材料のせん断試験で用いられる円柱供試体の標準的な高さ / 直径比は 2.0 ~ 2.5 であることから、解析モデルの初期形状比は $H_0/W_0 = 2.25$ とした。また、上下端面の x 方向変位については、下端中央部の 1 点のみを拘束して剛体移動を止める以外は拘束しない（端面摩擦なし）。

本研究で行う解析では、特に分岐後の挙動について、塑性負荷領域と除荷領域が混在しながら変形が局所化していく様子をシミュレートする。そこで、局所変形を詳細に近似するために、4 節点アイソパラメトリック要素で幅方向 64 要素、高さ方向 144 要素の 9,216 要素（9,425 節点）に均等に分割した。応力評価法においては、return mapping 法とそれに整合した consistent 接線係数を使用することにより、増分ステップ幅はかなり大きく取ることができるが、力のつり合いを十分に満たすために、収束判定では式 (16) 中の残差力ノル

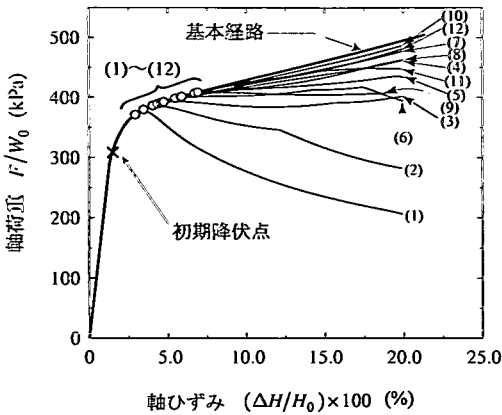


図-5 つり合い経路（基本経路・分岐経路）と分岐点

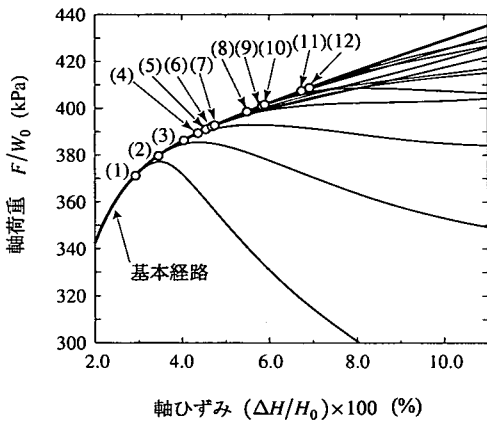


図-6 分岐点付近の拡大図

ムが 1.0×10^{-10} 未満となるまで反復計算を行った。

なお本解析では間隙水との連成は考慮していないため、乾燥砂の挙動に相当すると考えられる。塑性体積ひずみを伴う地盤材料を扱う際には、本来ならば、たとえ完全排水条件の解析であっても、連成解析を行い過剰間隙水圧が「ほとんど」発生しないような解を求めるのが正当であるが³⁴⁾、これは著者らの今後の課題としたい。また、透水性が低い粘性土の場合には、小林ら¹⁸⁾が土・水連成解析で示しているように、せん断帯内部での土骨格の膨張により、間隙水圧に勾配が生じて周囲から水の供給が起こる。こうした挙動はガルシー則に支配されることから、変形モードの変化の仕方は載荷速度にも依存し、現象はさらに複雑になる。

また、地盤材料の破壊時に見られるせん断帯やすべり面の形成といった局所的かつ不連続な変形挙動は、ひずみ軟化が大きく関与している。例えば、地盤材料に対して広く用いられ実績をあげている Cam-clay モデルは、塑性体積ひずみに応じて硬化・軟化・完全塑性を表現できることが知られている³⁵⁾。しかしながら本

研究では、供試体全体の荷重不安定（軟化）挙動に対して、拡散型分岐モードによる不均一変形の進展が起きていることを検証するため、変位・ひずみの連続性が保たれた下でのみ議論する。すなわち、局所的な（pointwise な）材料不安定（ひずみ軟化）の要因を排除し、ひずみ硬化型モデルを用いることとする。

(2) 材料定数と硬化関数

本解析で用いた材料定数と硬化関数を示す。超弾性構成式 (20) 中の Lamé 定数は $\lambda = 11.54 \text{ MPa}$, $\mu = 7.69 \text{ MPa}$ とした。また、先に述べたように本研究ではひずみ軟化モデルは用いないこととし、式 (21) 中の塑性ひずみ硬化関数 $q(\xi)$ は、

$$q(\xi) = - \left[\hat{\tau}_{y0} \left(1 + \frac{\xi}{\hat{\varepsilon}_{y0}} \right)^n - \hat{\tau}_{y0} \right] \quad (26)$$

という n 乗硬化則の形式のひずみ硬化型モデルを用いた。ここで $\hat{\tau}_{y0}$, $\hat{\varepsilon}_{y0}$, n はパラメータであり、 $\hat{\tau}_{y0} = 100 \text{ kPa}$, $\hat{\varepsilon}_{y0} = 0.005$, $n = 0.030$ とした。このとき、硬化関数は図-4 のようになる。また、式 (22) の定数 β_ϕ は $\beta_\phi = 0.55$ とした。上記のパラメータ設定だけで地盤材料の実挙動を詳細に表現するには不十分であるが、本研究の目的は供試体の局所変形挙動に対する拡散型分岐の関与を検証することであるから、本研究では、地盤材料として最も基本的な構成モデルを用いる。

(3) つり合い経路と分岐モード

解析により得られたつり合い経路を図-5 に示す。供試体上端部の y 方向変位 ΔH を初期高さ H_0 で除したものを供試体全体の見掛けの「軸ひずみ」とし、上端面に働く力 F を初期幅 W_0 で除したものを「軸荷重」と示してある。基本経路では領域全体が一樣な応力状態のまま塑性負荷が持続し、最後まで除荷は発生しない。(X) の点が初期降伏開始点である。基本経路では軸荷重は単調に増加を続けているが、これは、材料がひずみ硬化型であることと、初期寸法を基準とした見掛けの「軸ひずみ～軸荷重」関係で示してあるため、実際には軸ひずみに伴って供試体の幅は増加している。

基本経路上には (o) で示すゼロ固有値の重複度が 1 である単純分岐点 12 個が近接して存在しており、その拡大図を図-6 に示す。第 3-(4) 節で紹介した分岐解析手法は、このような近接分岐点でも分岐モードを個別に抽出できる利点を持つ。

分岐モードは図-7 に示すように y 軸に関して対称・反対称の様々な波数の拡散型モード（数学的には harmonic mode）である。なお、モードが分かり易いようにスケールリングしてある。実際のせん断試験において局所変形が明瞭に観察されるのは、荷重ピークを過ぎて軸ひずみが 10 ~ 20% まで変形が大きくなってからである。しかしながら、本解析によると分岐点は軸ひずみ 3 ~ 8% 付近で近接して発生していることから、実験において局所変形が顕著に観察される以前か

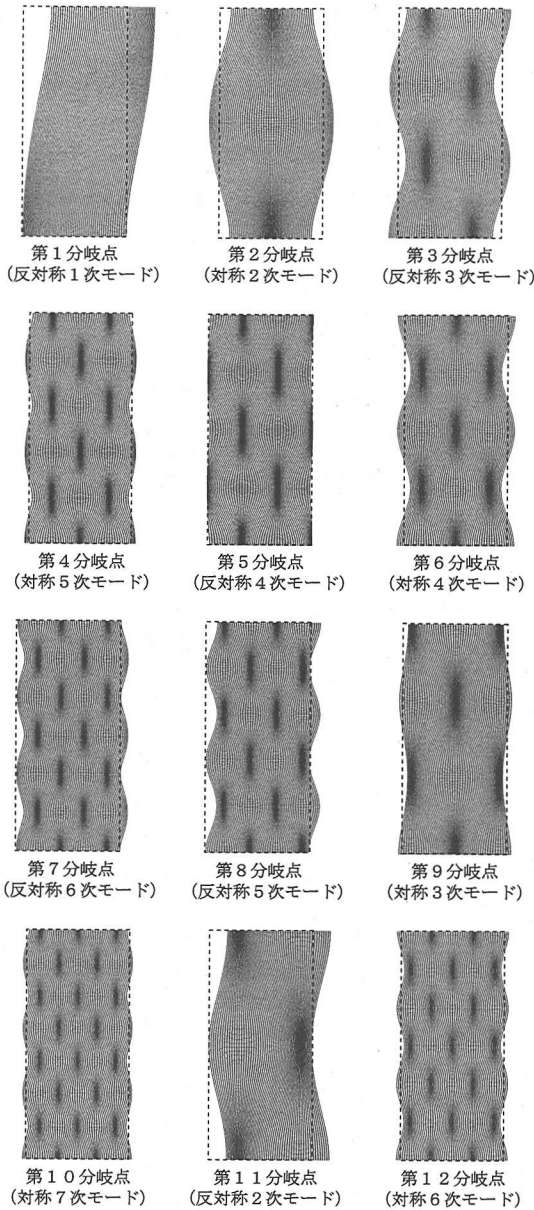


図-7 分岐モード

ら、供試体内部では分岐による不均質化が進行しており、ピーク強度にも影響を及ぼしていると考えられる。

全ての分岐点から分岐経路への切替えを行い、分岐後のつり合い経路を求めた。各経路の末端に示した括弧付き数字は対応する分岐点の番号である。いずれの経路も、基本経路よりも低い軸荷重を示している。しかし、軸ひずみの進行に伴う軸荷重の変動の程度はモードによって様々であり、硬化・軟化の度合いは必ずしも分岐点の番号と同じ順となっていないが、大まかに言って低次モードほど荷重低下の度合いは大きい傾

向がある。同様の傾向は、Asaoka and Noda¹⁷⁾による解析においても認められている。(1), (2) の分岐経路では、分岐直後は荷重が増加を続けるが、その後、荷重極大点を経て荷重は低下していく。(3) の経路では、同様に荷重極大点を経て荷重が緩やかに低下していくが、さらに軸ひずみが進行すると、再び荷重は増加に転じている。その他の経路では、程度の差はあるが荷重は増加を続けている。また、途中で経路が急に折れ曲がるように荷重が低下しているものがあるが、これは第5章で後述するように、パスジャンプ挙動によってももとの分岐モードとは異なるモードに変化したことによるものであり、同様の現象は小林ら¹⁸⁾による解析でも確認されている。

(4) ひずみ・除荷領域の進展

変形とせん断ひずみ進展の様子を図-8に示す(変形倍率は実寸)。ひずみは左 Cauchy-Green 変形テンソル $\mathbf{b} := \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ の主ストレッチ λ_A ($A = 1, 2, 3$) から求められる対数ひずみ $\varepsilon_A := \log \lambda_A$ の不変量で示しており、体積およびせん断成分をそれぞれ、

$$\varepsilon_v := \text{tr}[\varepsilon], \quad \varepsilon_s := \sqrt{\frac{2}{3}} \|\text{dev}[\varepsilon]\| \quad (27)$$

と定義している。ここで $\text{dev}[\varepsilon] := \varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon_v \mathbf{1}$ である。分岐直後のみ、ひずみ分布を見易くするためコンターレベルを変えてある。なお、第1, 2分岐の変形図では側方への変形により、上下端面(実験でのキャップ・ペダスタルとの接触面に相当)からはらみ出す形となっている。いずれのモードにおいても、分岐直後のひずみ分布は拡散的であるが、変形が進むに連れて次第に狭いバンド状領域にひずみが局所化していくのが分かる。分岐直後のひずみ分布は、Yatomi and Shibi¹³⁾による非共軸 Cam-clay の分岐モード解析による分布予測と同様なものとなっている。ひずみ局所化がさらに進み、すべり面が形成されるものと推察される。ここではせん断ひずみだけを図示したが、体積ひずみ(膨張)の局所化もせん断ひずみ集中領域に一致して生じている。Otani et al.³⁶⁾は、X線CTスキャナを用いて供試体内部の密度変化を計測し、せん断帯が発生した付近で密度が低下していることを報告しているが、本解析結果はこの実験事実と一致するものである。

なお、本解析ではひずみ硬化型材料を用い、かつ細かなメッシュ分割を行ったことにより、変形のメッシュ依存性は少ないと考えられる。しかし、ひずみ硬化型材料の採用により、局所変形域の幅は実際の挙動よりも広くなっており、この改善にはひずみ軟化材料の導入と有限要素の改良を同時に行う必要がある。

前節でも述べたが、第2, 3, 4, 5, 6, 11分岐の最終状態の図ではももとの分岐モードと異なるモードに変化しているのが分かる。すなわち、幾つかのバンド状ひずみ集中域のうちいずれかが卓越し、その他はさほどひずみが進行していない。特に、第2分岐では×印

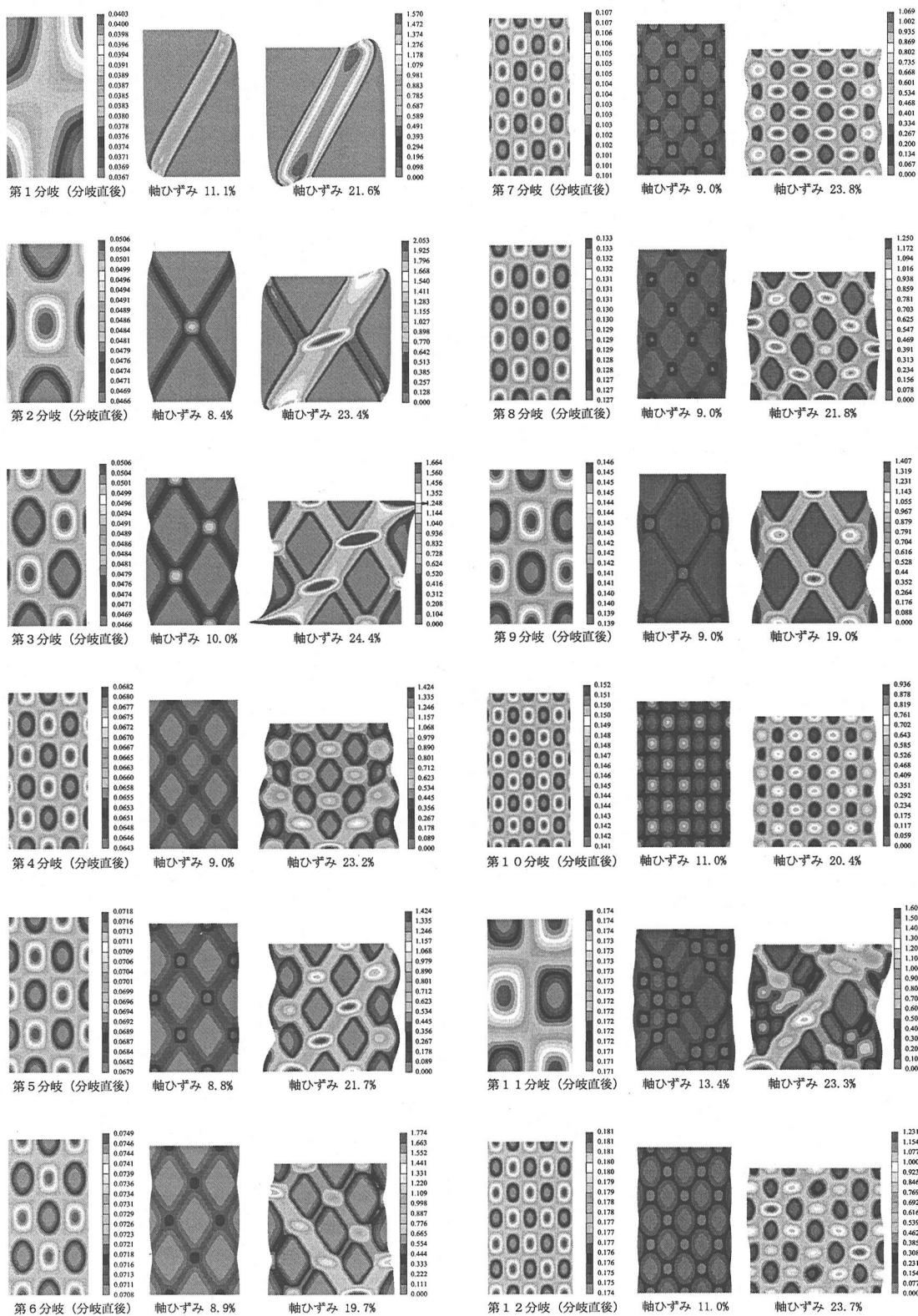


図-8 分岐後の変形とせん断ひずみの進展

状 2 方向のうち 1 方向が卓越しており、第 11 分岐では高次のモードが混入している。

次に、第 2 分岐モードを例に挙げて除荷領域の進展の様子を 図-9 に示す。白色が塑性負荷領域を、黒色が除荷領域をそれぞれ示す。基本経路上では、全域が一樣塑性負荷状態であるが、分岐直後からタル型（バルジ型）の変形と共に除荷が発生し始める。図から分かるように、供試体の上下端部と側面から除荷領域が進展していき、やがて×印の狭いバンド状領域のみで塑性負荷が進行するようになる。さらに変形が進むと、変形モードが変化して×印のうちの 1 方向のバンドのみが塑性負荷となり、もう一方は除荷となる。

(5) 供試体内部の応力～ひずみ挙動

ここでは、前節と同じ第 2 分岐モードのひずみや除荷領域の進展の様子をさらに詳しく調べる。図-10 に示すように、ひずみが集中している領域内の点 (A, C, E) とその外側の点 (B, D) について応力～ひずみ挙動に着目する。比較のため、図-11 に基本経路における均一変形時の挙動を示す。図-12 に、第 2 分岐モードの点 A～E の応力～ひずみ挙動を示す。本解析では、数値積分は完全 (4 点) 積分を行ったが、そのうち 1 点の挙動を示してある。いずれも、体積分、せん断成分に分け、応力～ひずみ経路は供試体全体での軸ひずみが 20% に達するまでの挙動を示してある。ひずみは、式 (27) で定義した対数ひずみの不変量で示してある。応力は Cauchy 応力 $\sigma (= \tau/J)$ の不変量で示してあり、体積およびせん断成分についてそれぞれ、

$$\bar{\sigma} := \frac{1}{3} \text{tr}[\sigma], \quad \hat{\sigma} := \sqrt{\frac{3}{2} \|\text{dev}[\sigma]\|} \quad (28)$$

と定義している。経路上の×印は、分岐発生点を表す。

図-11 から分かるように、応力不変量が低下し始める前に分岐が発生していることが分かる。なお、ひずみ硬化型に関わらず応力が低下しているのは、超弾性構成式 (20) や降伏関数 (21) が、一般的な有限ひずみ理論に則って Kirchhoff 応力 τ で記述しているのに対し、ここではそれを体積変化 J で除した Cauchy 応力 σ で示しているためである。分岐後の挙動については図-12 から分かるように、点 B, D では分岐直後から急速に除荷に転じており、点 C では分岐後しばらくのあいだ塑性負荷が続いて応力が増減した後に、モード変化点以降は除荷に転じている。一方、ひずみの集中域にある点 A, E では応力が何度か増減しながら塑性負荷が続き、基本経路の場合と比較してはるかに大きなひずみに達している。先に 図-5 で示したつり合い経路では、分岐発生 of 少し後に荷重極大点が存在して軸荷重が減少に転じている。こうした供試体全体としての軟化挙動は、材料のひずみ軟化だけが要因ではなく、局所変形と除荷領域の進展具合によってもたらされるものであると捉えることができる。つまりここで示したように、供試体内部ではひずみが著しく進行す

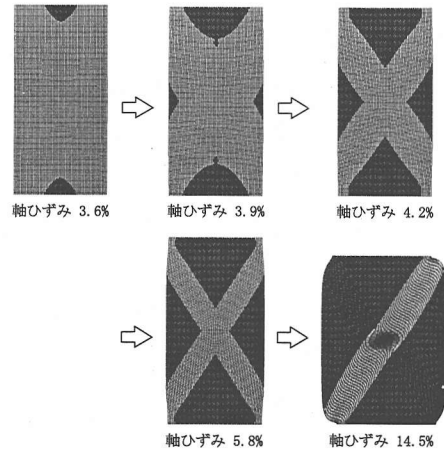


図-9 除荷領域の進展の様子 (第 2 分岐モード)

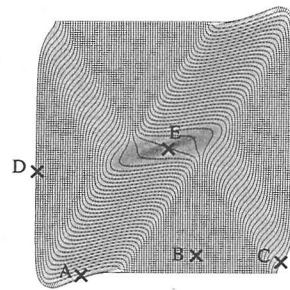


図-10 応力～ひずみ挙動を示した点の位置

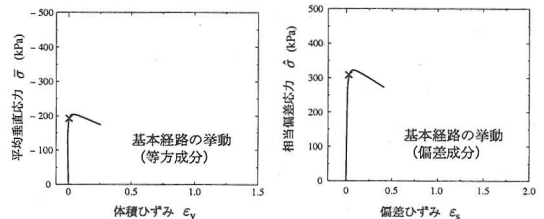


図-11 基本経路 (均一変形時) の応力～ひずみ挙動

る領域や除荷する領域、応力が増加・低下する領域が複雑に混在しながら、供試体全体の見掛けの変形が進行しているのであって、つり合い経路のような供試体端部での軸ひずみや軸荷重といった量どうしの関係はあくまで系全体で平均化された情報に過ぎない。従って、要素試験の応力～ひずみ応答から材料特性を評価する際には、供試体の変形の一様性が保持されているかに注意すべきであるといえる。

5. 変形モードの変化

第 4(3), (4) 節でも述べたように、第 2, 3, 4, 5, 6, 11 分岐モードでは分岐経路の追跡中にもととの分岐

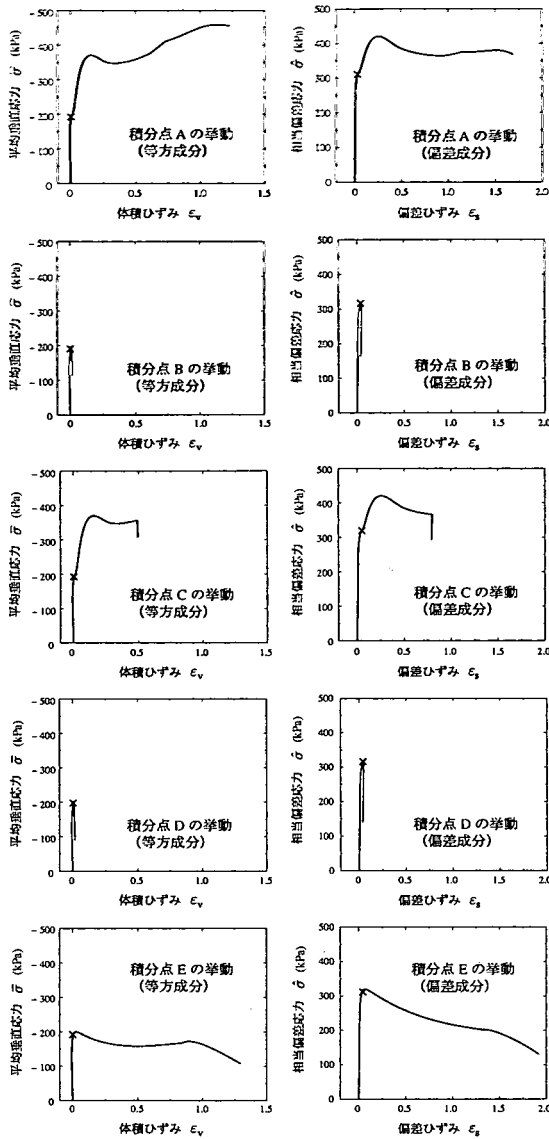


図-12 点 A～E の応力～ひずみ挙動 (第 2 分岐モード)

モードとは明らかに異なる変形モードに変化している現象が見られる。ここではこの変形モードの変化について、第 2 分岐モードを例に挙げて考察する。

図-8 から分かるように、第 2 分岐はタル型のモードであり、分岐後しばらくは×印状のひずみ集中域を呈しているが、そのうち 1 方向のみが卓越していわゆる袈裟切り型モードへと変化している。このとき、供試体上端中央部の x 方向変位を調べてみると、図-13 に示すように、このモード変化は分岐発生 (○) 直後から徐々に生じるのではなく、点 (△) から突然変化し始めている。この現象は、増分幅を変えて解析を行っても不可避免的に生じた。そこで、このモード遷移点 (△) を詳

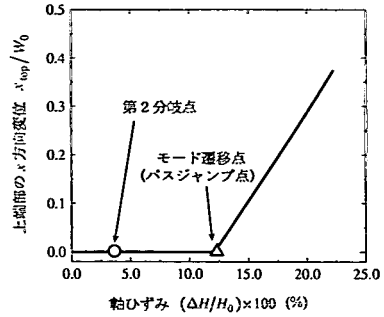


図-13 モード遷移時の供試体上端中央部の x 方向変位

細に検討するため、次の 2 通りの解析を行った。1 目 (ケース A) は前章と同じ境界条件ではあるが、モード遷移点の前後の数ステップのみモード遷移を制限するように上端部 1 節点の x 方向変位を拘束して解析を行い、それ以降は以前の拘束条件に戻して解析を続けるものである。2 目 (ケース B) は前章の解析と同じものである。ケース A は、モード遷移を防ぐために便宜的・一時的に拘束するものであり、それ以外のステップでの境界条件はケース B と全く同じである。

ケース A, B のつり合い経路を図-14 に示す。点 (△) まで両ケースは全く同じ経路であるが、それ以降の経路はケース A を実線で、ケース B を破線で示している。同図中の (○) は第 1, 第 2 分岐点、(△) はモード遷移点、(×) は荷重の極大・極小点である。ケース A では、点 (△) を過ぎて拘束条件を元に戻した後もモード遷移は生じずに×印モードが持続して軸荷重が低下し続け、点 (×) から軸荷重は増加に転じている。一方のケース B では、特に経路切換え手続きを経ないにも関わらず、点 (△) で不可避免的に袈裟切り型モードに遷移し、以降は急速に軸荷重が低下していく。

図-14 中の [・] 内の数字は接線剛性マトリックスの負の固有値の個数である。ケース A では点 (△) 前後で 2 個のまま変化は見られない。ただし、モード遷移を防ぐために追加拘束した数ステップの間だけは、自由度が 1 つ減っているため個数は 1 個となる。そのため、この間でモード遷移に関わるゼロ固有値が発現したか否かは直接的には調べられないが、元のモードが持続しているケース A の経路において、点 (△) 前後の近傍で個数の変化が無いことより、分岐点 (ゼロ固有値) が存在する可能性は少ないと考えられる。一方、ケース B ではモード遷移後に個数が 2 個から 1 個に変化している。以上より、このモード遷移は多段階分岐の 2 次分岐ではなくパスジャンプ現象と判断される。ここでは、最も単純な第 2 分岐のパスジャンプを例に挙げて検討した。第 3, 4, 5, 6, 11 分岐も次第に低次モードに遷移する点で第 2 分岐と類似している。しかし、これが多段階分岐かパスジャンプであるかは逐一検討す

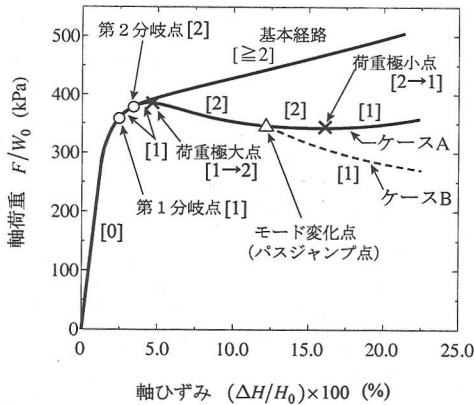


図-14 パスジャンプ前後のつり合い経路

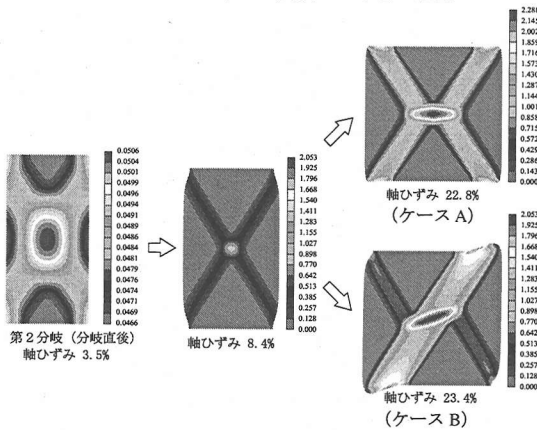


図-15 パスジャンプ時のせん断ひずみの進展

る必要があるが、本論文では割愛することとする。なお、図-15には、せん断ひずみ進展の様子を示した。

ここで示した現象は地盤材料の要素試験においてしばしば観察されるが、このモード遷移の要因は多段階分岐とパスジャンプ挙動とに大別される。構造系の弾性座屈問題では多段階分岐の解析もなされているが、本研究では2次分岐は確認されず、パスジャンプ現象が見られた。著者の知る限りでは、固体の弾塑性分岐における多段階分岐の解析事例は未だ見当たらない。

6. 結論

本研究では、初期状態で均一な弾塑性供試体の平面ひずみ圧縮せん断挙動について、初期不整を導入しない完全系の分岐解析を行った。ひずみ硬化型弾塑性モデルを用いて材料不安定の要因を排除し、幾何学的不安定現象としての拡散型分岐モードの関与を検証した。

弾塑性分岐解析で求めた分岐モードは、様々な波数の拡散型モードであった。分岐経路へ切替えを行い、分岐後挙動を追跡し、分岐直後の拡散的なひずみ分布から次第にひずみが局所化していき、せん断帯状のひずみ集中域を形成することを確認した。

本研究では有限要素離散化された系の分岐発生点を数値解析的に求めたが、今後、Hill and Hutchinson⁴⁾による分岐条件の理論的研究との比較検討が必要であろう。また、分岐経路の解析過程で、もとの分岐モードと異なるモードに遷移する現象が見られた。この現象は小林¹⁸⁾も確認している。そこで、モード遷移点前後での接線剛性の負の固有値の個数を調べ、パスジャンプ現象であることを確認した。本解析では確認できなかったが、多段階分岐とパスジャンプによる変形モードの変動については、さらに詳細な検討が必要である。

本研究では、関連流れ則に従うひずみ硬化型材料を用いており、また、すべり面の不連続変形を表現する有限要素を用いていないため、Hill and Hutchinson⁴⁾が検討しているせん断帯分岐モードは対象としなかったが、有限要素の改良も含め、今後の検討課題としたい。

本研究により、実験でしばしば観察される規則的なせん断帯群の発現や、変形モード毎のつり合い経路の変動は、各種の拡散型分岐モード発現とそれをきっかけとしたひずみ局所化、そしてパスジャンプによるモード変動がその一端を担っていることが示された。

謝辞： 本研究は第1著者(山川優樹)が日本学術振興会特別研究員(DC)の時に行ったものであり、平成11年度科学研究費補助金(特別研究員奨励費)の援助を受けた。また、広島大学大学院工学研究科の岡澤重信助教授には多くの貴重な助言を頂いた。ここに記して謝意を表する。

付録 I 弾塑性有限ひずみ問題の応力評価法

(1) Return mapping 応力評価法と諸量の更新

ここでは、弾塑性有限ひずみ問題における応力や塑性内部変数の評価法について述べる。等方性材料のみを対象とし、超弾性構成式と return mapping アルゴリズムとともに主軸系で考える。時刻 t_n の既知のつり合い状態において、点 $x_{t_n} \in \varphi_{t_n}(B)$ での変形の弾性部分 $b_{t_n}^e$ と塑性内部変数 ξ_{t_n} が既知であり、反復計算の過程で増分変位 $u_{t_{n+1}}(x_{t_n}) : \varphi_{t_n}(B) \rightarrow \mathbb{R}^3$ が得られているとする。このとき、時刻 t_n から t_{n+1} までの相対変形勾配 $f_{t_n}^{t_{n+1}}$ と試行的な弾性の左 Cauchy-Green 変形テンソル $b_{t_{n+1}}^{e,(trial)}$ をそれぞれ次式により求める。

$$f_{t_n}^{t_{n+1}} = \mathbf{1} + u_{t_{n+1}}(x_{t_n}) \otimes \nabla_{x_{t_n}}, \quad (I.1)$$

$$b_{t_{n+1}}^{e,(trial)} = f_{t_n}^{t_{n+1}} \cdot b_{t_n}^e \cdot (f_{t_n}^{t_{n+1}})^T \quad (I.2)$$

ここで、 $\mathbf{1}$ は2階の単位テンソルである。また、塑性内部変数は時刻 t_n の値を試行値として、

$$\xi_{t_{n+1}}^{(trial)} = \xi_{t_n} \quad (I.3)$$

とする。 $b_{t_{n+1}}^{e,(trial)}$ より、主ストレッチ $\lambda_{t_{n+1},A}^{e,(trial)}$ と主軸 $n_{t_{n+1},(A)}^{(trial)}$ ($A = 1, 2, 3$) を求めると、 $b_{t_{n+1}}^{e,(trial)}$ は、

$$b_{t_{n+1}}^{e,(trial)} = \sum_{A=1}^3 (\lambda_{t_{n+1},A}^{e,(trial)})^2 n_{t_{n+1},(A)}^{(trial)} \otimes n_{t_{n+1},(A)}^{(trial)} \quad (I.4)$$

と表される。主ストレッチにより、試行的な対数ひずみの弾性部分を、

$$\varepsilon_{t_{n+1},A}^{e,(\text{trial})} = \log \lambda_{t_{n+1},A}^{e,(\text{trial})}; \quad A = 1, 2, 3 \quad (\text{I.5})$$

と定義すると、その等方成分と偏差成分はそれぞれ、

$$\bar{\varepsilon}_{t_{n+1}}^{e,(\text{trial})} = \varepsilon_{t_{n+1},1}^{e,(\text{trial})} + \varepsilon_{t_{n+1},2}^{e,(\text{trial})} + \varepsilon_{t_{n+1},3}^{e,(\text{trial})}; \quad (\text{I.6})$$

$$\hat{\varepsilon}_{t_{n+1},A}^{e,(\text{trial})} = \varepsilon_{t_{n+1},A}^{e,(\text{trial})} - \frac{1}{3}\bar{\varepsilon}_{t_{n+1}}^{e,(\text{trial})}; \quad A = 1, 2, 3 \quad (\text{I.7})$$

となる。式 (20) の Henky の超弾性構成式より、Kirchhoff 応力の主応力の試行値 $\tau_{t_{n+1},A}^{(\text{trial})}$ ($A = 1, 2, 3$) を、等方成分 $\bar{\tau}_{t_{n+1}}^{(\text{trial})}$ と偏差成分 $\hat{\tau}_{t_{n+1},A}^{(\text{trial})}$ ごとに求める。

$$\bar{\tau}_{t_{n+1}}^{(\text{trial})} = \kappa \bar{\varepsilon}_{t_{n+1}}^{e,(\text{trial})}; \quad \hat{\tau}_{t_{n+1},A}^{(\text{trial})} = 2\mu \hat{\varepsilon}_{t_{n+1},A}^{e,(\text{trial})}; \quad (\text{I.8})$$

ここで λ, μ は Lamé 定数、 $\kappa := \lambda + \frac{2}{3}\mu$ は体積弾性係数である。等方成分と偏差成分を足し合わせて、Kirchhoff 応力の主応力は、

$$\tau_{t_{n+1},A}^{(\text{trial})} = \bar{\tau}_{t_{n+1}}^{(\text{trial})} + \hat{\tau}_{t_{n+1},A}^{(\text{trial})}; \quad A = 1, 2, 3, \quad (\text{I.9})$$

となる。試行応力を用いて降伏関数 (21) を評価する。

$$\phi_{t_{n+1}}^{(\text{trial})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{\sum_{A=1}^3 (\hat{\tau}_{t_{n+1},A}^{(\text{trial})})^2} + g(\bar{\tau}_{t_{n+1}}^{(\text{trial})})}{\|\text{dev}[\tau_{t_{n+1}}^{(\text{trial})}]\|} - [\hat{\tau}_{y0} - q(\xi_{t_{n+1}}^{(\text{trial})})] \right] \quad (\text{I.10})$$

降伏関数が $\phi_{t_{n+1}}^{(\text{trial})} \leq 0$ のとき、弾性負荷あるいは除荷と判定し、次のように試行状態を時刻 t_{n+1} の値とする。

$$b_{t_{n+1}}^e = b_{t_{n+1}}^{e,(\text{trial})}; \quad \xi_{t_{n+1}} = \xi_{t_{n+1}}^{(\text{trial})}; \quad \tau_{t_{n+1}} = \tau_{t_{n+1}}^{(\text{trial})} \quad (\text{I.11})$$

$\phi_{t_{n+1}}^{(\text{trial})} > 0$ のときは、以下に述べるアルゴリズムにより降伏面 $\phi(\tau, q(\xi)) = 0$ に載った応力と塑性内部変数を求める。塑性 consistency パラメータの増分を $\Delta\gamma$ とすると、return mapping の式は、次の 3 式となる。

$$\bar{\tau}_{t_{n+1}} = \bar{\tau}_{t_{n+1}}^{(\text{trial})} - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}} \kappa g'(\bar{\tau}_{t_{n+1}}); \quad (\text{I.12})$$

$$\text{dev}[\tau_{t_{n+1}}] = \text{dev}[\tau_{t_{n+1}}^{(\text{trial})}] - \sqrt{2}\mu\Delta\gamma \frac{\text{dev}[\tau_{t_{n+1}}^{(\text{trial})}]}{\|\text{dev}[\tau_{t_{n+1}}^{(\text{trial})}]\|}; \quad (\text{I.13})$$

$$\xi_{t_{n+1}} = \xi_{t_{n+1}}^{(\text{trial})} + \Delta\gamma \quad (\text{I.14})$$

塑性負荷状態では常に $\phi_{t_{n+1}} = 0$ を満たさなくてはならない。式 (21) に式 (I.13), (I.14) を代入すると、

$$\phi_{t_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\|\text{dev}[\tau_{t_{n+1}}^{(\text{trial})}]\| - \sqrt{2}\mu\Delta\gamma + g(\bar{\tau}_{t_{n+1}}) \right] - \left[\hat{\tau}_{y0} - q(\xi_{t_{n+1}}^{(\text{trial})} + \Delta\gamma) \right] = 0 \quad (\text{I.15})$$

となる。式 (I.12) と (I.15) は $\bar{\tau}_{t_{n+1}}, \Delta\gamma$ について非線形であるが、2 式を連立させて反復解法を用いてこれら 2 変数について解き、式 (I.12), (I.13), (I.14) を用いると、時刻 t_{n+1} における $\tau_{t_{n+1}}, \xi_{t_{n+1}}$ が求められる。また、

$$\bar{\varepsilon}_{t_{n+1}}^e = \bar{\varepsilon}_{t_{n+1}}^{e,(\text{trial})} - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}} g'(\bar{\tau}_{t_{n+1}}); \quad (\text{I.16})$$

$$\hat{\varepsilon}_{t_{n+1},A}^e = \frac{\hat{\tau}_{t_{n+1},A}^{(\text{trial})}}{2\mu}; \quad A = 1, 2, 3, \quad (\text{I.17})$$

ならびに式 (I.4), (I.5), (I.6), (I.7) と同様の式を用いて、時刻 t_{n+1} における $b_{t_{n+1}}^e$ が求められる。

(2) Consistent 接線係数

Drucker-Prager の降伏関数の場合には、consistent 接線係数は解析的に陽な形式で求められるが、導出は煩雑であり、具体形のみを示す。なお、ここで示す consistent 接線係数は、前節で述べた主軸系に基づく return mapping に整合したものであり、同じ塑性モデルでも、用いるアルゴリズムによって consistent 接線係数は異なる形式となる。式 (18) 中の弾塑性接線係数 $\bar{c}_{t_{n+1}}^{\text{ep}}$ は、

$$\begin{aligned} \bar{c}_{t_{n+1}}^{\text{ep}} &= \sum_{A=1}^3 \sum_{B=1}^3 a_{t_{n+1},AB}^{\text{ep}} n_{(A)} \otimes n_{(A)} \otimes n_{(B)} \otimes n_{(B)} \\ &- \sum_{A=1}^3 2\tau_{t_{n+1},A} n_{(A)} \otimes n_{(A)} \otimes n_{(A)} \otimes n_{(A)} \\ &+ \sum_{A=1}^3 \sum_{\substack{B=1 \\ A \neq B}}^3 \frac{\tau_{t_{n+1},A} (\lambda_{t_{n+1},B}^{e,(\text{trial})})^2 - \tau_{t_{n+1},B} (\lambda_{t_{n+1},A}^{e,(\text{trial})})^2}{(\lambda_{t_{n+1},A}^{e,(\text{trial})})^2 - (\lambda_{t_{n+1},B}^{e,(\text{trial})})^2} \\ &\quad n_{(A)} \otimes n_{(B)} \otimes n_{(A)} \otimes n_{(B)} \quad (\text{I.18}) \end{aligned}$$

と表される。ここで、 $n_{(A)}$ ($A = 1, 2, 3$) などは、式 (I.4) 中の $n_{t_{n+1},(A)}^{(\text{trial})}$ を略記したものである。また、

$$a_{t_{n+1},AB}^{\text{ep}} = \frac{\partial \tau_{t_{n+1},A}}{\partial \varepsilon_{t_{n+1},B}^{e,(\text{trial})}}; \quad A, B = 1, 2, 3 \quad (\text{I.19})$$

である。式 (I.18) において、この材料接線係数 $a_{t_{n+1},AB}^{\text{ep}}$ のみが塑性モデルに依存し、その他の部分は超弾性モデルにのみ依存する。式 (I.8), (I.15) を用いて式 (I.12), (I.13) を $\varepsilon_{t_{n+1},B}^{e,(\text{trial})}$ で微分すると、 $a_{t_{n+1},AB}^{\text{ep}}$ は、

$$\begin{aligned} a_{t_{n+1},AB}^{\text{ep}} &= \frac{\kappa}{\Theta_{t_{n+1}}} \left[1 - \frac{\kappa(g'(\bar{\tau}_{t_{n+1}}))^2}{2\Theta_{t_{n+1}}\Xi_{t_{n+1}}} \right] \\ &+ 2\mu \left[1 - \frac{\sqrt{2}\mu\Delta\gamma}{\|\text{dev}[\tau_{t_{n+1}}^{(\text{trial})}]\|} \right] \left(\delta_{AB} - \frac{1}{3} \right) \\ &- \frac{\kappa\mu g'(\bar{\tau}_{t_{n+1}})}{\Theta_{t_{n+1}}\Xi_{t_{n+1}}} (\nu_{t_{n+1},A} + \nu_{t_{n+1},B}) \\ &- 2\mu \left[\frac{\mu}{\Xi_{t_{n+1}}} - \frac{\sqrt{2}\mu\Delta\gamma}{\|\text{dev}[\tau_{t_{n+1}}^{(\text{trial})}]\|} \right] \nu_{t_{n+1},A} \nu_{t_{n+1},B} \quad (\text{I.20}) \end{aligned}$$

と求められる。ここで、

$$\Theta_{t_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \kappa \Delta\gamma g''(\bar{\tau}_{t_{n+1}}); \quad (\text{I.21})$$

$$\Xi_{t_{n+1}} = \frac{\kappa(g'(\bar{\tau}_{t_{n+1}}))^2}{2\Theta_{t_{n+1}}} + H_{t_{n+1}} + \mu; \quad (\text{I.22})$$

$$H_{t_{n+1}} = -q'(\xi_{t_{n+1}}); \quad (\text{I.23})$$

$$\nu_{t_{n+1},A} = \frac{\text{dev}[\tau_{t_{n+1},A}]}{\|\text{dev}[\tau_{t_{n+1}}]\|} = \frac{\text{dev}[\tau_{t_{n+1},A}^{(\text{trial})}]}{\|\text{dev}[\tau_{t_{n+1}}^{(\text{trial})}]\|}; \quad (\text{I.24})$$

$$A = 1, 2, 3 \quad (\text{I.25})$$

である。また、 δ_{AB} は Kronecker のデルタである。

付録 II 有限ひずみ解析への適用性

本研究で行った塑性不安定・局所変形解析では、有限ひずみ問題に対して合理的な定式化が必要となる。有限ひずみ時の弾塑性構成式の記述にあたっては、従来は微小変形理論に基づく古典的速度型表現に対して客観応力速度を用いて拡張する手法が広く用いられてきた。しかしながら、各種提案されている客観応力速度は一長一短の性質を有し、またどの応力速度を用いるかという選択に物理的根拠が少ないという問題がある。

そこでここでは、第2章と付録Iで述べた超弾性構成式と変形勾配の乗算型分解による有限ひずみの取扱い手法と、第3, 4章の数値解析に用いた有限変形・弾塑性有限要素解析コードの妥当性を検証する。この手法は、より運動学的に厳密であるとされ、近年の弾塑性有限変形解析において主流となりつつある。ここでは、図-16, 17にそれぞれ示す x_1, x_2 -面内での等体積引張りと単純せん断の例題を考える。超弾性構成式(20)により応力評価を行った場合と、客観応力速度を用いた古典的速度型構成式により応力評価を行った場合とを比較し、有限ひずみ問題に対する本手法の適用性を確認する。後者の場合では、客観応力速度として最も一般的に用いられている Kirchhoff 応力の Jaumann 速度により線形垂弾性構成式を与え、前進差分的に応力速度(増分)を時間積分していく方法を取った。

等体積引張り変形の場合の伸びひずみ u とせん断弾性係数 G ($:= \mu$) で正規化した垂直応力 $\sigma_{11}/2G$ との関係を図-18に示す。両者はほぼ完全に一致している。次に、単純せん断変形の場合のせん断ひずみ $u/2$ と正規化したせん断応力 $\sigma_{12}/2G$ との関係を図-19に示す。せん断ひずみが0.8付近を越えると、Jaumann 速度の場合には応力が正弦的に振動していることが分かる。これは、単純せん断変形の例題のように主軸の回転を伴う変形では、応力速度に対する剛体回転速度の影響を正しく評価できていないことが原因とされている。

以上の検証例題で示したように、応力速度によっては有限ひずみ時の適切な応力評価ができない場合があることが分かる。実際の弾塑性変形のうち弾性変形が微小であると仮定すれば、応力変化を伴わない塑性流れが卓越するため、ここで示したほどには両者の差異は大きくないものと考えられる。しかしながら、少なくとも弾塑性有限ひずみの取り扱いでは、本研究で用いた応力評価法がより合理的であると言える。

参考文献

- 1) Ikeda, K. and Murota, K.: Recursive bifurcation as sources of complexity in soil shearing behavior, *Soils Foundations*, Vol. 37, No. 3, pp. 17-29, 1997.
- 2) Yamaki, N.: *Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells*, North-Holland series in Applied Mathematics and Mechanics Vol. 27, Elsevier, Amsterdam, 1920.
- 3) Ikeda, K., Murota, K., Yamakawa, Y. and Yanagisawa, E.: Mode switching and recursive bifurcation

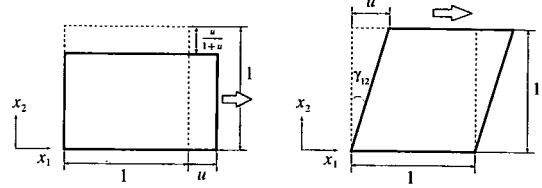


図-16 等体積引張り変形

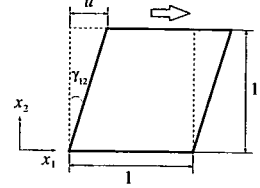


図-17 単純せん断変形

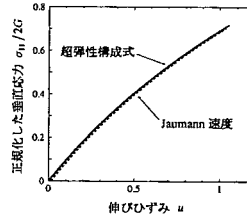


図-18 等体積引張り変形の解析結果

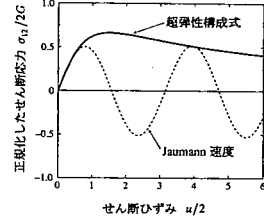


図-19 単純せん断変形の解析結果

- in granular materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, No. 11/12, pp. 1929-1953, 1997.
- 4) Hill, R. and Hutchinson, J. W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 239-264, 1975.
- 5) Young, N. J. B.: Bifurcation phenomena in plane compression test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 24, pp. 77-91, 1976.
- 6) McMeeking, R. M. and Rice, J. R.: Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 11, pp. 601-616, 1975.
- 7) Wagner, W. and Wriggers, P.: A simple methods for the calculation of postcritical branches, *Engrg. Comput.*, Vol. 5, pp. 103-109, 1988.
- 8) Wriggers, P., Wagner, W. and Miehe, C.: A quadratically convergent procedure for calculation of stability points in finite element analysis, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrng.*, Vol. 70, pp. 329-347, 1988.
- 9) Wriggers, P.: Continuum mechanics, nonlinear finite element techniques and computational stability, in: E. Stein (ed.), *Progress in Computational Analysis of Inelastic Structure*, pp. 245-287, 1993.
- 10) Rudnicki, J. W. and Rice, J. W.: Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 371-394, 1975.
- 11) Vardoulakis, I., Goldscheider, M. and Gudehus, G.: Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem, *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 2, pp. 99-128, 1978.
- 12) Vardoulakis, I.: Bifurcation analysis of the triaxial test on sand samples, *Acta Mechanica*, Vol. 32, pp. 35-54, 1979.
- 13) Yatomi, C. and Shibi, T.: Antisymmetric bifurcation analysis in a circular cylinder of a non-coaxial Cam-clay model, in: A. Asaoka, T. Adachi and F. Oka (eds.), *Deformation and Progressive Failure in Geomechanics*, Proc. IS-NAGOYA '97, pp. 9-14, 1997.
- 14) Wu, W.: Non-linear analysis of shear band formation in sand, *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 24, pp. 245-263, 2000.
- 15) 井合 進, J. P. Bardet: 飽和弾塑性材料の平面ひずみ状態での不安定性について, 第34回地盤工学研究発表会

- 講演集, pp. 401-402, 1999.
- 16) Drescher, A. and Vardoulakis, I.: Geometric softening in triaxial tests on granular material, *Géotechnique*, Vol. 32, No. 4, pp. 291-303, 1982.
 - 17) Asaoka, A. and Noda, T.: Imperfection-sensitive bifurcation of Cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries, *Soils Foundations*, Vol. 35, No. 1, pp. 83-100, 1995.
 - 18) 小林 一三, 飯塚 敦, 太田 秀樹: 正規粘土供試体せん断時における局所変形の遷移, 土木学会論文集, No. 617/III-46, pp. 1-18, 1999.3.
 - 19) de Borst, R.: Numerical methods for bifurcation analysis in geomechanics, *Ingenieur-Archiv*, Vol. 59, pp. 160-174, 1989.
 - 20) Bardet, J. P.: Finite element analysis of plane strain bifurcation within compressible solids, *Comput. Struct.*, Vol. 36, No. 6, pp. 993-1007, 1990.
 - 21) Ikeda, K., Chida, T. and Yanagisawa, E.: Imperfection sensitive strength variation of soil specimens, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, No. 2, pp. 293-315, 1997.
 - 22) Simo, J. C.: Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 99, pp. 61-112, 1992.
 - 23) 野口 裕久, 久田 俊明: Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析手法の開発, 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 58, No. 555, pp. 2191-2198, 1992.
 - 24) 藤井 文夫, 野口 裕久: 固有値解析を必要としない大規模非線形構造系の分岐座屈モードの求め方, 構造工学論文集, Vol. 46A, pp. 241-250, 2000.
 - 25) Armero, F. and Garikipati, K.: An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 33, No. 20-22, pp. 2863-2885, 1996.
 - 26) Regueiro, R. A. and Borja, R. I.: A finite element model of localized deformation in frictional materials taking a strong discontinuity approach, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 33, pp. 283-315, 1999.
 - 27) Simo, J. C.: Numerical analysis and simulation of plasticity, in: P. G. Ciarlet and J. L. Lions (eds.), *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. VI, Elsevier Science, pp. 183-499, 1998.
 - 28) Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon, Oxford, 1950.
 - 29) Simo, J. C. and Taylor, R. L.: Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 48, pp. 101-118, 1985.
 - 30) Armero, F.: Formulation and finite element implementation of a multiplicative model of coupled poroplasticity at finite strains under fully saturated conditions, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 171, pp. 205-241, 1999.
 - 31) Hill, R.: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 6, pp. 236-249, 1958.
 - 32) Okazawa, S., Usami, T., Noguchi, H. and Fujii, F.: 3D necking bifurcation in tensile steel specimens, *J. Engrg. Mech.*, ASCE, (投稿中).
 - 33) 川井 謙一: 軸対称および平面ひずみ引張りに関するベンチマークテスト, 「塑性と加工」(日本塑性加工学会誌), Vol. 32, No. 364, pp. 553-559, 1991.
 - 34) 金田 一広: 構造を有する土の弾塑性挙動の一モデル化と水～土連成計算による飽和土の時間依存的力学挙動の解析, 名古屋大学学位請求論文, 1999.
 - 35) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T.: Soil-water coupled behaviour of saturated clay near/at critical state, *Soils Foundations*, Vol. 34, No.1, pp. 91-105, 1994.
 - 36) Otani, J., Mukunoki, T. and Obara, Y.: Characterization of failure and density distribution in soils using X-ray CT scanner, *Recent Development of Theory and Practice in Geotechnology*, pp. 45-50, 1997.

(2000.10.23 受付)

BIFURCATION ANALYSIS AND PATH JUMPING BEHAVIOR OF ELASTO-PLASTIC BODY UNDER COMPRESSION

Yuuki YAMAKAWA, Kenjiro TERADA, Kiyohiro IKEDA and Kunio TORII

Bifurcation phenomena of initially homogeneous elasto-plastic specimen under uniform compression are numerically investigated. The finite strain, associated, strain hardening Drucker-Prager plasticity model is employed as a material model. Deformation of the specimen remains uniform on the primary equilibrium path, whereas non-uniform deformation modes arise due to bifurcation. We carry out several numerical analyses for bifurcation modes and post-bifurcation behavior without imposing initial imperfections, and show that diffuse bifurcation modes are one of the important factors for the occurrence of localized deformations. We also discuss the numerical results of path jumping phenomena.