

# 構造部材強度の分岐理論に基づく確率評価法

生出佳<sup>1</sup>・池田清宏<sup>2</sup>・寺田賢二郎<sup>2</sup>・藤井堅<sup>3</sup>・岡澤重信<sup>4</sup>

<sup>1</sup>学生会員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

<sup>2</sup>正会員 Ph.D 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

<sup>3</sup>正会員 工博 広島大学工学部第四類 (〒739-8527 東広島市鏡山 1-4-1)

<sup>4</sup>正会員 工博 カリフォルニア大学サンディエゴ校 機械・航空工学科 (La Jolla, San Diego, CA 92093-0411, USA)

構造部材の強度は、一般に荷重変位曲線上の極大点により支配される場合が多いが、細長い供試体や部材などでは極大点と分岐点と一致する頂上分岐点とが支配的となる。本研究では、強度を支配するこれらの特異点の数理構造を漸近的分岐理論により明らかにし、強度の確率評価法を提案する。最初に、頂上分岐点に対して得られる分岐方程式を基礎式として、初期不整感度則ならびに構造強度の確率密度関数を導出する。さらに、極大点に対する強度の確率評価式を比較対象として、特異点の種類による強度分布の違いを明示する。また、適用例としてトラス構造物、鋼供試体や鋼部材の実験や解析などから得られる強度を用いて本理論の有用性と妥当性を示す。

**Key Words :** bifurcation theory, sensitivity law, stochastic scatter, strength of structural member

## 1. はじめに

様々な部材や構造系の強度は荷重変位曲線上の極大点により支配される場合が多い。しかし一方で、原子の結晶格子<sup>1),2)</sup>や金属材料<sup>3)~5)</sup>が安定性を失う際には外力の極大点と分岐点が非常に接近して生じることがよく知られている。Thompson と Schorrok<sup>2)</sup>は、この近接する2つの特異点を頂上分岐点により近似し、弾性安定理論<sup>6)</sup>により局所的に区分線形な初期不整感度を持つことを示した。これに対して、極大点は線形な初期不整感度を持つ<sup>6)</sup>。このように、強度の初期不整依存特性は特異点の種類により異なるので、部材や構造系の強度を評価する際には、特異点の種類に応じた議論が必要となる。

構造特性や材料特性を定めるパラメータの狂い量、すなわち初期不整は確率変数であり、結果として得られる強度も必然的に確率量となる。しかし部材および構造系は無限に多くのパラメータを持つために、個々のパラメータについての初期不整の影響を逐次調べて行くという方法論では膨大な労力を要することになる。このため、これまで広範な研究<sup>7)~13)</sup>がなされてきたにもかかわらず、部材や構造系の強度の確率変動には未解決の問題が数多く残されているのが現状である。

これに対して、部材や構造系の強度発現のメカニズムを分岐現象として捉え、初期不整の確率変動に伴う強度の確率分布を求めるといった理論的評価法が提案されている<sup>14)</sup>。この理論は、Koiter<sup>15)</sup>がシェル等の構造系の特異荷重点が初期不整の大きさの2/3乗に(初期不整が小さい場合に漸近的に)比例して低下することを明らかにしたことに端を発する。Koiterのこの研究は、その後ThompsonとHunt<sup>6)</sup>により体系化され、この研

究をもとにした構造物の強度変動に関する研究が数多く行われてきた<sup>16)~19)</sup>。IkedaとMurota<sup>14)</sup>は、種々の初期不整変数が正規分布に従う場合の強度発現の仕組みを示し、多数の初期不整変数を持つ各種構造系への適用を通じてその妥当性を検証している。

本研究では、極大点と頂上分岐点という2種類の特異点の数理構造を漸近的分岐理論により明らかにし、強度の確率評価法を提案する。極大点に関してはIkedaとMurota<sup>20)</sup>の定式化に従い、頂上分岐点に関してはThompsonとSchorrok<sup>2)</sup>による弾性安定理論に基づいて理論式を導出する。まず、あるポテンシャル系の支配方程式にLiapunov-Schmidt簡約(あるいは受動変数の消去)<sup>6),21)</sup>を施すことにより得られる分岐方程式を解くことにより、初期不整感度を表す式を求める。次に、初期不整が正規分布に従うと仮定した場合の特異荷重の確率密度関数を定式化する。この結果、構造部材の強度自体は特異点の種類にあまり依存しないが、強度の初期不整感度や確率変動は特異点の種類により異なることが示される。4本トラス構造物を適用例として取り上げ、頂上分岐点に関する理論式の妥当性を示す。また、本理論を鋼材の引張り試験のシミュレーションに適用することにより、塑性問題への適用可能性を検証する。そして、実際の適用例として鋼材の引張り試験データと鋼板の圧縮試験のシミュレーションに本理論を適用し、その強度の確率変動の簡便評価法としての有用性を示す。

## 2. 理論

本研究で用いる分岐理論についてまとめる。この理論は、IkedaとMurota<sup>14),20),22)</sup>の漸近的分岐理論を頂

上分岐点に拡張したものである。

### (1) 定式化

対象とする系の離散的な非線形つり合い式が

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{f}, \mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

と表されるとする。ここに、 $\mathbf{u}$  は  $N$  次元の未知変位ベクトル、 $\mathbf{f}$  は荷重パラメータ、 $\mathbf{v}$  は  $p$  次元の初期不整変数ベクトルである。ただし、 $\mathbf{F}$  は十分滑らかであると仮定する。

さらに、この系が、ポテンシャル系であると仮定する。すると、ヤコビ行列（接線剛性行列）

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{f}, \mathbf{v}) = (J_{ij}) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \right), \quad i, j = 1, \dots, N \quad (2)$$

は対称行列になり、相反性

$$J_{ij} = J_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (3)$$

が成り立つ。

特異点  $(\mathbf{u}_c(\mathbf{v}), \mathbf{f}_c(\mathbf{v}))$  では、ヤコビ行列  $\mathbf{J}_c = \mathbf{J}(\mathbf{u}_c, \mathbf{f}_c, \mathbf{v})$  は、ゼロ固有値を持ち、特異性条件式

$$\det \mathbf{J}_c = 0 \quad (4)$$

が成り立つ。ここに、 $(\cdot)_c$  で表される変数は、特異点での値を示す。 $\mathbf{J}_c$  の固有ベクトル  $\{\boldsymbol{\eta}_i | i = 1, \dots, M\}$  は、 $\mathbf{J}_c \boldsymbol{\eta}_i = \mathbf{0}$  ( $i = 1, \dots, M$ ) を満たす。 $M$  は特異点  $(\mathbf{u}_c, \mathbf{f}_c)$  の多重度を表す。

初期不整変数ベクトル  $\mathbf{v}$  を

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{d} \quad (5)$$

と表わす。ここに、 $(\cdot)^0$  は完全系の変数であることを、 $\epsilon$  は初期不整の大きさを、 $\mathbf{d}$  は初期不整のパターンを表す。初期不整感度行列

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad (6)$$

は、初期不整の影響を調べる上で重要である。

完全系の特異点  $(\mathbf{u}_c^0, \mathbf{f}_c^0) = (\mathbf{u}_c^0(\mathbf{v}^0), \mathbf{f}_c^0(\mathbf{v}^0))$  の近傍において変位  $\mathbf{u}$  を次のように表す。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c^0 + \sum_{j=1}^N w_j \boldsymbol{\eta}_j \quad (7)$$

ここに、 $(\cdot)_c^0$  は完全系の特異点に対応することを示し、 $(w_j | j = 1, \dots, N)$  は  $\mathbf{J}_c^0$  の固有ベクトル方向の増分変位である。また、荷重パラメータ  $\mathbf{f}$  を次のように表す。

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_c^0 + \tilde{\mathbf{f}}$$

ここに、 $\tilde{\mathbf{f}}$  は  $\mathbf{f}$  の完全系における特異荷重  $\mathbf{f}_c^0$  からの増分を表す。

Liapunov-Schmidt 簡約<sup>6),21)</sup>により、式(1)は分岐方程式

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{f}}, \epsilon) = \mathbf{0} \quad (8)$$

に帰着できる。ここに、 $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_M)^T$  は、 $\mathbf{J}_c^0$  のゼロ固有値の固有ベクトル方向の増分変位である。特異点では式(4)より次式が成立する。

$$\det \hat{\mathbf{J}}_c(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{f}}, \epsilon) = 0 \quad (9)$$

ただし、 $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{f}}, \epsilon) = \partial \hat{\mathbf{F}} / \partial \mathbf{w}(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{f}}, \epsilon)$  である。また、相反性(3)は分岐方程式に遺伝し、

$$\hat{J}_{ij} = \hat{J}_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, M \quad (10)$$

が成り立つ。

### (2) 分岐方程式

極大点の分岐方程式<sup>22)</sup>を紹介し、さらに頂上分岐点の分岐方程式<sup>23)</sup>を導く。

#### a) 極大点

極大点の場合、 $N=1$  なので、増分変位はスカラー  $w \equiv w_1$  のみとなる。このとき、分岐方程式(8)は次のような形になる。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}(w, \tilde{\mathbf{f}}, \epsilon) = & A_{200} w^2 + A_{010} \tilde{\mathbf{f}} + A_{001} \epsilon \\ & + A_{101} w \epsilon + A_{110} w \tilde{\mathbf{f}} + \text{h.o.t.} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、h.o.t.は高次項を表し、分岐方程式の展開係数は

$$A_{ijk} = \frac{1}{i!j!k!} \frac{\partial^{i+j+k}}{\partial w^i \partial \tilde{\mathbf{f}}^j \partial \epsilon^k} \hat{\mathbf{F}}(0, 0, 0) \quad (12)$$

により与えられる( $i, j, k = 0, 1, \dots$ )。また、初期不整  $\epsilon$  の係数  $A_{001}$  の具体形は次のように表される。

$$A_{001} = \boldsymbol{\eta}_1^T \mathbf{B}_c^0 \mathbf{d} \quad (13)$$

ヤコビアンは次のようになる。

$$\hat{\mathbf{J}}(w, \tilde{\mathbf{f}}, \epsilon) \sim 2A_{200} w + A_{101} \epsilon + A_{110} \tilde{\mathbf{f}} \quad (14)$$

これ以降、極大点において不安定化するという物理的に意味のあるケースに限定する。この場合、 $w < 0$  において式(11)のヤコビアンが負となる条件と極大点の条件から、

$$A_{010} < 0, \quad A_{200} < 0 \quad (15)$$

が成立する。

#### b) 頂上分岐点

極大点と自明解を持つ対称単純分岐点が一致する2重特異点の場合に対応する頂上分岐点に対し、分岐方程式(8)は次のような形になる。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_1(w_1, w_2, \tilde{\mathbf{f}}, \epsilon) = & A_{3000} w_1^3 + 2B_{2000} w_1 w_2 + A_{1010} w_1 \tilde{\mathbf{f}} \\ & + A_{0001} \epsilon + \text{h.o.t.} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_2(w_1, w_2, \tilde{\mathbf{f}}, \epsilon) = & B_{2000} w_1^2 + B_{0200} w_2^2 + B_{0010} \tilde{\mathbf{f}} \\ & + B_{0001} \epsilon + \text{h.o.t.} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 $w_1$  と  $w_2$  は  $J_c^0$  のゼロ固有値に対応する変位であり、

$$\begin{cases} A_{ijkl} = \frac{1}{i!j!k!l!} \frac{\partial^{i+j+k+l}}{\partial w_1^i \partial w_2^j \partial \tilde{f}^k \partial \epsilon^l} \hat{F}_1(0,0,0,0) \\ B_{ijkl} = \frac{1}{i!j!k!l!} \frac{\partial^{i+j+k+l}}{\partial w_1^i \partial w_2^j \partial \tilde{f}^k \partial \epsilon^l} \hat{F}_2(0,0,0,0) \end{cases} \quad (18)$$

は分岐方程式の展開係数である ( $i, j, k, l = 0, 1, \dots$ ). 式 (16) が対称分岐点に対応し、式 (17) が極大点に対応すると仮定した. 式 (16) が自明解を持つ条件より、式 (16) において  $\tilde{f}^2$  の項が存在しないことに注意を要する. また、相反性 (10) より、 $A_{1100} = 2B_{2000}$  が成り立つ.

分岐方程式 (16), (17) の  $\epsilon$  に関する係数は、それぞれ

$$A_{0001} = \eta_1^T B_c^0 d, \quad B_{0001} = \eta_2^T B_c^0 d \quad (19)$$

のように表される. 本研究では、分岐方程式 (16), (17) において、Thompson と Schorrok<sup>2)</sup> が考慮した項  $A_{0001}\epsilon$  に加えて、 $B_{0001}\epsilon$  の項も新たに考慮している. 対称分岐点に関する分岐方程式 (16) の係数である  $A_{0001}$  は、 $B_c^{0T} \eta_1$  と初期不整パターンベクトル  $d$  の内積として与えられる. このことから  $B_c^{0T} \eta_1$  を対称分岐点に関する初期不整パターンと呼ぶ. 一方、係数  $B_{0001}$  のベクトル  $B_c^{0T} \eta_2$  が極大点に関する初期不整パターンとなる. ヤコビ行列は次のようになる.

$$\hat{J}(w_1, w_2, \tilde{f}, \epsilon) \sim \begin{pmatrix} \hat{J}_{11} & \hat{J}_{12} \\ \hat{J}_{21} & \hat{J}_{22} \end{pmatrix} \quad (20)$$

ただし、各成分は次式のとおりである.

$$\begin{aligned} \hat{J}_{11} &= 3A_{3000}w_1^2 + 2B_{2000}w_2 + A_{1010}\tilde{f} + A_{1001}\epsilon \\ \hat{J}_{12} &= \hat{J}_{21} = 2B_{2000}w_1 \\ \hat{J}_{22} &= 2B_{0200}w_2 + B_{0110}\tilde{f} + B_{0101}\epsilon \end{aligned}$$

ここに、 $A_{1001}\epsilon$  と  $B_{0101}\epsilon$  は  $\epsilon$  に関する先頭項である  $A_{0001}\epsilon$  と  $B_{0001}\epsilon$  が微分演算により消えてしまったために繰り上がった項である. 式 (20) より、特異性条件式 (9) は、

$$\det \hat{J}(w_1, w_2, \tilde{f}, \epsilon) \sim 4B_{2000}(B_{0200}w_2^2 - B_{2000}w_1^2) = 0 \quad (21)$$

で与えられる. この式を満たす  $w_1$  と  $w_2$ 、すなわち不完全系の特異点は、 $B_{2000}B_{0200} > 0$  のときには存在するが、 $B_{2000}B_{0200} < 0$  のときには存在しない.

式 (16), (17) の初期不整  $\epsilon$  の係数  $A_{0001}$  と  $B_{0001}$  の有無および系の特異点の存在に関連する係数  $B_{2000}B_{0200}$  の正負を変化させたときの頂上分岐点近傍の挙動を図-1 に示す.  $A_{0001} \neq 0$ 、 $B_{2000}B_{0200} > 0$  の場合には、図-1(a) と (c) の上部に示すように各不完全系に対して2つの極大点が存在する. ただし、不完全系の曲線は図-1(c) の  $B_{2000}B_{0200} > 0$  に灰色と黒の破線で示すように、 $w_1 - w_2$  平面上で原点0に対して対称な解を持つことには注意を要する. また、 $A_{0001} = 0$ 、 $B_{0001} \neq 0$  の

場合には、図-1(b) に示すように、完全系の頂上分岐点が不完全系では●で表される極大点と△で表される単純対称分岐点という2つの単純特異点に分かれている.

これ以降、物理的に意味がある

$$B_{0010} < 0, \quad B_{2000} < 0, \quad B_{0200} < 0 \quad (22)$$

の場合<sup>23)</sup>に議論を限定することにする. 最初の式は、頂上分岐点に達するまで系が安定であることを表し、残りの式は、主経路と分岐経路ともに頂上分岐点において上に凸であることを表す.

### (3) 初期不整感度則

不完全系の特異荷重  $f_c$  の初期不整の大きさ  $\epsilon$  による変化量  $\tilde{f}_c$  は、初期不整の大きさ  $\epsilon$  が十分小さい場合には式 (8) と (9) を解くことにより、

$$\tilde{f}_c \sim h(\epsilon) \quad (23)$$

と初期不整のある関数  $h(\epsilon)$  として求められる. この種の式を初期不整感度則と呼ぶ. 初期不整感度則は、特異点の種類に応じて異なるので、特異荷重増分  $\tilde{f}_c$  の特性も特異点の種類毎に異なることになる.

#### a) 極大点

極大点に対する特異荷重増分および特異変位の初期不整感度則は、分岐方程式 (11) と特異条件式 (9) より

$$\tilde{f}_c \sim CA_{001}\epsilon \quad (24)$$

$$w_c \sim -\frac{1}{2A_{200}A_{010}}(A_{101}A_{010} - A_{001}A_{110})\epsilon \quad (25)$$

となる. ただし、

$$C = -\frac{1}{A_{010}} > 0 \quad (26)$$

は  $d$  に依存しない正定数である. 式 (24) より、 $A_{001} \neq 0$  のとき、特異荷重増分  $\tilde{f}_c$  と特異変位  $w_c$  は  $\epsilon$  のオーダーで増減する.

#### b) 頂上分岐点

式 (17) より  $\tilde{f}, w_1^2, w_2^2$  は  $\epsilon$  のオーダーであるので、分岐方程式 (16) は

$$2B_{2000}w_1w_2 + A_{0001}\epsilon \sim 0 \quad (27)$$

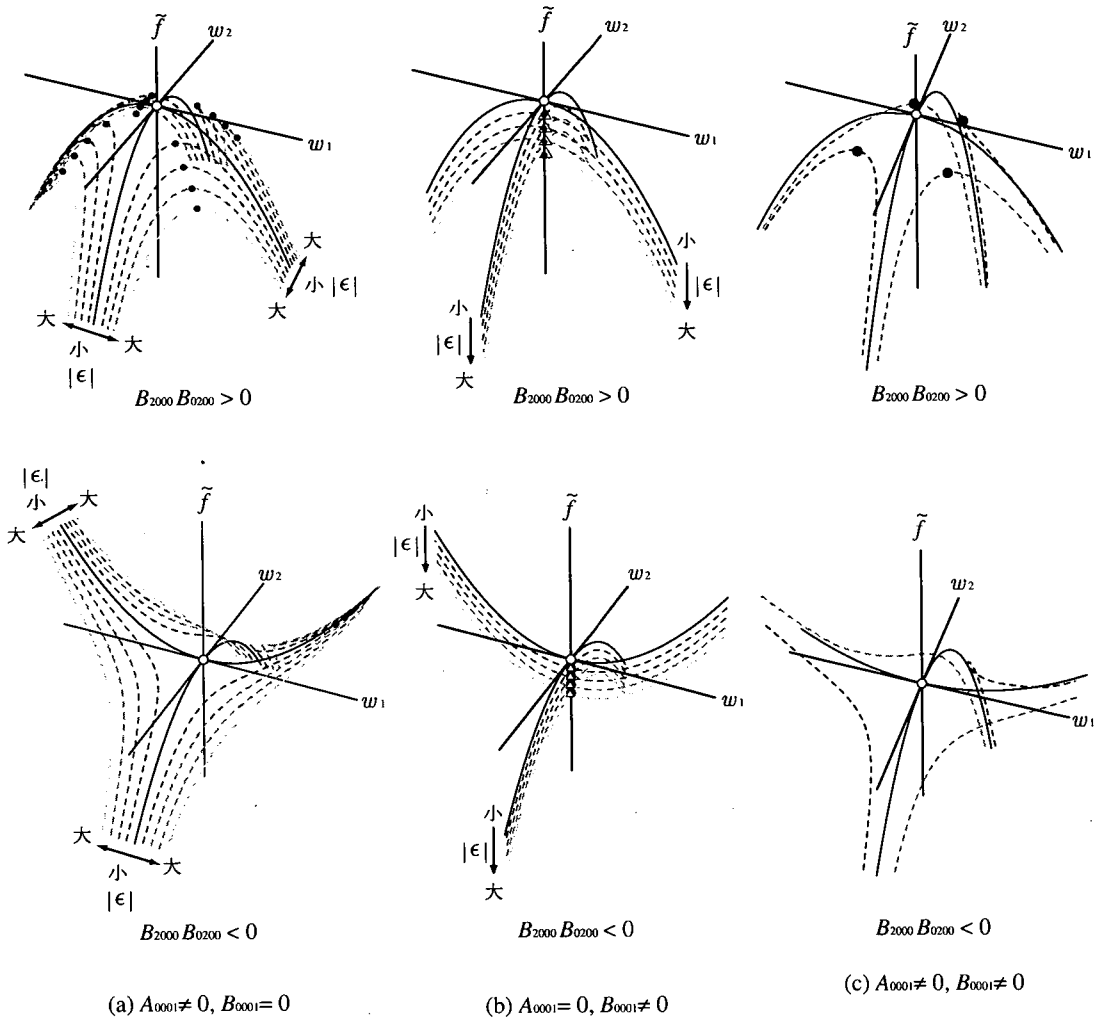
となり、式 (17), (21), (27) を連立して解くことにより次の初期不整感度則が得られる.

$$\tilde{f}_c \sim -C_1|A_{0001}\epsilon| + C_2B_{0001}\epsilon \quad (28)$$

$$w_{1c} \sim \pm \text{sign}(B_{2000}A_{0001}\epsilon) \left( \frac{B_{0200}}{4B_{2000}^3} \right)^{1/4} |A_{0001}\epsilon|^{1/2} \quad (29)$$

$$w_{2c} \sim \mp \frac{1}{(4B_{2000}B_{0200})^{1/4}} |A_{0001}\epsilon|^{1/2} \quad (30)$$

ここに、 $\text{sign}(\cdot)$  は  $(\cdot)$  で表される変数の符号を表し、



— 完全系    - - - 不完全系    ○ 頂上分岐点    ● 極大点    △ 対称分岐点

図-1 分岐方程式 (16), (17) (ただし  $B_{0200} < 0$ ) が漸近的に表す完全系および不完全系の荷重-変位曲線

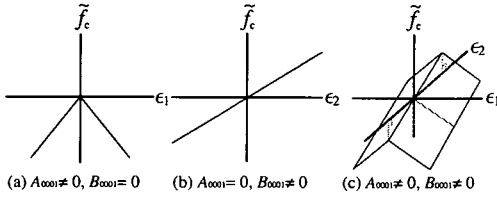


図-2 特異荷重に対する初期不整感度則 (28)

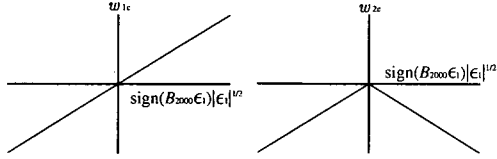


図-3 特異変位に対する初期不整感度則 (29), (30)

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\text{sign}(B_{2000})}{B_{0010}} \left( \frac{B_{0200}}{B_{2000}} \right)^{1/2} > 0 \\ C_2 &= -\frac{1}{B_{0010}} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

は  $d$  に依存しない正定数である。

物理的に意味のある (22) の場合に対し、初期不整感度則 (28) を、初期不整係数  $A_{0001}$ ,  $B_{0001}$  の有無ごとに図-2 に示す。図中の  $\epsilon_1$  は対称分岐点に関する初期不整項  $A_{0001}\epsilon$  を表し、 $\epsilon_2$  は極大点に関する初期不整項  $B_{0001}\epsilon$  を表す。 $A_{0001} \neq 0$  かつ  $B_{0001} \neq 0$  の場合、図中の (c) にみられるように特異荷重増分  $\tilde{f}_c$  は  $|\epsilon_1|$  の増加に伴ない減少するが、 $\epsilon_2 > 0$  に対して増加し、 $\epsilon_2 < 0$  に対しては減少する。図-2(a) が Thompson と Schrock が求めた初期不整感度則であり、(c) が著者らが式 (28) において  $(B_{0001}/B_{0010})\epsilon$  の項を加えて改良した初期不整感度則である。この改良は特異荷重の確率挙動を調べるに際し非常に重要である。

主経路上に極大点が存在する場合に対応する  $w_{2c} < 0$  の場合に対し、特異変位  $w_{1c}$  と  $w_{2c}$  の初期不整感度則 (29), (30) を図-3 に示す。

#### (4) 特異荷重の確率分布 ( $d$ が確率変数の場合)

初期不整パターン  $d$  が平均  $\mathbf{0}$ 、分散  $W$  の正規分布  $N(\mathbf{0}, W)$  に従うときの、極大点および頂上分岐点の 2 種類の特異荷重点の確率分布を示す。ただし、分散共分散行列  $W$  は正定値行列であると仮定する。

##### a) 極大点

極大点に対し

$$\eta_1^T B_c^0 = (a_1, \dots, a_p) \quad (32)$$

とおくと、式 (13) は次のようになる。

$$A_{0001} = \sum_{i=1}^p a_i d_i \quad (33)$$

$d$  は正規分布  $N(\mathbf{0}, W)$  に従うので、変数  $A_{0001}$  は、平均が  $0$ 、分散が

$$\sigma_1^2 = \eta_1^T B_c^0 W B_c^{0T} \eta_1 \quad (34)$$

の正規分布  $N(0, \sigma_1^2)$  に従う。したがって、式 (24) で与えられる  $\tilde{f}_c$  は正規分布  $N(0, \hat{\sigma}^2)$  に従う。ここに、

$$\hat{\sigma} = C \sigma_1 \epsilon \quad (35)$$

である。また、 $\tilde{f}_c$  の確率密度関数は

$$\phi(\tilde{f}_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}} \exp\left(-\frac{\tilde{f}_c^2}{2\hat{\sigma}^2}\right) \quad (36)$$

となる ( $-\infty < \tilde{f}_c < \infty$ )。

##### b) 頂上分岐点

頂上分岐点に対し

$$\eta_1^T B_c^0 = (a_1, \dots, a_p), \quad \eta_2^T B_c^0 = (b_1, \dots, b_p) \quad (37)$$

とおくと、式 (19) は次のようになる。

$$A_{0001} = \sum_{i=1}^p a_i d_i, \quad B_{0001} = \sum_{i=1}^p b_i d_i \quad (38)$$

$d$  は正規分布  $N(\mathbf{0}, W)$  に従うので、変数  $A_{0001}$  と  $B_{0001}$  は、平均が  $0$ 、分散が

$$\sigma_i^2 = \eta_i^T B_c^0 W B_c^{0T} \eta_i, \quad i = 1, 2 \quad (39)$$

の正規分布  $N(0, \sigma_1^2)$  と  $N(0, \sigma_2^2)$  にそれぞれ従う。このとき、付録 I に示すように、式 (28) の  $\tilde{f}_c$  の確率密度関数は、

$$\phi(\tilde{f}_c) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}} \exp\left(-\frac{\tilde{f}_c^2}{2\hat{\sigma}^2}\right) \Phi_N\left(-\frac{r}{\hat{\sigma}} \tilde{f}_c\right) \quad (40)$$

により与えられる ( $-\infty < \tilde{f}_c < \infty$ )。ここに、

$$\hat{\sigma} = \sqrt{(C_1^2 \sigma_1^2 + C_2^2 \sigma_2^2) \epsilon^2}, \quad r = \frac{C_1 \sigma_1}{C_2 \sigma_2} \quad (41)$$

$$\Phi_N(\zeta) = \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) d\zeta \quad (42)$$

である。

いくつかの  $r$  の値に対して式 (40) が表す確率密度関数を図-4 にプロットする。 $r \rightarrow 0$  のとき、式 (40) は正規分布  $N(0, C_2^2 \sigma_2^2 \epsilon^2)$  に従う。また、 $r \rightarrow +\infty$  のときは、 $\tilde{f}_c < 0$  で  $2N(0, C_1^2 \sigma_1^2 \epsilon^2)$  に従い、 $\tilde{f}_c > 0$  で  $0$  という興味深い分布となる。また、中間の場合には、Weibull 分布に似た分布となる。このように、本論文で求めた確率密度関数 (40) は、種々の分布を表すことができる、一般性が高いものである。

$\tilde{f}_c$  の平均  $E[\tilde{f}_c]$  と分散  $\text{Var}[\tilde{f}_c]$  は次式で表される。

$$E[\tilde{f}_c] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} C_1 \sigma_1 \epsilon \quad (43)$$

$$\text{Var}[\tilde{f}_c] = E[\tilde{f}_c^2] - (E[\tilde{f}_c])^2 = \hat{\sigma}^2 - \frac{2}{\pi} C_1^2 \sigma_1^2 \epsilon^2 \quad (44)$$

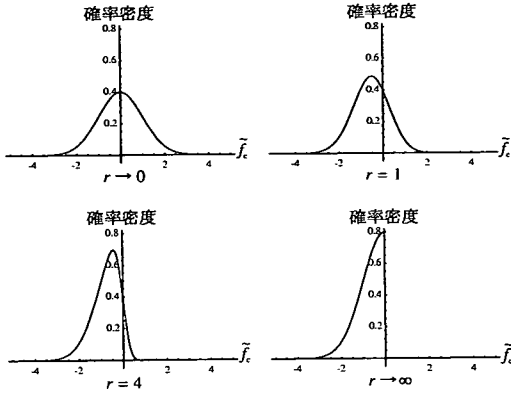


図-4 様々な  $r = C_1\sigma_1/(C_2\sigma_2)$  ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ) に対する  $\tilde{f}_c$  の確率密度関数 (40)

式 (43), (44) より次式が得られる。

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\text{Var}[\tilde{f}_c] + (E[\tilde{f}_c])^2} \quad (45)$$

$$r = \sqrt{\frac{\pi(E[\tilde{f}_c])^2}{2(\text{Var}[\tilde{f}_c] + (E[\tilde{f}_c])^2) - \pi(E[\tilde{f}_c])^2}} \quad (46)$$

式 (45) と (46) により,  $\tilde{f}_c$  の平均と分散を用いて  $\hat{\sigma}$  と  $r$  を求め, 式 (40) に代入すると,  $\tilde{f}_c$  の確率密度関数が求められる。

一方,  $f_c^0$  がわからない場合には,  $\tilde{f}_c$  の平均, 2乗平均, 3乗平均を用いた式

$$(f_c^0 - E[f_c])^3 = \frac{2}{4 - \pi} (-E[f_c^3] + 3E[f_c^2]E[f_c] - 2E[f_c^3]) \quad (47)$$

により  $f_c^0$  を求めることが考えられる。式 (43), (44) および (47) の誘導については付録 II を参照のこと。

### (5) 特異荷重の確率分布 ( $\epsilon$ が確率変数の場合)

次に, 初期不整パターン  $\mathbf{d}$  が一定であり,  $\epsilon$  が正規分布  $N(0, \sigma^2)$  に従って確率変動する場合を考える。

#### a) 極大点

極大点に対しては,  $\tilde{f}_c$  の確率密度関数は式 (36) により与えられる。ただし, 分散  $\hat{\sigma}^2$  としては次式を用いる。

$$\hat{\sigma}^2 = C^2 A_{001}^2 \sigma^2 \quad (48)$$

#### b) 頂上分岐点

頂上分岐点に対して  $\tilde{f}_c$  の確率密度関数は,  $C_1|A_{0001}| < C_2|B_{0001}|$  の場合には2つの異なる正規分布を  $\tilde{f}_c = 0$  においてつなぎ合わせた分布

$$\begin{cases} N(0, (C_1|A_{0001}| - C_2|B_{0001}|)^2 \sigma^2), & \tilde{f}_c > 0 \\ N(0, (C_1|A_{0001}| + C_2|B_{0001}|)^2 \sigma^2), & \tilde{f}_c < 0 \end{cases} \quad (49)$$

となる。一方,  $C_1|A_{0001}| > C_2|B_{0001}|$  の場合には,  $\tilde{f}_c < 0$  の部分において2つの正規分布を重ね合わせた分布

$$\begin{aligned} & N(0, (C_1|A_{0001}| - C_2|B_{0001}|)^2 \sigma^2) \\ & + N(0, (C_1|A_{0001}| + C_2|B_{0001}|)^2 \sigma^2), \quad \tilde{f}_c < 0 \end{aligned} \quad (50)$$

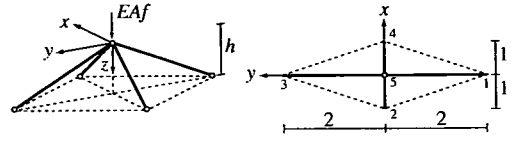


図-5 トラス構造物

により与えられ,  $\tilde{f}_c > 0$  の部分において0となる。

#### c) 初期不整感度則が特定できない場合

初期不整感度則が厳密に求められないときには, 初期不整感度則として

$$\tilde{f}_c \sim C(\mathbf{d})e^\rho \quad (51)$$

という一般形を仮定する。ここに,  $C(\mathbf{d})$  は  $\mathbf{d}$  の関数として与えられる係数である。また,  $\rho$  は初期不整感度を表す正定数である。すると, 確率密度関数は, 次のように表すことができる。

$$\phi(\tilde{f}_c) = \frac{2}{\rho} \left| \tilde{f}_c^{-1} - 1 \right| \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^{\frac{1}{\rho}}}} \exp\left(-\frac{|\tilde{f}_c|^{\frac{2}{\rho}}}{2\hat{\sigma}^{\frac{2}{\rho}}}\right) \quad (52)$$

ただし  $\hat{\sigma} = |C(\mathbf{d})\sigma^\rho|$ ,  $-\infty < \tilde{f}_c < 0$  である。与えられた解析データや実験データに対して, 初期不整感度則が最も良く成り立つ  $C(\mathbf{d})$  と  $\rho$  を定めることにより, 確率密度関数 (52) が求められる。

### 3. 頂上分岐点に関する理論の適用例

頂上分岐点に関する一連の理論式の妥当性と有用性を示すために, 図-5 に示す4本トラスに理論式を適用する。全てのトラス部材は同じ断面積  $A$  とヤング率  $E$  を持つ。高さ  $h$  は, 極大点と分岐点が一致し, 頂上分岐点となるように  $h = 1.8852$  と選んだ。

垂直荷重  $EAf$  を受ける4本トラスの支配方程式は, 次のように表される。

$$\mathbf{F} = EA \sum_{i=1}^4 \left( \frac{1}{L_i} - \frac{1}{\hat{L}_i} \right) \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \\ z - z_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ EAf \end{pmatrix} \quad (53)$$

ここに,  $(x_i, y_i, z_i)$  は節点  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) の初期位置であり,  $\mathbf{u} = (x, y, z)^T$  は変形後の節点5の位置である。さらに, 各部材長さ  $L_i$ , 変形後の長さ  $\hat{L}_i$  は

$$\begin{aligned} L_i &= [(x_5 - x_i)^2 + (y_5 - y_i)^2 + (z_5 - z_i)^2]^{1/2} \\ \hat{L}_i &= [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{1/2} \\ & \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

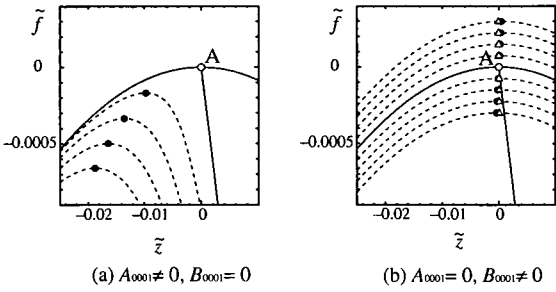
である。

初期不整として部材長さ  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) を選ぶことにする。このとき, 初期不整変数ベクトルは,

$$\mathbf{v} = (L_1, L_2, L_3, L_4)^T \quad (54)$$

となり, 完全系では,

$$\mathbf{v}^0 = (\sqrt{4+h^2}, \sqrt{1+h^2}, \sqrt{4+h^2}, \sqrt{1+h^2})^T \quad (55)$$



— 完全系 ----- 不完全系 ○ 頂上分岐点 ● 極大点 △ 分岐点

図-6 荷重-変位曲線 ( $\tilde{z} = z - z_c^0 = w_2$ )

となる。したがって初期不整感度行列は、式(6)により次のように求められる。

$$B = \frac{\partial F}{\partial v} \quad (56)$$

$$= EA \begin{pmatrix} \frac{x_1 - x}{L_1^2} & \frac{x_2 - x}{L_2^2} & \frac{x_3 - x}{L_3^2} & \frac{x_4 - x}{L_4^2} \\ \frac{y_1 - y}{L_1^2} & \frac{y_2 - y}{L_2^2} & \frac{y_3 - y}{L_3^2} & \frac{y_4 - y}{L_4^2} \\ \frac{z_1 - z}{L_1^2} & \frac{z_2 - z}{L_2^2} & \frac{z_3 - z}{L_3^2} & \frac{z_4 - z}{L_4^2} \end{pmatrix}$$

### (1) 局所挙動

完全系における荷重変位曲線を図-6に示す。主経路上にある頂上分岐点A

$$(x_c^0, y_c^0, z_c^0, f_c^0) = (0, 0, 1.0356, 0.6624EA)$$

は2個のゼロ固有値を持ち、対応する固有ベクトルは  $\eta_1 = (0, 1, 0)^T$ ,  $\eta_2 = (0, 0, 1)^T$  である。したがって、この頂上分岐点において、

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z - z_c^0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

である。頂上分岐点から分岐経路が下に伸びていることより、図-1(c)の  $B_{2000}B_{0200} > 0$  の場合に対応することがわかる。

不完全系に対しては、次のような初期不整パターンベクトルを考える。

$$d = \begin{cases} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T & \dots (a) \\ \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^T & \dots (b) \end{cases} \quad (58)$$

(a) は  $A_{0001} \neq 0, B_{0001} = 0$  の場合に相当し、対称分岐点に対する分岐方程式(16)に作用する初期不整である。(b) は  $A_{0001} = 0, B_{0001} \neq 0$  の場合に相当し、極大点に関する式(17)に作用する初期不整である。

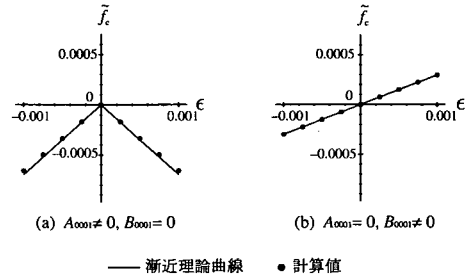


図-7 特異荷重に対する初期不整感度

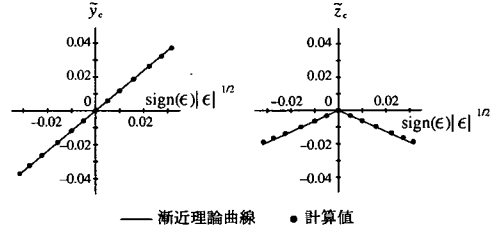


図-8 初期不整パターンベクトル (a) ( $A_{0001} \neq 0, B_{0001} = 0$ ) の場合の特異変位に対する初期不整感度

初期不整の大きさ  $\epsilon$  をいくつか変えて、2つの初期不整パターンベクトルに対して得た不完全系の曲線を、図-6に鎖線で示す。(a)の場合には、図-1(a)に示す理論曲線と同じく、不完全系の解曲線上に●で表される極大点が存在する。(b)の場合には、図-1(b)に示すように、完全系の頂上分岐点Aが不完全系では●で表される極大点と△で表される対称分岐点という2つの単純特異点に分かれている。

### (2) 初期不整感度

頂上分岐点Aにおける初期不整感度を求める。図-7に式(58)の初期不整パターン(a)および(b)を用いた場合の特異荷重増分  $\tilde{f}_c = f_c - f_c^0$  と初期不整の大きさ  $\epsilon$  の関係を示す。●は計算結果を表し、実線は式(28)により求められる漸近理論曲線を表す。パターン(a)の場合に対する  $\tilde{f}_c$  と  $\epsilon$  の関係は、区分線形性を示しており、図-2(a)の理論式によく一致している。また、パターン(b)の場合は線形であり、 $\epsilon < 0$  に対し特異荷重増分  $\tilde{f}_c$  は減少し、 $\epsilon > 0$  に対し増加しており、図-2(b)の理論解によく一致している。図-8に示すパターン(a)に対する特異変位  $\tilde{y}_c$  と  $\tilde{z}_c$  と  $\epsilon$  の関係も、式(29), (30)が表す1/2乗則に一致している(図-3参照)。図-7, 8のいずれにおいても、漸近曲線の高次項を無視した影響により、 $\epsilon$  が大きくなると●で表される計算値と実線で表される漸近理論曲線との間に誤差が生じている。

### (3) 特異荷重の確率分布

初期不整  $\epsilon d = v - v^0$  が正規分布  $N(0, \epsilon^2 L_4)$  に従うものとし、 $\epsilon = 10^{-4}$  としたときの1000ケースのランダムな初期不整パターンベクトルに対して  $\tilde{f}_c$  を求め、

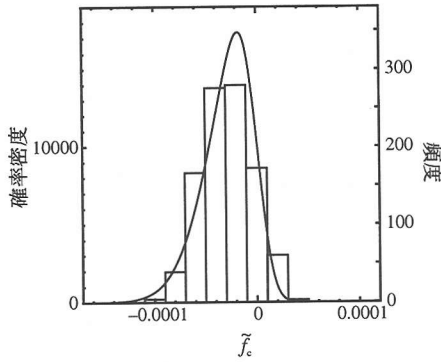


図-9 特異荷重の確率密度関数とヒストグラムの比較

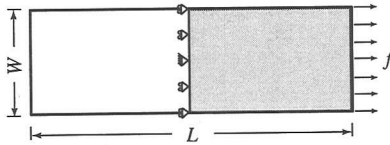


図-10 境界条件

図-9 に示すヒストグラムを求めた。ただし、 $I_4$  は  $4 \times 4$  の単位行列を表す。

第 2(4) 節で述べた、標本平均と標本分散を用いるの方法により、図-9 に実線で示す特異荷重増分  $f_c$  の確率密度関数 (40) を求めた。確率密度関数とヒストグラムは比較的良好に一致している。

#### 4. 鋼材および鋼部材の強度評価

本章では、第 2 章で展開した理論を実験例および解析例に対して適用する。まず、強度が極大点および頂上分岐点により支配される 2 種類の鋼材について引張り試験のシミュレーションを行い、それぞれに対して初期不整合度則を求め、さらに強度の確率分布の式を適用する。次に、実際の鋼材の引張り試験と、鋼板の圧縮試験データの強度確率分布を本理論により記述する。第 (1) 節の鋼材の引張りシミュレーションにおいて、本理論の塑性問題への適用可能性について初期不整合度則に基づく検証を行う。また、第 (2) 節と第 (3) 節においては、強度の確率分布を求める簡便法として本理論を位置付けている。

##### (1) 鋼材の引張り試験のシミュレーションによる強度評価

ここでは鋼材の引張り試験の弾塑性解析を行い、鋼材の引張り試験強度でよく見られる極大点および頂上分岐点の 2 種類の特異点に対応する鋼材の縦横比を求め、それぞれについて第 2 章で示した理論を適用する。

##### a) 解析条件

一様引張りを受ける鋼材を図-10 のようにモデル化する。荷重作用面ではせん断力が生じない境界条件を

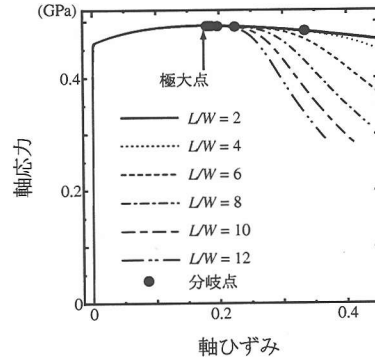


図-11  $L/W = 2 \sim 12$  に対する軸応力-軸ひずみ関係

用いる。平面ひずみ状態を仮定し、一般的な大変形有限要素法を用いる<sup>24)</sup>。金属材料は等方ひずみ硬化を考慮した  $J_2$  流れ則に従うものと仮定する。降伏関数は以下の von Mises 型を用いる。

$$\phi(\tau, \xi) = \|\text{dev}(\tau)\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_Y + K'(\xi)) \quad (59)$$

ここに  $\tau$  は Kirchhoff 応力、 $\xi$  は相当塑性ひずみ、 $\sigma_Y$  は初期降伏応力である。等硬化化則には、

$$K'(\xi) = H\xi + (\sigma_Y^\infty - \sigma_Y)[1 - \exp(-\delta\xi)] \quad (60)$$

を用いる。解析に用いる材料定数には、ヤング率は  $E = 200\text{GPa}$ 、ポアソン比  $\mu = 0.3333$  とし、式 (60) 中の各パラメータは、初期降伏応力  $\sigma_Y = 400\text{MPa}$ 、硬化係数  $H = 100\text{MPa}$ 、 $\sigma_Y^\infty = 600\text{MPa}$ 、 $\delta = 3$  とした。また、対称性を利用して全体の 1/2 のみの解析を行う (この解析はある種の 2 次分岐を消してしまうが、この目的にはまったく支障がない)。

##### b) 解析ケースの設定

先に示したように、初期不整合度則および強度の確率密度関数は特異点の種類により異なる。しかし、一般に引張り強度はその最大荷重値のみが問題とされ、その特異荷重が極大点により支配されるか頂上分岐点により支配されるかについては、これまであまり議論されていない。そこで、鋼材の強度を支配する特異点を特定するために、図-10 に示す解析モデルの縦横比を  $L/W = 2 \sim 12$  の範囲で変化させ、弾塑性解析を行う。解析ケースの各寸法は、道路橋示方書・同解説<sup>25)</sup>を参考にして設定した。

図-11 には各縦横比の鋼材について解析した軸応力-軸ひずみ関係を示す。図中に矢印で表す極大点の位置は縦横比の値によらず殆ど一定である。また図からわかるように、●で表される第一分岐点は、モデルが細長くなるにつれて極大点に接近する。これは、縦横比の小さい鋼材試験体では極大点が出やすいが、構造物に実際に用いられる縦横比が大きい鋼部材では、頂上分岐点が出やすいことを意味する。極大点により強度が支配される例として縦横比が  $L/W = 2.438$  の場合に



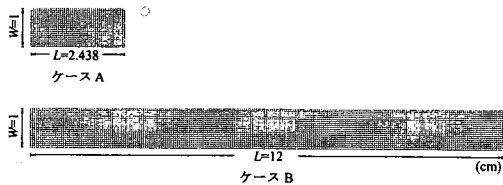


図-12 解析モデル

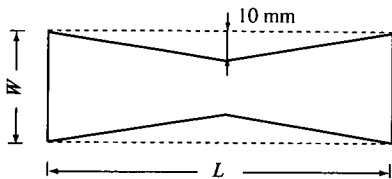


図-13 初期不整パターン形状

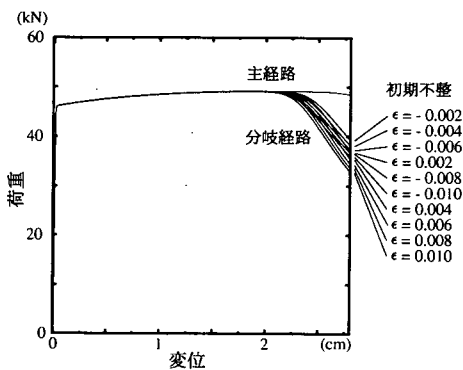


図-14 様々な初期不整に対する荷重変位曲線

注目し、これをケース A と呼ぶことにする。また、縦横比  $L/W = 12$  のときの分岐荷重と最大荷重との間の誤差が  $0.0042\%$  と小さいので、このケースにより頂上分岐点を近似するものとし、これをケース B と呼ぶことにする。ここに、

$$f_c^0 = \begin{cases} 4.91992(\text{kN}) & \text{ケース A} \\ 4.91465(\text{kN}) & \text{ケース B} \end{cases}$$

であった。図-12 に有限要素解析に用いる両ケースのモデルを示す。

### c) 初期不整感度

図-13 に示す初期不整パターンベクトル  $d$  に対して、初期不整の大きさを  $\pm\epsilon = 0.0 \sim 0.01$  の範囲で変化させて、初期不整感度を調べる。

初期不整パターンベクトル  $d$  は、ケース A に対しては式 (11) の  $A_{001} \neq 0$  の場合に相当し、ケース B に対しては式 (17) の  $A_{0001} \neq 0, B_{0001} \neq 0$  の場合に相当する。図-14 はケース B (頂上分岐点) に対してさまざまな初期不整の大きさ  $\epsilon$  を与えたときの荷重変位曲線を表している。  $|\epsilon|$  の大きさが大きくなると最大荷重が減少する傾向がシミュレートされている。

ケース A の極大点に対する特異荷重増分  $\tilde{f}_c$  と初期不

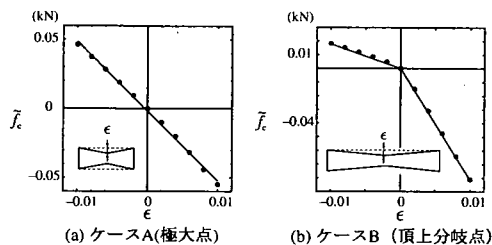


図-15 初期不整感度

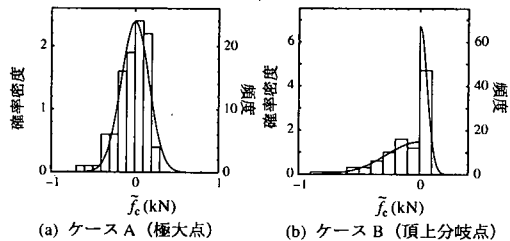


図-16 特異荷重の確率密度関数とヒストグラムの比較

整の大きさ  $\epsilon$  の関係を図-15(a) に  $\bullet$  で示す。実線は解析値  $\bullet$  の近似式

$$\tilde{f}_c = -0.5048\epsilon - 0.0019 \quad (61)$$

を示す。これは初期不整感度則 (24) によく一致している。

ケース B の頂上分岐点に対する特異荷重増分  $\tilde{f}_c$  と初期不整の大きさ  $\epsilon$  の関係を図-15(b) に  $\bullet$  で示す。実線は解析値  $\bullet$  の近似式

$$\tilde{f}_c = -3.175|\epsilon| - 4.972\epsilon \quad (62)$$

を示す。  $\epsilon = 0$  において角を持つ区分線形関係になっていることがわかる。  $\epsilon > 0$  のときの関係と、  $\epsilon < 0$  のときの関係が違う傾きを持つという結果は、理論式 (28) によく一致している。

### d) 強度の確率分布

図-13 に示す初期不整パターンベクトル  $d$  に対して、初期不整の大きさ  $\epsilon$  を正規分布  $N(0, 0.0331^2)$  で与えたときの鋼材の強度ヒストグラム (サンプル数 100) を図-16 に示す。

ケース A の極大点に対して、近似式 (61) によって初期不整感度則 (24) の傾き  $C|A_{001}| = 0.5048$  と初期不整の大きさ  $\epsilon$  の標本分散  $\sigma^2 = 0.0331^2$  を式 (48) に代入して  $\hat{\sigma}$  を求め、図-16(a) に実線で示す特異荷重増分  $\tilde{f}_c$  の確率密度関数 (36) を求めた。また、ケース B の頂上分岐点に対して、近似式 (62) より求めた初期不整感度則 (28) の傾き  $C_1|A_{0001}| = 3.175$ 、  $C_2B_{0001} = -4.972$  と初期不整の大きさ  $\epsilon$  の標本分散  $\sigma^2 = 0.0331^2$  を式 (49) に代入して、図-16(b) に実線で示す特異荷重増分  $\tilde{f}_c$  の確率密度関数を求めた。理論的な確率密度関数と、ヒストグラムが比較的良好に一致している。さらに、図-16(a) と (b) は、供試体の寸法比の違いにより強度の確率分布が異なるという寸法効果の存在を示している。

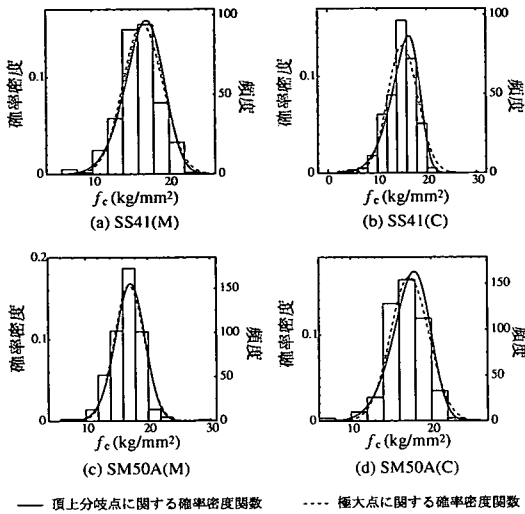


図-17 確率密度関数とヒストグラム

## (2) 鋼材の引張り試験データに対する強度評価

鋼材の引張り試験の実験結果に対して第2章の理論を適用する。

参考文献<sup>10)</sup>の標本データより、データ数の多かったSS41(M), SS41(C), SM50A(M), SM50A(C)を取り上げる。ここで取り上げたデータは全て強度分布のデータのみであり、初期不整パターン $d$ とその大きさ $\epsilon$ を特定することはできない。また、初期不整感度則を用いて特異点の種類を特定することもできない。そこで、鋼材の強度が極大点もしくは頂上分岐点により近似されると仮定し、確率密度関数を求めることにする。

それぞれの鋼材強度のヒストグラムを図-17に示す。ただし、供試体の降伏応力のばらつきを均すために鋼材の強度 $f_c$ として、鋼材の降伏応力 $\sigma_y$ と鋼材の最大応力 $\sigma_B$ の差 $\sigma_B - \sigma_y$ を用いた。まず、頂上分岐点に関する確率密度関数式(47)を適用してみる。 $f_c$ の平均 $E[f_c]$ 、2乗平均 $E[f_c^2]$ 、3乗平均 $E[f_c^3]$ を求め、これを式(47)に代入することにより完全系における特異荷重点 $f_c^0$ を求め、式(45)、(46)より $\hat{\sigma}, r$ を求めた。これらを式(40)に代入することにより、図-17の実線で表される頂上分岐点に関する鋼材強度 $f_c$ の確率密度関数が得られる。各データの平均、分散などは表-1に示すとおりである。次に、極大点に関する確率密度関数式(36)の平均、分散を表-1に示す各データの平均、分散より近似すると図-17に鎖線で表される極大点に関する確率関数が求められる。

各図からわかるように、ここに示した例では特異荷重点が極大点と $r \approx 0$ の場合の頂上分岐点(図-4参照)のどちらに支配されているのか特定できない。このことは、前節で行ったような数値解析により強度を支配する特異点を特定することの重要性を示している。ただし、同一部材に対して、供試体の寸法比により上記の分布形が変化する可能性があることには注意を要する。

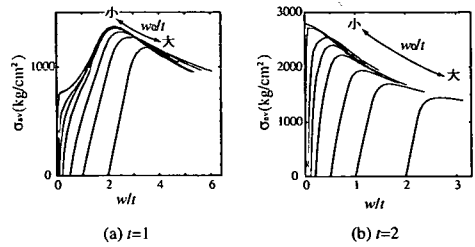


図-18 平均圧縮応力 $\sigma_{av}$ -無次元たわみ $w/t$ 曲線

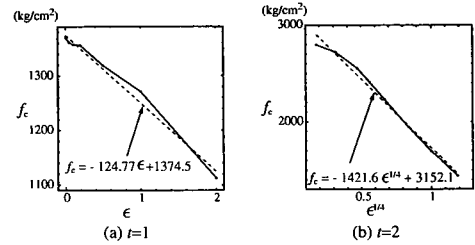


図-19 初期不整感度

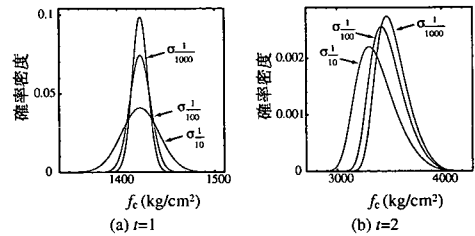


図-20 確率密度関数

## (3) 鋼板の圧縮試験シミュレーションに対する強度評価

表-2に示す等変位圧縮を受ける正方形鋼板の弾塑性解析結果のデータに対して第2(5)節の理論を適用する。周辺単純支持された一辺100cmの正方形鋼板の一辺に一樣な漸増圧縮変位を与え、圧縮耐荷力 $\sigma_u$ を求めた。初期不整パターンに対応する板の初期たわみは未知なので、ここでは、

$$w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \quad (63)$$

を想定する。ただし、面内方向を $xy$ 平面に、面外方向を $z$ 軸に取る。初期不整として、 $w_0$ を板厚で正規化した値 $\epsilon = w_0/t$ を用いる。このときの平均圧縮応力 $\sigma_{av}$ と無次元たわみ $w/t$ の関係を図-18に示す。図中の平均圧縮応力 $\sigma_{av}$ の最大値が表-2に示す耐荷力 $\sigma_u$ である。

板厚 $t = 1\text{cm}$ のとき、耐荷力 $f_c = \sigma_u$ と初期不整 $\epsilon = w_0/t$ の関係、つまり初期不整感度は

$$f_c \sim -124.77\epsilon + 1374.5 \quad (64)$$

で近似され、図-19(a)に表されるようになる。したがって、 $\tilde{f}_c (= f_c - f_c^0)$ は $\epsilon$ の1乗に比例すると近似すると、

表-1 鋼材強度の確率諸量

	$E[f_c]$	$E[f_c^2]$	$E[f_c^3]$	$f_c^0$	$E[f_c]$	$\text{Var}[f_c]$	$\hat{\sigma}$	$r$	サンプル数
	kg/mm <sup>2</sup>	(kg/mm <sup>2</sup> ) <sup>2</sup>	(kg/mm <sup>2</sup> ) <sup>3</sup>	kg/mm <sup>2</sup>	kg/mm <sup>2</sup>	(kg/mm <sup>2</sup> ) <sup>2</sup>	kg/mm <sup>2</sup>		
SS41(M)	16.64	283.44	4931.97	19.02	2.38	6.68	3.51	1.60	305
SS41(C)	15.20	240.09	3909.16	18.68	3.48	9.18	4.62	2.90	327
SM50A(M)	17.03	295.88	5233.73	18.85	1.82	5.78	3.01	1.15	463
SM50A(C)	17.32	305.59	5484.32	19.74	2.42	5.74	3.41	1.96	471

表-2 等変位圧縮を受ける周辺単純支持板の耐荷力

幅 $b$	板厚 $t$	たわみ $w_0$	$w_0/t$	降伏応力 $\sigma_y$	耐荷力 $\sigma_u$	$\sigma_u/\sigma_y$
cm	cm	cm		kg/cm <sup>2</sup>	kg/cm <sup>2</sup>	
100	2	0.002	0.001	2800	2794.8	0.99814
100	2	0.02	0.01	2800	2721.2	0.97186
100	2	0.1	0.05	2800	2551.8	0.91136
100	2	0.2	0.1	2800	2406.6	0.85950
100	2	0.4	0.2	2800	2229.7	0.79632
100	2	1	0.5	2800	1945.0	0.69464
100	2	2	1	2800	1696.4	0.60586
100	2	4	2	2800	1439.3	0.51404
100	1	0.001	0.001	2800	1369.9	0.48925
100	1	0.01	0.01	2800	1368.5	0.48875
100	1	0.05	0.05	2800	1361.0	0.48607
100	1	0.1	0.1	2800	1357.2	0.48471
100	1	0.2	0.2	2800	1355.7	0.48418
100	1	0.5	0.5	2800	1318.8	0.47100
100	1	1	1	2800	1270.7	0.45382
100	1	2	2	2800	1112.7	0.39739

$f_c$  の確率密度関数は、平均  $f_c^0$ 、分散  $\sigma^2$  の正規分布となる。ここでの分散  $\sigma^2$  は、

$$\sigma^2 = 124.77^2 \sigma^2$$

とした。初期不整  $\epsilon$  の分散である  $\sigma^2$  としては、プレートガーダー形式の道路橋の最大たわみの制限値<sup>25)</sup>  $L/500\text{cm}$  (ただし  $L = 100\text{cm}$ ) を用いて最大初期不整を  $\epsilon_{\max} = \frac{L}{500}$  とし、最大初期不整が初期不整の確率分布の  $P[\epsilon_{\max} \leq \epsilon] = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$  になる3ケースに対応する分散を用いた。それぞれを  $\sigma_{1/10}^2, \sigma_{1/100}^2, \sigma_{1/1000}^2$  と表すと、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1/10}^2 &= 0.1561^2 \\ \sigma_{1/100}^2 &= 0.08597^2 \\ \sigma_{1/1000}^2 &= 0.06472^2 \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

と分散が求められ、図-20(a) に示す確率密度関数が得られる。このように、初期たわみの分散がわかれば確率密度関数は一意に定められる。

板厚  $t = 2\text{cm}$  のとき、初期不整感度は

$$f_c = -1421.6\epsilon^{1/4} + 3152.1 \quad (66)$$

で近似され、図-19(b) に表されるようになる。この場合、特異点の種類はわからないが、 $f_c$  は  $\epsilon^{1/4}$  に比例す

ると仮定できる。これから得られる確率密度関数は、式(52)より次式のようなになる。

$$\phi(f_c) = 8(f_c - f_c^0)^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^4} \exp\left\{-\frac{(f_c - f_c^0)^8}{2\sigma^8}\right\} \quad (67)$$

$t = 1$  の場合と同様に、分散  $\sigma_{1/10}, \sigma_{1/100}, \sigma_{1/1000}$  について確率密度関数を求めると図-20(b) のようになる。

以上のように本理論を用いると、使用する鋼板の初期不整についてのデータに基づいて、部材としての強度の確率分布を簡単に求めることができる。

## 5. 結論

本研究では、極大点および頂上分岐点近傍の挙動を定式化することにより、強度の確率分布を弾性安定理論により評価するための理論式を導出した。そして、単純なトラス構造物を用いてその妥当性を例示し、これらの理論式を弾塑性問題に適用することにより、鋼材および鋼部材の強度と初期不整の関係は初期不整感度則により記述できることを確認し、提案する理論の適用可能性を示した。

頂上分岐点は鋼材料や鋼部材の強度によく現れる特異点であり、極大点とは異なる初期不整感度則や強度の確率密度関数に従う。しかし、特異点ごとに強度分布を考えなければならないことがわかったとしても、特

に実験結果のみが得られている場合には、特異点の種類が特定できないことが多いのも事実である。このような場合を想定して、本研究では実際の実験データを用いて、強度と初期不整の関係から確率密度関数を導く簡便法も提案した。ただし、第4章で扱った鋼材、鋼部材のように弾塑性変形を含む場合、塑性域での除荷の可能性により、理論を導く際に仮定した支配方程式の微分可能性が必ずしも成立しないので、より厳密な議論が望まれる。本研究では、除荷の発生が鋼強度の不安定現象に大きな影響を与えないと仮定し適用を試みたが、ある程度良好な理論式との一致が認められた。

謝辞：本研究の鋼材引張り試験のシミュレーションにおいては長岡技術科学大学助手山川優樹氏のご協力を頂いた。ここに記して謝意を表する。

## 付録 I 頂上分岐点の確率密度関数の導出

頂上分岐点に関する分岐方程式中の初期不整係数変数  $A_{0001}$  と  $B_{0001}$  が、平均が 0、分散が

$$\sigma_i^2 = \eta_i^T B_c^0 W B_c^{0T} \eta_i, \quad i = 1, 2 \quad (\text{I.1})$$

の正規分布  $N(0, \sigma_1^2)$  と  $N(0, \sigma_2^2)$  にそれぞれ従う場合の、頂上分岐点に関する確率密度関数は次のように導かれる ( $A_{0001}$  と  $B_{0001}$  の統計的独立性の証明については文献<sup>23)</sup>を参照)。

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{f}_c) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right) \frac{1}{C_2|\epsilon|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{(C_1|\epsilon||x| + \tilde{f}_c)^2}{2\sigma_2^2 C_2^2 \epsilon^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2 C_2|\epsilon|} \exp\left(-\frac{\tilde{f}_c^2}{2\delta^2}\right) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{k}{2}(|x| + m\tilde{f}_c)^2\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2 C_2|\epsilon|} \exp\left(-\frac{\tilde{f}_c^2}{2\delta^2}\right) \\ &\quad \times 2\sqrt{\frac{2\pi}{k}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{k}m\tilde{f}_c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\delta} \exp\left(-\frac{\tilde{f}_c^2}{2\delta^2}\right) \Phi_N\left(-\frac{r}{\delta}\tilde{f}_c\right) \quad (\text{I.2}) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{(C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2)\epsilon^2}, \quad r = \frac{C_1\sigma_1}{C_2\sigma_2}, \\ k &= \frac{\delta^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 C_2^2 \epsilon^2}, \quad m = C_1|\epsilon| \frac{\sigma_1^2}{\delta^2} \end{aligned}$$

$$\Phi_N(\zeta) = \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) d\zeta \quad (\text{I.3})$$

である。

## 付録 II $f_c^0$ の確率諸量の誘導

式 (43), (44) および (47) において用いる  $\tilde{f}_c$  の平均  $\overline{\tilde{f}_c}$ , 2 乗平均  $\overline{\tilde{f}_c^2}$ , 3 乗平均  $\overline{\tilde{f}_c^3}$  を計算する。以下、簡単のため、

$$x = \tilde{f}_c, \quad \beta = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\delta}, \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{C_1\sigma_1}{C_2\sigma_2} \frac{1}{\delta} = -\frac{a}{b} \frac{1}{\delta}$$

$$a = C_1\sigma_1, \quad b = C_2\sigma_2$$

とおくことにする。

### (1) 確率密度関数の平均

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} x \phi(x) dx \\ &= \beta \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right) \Phi_N\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx \\ &= \beta \left[ -\delta^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right) \Phi_N\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad + \beta \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right) \frac{d}{dx} \left\{ \Phi_N\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right\} dx \\ &= \beta \delta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right) \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) dx \\ &= \frac{\beta\delta^2}{\alpha\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\delta^2 x^2) dx \\ &= \frac{\beta\delta^2}{\alpha\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\delta} = -\frac{a}{b} \frac{1}{\delta} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\delta} \frac{\delta^2}{\sqrt{2}} \sqrt{2} b \epsilon \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} a \epsilon = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} C_1 \sigma_1 \epsilon \quad (\text{II.1}) \end{aligned}$$

ここで、下記の式を用いた。

$$\delta^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\alpha^2} \right) = \frac{1}{2b^2\epsilon^2} (a^2 + b^2) = \frac{1}{2b^2\epsilon^2}$$

### (2) 確率密度関数の 2 乗平均

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \phi(x) dx \\ &= \beta \left[ -\delta^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right) x \Phi_N\left(-\frac{x}{\alpha}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad + \beta \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right) \frac{d}{dx} \left\{ x \Phi_N\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right\} dx \\ &= \delta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx + \frac{\beta\delta^2}{\alpha\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-\delta^2 x^2) dx \\ &= \delta^2 \quad (\text{II.2}) \end{aligned}$$

### (3) 確率密度関数の 3 乗平均

$$\overline{x^3} = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \phi(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left[ -\delta^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right) x^2 \Phi_N\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&\quad + \beta \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right) \frac{d}{dx} \left\{ x^2 \Phi_N\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right\} dx \\
&= \beta \delta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right) 2x \Phi_N\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx \\
&\quad + \frac{\beta \delta^2}{\alpha \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right) x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) dx \\
&= 2\delta^2 \bar{x} + \frac{\beta \delta^2}{\alpha \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-\delta^2 x^2) dx \\
&= 2\delta^2 \bar{x} + \frac{\beta \delta^2}{\alpha \sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\delta^3} = \left( 2\delta^2 + \frac{1}{2\delta^2} \right) \bar{x} \\
&= (2\delta^2 + b^2 \epsilon^2) \bar{x} \tag{II.3}
\end{aligned}$$

#### (4) 完全系の特異荷重 $f_c^0$ の誘導

式(II.1), (II.2), (II.3)より,

$$\bar{x}^3 = (3\delta^2 - a^2 \epsilon^2) \bar{x} = \left( 3\bar{x}^2 - \frac{\pi}{2} \bar{x}^2 \right) \bar{x} = 3\bar{x}^2 \bar{x} - \frac{\pi}{2} \bar{x}^3$$

であるから,  $\bar{x}$  を  $(f_c - f_c^0)$  に戻すと下記の式が求められる.

$$\begin{aligned}
\overline{(f_c - f_c^0)^3} &= 3\overline{(f_c - f_c^0)^2 (f_c - f_c^0)} - \frac{\pi}{2} \overline{f_c - f_c^0}^3 \\
(f_c^0 - \bar{f}_c)^3 &= \frac{2}{4 - \pi} \left( -\bar{f}_c^3 + 3\bar{f}_c^2 \bar{f}_c - 2\bar{f}_c^3 \right)
\end{aligned}$$

#### 参考文献

- 1) Ikeda, K., Providência, P. and Hunt, G.W. : Multiple equilibria for unlinked and weakly-linked cellular forms, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.30, No.3, pp.371-384, 1993.
- 2) Thompson, J.M.T. and Schorrock, P.A. : Bifurcation instability of an atomic lattice, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.21-37, 1975.
- 3) Burke, M.A. and Nix, W.D. : A numerical study of necking in the plane tension test, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.15, pp.379-393, 1979.
- 4) Hutchinson, J.W. and Miles, J.P. : Bifurcation analysis of the onset of necking in a elastic/plastic cylinder under uniaxial tension, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.22, pp.61-71, 1978.
- 5) Needleman, A. : A numerical study of necking in circular cylindrical bars, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.20, pp.111-127, 1972.
- 6) Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W. : *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley, New York, 1973.
- 7) Bolotin, V.V. : Statistical methods in the nonlinear theory of elastic shells, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Otdelenie Tekhnicheskikh Nauk* 3, 1958. (English translation, NASA Tech. Trans. F85: pp.1-16, 1962).
- 8) Elishakoff, I. : *Probabilistic Methods in the Theory of Structures*, John Eiley, 1983.
- 9) Nishimura, A. : ミルシート値とチェックテスト値との関係について, *JSSC*, Vol.5, No.38, pp.3-26, 1969.
- 10) Nishimura, A. : 鋼材の機械的性質のばらつきについて, *JSSC*, Vol.5, No.38, pp.68-74, 1969.
- 11) 酒井達雄, 鈴木幹彦 : 炭素鋼 S35C の各種機械的性質の分布特性と各強度特性値間の相関性について, 日本機械学会論文集 (A 編), Vol.54, No.506, pp.1925-1930, 1988.
- 12) Weibull, W. : A statistical theory on the strength of materials, *The Royal Swedish Institute for Engineering Research, Proceedings, NR 151*, 1939.
- 13) 材料強度の統計的性質, 材料強度確率モデル研究会編, 養賢堂, 1992.
- 14) Ikeda, K. and Murota, K. : Statistics of normally distributed initial imperfections, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.30, No.18, pp.2445-2467, 1993.
- 15) Koiter, W.T. : On the stability of elastic equilibrium, *Dissertation*, Delft, Holland, 1945. (English translation: NASA Tech. Trans. F10: 833, 1967).
- 16) Augusti, G., Barratta A. and Casciati, F. : *Probabilistic Methods in Structural Engineering*, Chapman and Hall, New York, 1984.
- 17) Bolotin, V.V. : *Random Vibrations of Elastic Systems*, Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, 1984.
- 18) Elishakoff, I., Lin, Y.K. and Zhu, L.P. : *Probabilistic and Convex Modelling of Acoustically Excited Structures*, Studies Appl. Mech., Vol.39, Elsevier, Amsterdam, 1994.
- 19) Lindberg, H.E. and Florence, A.L. : *Dynamic Pulse Buckling*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1987.
- 20) Ikeda, K. and Murota, K. : Critical initial imperfection of structures, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.26, No.8, pp.865-886, 1990.
- 21) Sattinger, D.H. : Group theoretic methods in bifurcation theory, *Lecture Notes in Math.*, Vol.762, Springer, Berlin, 1979.
- 22) Ikeda, K. and Murota, K. : *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials—Engineering Use of Group-theoretic Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, in Press.
- 23) Ikeda, K., Oide, K. and Terada, K. : Imperfect behavior at hilltop bifurcation point, *Int. J. Engng. Sci.*, in Press.
- 24) Simo, J.C. and Hughes, T.J.R. : *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- 25) 日本道路橋会: 道路橋示方書・同解説Ⅱ鋼橋編, 丸善, 1997.

(2000. 12. 22 受付)

# STOCHASTIC EVALUATION METHOD FOR THE STRENGTH OF STRUCTURAL MEMBERS BASED ON BIFURCATION THEORY

Kai OIDE, Kiyohiro IKEDA, Kenjiro TERADA, Katashi FUJII  
and Shigenobu OKAZAWA

A method of stochastic evaluation of the strength of structural members is developed by the bifurcation theory. Knowing that the strength of slender specimens/members is governed by the so-called hilltop bifurcation point, which implies the coincidental double critical point of limit and bifurcation points, we derive a system of bifurcation equations for the local behavior at this special double critical point. On the basis of this system of equations, we formulate an imperfection sensitivity law and, in turn, the probability density function of critical loads, assuming that initial imperfections are subject to a multi-variate normal distribution. In addition, the associated formulas for a limit point are presented for comparison. The validity of the theoretical developments is assessed through its application to a simple truss structure, whereas the feasibility and capability of the proposed method is demonstrated for the data sets obtained in actual experiments and numerical simulations of structural members.