

# 表面に複数のせん断力が作用する 線形多層弾性構造の解析

松井邦人<sup>1</sup>・董 勤喜<sup>2</sup>・小澤良明<sup>3</sup>・飯塚浩二<sup>4</sup>

<sup>1</sup>フェロー会員 Ph.D. 東京電機大学 工建設環境工学科 (〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町大字石坂)

<sup>2</sup>正会員 Ph.D. 運輸施設整備事業団 (〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬3-1-1)

<sup>3</sup>工修 川田工業株式会社 (〒114-0024 東京都北区西ヶ原3-45-4)

<sup>4</sup>工学 名工建設株式会社 (〒450-6113 愛知県名古屋市中村区名駅1-4 JRセントラルタワーズ34階)

本研究では、舗装を半無限体とその上に厚さが有限で水平方向に無限に広がる平行な層からなる線形弾性構造としてモデル化している。荷重は舗装表面に作用し、水平方向に円形等分布しているものとする。

解析方法として、円筒座標系で表したNavierの式の変位を、調和関数と重調和関数を用いて表し、Hankel変換とHankel逆変換を用いて解を誘導している。さらに重ね合わせの原理を利用して、複数のせん断力が作用する場合の応答解析ができるプログラムAMES (Analysis of Multi-layered Elastic Systems)を開発している。このプログラムの解析精度は、例題を用いてBISARと応答結果と比較して確認している。この比較から、BISARで算出した舗装表面の応力に誤りがあることが明らかになった。

**Key Words :** multi-layered elastic systems, Navier's equation, harmonic function, bi-harmonic function, Hankel transformation, AMES

## 1. はじめに

半無限体の表面に垂直な集中荷重が作用する場合、Boussinesq の解が、また、表面に水平な集中荷重が作用する場合、Cerrutti 解が知られている。これらの荷重が円形等分布する場合の解は、集中荷重の解を円形の範囲で積分することで求めることができるが、多層構造への拡張はできない。弾性理論に基づく解析的な解の誘導に関する研究はこれまで国内外で数多く行われてきた。その研究の大部分はコンピュータが利用できる以前のものが、まだその性能も普及度も十分でない時代のものであり、解は表とかグラフの形で与えられている。これらの研究の大部分は半無限体を対象としており、多層構造を対象としたものは、鉛直荷重を受ける Burmister の軸対称の解があり、表面に水平方向の力を受ける問題の解としては、2 層構造を対象とした木村の解<sup>1)</sup>が有名である。文献 2), 3) には過去の研究成果が整理されている。

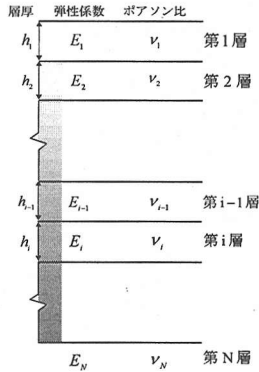
コンピュータ利用を前提として開発された多層弾性構造解析プログラムは BISTRO が最初であろう。このプログラムは 1967 年にシェル石油の研究所で開発され、多層構造の軸対称解析を行うことができる。このプログラムでは、層と層の間のすべりを考慮できない。また、軸対称であるため表面で水平に作用するせん断力を考慮できない。これらを考慮して理論構築を行い、1973 年に開発されたプログラムが BISAR である。このプログラムは、多層弾性

構造の任意の点における応答(変位、応力、ひずみ等)を計算でき、舗装技術者の間で信頼され、高い評価を受けている。

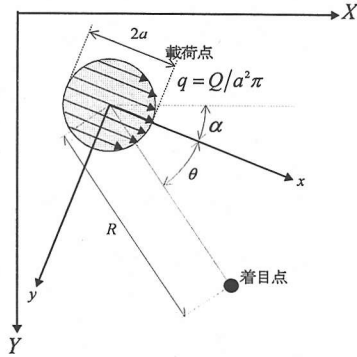
著者等も AAMES(Axi-symmetric Analysis of Multi-layered Elastic Systems)<sup>4)</sup>の開発を通して BISAR の計算効率および解析精度の良さを確認して生きた。しかし、BISAR は利用上の制約に加え、せん断力が作用するときの、出力結果の精度については十分に検証されているとは言いがたい。

そこで、本研究では線形多層構造の表面に円形等分布するせん断力が作用するとき、この構造の応答を算出できる理論を構築し、プログラムを開発することを目的としている。このようなプロセスを踏むことにより理論の理解を深めることができるだけでなく、解析精度を良くする上で必要な計算上のノウハウを蓄積することができる。さらに、プログラムの拡張、発展にも容易に対応できる。

文献 5)に、表面に円形等分布するせん断力が作用する半無限弾性体の解法について記されている。ここでは、円筒座標系で表示した Navier の式の変位成分を Michell と Boussinesq の変位関数で表し、それらが重調和関数および調和関数になると述べている。そして、Hankel 変換と Hankel 逆変換を用いて理論的に解を誘導している。この考え方は BISAR と基本的に同じである。BISAR マニュアルに記された理論の詳細は理解し難いが、最終的な式の違いから判断して、Hankel 変換の適用のしかたが、BISAR と本研究で異なっている。この結果、BISAR



(a) 多層弾性構造体



(b) 表面荷重

図-1 解析構造物

では Bessel 関数の 0 次と 1 次を用いて Hankel 逆変換しているのに対して、本研究では 0 次, 1 次, 2 次の Bessel 関数を用いている。また、本研究では Hankel 変換領域で伝達マトリックスを作成し、この領域で境界条件を適用し、積分定数を決定し、Hankel 逆変換を行っており、解の表示が BISAR と比べ非常に簡単になる。この考え方は本研究の特徴であり、すでに AAMES の開発でも用いている<sup>4)</sup>。

複数のせん断荷重に対応するため、全体座標系の中で作用荷重の位置と応答を求めたい着目点を定義している。個々の荷重に対して、その中心を原点とする局所座標系を導入して、応答を求めている。本問題は線形であるので、重ね合わせの原理を適用できる。個々の解析で得られた応答を全体座標系に変換し、全体座標系の上で重ね合わせを行っている。解析結果の精度の検証は BISAR の出力と比較することで行っている。この比較を通して、せん断力が作用するときの BISAR の出力結果に対する問題点が明らかになった。

ここで開発したプログラムを AMES (Analysis of Multi-layered Elastic Systems) と呼ぶことにする。現在、作用荷重の数は最大 100 個、層数は最大 100 層、応答の着目点数は最大 10000 点となっている。

## 2. 問題の設定

対象とする構造物は図-1(a)に示すように、最下層が半無限空間であり、その上には水平方向に無限に広がる平行な有限厚の層から構成されている。各層は線形弾性であり各層の境界は粗であると仮定する。荷重は舗装表面に平行に作用し、図-1(b)のような円形に一樣に分布している。ここで使用している座標系は、 $(X, Y, Z)$  が全体座標系であり、 $(x, y, z)$  は局所座標系である。分布荷重の中心は局所座標系原点に、荷重方向は局所座標系  $x$  軸と一致するように選択している。また、この  $z$  軸を共有する円筒座標系  $(r, \theta, z)$  を導入すると、任意の点の釣合式は次のような Navier の式で表すことができる。

$$\nabla^2 u_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (1a)$$

$$\nabla^2 u_\theta + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0 \quad (1b)$$

$$\nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (1c)$$

ここに、 $\nu$  はポアソン比であり、 $u_r, u_\theta, u_z$  はそれぞれ円筒座標系  $r, \theta, z$  軸方向の変位成分である。

舗装表面ではせん断力が円形等分布しているの、表面の境界条件は、 $r \leq a$  において

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz} &= -q \cos \theta \\ \tau_{\theta z} &= q \sin \theta \\ \sigma_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

また、 $r > a$  においては

$$\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = \sigma_z = 0 \quad (2b)$$

で与えることができる。

## 3. 解析方法

### (1) 変位および応力成分の Hankel 変換

式 (1) を満たす変位を、Michell の関数  $\Phi$  と Bussinesq の関数  $\Psi$  を用いて次のように表すことができる<sup>4)</sup>。

$$u_r = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (3a)$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial z} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (3b)$$

$$u_z = 2(1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (3c)$$

ここで、 $\nabla^2$ は円筒座標系におけるラプラス演算子である。

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3d)$$

関数  $\Phi$  と  $\Psi$  を用いて円筒座標系の応力成分を表すと次のようになる。

$$\frac{\sigma_r}{2\mu} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \Phi - 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Psi \quad (3e)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{2\mu} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Phi + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Psi \quad (3f)$$

$$\frac{\sigma_z}{2\mu} = \frac{\partial}{\partial z} \left( (2-\nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi \quad (3g)$$

$$\frac{\tau_{rz}}{2\mu} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (1-\nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \quad (3h)$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{2\mu} = \frac{\partial}{\partial r} \left( (1-\nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \right) \Psi \quad (3i)$$

$$\frac{\tau_{\theta z}}{2\mu} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} \left( \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi + \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Psi \quad (3j)$$

ここに、 $\mu$  はせん断弾性係数である。式(3a, b)の変位を、式(1)に代入して整理すると、

$$\nabla^4 \Phi = 0 \quad (4a)$$

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad (4b)$$

が得られる。これらの関係式から  $\Phi$  は重調和関数、 $\Psi$  は調和関数であることがわかる。 $\Phi$  と  $\Psi$  を  $\theta$  に関して Fourier 変換すると、

$$\Phi(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(r, z) \cos m\theta \quad (5a)$$

$$\Psi(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(r, z) \sin m\theta \quad (5b)$$

と書くことができる。図-1(b)に記すように、本問題では等分布荷重を対象としているので、式(2a)と対比すると明らかなように  $m=1$  の場合のみを考えれば良い。したがって、式(5a)と式(5b)の右辺は下添え字 1 を省略して、それぞれ  $\phi(r, z) \cos \theta$  と  $\psi(r, z) \sin \theta$  となる。 $\phi(r, z)$ 、 $\psi(r, z)$  はそれぞれ重調和関数、調和関数である。これら  $\phi(r, z)$ 、 $\psi(r, z)$  の Hankel 変換を

$$\int_0^{\infty} r \phi(r, z) J_1(\xi r) dr = G(\xi, z) \quad (6a)$$

$$\int_0^{\infty} r \psi(r, z) J_1(\xi r) dr = H(\xi, z) \quad (6b)$$

と書ことにする。式(5a)、(5b)と式(6a)、(6b)を式(4a)、(4b)に代入すると、

$$\int_0^{\infty} r \nabla^4 \phi J_1(\xi r) dr = \left( \frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right)^2 G(\xi, z) = 0 \quad (7a)$$

$$\int_0^{\infty} r \nabla^2 \psi J_1(\xi r) dr = \left( \frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right) H(\xi, z) = 0 \quad (7b)$$

となり、それらの解は

$$G(\xi, z) = (A + Bz)e^{\xi z} + (C + Dz)e^{-\xi z} \quad (8a)$$

$$H(\xi, z) = Ee^{\xi z} + Fe^{-\xi z} \quad (8b)$$

と示すことができる。

式(5a)、(5b)と式(8a)、(8b)を式(3a)、(3b)に代入して、再整理して Hankel 変換を行なうと次のような関係が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} r \left( \frac{u_r}{\cos \theta} + \frac{u_\theta}{\sin \theta} \right) J_2(\xi r) dr \\ \int_0^{\infty} r \left( \frac{u_r}{\cos \theta} - \frac{u_\theta}{\sin \theta} \right) J_0(\xi r) dr \\ \int_0^{\infty} r \left( \frac{u_z}{\cos \theta} \right) J_1(\xi r) dr \\ \int_0^{\infty} r \left( \frac{\sigma_z}{\cos \theta} \right) J_1(\xi r) dr \\ \int_0^{\infty} r \left( \frac{\tau_{\theta z}}{\sin \theta} + \frac{\tau_{rz}}{\cos \theta} \right) J_2(\xi r) dr \\ \int_0^{\infty} r \left( \frac{\tau_{\theta z}}{\sin \theta} - \frac{\tau_{rz}}{\cos \theta} \right) J_0(\xi r) dr \end{array} \right\} = [P_1] \left\{ \begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \right\} \quad (9)$$

ここで、 $[P_1]$  は  $6 \times 6$  のマトリクスであり、その成分を表-1 に示す。係数  $A, B, C, D, E, F$  は、積分定数であり境界条件から決定する。応力  $\sigma_r$ 、 $\sigma_\theta$ 、 $\tau_{r\theta}$  は、求めた積分定数  $A, B, C, D, E, F$  を使用して、

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} r \left( \frac{\sigma_r}{\cos \theta} + \frac{2\mu}{r} \frac{u_r}{\cos \theta} + \frac{2\mu}{r} \frac{u_\theta}{\sin \theta} \right) J_1(\xi r) dr \\ \int_0^{\infty} r \left( \frac{\sigma_r}{\cos \theta} + \frac{\sigma_\theta}{\cos \theta} \right) J_1(\xi r) dr \\ \int_0^{\infty} r \left( \frac{\tau_{r\theta}}{\sin \theta} + \frac{2\mu}{r} \frac{u_r}{\cos \theta} + \frac{2\mu}{r} \frac{u_\theta}{\sin \theta} \right) J_1(\xi r) dr \end{array} \right\} = [P_2] \left\{ \begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \right\} \quad (10)$$

$[P_2]$  は  $3 \times 6$  のマトリクスであり、その成分を表-2 に示す。

表-1  $[P_1]$ マトリックス

$\xi^2 e^{\xi}$	$\xi(1+\xi)e^{\xi}$	$-\xi^2 e^{-\xi}$	$\xi(1-\xi)e^{-\xi}$	$2\xi e^{\xi}$	$2\xi e^{-\xi}$
$-\xi^2 e^{\xi}$	$-\xi(1+\xi)e^{\xi}$	$\xi^2 e^{-\xi}$	$-\xi(1-\xi)e^{-\xi}$	$2\xi e^{\xi}$	$2\xi e^{-\xi}$
$-\xi^2 e^{\xi}$	$-\xi(-2+\xi+4\nu)e^{\xi}$	$\xi^2 e^{-\xi}$	$-\xi(2+\xi-4\nu)e^{-\xi}$	0	0
$-2\mu\xi^3 e^{\xi}$	$-2\mu\xi(-1+\xi+2\nu)e^{\xi}$	$2\mu\xi^3 e^{-\xi}$	$2\mu\xi^2(1+\xi-2\nu)e^{-\xi}$	0	0
$2\mu\xi^3 e^{\xi}$	$2\mu\xi^2(\xi+2\nu)e^{\xi}$	$2\mu\xi^3 e^{-\xi}$	$2\mu\xi^2(\xi-2\nu)e^{-\xi}$	$2\mu\xi^2 e^{\xi}$	$-2\mu\xi^2 e^{-\xi}$
$2\mu\xi^3 e^{\xi}$	$2\mu\xi^2(\xi+2\nu)e^{\xi}$	$2\mu\xi^3 e^{-\xi}$	$2\mu\xi^2(\xi-2\nu)e^{-\xi}$	$-2\mu\xi^2 e^{\xi}$	$2\mu\xi^2 e^{-\xi}$

表-2  $[P_2]$ マトリックス

$-2\mu\xi^3 e^{\xi}$	$2\mu\xi(1+\xi+2\nu)e^{\xi}$	$-2\mu\xi^3 e^{-\xi}$	$2\mu\xi^2(1-\xi+2\nu)e^{-\xi}$	0	0
$2\mu\xi^3 e^{\xi}$	$2\mu\xi(1+\xi+4\nu)e^{\xi}$	$-2\mu\xi^3 e^{-\xi}$	$2\mu\xi^2(1-\xi+4\nu)e^{-\xi}$	0	0
0	0	0	0	$2\mu\xi^2 e^{\xi}$	$2\mu\xi^2 e^{-\xi}$

Hankel 変換領域内において、各変位・応力の値を求め、次式のように Hankel 逆変換を行い、円筒座標系における変位と応力を求める。

$$\frac{u_r}{\cos\theta} + \frac{u_\theta}{\sin\theta} = \int_0^\infty \xi \left( \frac{\bar{u}_r}{\cos\theta} + \frac{\bar{u}_\theta}{\sin\theta} \right) J_2(\xi r) d\xi \quad (11a)$$

$$\frac{u_r}{\cos\theta} - \frac{u_\theta}{\sin\theta} = \int_0^\infty \xi \left( \frac{\bar{u}_r}{\cos\theta} - \frac{\bar{u}_\theta}{\sin\theta} \right) J_0(\xi r) d\xi \quad (11b)$$

$$\frac{u_z}{\cos\theta} = \int_0^\infty \xi \left( \frac{\bar{u}_z}{\cos\theta} \right) J_1(\xi r) d\xi \quad (11c)$$

$$\frac{\sigma_z}{\cos\theta} = \int_0^\infty \xi \left( \frac{\bar{\sigma}_z}{\cos\theta} \right) J_1(\xi r) d\xi \quad (11d)$$

$$\frac{\tau_{\theta z}}{\sin\theta} + \frac{\tau_{zr}}{\cos\theta} = \int_0^\infty \xi \left( \frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{\sin\theta} + \frac{\bar{\tau}_{zr}}{\cos\theta} \right) J_2(\xi r) d\xi \quad (11e)$$

$$\frac{\tau_{\theta z}}{\sin\theta} - \frac{\tau_{zr}}{\cos\theta} = \int_0^\infty \xi \left( \frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{\sin\theta} - \frac{\bar{\tau}_{zr}}{\cos\theta} \right) J_0(\xi r) d\xi \quad (11f)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{\cos\theta} + \frac{1}{r} \frac{u_r}{\cos\theta} + \frac{1}{r} \frac{u_z}{\sin\theta} \\ = \int_0^\infty \xi \left( \frac{\bar{\sigma}_r}{\cos\theta} + \frac{1}{r} \frac{\bar{u}_r}{\cos\theta} + \frac{1}{r} \frac{\bar{u}_\theta}{\sin\theta} \right) J_1(\xi r) d\xi \quad (11g) \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_r}{\cos\theta} + \frac{\sigma_\theta}{\cos\theta} = \int_0^\infty \xi \left( \frac{\bar{\sigma}_r}{\cos\theta} + \frac{\bar{\sigma}_\theta}{\cos\theta} \right) J_1(\xi r) d\xi \quad (11h)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{r\theta}}{\sin\theta} + \frac{1}{r} \frac{u_r}{\cos\theta} + \frac{1}{r} \frac{u_\theta}{\sin\theta} \\ = \int_0^\infty \xi \left( \frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{\sin\theta} + \frac{1}{r} \frac{\bar{u}_r}{\cos\theta} + \frac{1}{r} \frac{\bar{u}_\theta}{\sin\theta} \right) J_1(\xi r) d\xi \quad (11i) \end{aligned}$$

ここで上付きバーは、それぞれ対応する成分の Hankel 変換を意味している。

層では、式(9)より

$$\begin{Bmatrix} \frac{\bar{u}_r^{(i)}(z, \xi) + \bar{u}_\theta^{(i)}(z, \xi)}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\bar{u}_r^{(i)}(z, \xi) - \bar{u}_\theta^{(i)}(z, \xi)} \\ \frac{\bar{u}_z^{(i)}(z, \xi)}{\cos\theta} \\ \frac{\bar{\sigma}_z^{(i)}(z, \xi)}{\cos\theta} \\ \frac{\bar{\tau}_{\theta z}^{(i)}(z, \xi)}{\sin\theta} + \frac{\bar{\tau}_{rz}^{(i)}(z, \xi)}{\cos\theta} \\ \frac{\bar{\tau}_{\theta z}^{(i)}(z, \xi)}{\sin\theta} - \frac{\bar{\tau}_{rz}^{(i)}(z, \xi)}{\cos\theta} \end{Bmatrix} = [P_i(z, \xi)] \begin{Bmatrix} A_i(\xi) \\ B_i(\xi) \\ C_i(\xi) \\ D_i(\xi) \\ E_i(\xi) \\ F_i(\xi) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$i$  番目と  $i+1$  番目の層の境界では、それぞれの層の上面を原点とする局所座標系を導入して、変位と応力の連続条件を用いると次式のような関係が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\bar{u}_r^{(i)}(h, \xi) + \bar{u}_\theta^{(i)}(h, \xi)}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\bar{u}_r^{(i)}(h, \xi) - \bar{u}_\theta^{(i)}(h, \xi)} \\ \frac{\bar{u}_z^{(i)}(h, \xi)}{\cos\theta} \\ \frac{\bar{\sigma}_z^{(i)}(h, \xi)}{\cos\theta} \\ \frac{\bar{\tau}_{\theta z}^{(i)}(h, \xi)}{\sin\theta} + \frac{\bar{\tau}_{rz}^{(i)}(h, \xi)}{\cos\theta} \\ \frac{\bar{\tau}_{\theta z}^{(i)}(h, \xi)}{\sin\theta} - \frac{\bar{\tau}_{rz}^{(i)}(h, \xi)}{\cos\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\bar{u}_r^{(i+1)}(0, \xi) + \bar{u}_\theta^{(i+1)}(0, \xi)}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\bar{u}_r^{(i+1)}(0, \xi) - \bar{u}_\theta^{(i+1)}(0, \xi)} \\ \frac{\bar{u}_z^{(i+1)}(0, \xi)}{\cos\theta} \\ \frac{\bar{\sigma}_z^{(i+1)}(0, \xi)}{\cos\theta} \\ \frac{\bar{\tau}_{\theta z}^{(i+1)}(0, \xi)}{\sin\theta} + \frac{\bar{\tau}_{rz}^{(i+1)}(0, \xi)}{\cos\theta} \\ \frac{\bar{\tau}_{\theta z}^{(i+1)}(0, \xi)}{\sin\theta} - \frac{\bar{\tau}_{rz}^{(i+1)}(0, \xi)}{\cos\theta} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

## (2) 多層構造への拡張

図-1(a)に示す多層弾性構造を考える。 $i$  番目の

式(12), (13)より、表層(第1層)の応力・変位と、最下層(第 $N$ 層)の積分定数との関係を示す伝達

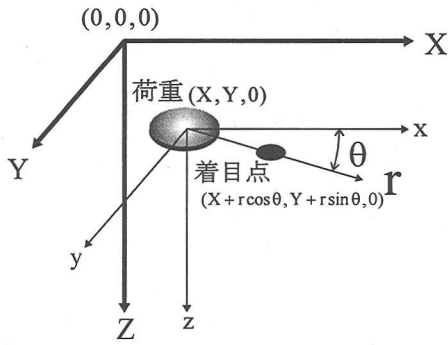


図-2 全体座標系と局所座標系

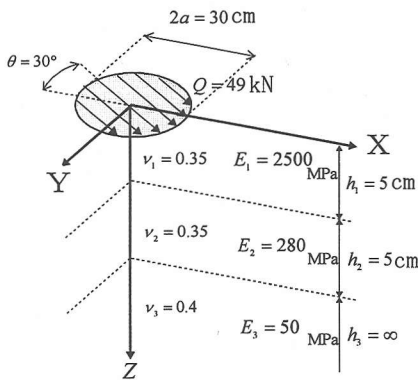


図-3 例題1(荷重と層特性)  
( $E$ :弾性係数,  $\nu$ :ポアソン比,  $h$ :層厚)

マトリクスを作成できる。最下層である第  $N$  層では、 $z$  が無限大になると、応力、変位はゼロと考えられ(半無限層)、最下層(第  $N$  層)における積分定数は  $A_n = B_n = E_n = 0$  と求まる。

舗装表面において半径  $a$  の円形に等分布荷重  $q$  が作用している場合は、Hankel 変換により、

$$\begin{Bmatrix} \bar{\tau}_{\alpha\alpha}^{(0)}(0, \xi) + \bar{\tau}_{\alpha\alpha}^{(0)}(0, \xi) \\ \frac{\sin \theta}{\bar{\tau}_{\alpha\alpha}^{(0)}(0, \xi)} + \frac{\cos \theta}{\bar{\tau}_{\alpha\alpha}^{(0)}(0, \xi)} \\ \frac{\sin \theta}{\bar{\tau}_{\alpha\alpha}^{(0)}(0, \xi)} - \frac{\cos \theta}{\bar{\tau}_{\alpha\alpha}^{(0)}(0, \xi)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{q}(\xi) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ここに、

$$\bar{q}(\xi) = \int_0^a r(2q)J_0(\xi r)dr = \frac{2qa}{\xi} J_1(\xi a) \quad (15)$$

表層と最下層の伝達マトリクスの成分を  $t_{ij}$  と表すことにより、境界条件を考慮した表層と最下層の関係を以下の式で示すことができる。

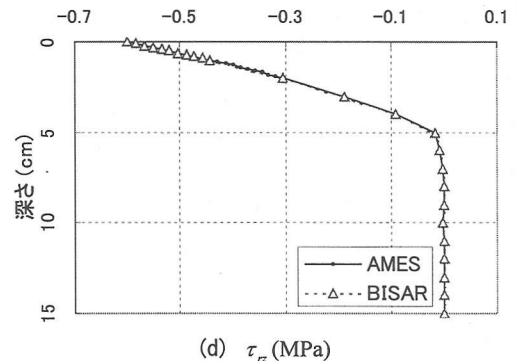
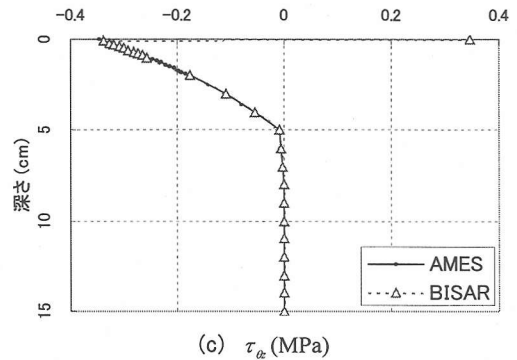
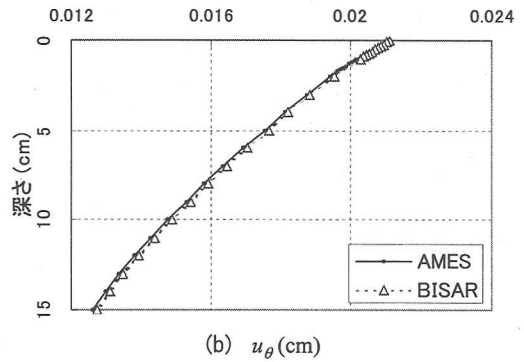
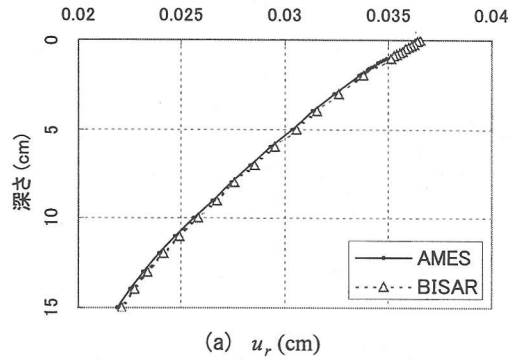


図-4 AMES と BISAR の比較(例題1)

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_r^{(1)}(0, \xi) + \bar{u}_\theta^{(1)}(0, \xi) \\ \cos\theta \bar{u}_r^{(1)}(0, \xi) - \sin\theta \bar{u}_\theta^{(1)}(0, \xi) \\ \cos\theta \bar{u}_z^{(1)}(0, \xi) \\ \sin\theta \bar{u}_z^{(1)}(0, \xi) \\ \cos\theta \\ 0 \\ 0 \\ \bar{q}(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} & t_{41} & t_{51} & t_{61} \\ t_{21} & t_{22} & t_{32} & t_{42} & t_{52} & t_{62} \\ t_{31} & t_{23} & t_{33} & t_{43} & t_{53} & t_{63} \\ t_{41} & t_{24} & t_{34} & t_{44} & t_{54} & t_{64} \\ t_{51} & t_{25} & t_{35} & t_{45} & t_{55} & t_{65} \\ t_{61} & t_{26} & t_{36} & t_{46} & t_{56} & t_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_n \\ D_n \\ 0 \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (16)$$

最下層の積分定数  $C_n, D_n, F_n$  は

$$\begin{Bmatrix} C_n \\ D_n \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{34} & t_{44} & t_{64} \\ t_{35} & t_{45} & t_{65} \\ t_{36} & t_{46} & t_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{q}(\xi) \end{Bmatrix} \quad (17)$$

より求まり、この結果と式(12)、(13)を用いることで順次各層の積分定数  $A_i(\xi), B_i(\xi), C_i(\xi), D_i(\xi), E_i(\xi), F_i(\xi)$  を算出できる。すなわち、式(9)、(10)の右辺の積分定数が得られ、Hankel 逆変換を適用させることで、式(11a)–(11i)の左辺の値が得られ、変位と応力が算出できる。このとき、 $r=0$ において式(11g)、(11i)から  $\sigma_r$  と  $\tau_{r\theta}$  を求めるとき、 $1/r$  がそれ等の式に含まれているので問題が発生する。この問題はド・ロピタルの公式を用いて解決できる。その詳細は付録に記す。式(11a)–(11i)の計算精度は半無限積分の精度に大きく影響を受ける。本プログラムでは AAMES と同様に、ガウス求積法を用いている。

#### 4. 複数荷重作用の応答解析

図-2 は荷重点と着目点を全体座標系  $(X, Y, Z)$  の中に記したものである。複数の荷重が作用する時、全体座標系と局所座標系の間で、次式を用いて応答量を関連付けることができる。

$$[S] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \theta) & \sin(\alpha + \theta) & 0 \\ -\sin(\alpha + \theta) & \cos(\alpha + \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

変位は

$$\begin{Bmatrix} U_X \\ U_Y \\ U_Z \end{Bmatrix} = [S]^T \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (19)$$

応力は

$$\begin{bmatrix} \sigma_X & \tau_{XY} & \tau_{XZ} \\ \tau_{XY} & \sigma_Y & \tau_{YZ} \\ \tau_{XZ} & \tau_{YZ} & \sigma_Z \end{bmatrix} = [S]^T \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{bmatrix} [S] \quad (20)$$

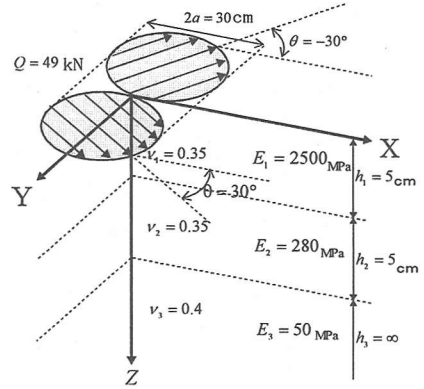


図-5 例題2(荷重と層特性)

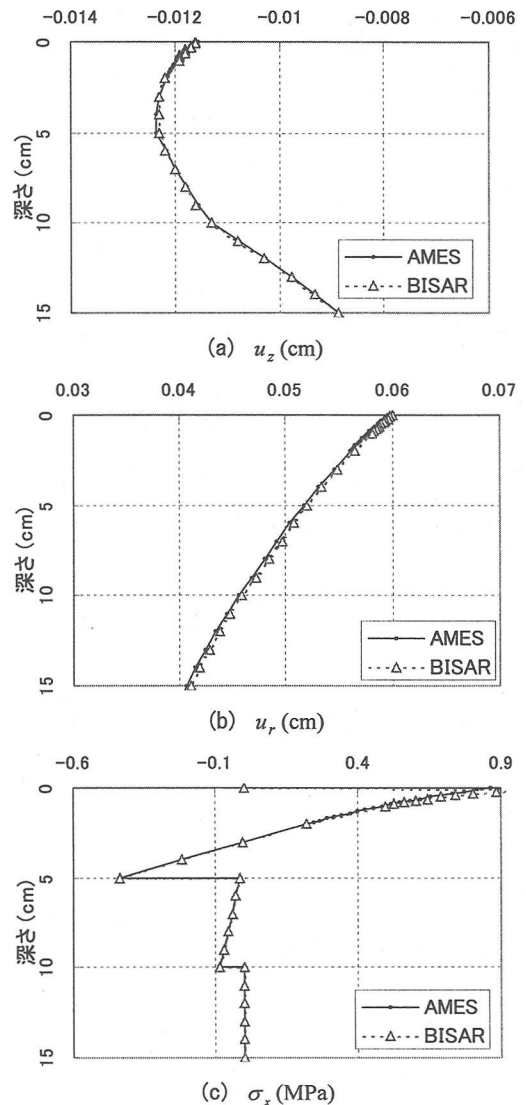


図-6 AMES と BIASAR の比較(例題2)

複数の荷重が作用する際は、個々の荷重に対してこのような解析を行い、最後に全体座標系の着目点で応答結果を足し合わせ、複数の荷重による応答を算出する。

## 5. 数値計算

### (1) 例題 1

図-3 に記す 3 層構造の表面に、1 個のせん断荷重を作用させた時の応答解析を AMES と BISAR の両ソフトで行なった。図-4 は、载荷直下 ( $r=0\text{cm}$ ) で深さ  $z$  を  $0\sim 15\text{cm}$  と変化させ算出した局所円筒座標系における解析結果である。

BISAR の解析結果と比較し、図-4 の (a), (b) に記した変位は、若干小さい値を算出している。これは式 (9) の Hankel 逆変換における半無限積分に数値積分を用いていることが原因であり、基本的に両ソフトの結果は一致していることが確認できる。図-4 (c), (d) には、せん断応力を記す。図-4 (d) の  $\tau_{rz}$  では両者でほぼ等しい解析結果を算出している。しかし、図-4 (c) の  $\tau_{\theta z}$  では、表面における算出値は AMES が  $-0.35\text{MPa}$  であるのに対し BISAR では  $0.35\text{MPa}$  となり、後者は  $z$  がゼロに近づくと突然大きくジャンプしており不自然な結果となっている。プログラム上に誤りがあると思われる。以上より表面における  $\tau_{\theta z}$  の値を除き両者の一致度は良い。

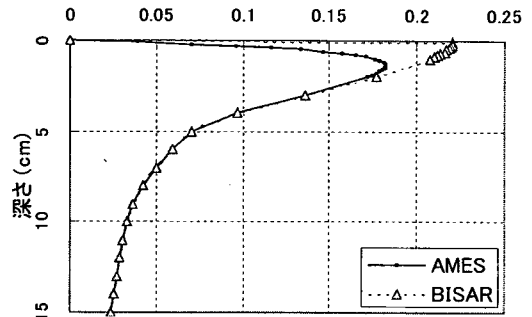
### (2) 例題 2

図-5 に記す 3 層構造の断面に、2 個のせん断荷重を作用させた時の応答解析を AMES と BISAR の両ソフトで行なった。図-5 は全体座標 ( $X, Y, Z$ ) における载荷状態を示している。図-6 は、原点から  $Z$  軸方向に  $0\sim 15\text{cm}$  の間で変位と応力の変化を示している。図-6 (a), (b) の変位の一致度は両者で良い。しかし、図-6 (c), (d), (e) の応力に関して AMES の結果は滑らかに変化しているが、BISAR は例題 1 と同様にここでも表面において応力が突然ジャンプする不自然な挙動を示している。

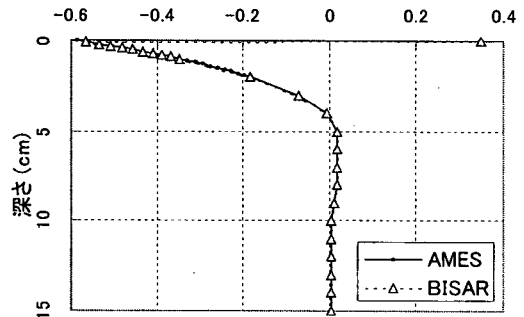
## 6. まとめ

舗装構造の表面に制動荷重のような力が作用することを想定している。そこで舗装を、最下層が半無限弾性体で、その上に有限な厚さの平行な複数の層から構成される線形弾性層状構造体としてモデル化している。そして制動荷重を、この表面に平行に円形等分布の形で作用するせん断荷重で表している。本研究ではこのような問題の解を解析的に誘導した。2 つの例題を用いて本論文で誘導した理論と解析精度を検証するため、BISAR の出力結果と比較した。その結果次のようなことが明らかになった。

- 1) 本理論に基づき開発した AMES と BISAR の出力結果はほぼ同じ値となり、本論文で誘導した理論が正しいことが確認できた。



(d)  $\sigma_r$  (MPa)



(e)  $\tau_{rz}$  (MPa)

図-6 AMES と BISAR の比較 (例題 2)

- 2) 例題 1 の出力である図-4 (c) では、BISAR を用いて求めた  $\tau_{\theta z}$  の値が  $z=0$  で不連続となっていること、例題 2 の出力である図-6 (c)-(e) でも BISAR の出力結果は  $z=0$  で不連続になっていることから、BISAR のプログラミング上の問題点が明らかになった。
- 3) 例題 2 の出力結果より AMES は複数のせん断荷重にも対応できることが明らかになった。

以上より当初の目的は達成できた。ここで誘導した解は理論解であるので、厳密である。しかし、この解を定量的に求めるには、Hankel 逆変換の半無限積分に数値積分を適用しなければならない。この数値積分が誤差を発生する主要原因である。今後式 (11) の Hankel 逆変換部分の半無限積分を工夫することで、さらに計算効率と精度を向上できると考えている。

謝辞：本研究は、運輸施設整備事業団「運輸分野における基礎的研究推進制度」のプロジェクト (2000-03) の一部として行った。このプロジェクトの関係者に謝意を表します。

付録：载荷点直下における構造体の応答

$f(r)$  は  $g(r), h(r)$  を用いて

$$f(r) = \frac{g(r)}{h(r)}$$

で表されるものとする。 $g(r), h(r)$  が連続で 1 回の

微係数が存在し、 $r=0$  で、 $h(0)=g(0)=0$  となるとき、 $f(r)$  は  $r=0$  で定義できない。ド・ロピタルの公式を用いると

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(0) = \frac{g'(0)}{h'(0)}$$

となる。この関係を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left( \frac{u_r}{\cos \theta} + \frac{u_z}{\sin \theta} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_r}{\cos \theta} + \frac{u_\theta}{\sin \theta} \right) \\ &= \int_0^\infty \xi \left( \frac{\bar{u}_r}{\cos \theta} + \frac{\bar{u}_\theta}{\sin \theta} \right) \frac{\partial J_2}{\partial r} d\xi \end{aligned}$$

$r=0$  における  $\sigma_r$  は、式(11g)を用いて次式より計算できる。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{\cos \theta} &= \int_0^\infty \xi \left( \frac{\bar{\sigma}_r}{\cos \theta} + \frac{1}{r} \frac{\bar{u}_r}{\cos \theta} + \frac{1}{r} \frac{\bar{u}_\theta}{\sin \theta} \right) J_1(\xi r) d\xi \\ &\quad - \int_0^\infty \xi \left( \frac{\bar{u}_r}{\cos \theta} + \frac{\bar{u}_\theta}{\sin \theta} \right) \frac{\partial J_2}{\partial r} d\xi \end{aligned}$$

同様に、 $r=0$  における  $\tau_{r\theta}$  は、式(11i)より求めることができる。

#### 参考文献

- 1) 木村 孟：せん断力を受ける舗装の応力について，土木学会論文集，第133号，pp. 21-28，1966.
- 2) Poulos, H. G. and Davis, E.H. : Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics, John Wiley & Sons, 1974.
- 3) 木村 孟：土の応力伝播，鹿島出版会，1978.
- 4) 松井邦人，董 勤喜，小澤良明，山峯明哲：層間すべりを考慮した軸対象弾性多層弾性構造の解析，土木学会舗装工学論文集，第5巻，pp. 122-129，2000.
- 5) 宮本 博：3次元弾性論，裳華房，1967.

(2001. 3. 31 受付)

## ANALYSIS OF LINEAR MULTI-LAYERED ELASTIC SYSTEM SUBJECTED TO MULTIPLE SHEAR FORCES ON ITS SURFACE

Kunihito MATSUI, Qinxi DONG, Yoshiaki OZAWA and Kouji IIZUKA

Pavement is modeled as an elastic structure composed of a semi-infinite body and layers of finite thickness extended infinitely in a horizontal direction. Load acting in a horizontal direction at the surface is uniformly distributed over a circular area. Navier's equation is solved analytically by employing Hankel transformation theory. Furthermore, using the principle of superposition, a program is developed, which can find the response of multiple shear loadings. Accuracy of the results is confirmed by comparing the results from BISAR using some example problems. The comparison shows that the stress outputs from BISAR yield erroneous results at the pavement surface.