

移動一般座標系を用いたコロケート格子による自由水面流れの数値解析手法

牛島 省¹・瀬津 家久²

¹ 正会員 工博 京都大学大学院 助教授 環境地球工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

² フェロー会員 工博 京都大学大学院 教授 環境地球工学専攻 (同上)

本研究では、自由水面の変動を伴う流れの数値解析手法について考察した。非定常的に変形する自由水面形状を移動一般座標系を用いて表現し、ALE法により流体内部の格子点位置が定められる。Navier-Stokes式は、直交座標系の流速成分を基本変数として写像空間中に変換され、変数はcollocated格子配置に従うものとして離散化される。流速と圧力の同時緩和法として、一般座標系上のcollocated格子配置で有効なC-HSMAC法を提案した。矩形容器内の微小静振波に本手法を適用し、重力および表面張力を復元力とする微小水面振動が適切に解析できることを示した。また、水表面に圧力パルスが作用したときの非線形水面振動を解析し、妥当な解析結果が得られること、さらに水面変動を伴う場合でも流体質量が十分な精度で保存されることを示した。

Key Words : *collocated grid, free surface, ALE method, BFC, QSI scheme*

1. 緒言

フルード数の高い開水路流れや風波が発達した閉鎖水域内の流動、また海洋で波と流れが共存する場合などには、内部流動に対する水面変動の影響が無視できないものとなり、さらに諸条件によっては両者が相互に影響を及ぼし合うものとなる。本研究では、碎波や水塊の離脱などが生じない程度の水面変動を伴う流れ、すなわち水深が水平座標の一価関数となる自由水面流れを対象とし、その数値解析手法について考察する。

このような自由水面流れの計算では、水面の挙動を正確に取扱うとともに、内部流動に対して精度の高い数値解析スキームを適用することが必要である。自由水面は、形状が非定常かつ空間的に非一様に変形する移動境界面と考えることができ、この取扱いに関していくつかの手法が提案されている。空間中に固定された計算格子点を使用するEuler法としては、マーカ粒子法¹⁾、PIC (Particle in Cell) 法²⁾ やVOF法³⁾、MARS法⁴⁾などが提案されている。一方、計算格子点の移動を考える解法としては、格子点移動速度を流速と同一にするLagrange法⁵⁾ や両者が独立に定められるALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 法⁶⁾などが用いられる。さらに、計算格子を用いず、流体を粒子の集まりとして扱うMPS法⁷⁾が近年提案されている。これらの手法には各々適用対象に応じた得失があるが、一般にEuler法やMPS法は、水面が大変形

する場合や気液相間の複雑現象を扱う場合に有効である。一方、本研究で対象とする自由水面流れにおいては、水面形状の表現や境界条件の設定が比較的正確に行え、しかも内部流動に対して高精度の解析が可能な手法が望ましいため、ALE法に基づき、移動一般座標系を用いる計算手法を扱う。

水面変動の解析は、有限要素法や境界要素法でも行われているが、計算精度やモデルの導入時の扱いやすさなどの観点からは、近年LESやDNSにも適用される有限差分法が有効であろう⁸⁾。一般座標系を用いた有限差分法による流体解析では、基本変数として流速の反変成分をstaggered格子上で用いる方法と、直交座標系の流速成分をcollocated格子で用いる方法が適しているといわれ⁹⁾、後者による平行平板間の乱流解析手法の有効性が示されている¹⁰⁾。collocated格子の利用は、このような計算精度の向上だけでなく、水面の境界条件の設定においても変数配置の関係から非常に有利であると考えられる。しかし、同格子を用いた自由水面流れの計算例は少なく、その有効性については実証されていない部分が多い。このため、本研究ではcollocated格子における自由水面流れの計算法を示し、重力および表面張力が復元力となる微小静振波および非線形水面振動へ適用する。さらに水面変動を伴う場合には、一般座標系上のcollocated格子配置において流速と圧力を同時緩和するC-HSMAC法が流体質量を保存するために有効であることを示す。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式と時間方向の離散化

自由水面を有する鉛直 2 次元流れ場において x_2 軸が鉛直上方を向くように直交座標系 x_i ($i = 1, 2$) をとる。外力として重力のみを考えると、Navier-Stokes 式は次式のように表される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -g \delta_{2i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + FU_i \quad (1)$$

ここに、 u_i は直交座標系における x_i 方向の流速成分、 g は重力加速度、 δ はクロネッカーのデルタ、 ρ は流体密度、 p は圧力、 FU_i は移流項と拡散項を含む項である。自由水面を有する流れを扱う場合、基礎方程式に対して次式が用いられることがある。

$$p = \rho g(h - x_2) + p' \quad (2)$$

ここに、 h は水深で、 x_2 の原点は底面上にとる。式 (2) を用いると、式 (1) は次のように表される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x_1} \delta_{1i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + FU_i \quad (3)$$

式 (3) では、 p' 、すなわち静水圧というバイアス成分が除かれた値を扱うため、圧力を精度良く捕えられる。しかし、collocated 格子において、 h の定義位置をセル中心とする場合、すべての変数を同一点に配置するレギュラー格子で発生する圧力振動¹¹⁾と同様の問題が生ずる可能性があり、式 (3) 右辺第 1 項の扱いが難しくなる。このため、本報では基礎方程式として式 (1) を用いる。圧力計算の精度に関しては、本報で提案する C-HSMAC 法を利用する場合、圧力計算の初期値を静水圧とすれば、 p' に相当する値が収束計算で求められるため、基礎式を式 (3) とする場合と比較して計算精度が劣化することはない。

式 (1) に対して時間方向に離散化を行い、圧力項を陰的に扱うと次式が得られる。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left(-g \delta_{2i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + FU_i \right) \Delta t \quad (4)$$

ここに、 Δt は 1 ステップの時間きざみ幅、上添字 n 、 $n+1$ は時間ステップを表す。時間差分として Euler 陽解法を用いる場合、 FU_i は次のように表される。

$$FU_i = -u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j \partial x_j} \quad (5)$$

ここに、 ν は動粘性係数である。

(2) 移動一般座標系における基礎方程式

ある時刻において、自由水面を含めた流体の全境界形状が与えられた場合、その形状を境界条件として、

計算領域内部の格子点位置が定められる。この格子生成法に関しては、これまでにいくつかのものが提案されているが¹²⁾、ここでは直交座標系と一般座標系 ξ_m ($m=1,2$) の関係が次のポアソン方程式に従うものとする¹³⁾。

$$\frac{\partial^2 \xi_m}{\partial x_j \partial x_j} = P_m(\xi_1, \xi_2) \quad (6)$$

ここに、 P_m は、直交座標系により表される物理空間中において、格子点間隔を制御するために用いられる関数である。物理空間中の格子点位置は、式 (6) の独立変数と従属変数を微分変換公式により交換した次式から求められる。

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} + P_m \frac{\partial x_i}{\partial \xi_m} = 0 \quad (7)$$

式 (7) は楕円型の偏微分方程式であるので、与えられた境界条件のもとに数値解を求めることができる。

本報で扱う自由水面のように、境界形状が時間とともに変形する場合には、各時間ステップごとに式 (7) を解いて格子生成を行う。この場合、境界形状の変形により内部の格子点位置も移動するため、 x_i および ξ_m の時間微分が 0 とはならない。従って、このような移動一般座標系においては、基礎方程式中に格子点移動速度成分を含むものとなる。基本変数として直交座標系上の変数を用いる場合、移動一般座標系において式 (4) は次のように表される。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left(-g \delta_{2i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} + FU_i \right) \Delta t \quad (8)$$

なお、物理空間と写像空間中の時間は同一であり、ともに t と表す。また、式 (5) は次のように表される。

$$FU_i = -(U_m^n - U_{0m}^n) \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\nu \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \quad (9)$$

ここに、 U_m は流速の反変成分、 U_{0m} は物理空間中の格子点の移動速度の反変成分であり、それぞれ以下のように定義される。

$$U_m = u_i \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (10)$$

$$U_{0m} = \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (11)$$

また、連続式は、次のように表される。

$$\frac{\partial (JU_m^{n+1})}{\partial \xi_m} = 0 \quad (12)$$

ここに、 J はヤコビアンであり、次式で与えられる。

$$J = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \quad (13)$$

(3) 移流項の解法

自由水面下の流れを数値解析により精度良く求めるためには、Navier-Stokes 方程式中の移流項、すなわち式(9)右辺第1項に対して適切な離散化手法を選択する必要がある。本研究では、5次スプライン関数を利用するQSIスキーム¹⁴⁾により移流項を離散化した。QSIスキームは、5次風上差分より高精度であることが示されており、特にcollocated格子では両者の精度の相違がより明確になる。

前報¹⁴⁾では、直交座標系における等間隔collocated格子上でQSIスキームの適用方法が示されたが、一般座標系でもほぼ同様で、以下のような手順をとる。まず、写像空間中において、格子点上に離散化された流速 u_i に対して、 ξ_m 方向に5次スプライン関数 S_{im} を求める。スプライン関数を求めるための格子点は、流速の反変成分 $U_m^n - U_{0m}^n$ の符号を考慮し、風上側に3点、その反対側に2点とる。 S_{im} は ξ_m に関する5次の多項式となるが、この1次の項の係数 C_{im1} を用いれば、式(9)右辺第1項は次のように表される。

$$-(U_m^n - U_{0m}^n) \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_m} = -(U_m^n - U_{0m}^n) C_{im1} \quad (14)$$

5次スプライン関数は、Herriot & Reinsch¹⁵⁾により提案された手法により求め、その係数 C_{im1} を用いて式(14)により移流項を計算する。

なお、拡散項や圧力のポアソン方程式に含まれる2階微分項に対しては、上記で得られた5次スプライン関数を用いず、2次精度の離散化を行った。

(4) collocated 格子における流速と圧力の計算法

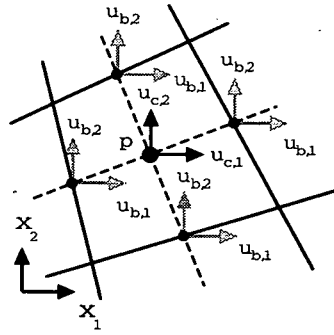
Rhie & Chow¹⁶⁾により提案され、その後FLIP¹⁷⁾などの手法に利用されているcollocated格子では、セル中心に流速と圧力を配置する。そして、圧力と流速の振動解を防ぐために、さらにセル境界面で定義される流速を圧力計算に利用する。

この変数配置に従い、図-1(a)に示すように、物理空間中においてセル中心に位置し、次式を満足する流速 $u_{c,i}$ を導入する。

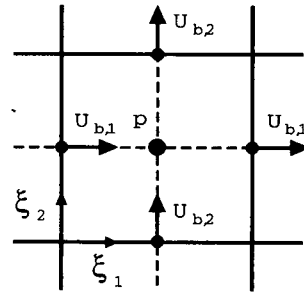
$$u_{c,i}^n = u_i^n + (-g \delta_{2i} + F U_i) \Delta t \quad (15)$$

上式は、式(8)から圧力項を除いたものとなっている。すなわち、

$$u_i^{n+1} = u_{c,i}^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \quad (16)$$



(a) 物理空間中の変数配置



(b) 写像空間中の変数配置

図-1 各空間中の変数の定義位置

一方、図-1(a)に示すように、セル境界上に $u_{b,i}$ なる流速を定義する。これらは $u_{c,i}$ を空間内挿することにより求める。この空間内挿法に関しては、線形内挿および5次スプライン内挿を用いた場合にほぼ同一の結果が得られた例があるため¹⁴⁾、ここでは線形内挿を用いる。

次に、図-1(b)に示すように、セル境界上で流速の反変成分 $U_{b,m}$ を求める。 $U_{b,m}$ により表示された連続式と、collocated格子で用いられる $U_{b,m}$ と圧力の関係式はそれぞれ次のように表される。

$$\frac{\partial (J U_{b,m}^{n+1})}{\partial \xi_m} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial U_{b,m}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} g^{mj} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_j} \quad (18)$$

ここで、 g^{mk} は基本テンソルの反変成分である。

$$g^{mk} = \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \quad (19)$$

$n+1$ ステップにおいて、式(17)と式(18)を同時に満足する流速と圧力を求めるため、HSMAC法¹⁸⁾を利用する解法を考える。ここでは、一般座標系におけ

る collocated 格子上的の解法となるため、この手法を C-HSMAC 法と表記することとする。\$n+1\$ ステップにおける流速成分 \$U_{b,m}^{n+1}\$ と圧力 \$p^{n+1}\$ が次のように式 (18) の時間方向の離散化式を満足するものとする。

$$U_{b,m}^{n+1} = U_{b,m}^n - \frac{\Delta t}{\rho} g^{mj} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi_j} \quad (20)$$

一方、\$n\$ ステップにおける圧力を用いた次式を考える。

$$U_{b,m}^* = U_{b,m}^n - \frac{\Delta t}{\rho} g^{mj} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_j} \quad (21)$$

式 (20) から式 (21) の各辺を引くと次式が導かれる。

$$U'_{b,m} = -\frac{\Delta t}{\rho} g^{mj} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \quad (22)$$

ここに、

$$U'_{b,m} = U_{b,m}^{n+1} - U_{b,m}^* \quad (23)$$

$$\phi = p^{n+1} - p^n \quad (24)$$

である。式 (23) を式 (17) に代入し、式 (22) を用いると、\$\phi\$ に対する次のポアソン方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(J g^{mj} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right) \\ &= \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial \xi_m} (J U_{b,m}^*) \equiv \frac{\rho}{\Delta t} D^* \end{aligned} \quad (25)$$

式 (22)、式 (23)、式 (24) および式 (25) を繰り返し解くことにより、連続式の誤差 \$D^*\$ を十分小さくする。すなわち、以下の手順をとる。

- 1) 繰り返し計算の \$k\$ ステップにおける \$U_{b,m}^{*,k}\$ が得られているとき、これより \$D^{*,k}\$ を計算し、式 (25) の収束解、すなわち次式の \$\phi^k\$ を求める。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(J g^{mj} \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_j} \right) \\ &= \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial \xi_m} (J U_{b,m}^{*,k}) \equiv \frac{\rho}{\Delta t} D^{*,k} \end{aligned} \quad (26)$$

なお、\$U_{b,m}^{*,k}\$ の初期値は式 (21) より得られるが、\$p^n\$ の代わりに静水圧を利用してもよい。このとき、求める \$\phi\$ は式 (2) の \$p'\$ に相当するものとなる。

- 2) 得られた \$\phi^k\$ を用いて、次式より圧力 \$p^k\$ を更新する。ただし、更新された \$p^{k+1}\$ はこの繰り返し計算中では使用されない。

$$p^{k+1} = p^k + \phi^k \quad (27)$$

- 3) さらに、式 (22) と式 (23) を考慮して、\$U_{b,m}^{*,k}\$ を次式により更新し、

$$\begin{aligned} U_{b,m}^{*,k+1} &= U_{b,m}^{*,k} + U'_{b,m} \\ &= U_{b,m}^{*,k} - \frac{\Delta t}{\rho} g^{mj} \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_j} \end{aligned} \quad (28)$$

この結果から \$D^{*,k+1}\$ を求める。

- 4) \$k = k+1\$ として式 (26) を再び解析する手順を繰り返す。

計算領域内の全てのセルにおいて、\$D^{*,k+1}\$ が与えられたしきい値 \$D_0^*\$ より小さくなった時点で解が収束したと見なす。このとき、\$p^{n+1} \approx p^{k+1}\$、また \$U_{b,m}^{n+1} \approx U_{b,m}^{*,k+1}\$ となっており、\$D^{*,k+1}\$ は \$JU_{b,m}^{n+1}\$ の連続性に対する誤差に相当する。すなわち、本報で示した計算手順では \$JU_{b,m}^{n+1}\$ の連続性に対する誤差は常に \$D_0^*\$ 以下に保たれる。このことは、特に自由水面などの移動境界問題を扱う際に極めて重要である。なぜなら、\$n+1\$ ステップの流速成分の連続性が満足されていないと、非定常計算の進行とともに、計算領域内の流体の質量が変化してしまうからである。この基本的な条件に関しては、後述部分で計算例をもとに具体的に確認する。

以上のようにして、\$p^{n+1}\$ が得られるので、セル中心における \$n+1\$ ステップの流速は、式 (16) から求められる。

(5) 自由水面の計算法と境界条件

物理空間中において、自由水面における動的境界条件は次式のように与えられる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = u_{s2} - u_{s1} \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad (29)$$

ここに、\$u_{si}\$ は自由水面上の流速成分である。自由水面上で流速の反変成分 \$U_{s2}\$ は、次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} U_{s2} &= \frac{1}{J} \left(u_{s2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - u_{s1} \frac{\partial h}{\partial \xi_1} \right) \\ &\approx \frac{\Delta x_1}{J \Delta \xi_1} \left(u_{s2} - u_{s1} \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) = \frac{\Delta x_1}{J \Delta \xi_1} \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \quad (30)$$

これより、水深 \$h\$ は、\$U_{s2}\$ を用いて次の離散化式より求められる。

$$h^{n+1} = h^n + \frac{JU_{s2}^{n+1} \Delta \xi_1}{\Delta x_1} \Delta t \quad (31)$$

ここで、\$U_{s2}^{n+1}\$ は C-HSMAC 法により求められたセル境界上の流速の反変成分 \$U_{b,2}\$ とする。自由水面に接するセルに対して、\$JU_{b,m}\$ の連続性の誤差は \$D_0^*\$ 以下に制御されているため、式 (31) から計算された \$h^{n+1}\$ により、計算領域全体の流体質量は与えられた誤差の範囲内で保存される。

自由水面における圧力境界条件は、水面における法線方向応力に関する関係式から定められる。自由水面から外側へ向かう単位法線ベクトルを \$\mathbf{n}\$、応力テンソルを \$T\$ とするとき、法線方向応力 \$\tau_n\$ は次式で与えられる。

$$\tau_n = \mathbf{n}^t T \mathbf{n} = 0 \quad (32)$$

ここで、上添字 t は転置行列であり、 T は次式で与えられる。

$$T = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (33)$$

一方、気体側の圧力を p_a 、表面張力を σ とすると、次式が成り立つ¹⁹⁾。

$$\tau_n = -p_a + \frac{\sigma h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \quad (34)$$

ここに、 $h_x = \partial h / \partial x_1$ および $h_{xx} = \partial^2 h / \partial x_1^2$ である。式 (32) と式 (34) から、自由水面における圧力 p_s の境界条件として、次の関係が得られる。

$$p_s = p_a - \frac{\sigma h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} + \frac{2\mu}{1 + h_x^2} \left[h_x^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - h_x \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] \quad (35)$$

次に、自由水面における流速 u_{si} に対する境界条件としては、 $\partial u_{s1} / \partial \xi_2$ および $\partial u_{s2} / \partial \xi_2$ という2つの流速勾配が必要となる。これらは、既知の圧力値である n ステップの p_s を用いた式 (35) と、次の接線方向応力 τ_t の関係式の2つの式から定められるものとした。

$$\tau_t = t^t T n = 0 \quad (36)$$

ここに、 t は水面における接線方向単位ベクトルである。

3. 計算手法の適用性

(1) 矩形容器内の微小静振波

本研究で提案する計算手法が自由水面の変動を適切に再現できることを確認するため、これを矩形容器内に生ずる振幅が微小な静振波(セイシュ)へ適用し、理論解との比較を行う。なお、以下の計算では、多くの既往研究と同様に、基礎方程式は適当な代表量で無次元化されていると考える。図-2に示すように、矩形容器幅を l 、流体が静止した状態の水深を h とし、容器両端に腹、中央に節を持つ静振波を考える。この静振波は、初期条件として次式の水面形を与えることで発生する。

$$\eta = A \cos \left(\frac{\pi x_1}{l} \right) \quad (37)$$

ここに、 η は図-2に示すように、静止水面を基準とする水面高さである。これと同様の静振波の計算は、これまで解析手法の検証のためにしばしば行われているが^{20), 21)}、いずれも復元力として重力のみを考え、水面変動の定性的な挙動を見るものであった。ここでは、

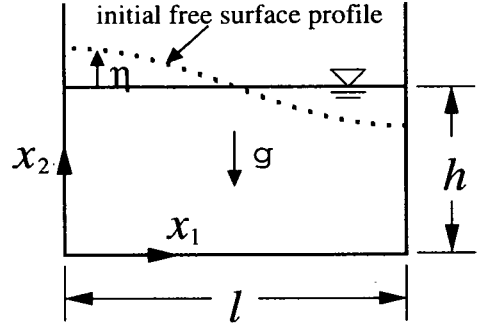


図-2 矩形容器の形状と座標系

復元力として重力と表面張力の両方を考慮し、理論解との定量的な比較を行う。

容器内の流体が完全流体 ($\nu = 0$) であるとき、微小振幅波理論から得られる表面張力を考慮した分散関係式を用いると、この静振波の周期 T は次式で与えられる。

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k \left(g + k^2 \frac{\sigma}{\rho} \right) \tanh(kh)}} \quad (38)$$

k は波数で、ここでは $k = \pi/l$ となる。従って、初期水面形を式 (37) で与えると、流体が非粘性であるため、理論上は式 (38) の周期を有する水面振動が減衰せずに持続するものとなる。

上記のような微小静振波へ本報の計算手法を適用する。計算条件として、容器幅 l 、水深 h および流体密度 ρ をすべて 1.0 とし、初期条件として与える式 (37) の η の振幅は $A = 0.01$ とする。数値計算上は、重力は流体内部の圧力分布、また表面張力は自由水面における圧力の境界条件として考慮される。まず、これらの効果が適切に取り扱われていることを確認するため、 σ あるいは g を 0 とし、復元力が重力あるいは表面張力のみとなる静振波の計算を行い、得られた周期を式 (38) の理論値と比較した。

計算セル数は、 15×15 とした。非粘性流体の場合、自由水面における流速の境界条件として式 (32) と式 (36) は利用できない。ここでは、微小静振波を対象としており、非粘性流体であることから水面の鉛直方向流速勾配が 0 であると仮定して、水面上で $\partial u_{si} / \partial \xi_2 = 0$ という条件を設定した。圧力の境界条件としては、 $\mu = 0$ とした式 (35) を用いた。

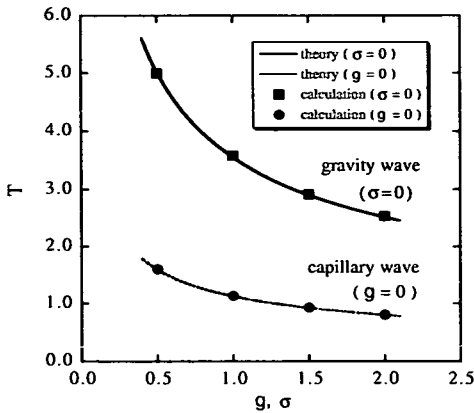


図-3 重力波および表面張力波の周期の比較

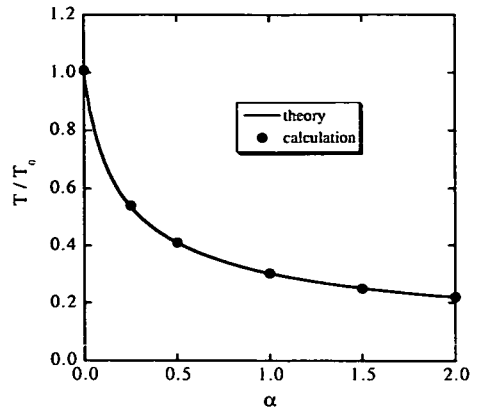


図-5 重力と表面張力が作用する静振波の周期の比較

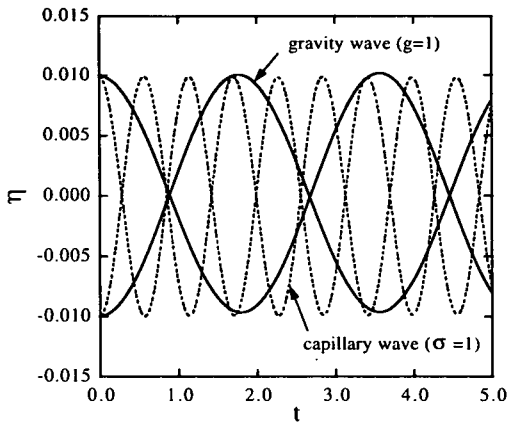


図-4 重力波および表面張力波の η の時系列

図-3は、重力波 ($\sigma = 0$) および表面張力波 ($g = 0$) の周期を理論値と比較した結果を示すものである。計算結果が理論値と一致することから、重力および表面張力の効果が適切に扱われていると考えられる。

上記の計算で得られた容器両端 ($x_1 = 0, l$) における η の時間的な変動を図-4に示す。図中では、 $t = 0.0$ において $\eta = 0.01$ となる曲線が $x_1 = 0$ における水面変動に相当する。復元力が重力あるいは表面張力のいずれの場合でも、初期の水面形により生じた静振波が減衰せずに持続するものとなっている。

次に、重力と表面張力が同時に作用する場合の静振波の計算を行い、理論値と比較した。 $g = 1$ かつ $\sigma = 0$ のときの周期を T_0 とするとき、式(38)にここで計算条件を用いると、 T/T_0 は次式のように表される：

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2 \alpha}} \quad (39)$$

ここに、 $\alpha = \sigma/g$ である。式(39)と計算値を比較した結果を図-5に示す。

この結果から、重力と表面張力の両者が作用する場合の静振波の周期も適切に再現されることが示された。

(2) 圧力パルス作用時の非線形水面振動

2次元矩形容器内において、静止水面に圧力パルスを作用させ、非線形水面振動が生じた場合の数値計算が行われている^{1), 20), 21), 22)}。この振幅が比較的大きい非線形水面振動へ本研究の計算手法を適用し、水面変動や流体質量の保存性などについて検討を加える。

計算領域は、図-2において $l = 4.8$ 、 $h = 4.0$ としたもので、次式の圧力パルスを静止水面に作用させる。

$$p_0(t) = \delta(t) \cos\left(\frac{\pi x_1}{l}\right) \quad (40)$$

ここに、 $\delta(t)$ はディラックのデルタ関数である。重力加速度 g と流体の密度 ρ は 1.0、動粘性係数 ν は 0.01、表面張力 σ は 0 とする。計算では、セル数を 15×15 とし、 $\Delta t = 10^{-2}$ とした。なお、計算では初期の1ステップまで $\delta(t) = 1/\Delta t$ 、その他の時刻において $\delta(t) = 0$ とした。

図-6は、非定常計算の過程で得られた計算メッシュの分布と流速ベクトルを示すものである。ここで、1つのセルは図中に示した4つの計算メッシュから形成されている。これらの結果に示されるように、式(31)で計算された各時刻の水面形を境界条件として、式(7)を解くことで流体内部の計算格子点位置が定められ、得られた格子点上でセル中心の流速ベクトルが求められている。なお、ここでは水面や壁面付近に密に格子点を配置する必要がないことから、 $P_m = 0$ としている。

図-7は、約半周期にわたる容器両端 ($x_1 = 0, l$) の水面振動を Halrow & Welch²³⁾ の計算結果と比較したものである。上昇する水面変位量が低下する側のそれよりも大きく、非線形な水面変動が生じている。計算結果は、既往計算の結果と概ね一致するものとなった。

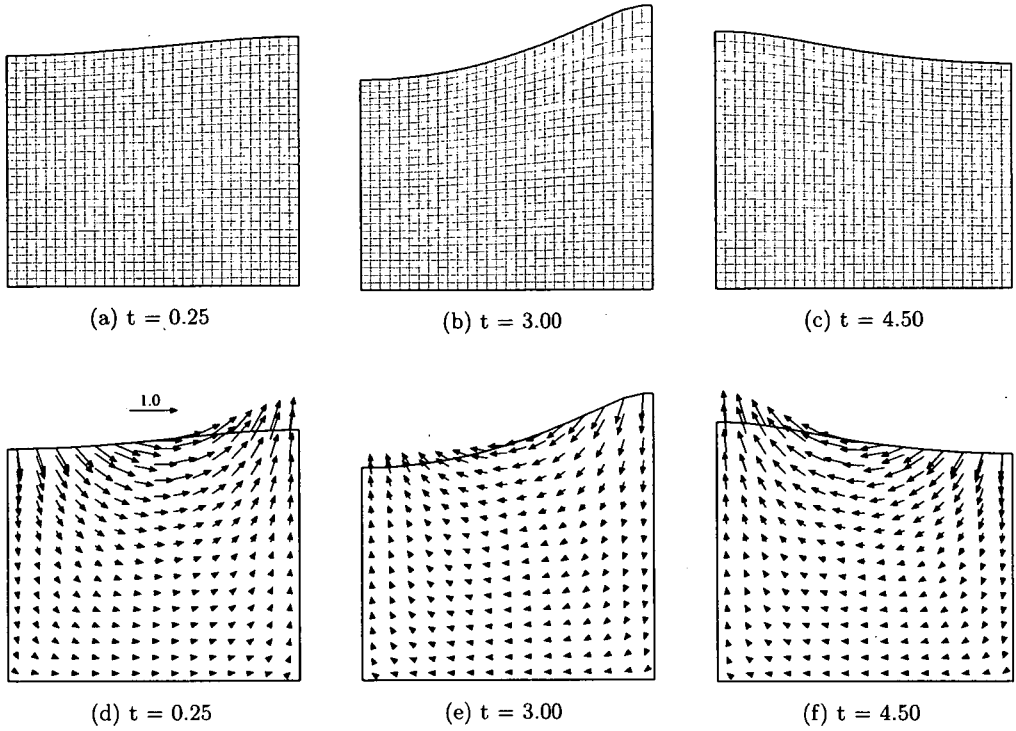


図-6 非線形水面振動の解析結果 (生成したメッシュと流速ベクトル分布)

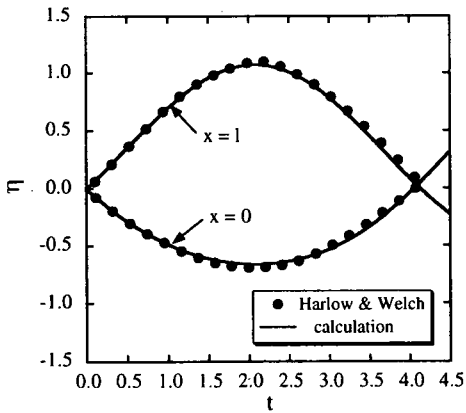


図-7 非線形水面振動における η の時系列

上記の非定常計算の過程において、計算領域内の流体質量が十分高い精度で保存されることを確認するため、次式で計算される平均水深の誤差 $\Delta\eta$ を求める。

$$\Delta\eta = \frac{\sum_{m=1}^N \Delta x_{1,m} h_m}{l} - h \quad (41)$$

$\Delta\eta$ はある時刻の平均水深から初期水深を引いた値であり、 $\Delta x_{1,m}$ と h_m は、それぞれ計算セルの x_1 方向の長さとお水深、 N は x_1 方向の計算セル数を表す。流体

の流入がないため、理論上は常に $\Delta\eta = 0$ となる。

図-8 に、圧力解法と水面位置の計算法のみを変え、他の計算方法や格子配置などは同一条件とした 3 種類の計算結果を示した。図中の C-HSMAC と SMAC は、圧力解法に C-HSMAC 法および SMAC 法²⁴⁾ を用い、式 (31) により水面高さを計算した結果である。これらに加えて、圧力解法に SMAC 法、水面位置の計算に水面の動的境界条件である式 (29) を用いた結果 (図中の h-eq + SMAC) を示した。ここで、式 (29) の右辺第 2 項の離散化には中央差分を利用した。なお、SMAC 法では流速の発散値を用いた収束判定ができなため、圧力の収束判定値を 10^{-15} とし、C-HSMAC では $D_0^* = 10^{-15}$ とした。これらの圧力の収束計算には SOR 法を用いた。

図-8 に示されるように、式 (29) と SMAC 法を組み合わせ合わせた場合には、圧力の収束誤差が十分低いにもかかわらず、 $|\Delta\eta|$ の値は 10^{-1} のオーダーに達している。従って、この計算条件では、計算領域内の流体質量が大きく増減してしまうことになる。このような場合には、計算途中で平均水深を補正するなどの人為的操作が必要になるが、それにより計算結果の信頼性は大きく損なわれるであろう。一方、式 (31) と SMAC 法を用いた場合には、誤差は低減し、 $|\Delta\eta|$ の値は最大で 10^{-4}

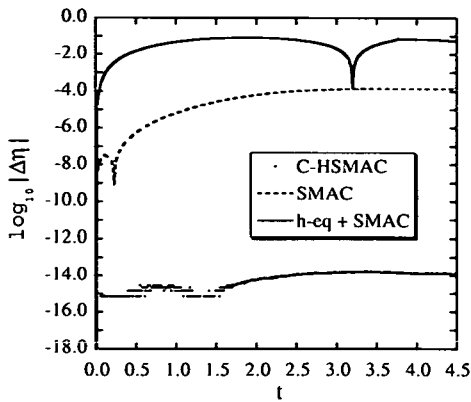


図-8 平均水深の誤差の比較

程度となる。このことは、(29)を用いて水面高さを計算する場合には、式(29)右辺の各項の数値的な保存性が満たされるよう、特別な考慮を要することを意味している。これらに対して、式(31)とC-HSMAC法を用いた場合には、図-8に示されるように、 $|\Delta\eta|$ の値は最大でも 10^{-14} のオーダーに押さえられる。この条件では、 D_0^* を適切に設定することで、 $|\Delta\eta|$ の値をさらに小さく制御することも可能である。なお、C-HSMAC法を用いた場合の計算時間は、他の条件の計算時間の約1.25倍であった。この計算時間は、圧力収束計算の解法などにより変化しうるが、式(31)とC-HSMAC法を用いることで、SMAC法と同程度の計算時間で流体質量の保存性が十分に満足される自由水面流れの計算が可能であると考えられる。

4. 結言

本研究では、自由水面の変動を伴う流れの数値解析手法について考察した。非定常的に変形する自由水面形状は、移動一般座標系を各時間ステップごとに生成することで表現し、流体内部領域の計算格子点位置は、ALE法に基づき、楕円型偏微分方程式を解いて定めるものとした。流体運動の基礎方程式であるNavier-Stokes式は、直交座標系の流速成分を基本変数として写像空間中に変換し、変数はcollocated格子配置に従うものとした。流速と圧力の同時緩和法として、一般座標系におけるcollocated格子上的HSMAC法に相当するC-HSMAC法を提案した。

計算手法の適用性を確認するため、矩形容器内の微小静振波に本手法を適用し、重力および表面張力を復元力とする微小水面振動の周期が理論解と一致することが示された。また、水表面に圧力パルスが作用したときの非線形水面振動を解析し、既往計算結果とほぼ一致する妥当な解析結果が得られること、さらに水面変動を伴う場合でも流体質量が十分な精度で保存されることが示された。

参考文献

- 1) Harlow, F. H. and Welch, J. E.: Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phys. Fluids*, Vol. 8, No. 12, pp. 2182-2189, 1965.
- 2) Harlow, F. H.: PIC and its progeny, *Comput. Phys. Commun.*, Vol. 48, pp. 1-10, 1988.
- 3) Hirt, C. W. and Nichols, B. D.: Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries, *J. Comp. Phys.*, Vol. 39, pp. 201-225, 1981.
- 4) 功刀資彰: 自由表面を含む多相流の直接数値解析法, 機械学会論文集B編, Vol. 63, No. 609, pp. 1576-1584, 1997.
- 5) Hirt, C. W., Cook, J. L. and Butler, T. D.: A Lagrangian method for calculating the dynamics of an incompressible fluid with free surface, *J. Comput. Phys.*, Vol. 5, pp. 103-124, 1970.
- 6) Hirt, C. W., Amsden, A. A. and Cook, J. L.: An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds, *Journal of Computational Physics*, Vol. 14, pp. 227-253, 1974.
- 7) Koshizuka, S. and Oka, Y.: Moving-Particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nucl. Sci. Eng.*, Vol. 123, pp. 421-434, 1996.
- 8) 森西洋平: 非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性, 機械学会論文集B編, Vol. 62, No. 604, pp. 4098-4105, 1996.
- 9) Zang, Y., Street, R. L. and Koseff, J. R.: A Non-staggered Grid, Fractional Step Method for Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations in Curvilinear Coordinates, *J. Comp. Phys.*, Vol. 114, pp. 18-33, 1994.
- 10) 梶島岳夫, 太田貴士, 岡崎和彦, 三宅裕: コロケート格子による非圧縮流れの高次差分解析, 機械学会論文集B編, Vol. 63, No. 614, pp. 3247-3254, 1997.
- 11) S. V. Patankar (水谷幸夫, 香月 正司共訳): コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, 森北出版, 1995.
- 12) Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A. and Mastin, C. W.: *Numerical Grid Generation*, Elsevier Science, New York, 1985.
- 13) Thompson, J. F., Thames, F. C. and Mastin, C. W.: Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies, *J. Comput. Phys.*, Vol. 15, No. 1, pp. 299-319, 1974.
- 14) 牛島省, 瀬津家久, 山上路生, 坂根由季子: 局所5次スプライン内挿法(QSI法)を利用したコロケート格子による流体解析手法, 土木学会論文集, No. 691/II-57, pp. 73-83, 2001.
- 15) Herriot, J. G. and Reinsch, C. H.: Procedures for quintic natural spline interpolation, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 2, No. 3, pp. 281-289, 1976.
- 16) Rhie, C. M. and Chow, W. L.: Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.

- 17) Brackbill, J. U., Kothe, D. B. and Ruppel, H. M.: FLIP: A low-dissipation particle-cell method for fluid flow, *Comput. Phys. Commun.*, Vol. 48, pp. 25–38, 1988.
- 18) Hirt, C. W. and Cook, J. L.: Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain, *J. Comp. Phys.*, Vol. 10, pp. 324–340, 1972.
- 19) Renardy, M. and Renardy, Y.: On the nature of boundary conditions for flows with moving free surfaces, *Journal of Computational Physics*, Vol. 93, pp. 323–335, 1991.
- 20) Ramaswamy, B.: Numerical simulation of unsteady viscous free surface flow, *Journal of Computational Physics*, Vol. 90, pp. 396–430, 1990.
- 21) Ushijima, S.: Three-dimensional arbitrary Lagrangian-Eulerian numerical prediction method for non-linear free surface oscillation, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 26, pp. 605–623, 1998.
- 22) Takizawa, A., Koshizuka, S. and Kondo, S.: Generalization of physical component boundary fitted coordinate (PCBFC) method for the analysis of free-surface flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 15, pp. 1213–1237, 1992.
- 23) Harlow, F. H. and Welch, J. E.: Numerical study of large-amplitude free-surface motions, *Physics of Fluids*, Vol. 9, No. 5, 1966.
- 24) Amsden, A. A. and Harlow, F. H.: A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations, *J. Comp. Phys.*, Vol. 6, pp. 322–325, 1970.

(2001.4.9 受付)

COMPUTATIONAL METHOD FOR FREE-SURFACE FLOWS ON COLLOCATED GRID WITH MOVING CURVILINEAR COORDINATES

Satoru USHIJIMA and Iehisa NEZU

A computational method has been proposed for viscous incompressible flows accompanied by oscillating free surfaces. The free surface profiles are represented by general curvilinear coordinates generated at every computational time step. The internal grid points are located by solving elliptic partial differential equations on the basis of the Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation. The transformed Navier-Stokes equations are discretized on the collocated grid arrangement. The velocity-pressure correction is performed with C-HSMAC method, which is effective for free-surface flows on the present coordinates and grid system. The computational method was applied to small amplitude standing waves under the effect of gravity and surface tension forces. In addition, it was also applied to non-linear waves caused by a pressure pulse imposed on a free surface. As a result, it has been shown that the predicted results are in good agreement with the theory and that the fluid mass is preserved with sufficient accuracy with the C-HSMAC method.