

均質な三次元材料における パターン形成の分岐メカニズム

齊木 功¹・田中玲子²・池田清宏³

¹工修 宇都宮大学助手 工学部建設学科 (〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2, saiki@cc.utsunomiya-u.ac.jp)

²工博 慶應義塾大学助手 理工学部物理情報工学科 (〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1)

³Ph.D. 東北大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

巨視的に均質とみなせる材料には、特徴的な幾何学パターンがしばしば観察される。本論文では、この種のパターンの発生メカニズムの解明の一端として、三次元的に均質等方な材料において起こり得る分岐の仕組みを群論的分岐理論により明らかにし、分岐により発生可能な幾何学パターンを分類する。まず、二次元周期領域に対して得られている群論的分岐理論による既存の結果を拡張し、三次元周期領域における分岐方程式を導く。次いで、この方程式を解くことにより分岐解の対称性を決定する。さらに、現実に見られる岩石の節理構造をモデル化した三次元数値データを用いて、分岐によるパターン形成のシミュレーションを行い、本論文で明らかにした分岐メカニズムの検証を行う。

Key Words : *pattern formation, bifurcation, uniform material, three-dimensional body, group-theoretic bifurcation theory*

1. まえがき

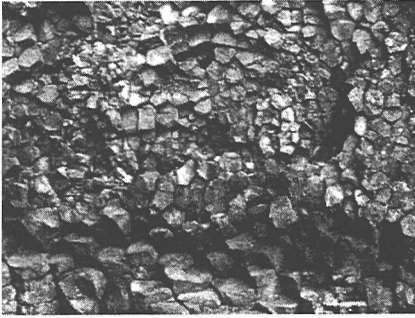
鋼などの金属材料では、一様な荷重の載荷により破壊に至るまでに、ミクロ的には結晶配置の転移により生じるすべり面、マクロ的にはくびれ、リューダーズ帯といった肉眼でも確認できるパターンが生じる^{1),2),3),4)}。地盤材料においても、荷重を受け破壊に至る過程で、土骨格の破壊、再編成が起こり、最終的に滑り面を形成するまでに特徴的な幾何学パターンが発生する^{5),6),7)}。

自然に存在する岩盤、岩石は、節理のようなあるパターンをもともと有している。写真-1は兵庫県豊岡市にある玄武洞周辺の玄武岩であり、規則的な六角柱の節理と、その柱に直交する規則的な節理が観察される。この玄武岩は比較的等方な環境で生成される火成岩であるが、マグマが冷却する際に生じる対流渦と収縮によって写真のような節理が生じることが知られている⁸⁾。また、岩石を構成する鉱物も、その組成により規則的な節理を持つことが知られている。写真-2は節理により平行八面体に切り取られた方解石の標本である。

写真-3は標準砂の三軸圧縮試験において観察された円筒シェルの代表的な屈座モードとして知られる⁹⁾ダイヤモンドパターンである。しかしながら、同じ標準砂の試験体において、常にダイヤモンドパターンが現れるわけではない。また、はじめに現れた変形モードがそのま

ま最終的な破壊モードとなる場合もあれば、観察される変形モードが荷重とともにめまぐるしく変化する場合もある。これらは、成形された試験体の均質性に依存し、均質なときにはダイヤモンドパターンのような規則的な変形モードが現れると考えられる。

このようなパターン形成のメカニズムを解明する一つの流れは、Hill and Hutchinson¹⁰⁾に代表される理論力学の立場からの解の唯一性の検討に始まり、現在では計算力学による分岐後挙動の数値シミュレーションに関する研究が盛んに行われている^{11),12),13)}。地盤材料を対象とする研究分野では、その典型的な破壊形態であるせん断帯の発生メカニズムへの関心の高さから、供試体試験による局所変形の観察が、供試体断面の偏光顕微鏡写真¹⁴⁾やX-線CTスキャナ¹⁵⁾などによってなされた。また、三軸圧縮試験におけるせん断帯の発生と境界条件の影響¹⁶⁾やtrap-doorを用いた実験における粒径の影響など¹⁷⁾、様々な境界条件の下でのパラメトリックな実験も行われている。数値解析によるアプローチでは、このような実験の結果の解釈やシミュレーションを目的として、主に有限要素法による強度や変形形状に対する初期不整の影響に関する研究¹⁸⁾、拡散分岐モードと供試体形状効果に関する研究¹⁹⁾、初期不整とモードスイッチングに関する研究²⁰⁾などが行われている。また、個別要素法におけるtrap-door問題のシミュレーション²¹⁾なども行



(a) 六角形の規則的な節理



(b) 六角柱の軸方向に生じる節理

写真-1 玄武洞周辺の玄武岩 (広島大学, 有尾氏撮影)

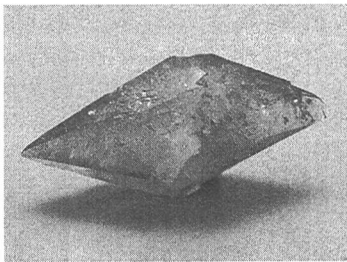


写真-2 節理により切り取られた方解石 (群馬県立自然史博物館収蔵)

われている。

前述の数値解析によるアプローチは、用いる構成則に主眼を置き、ある特定の実現象を定量的にシミュレートすることを目的としている。それに対し、もう一つの対極的な流れは、対称性を有する様々な系のパターン形成を対象とする定性的なアプローチである。これには、対称性破壊分岐を扱う群論的分岐理論^{22);23);24);25);26)}、自己相似性、あるいは scale invariance に着目したフラクタル²⁷⁾によるアプローチが挙げられる。群論的分岐理論の土質力学に対する適用例としては、砂供試体における階層的な分岐によるモードスイッチングのメカニズムの解明²⁸⁾や、せん断を受けるカオリン粘土の変形パターン

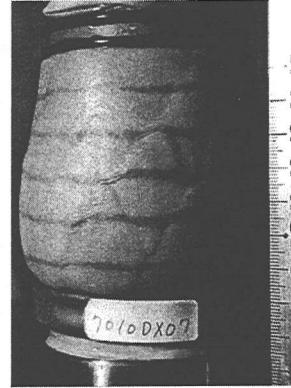


写真-3 ダイヤモンドパターンを呈する砂の三軸圧縮試験体

の変化の画像解析^{29);30)}が挙げられる。また、Oguni et al.³¹⁾は周期的に存在するクラックにおいて進展するパターンを、Saiki et al.³²⁾はマイクロ構造-マクロ材料特性のマルチスケール分岐解析におけるマイクロ構造の分岐パターンを、それぞれ群論的分岐理論に基づくブロック対角化法により解明した。これらの文献において、群論的分岐理論は、分岐パターンの予測に関し必要不可欠な情報を提供している。また、この一連のアプローチは、実験の定性的な予測、結果の分類、評価や数値解析の効率化などに対しても有効であり、実験、数値解析と有機的に結びつくことによって、パターン形成を伴う変形、破壊問題への洞察力を与えるものである。

しかしながら、これまでの群論的分岐理論に基づく研究の多くは、現象を平面問題もしくは軸対称問題としてとらえ、二次元領域を対象として行われており、写真-1, 2に示した岩の節理などの三次元パターンは解明できていない。そこで本論文では、三次元領域における均質等方な材料の分岐の仕組みと分岐により生じ得るパターン (以後、これらを総称して分岐メカニズムと呼ぶ) を、群論的分岐理論により明らかにすることを目的とする。群論は結晶格子の対称性の記述に用いられているものであり³³⁾、巨大な結晶格子とも言うべき岩の節理の記述に用いることには物理的必然性がある。さらに、一様場から岩石に見られる節理構造が発現する過程に対して、二次元領域で行われた画像シミュレーション^{29);30)}の手法を三次元パターンへ適用し、本論文で明らかにする分岐メカニズムの検証を行う。

2. 二次元領域のパターン形成

この節では、三次元領域のパターンの記述の基礎として、Ikeda et al.⁵⁾、Murota et al.³⁴⁾が行った周期境界を持つ等方均質な二次元長方形領域の分岐メカニズム解

析の結果を要約する。

(1) 対象とする長方形領域の定義と対称性

分岐解析の対象として、等方均質な材料を仮定し、長方形領域 Ω_0 を

$$\Omega_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -\frac{L_x}{2} \leq x \leq \frac{L_x}{2}, -\frac{L_y}{2} \leq y \leq \frac{L_y}{2} \right\} \quad (1)$$

と定義する。ここに、 \mathbf{R} は実数の集合、 L_x, L_y はそれぞれ x, y 方向の長さである。表記の簡略化のため、変数変換

$$\xi = \frac{x}{L_x} + \frac{1}{2}, \quad \tilde{\xi} = \frac{y}{L_y} + \frac{1}{2} \quad (2)$$

を用いて正規化すれば、領域 Ω_0 は

$$\Omega_0 = \left\{ (\xi, \tilde{\xi}) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \tilde{\xi} \leq 1 \right\} \quad (3)$$

と表される。この領域 Ω_0 は、材料が均質であることから、 x, y 軸に関する鏡映変換

$$\sigma: x \mapsto -x \quad (\xi \mapsto 1 - \xi), \quad (4)$$

$$\tilde{\sigma}: y \mapsto -y \quad (\tilde{\xi} \mapsto 1 - \tilde{\xi}) \quad (5)$$

について不変である。

ここで、境界の影響を除くため、周期境界を仮定する。すなわち、長方形領域の上下端と左右端はそれぞれ周期的な境界により滑らかにつながっているとすると、この周期境界条件により、領域 Ω_0 はさらに ξ 方向の任意の長さ ψ の並進変換

$$r(\psi): \xi \mapsto \xi + \psi, \quad (6)$$

および $\tilde{\xi}$ 方向の任意の長さ $\tilde{\psi}$ の並進変換

$$\tilde{r}(\tilde{\psi}): \tilde{\xi} \mapsto \tilde{\xi} + \tilde{\psi} \quad (7)$$

に関する対称性を持つ。

以上より Ω_0 の対称性を表す群は、2つの群の直積 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ によって表される。ここに、 $C_{\infty v}, \tilde{C}_{\infty v}$ は

$$C_{\infty v} = \left\langle \sigma, r(\psi) \right\rangle = \left\{ r(\psi), \sigma r(\psi) \mid 0 \leq \psi \leq 1 \right\}, \quad (8)$$

$$\tilde{C}_{\infty v} = \left\langle \tilde{\sigma}, \tilde{r}(\tilde{\psi}) \right\rangle = \left\{ \tilde{r}(\tilde{\psi}), \tilde{\sigma} \tilde{r}(\tilde{\psi}) \mid 0 \leq \tilde{\psi} \leq 1 \right\} \quad (9)$$

で定義される。ただし、 $\langle \dots \rangle$ は括弧内の元によって生成される群を表し、 $\{ \dots \}$ は群の元を表す¹。

(2) 代表的なパターンを表す群

領域 Ω_0 の均質な状態から、分岐により現れる変形パターンの対称性は、 Ω_0 の対称性を表す群 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ の部分群により表されることが、群論的分岐理論により知られている²²⁾。ここでは、領域 Ω_0 において形成され

¹ ある系の対称性は、その系を不変に保つ変換の集合(群)によって表せる。例えば、群 $C_{\infty v}$ の対称性を持つ系は、鏡映変換 σ 、長さ ψ の並進変換 $r(\psi)$ およびそれらの積で表せる変換に対して不変である。

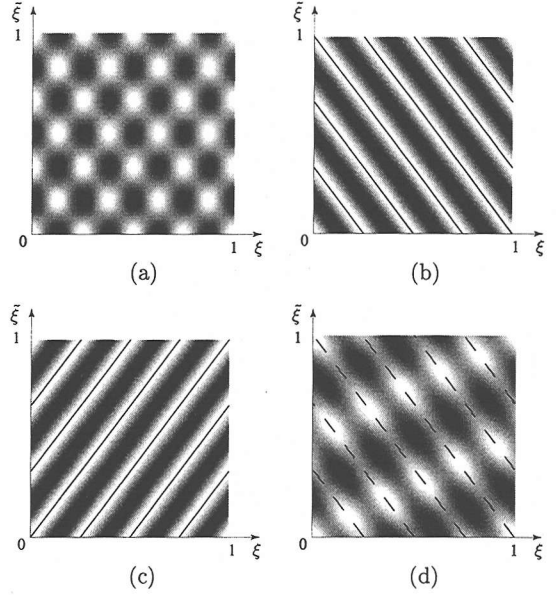


図-1 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ -同変系の代表的な分岐パターン。(a)ダイヤモンドパターン $DI_{n\tilde{n}}$ ($n=4, \tilde{n}=3$)。 (b) ストライプパターン $OB_{n\tilde{n}}^+$ ($n=4, \tilde{n}=3$)。 (c) ストライプパターン $OB_{n\tilde{n}}^-$ ($n=4, \tilde{n}=3$)。 (d) エシエロンモード $EC_{n\tilde{n}kl}^+$ ($n=4, \tilde{n}=3, k=11, l=0$)。

る代表的なパターン(図-1)を紹介する。なお、図-1において、同じ濃度で示す点は同じ物理量を持つ点を表す。

図-1(a)は $n \times \tilde{n}$ 個の同じ形のダイヤモンド状のブロックから成るダイヤモンドパターンである。それぞれのブロックは上下、左右の鏡映に関する対称性を持ち、パターン全体としては斜め方向への平行移動に関する対称性を持っている。したがって、このパターン全体の対称性は

$$DI_{n\tilde{n}} = \left\langle \sigma, \tilde{\sigma}, r\left(\frac{1}{2n}\right), \tilde{r}\left(\frac{1}{2\tilde{n}}\right), r\left(\frac{1}{2n}\right), \tilde{r}\left(\frac{-1}{2\tilde{n}}\right) \right\rangle \quad (10)$$

により表される。上式は、このパターンが括弧内の各元による変換に対して不変であることを意味する。例えば、元 $r\left(\frac{1}{2n}\right)\tilde{r}\left(\pm\frac{1}{2\tilde{n}}\right)$ は ξ 方向に $\frac{1}{2n}$ 、 $\tilde{\xi}$ 方向に $\pm\frac{1}{2\tilde{n}}$ の並進を表し、この変換によって、あるダイヤモンドブロックは隣のブロックに並進移動し、パターン全体は不変であることを示す。

図-1(b), (c)はストライプパターンを示しており、その対称性は

$$OB_{n\tilde{n}}^{\pm} = \left\langle \sigma\tilde{\sigma}, \left\{ r(\psi)\tilde{r}(\tilde{\psi}) \mid n\psi \pm \tilde{n}\tilde{\psi} \in \mathbf{Z} \right\} \right\rangle \quad (11)$$

によって表される(以下、複号同順)。ここに、 \mathbf{Z} は整数の集合である。元 $\{ r(\psi)\tilde{r}(\tilde{\psi}) \mid n\psi \pm \tilde{n}\tilde{\psi} \in \mathbf{Z} \}$ は図-1(b),

(c) に実線で示す直線群

$$n\psi \pm \bar{n}\bar{\psi} \in \mathbf{Z}$$

の方向への並進変換を表す。この並進変換に対する不変性より、これらの同一直線上にある物質点は、同じ物理特性を持つ。

図-1(d) はエシェロンモードを示す。同じ物理特性を持つ点が、破線で示すストライプとは異なる波数、方向のストライプ上に離散的に存在する。このモードの対称性は

$$EC_{n\bar{n}kl}^{\pm} = \left\langle \sigma\bar{\sigma}, r \left(\mp \frac{\bar{n}}{dk} \right) \bar{r} \left(\frac{n}{dk} \right), r \left(\frac{1}{d} \left(p \mp \frac{\bar{n}l}{dk} \right) \right) \bar{r} \left(\frac{1}{d} \left(\bar{p} + \frac{nl}{dk} \right) \right) \right\rangle \quad (12)$$

により表される(複号同順)。ここに、 n と \bar{n} はそれぞれ x 方向と y 方向の周波数を表す正整数、 k はある正整数、 d は n と \bar{n} の最大公約数、 l は $0 \leq l \leq d-1$ を満足する整数、 p と \bar{p} は $np \pm \bar{n}\bar{p} = d$ を満たす整数である。 $EC_{n\bar{n}kl}^{+}$ と $EC_{n\bar{n}kl}^{-}$ はそれぞれ $OB_{n\bar{n}}^{+}$ と $OB_{n\bar{n}}^{-}$ の部分群であり、どちらも $2dk$ の元を持っている。同じ物理特性を持つ点の数は dk であり、 k の増加によってこれらの点の数が増加する。一方、 l の値は配置に影響する。

(3) 分岐の階層構造

Murota *et al.*³⁴⁾ によれば、 $EC_{n\bar{n}kl}^{\pm}$ で表されるエシェロンモードは、 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ の対称性を持つ一様場からの1次分岐では生じず、ストライプパターン $OB_{n\bar{n}}^{\pm}$ を經由して

$$\begin{aligned} C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} &\rightarrow (4) \rightarrow OB_{n\bar{n}}^{\pm} \rightarrow (2) \rightarrow EC_{n\bar{n}kl}^{\pm} \\ &\quad \downarrow (1 \text{ or } 2) \\ &\quad OB_{m\bar{m}}^{\pm} \rightarrow (2) \rightarrow EC_{m\bar{m}kl}^{\pm} \end{aligned} \quad (13)$$

という多段階の分岐を経て発生することが分かっている。ここに、 m および \bar{m} はそれぞれ n および \bar{n} の真の約数であり、「 $\rightarrow(M)$ 」および「 $\downarrow(M)$ 」は多重度 M の分岐を表す²⁾。

はじめに、変形の初期段階において

$$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \rightarrow OB_{n\bar{n}}^{\pm}$$

で示される対称性の喪失により斜めの平行縞が表れる。次に、

$$OB_{n\bar{n}}^{\pm} \rightarrow OB_{m\bar{m}}^{\pm} \quad \text{もしくは} \quad OB_{n\bar{n}}^{\pm} \rightarrow EC_{n\bar{n}kl}^{\pm}$$

で示される対称性の喪失に伴い、他の斜め平行縞が表れる。このエシェロンモード発生までの過程を図-2に示す。図中、 $OB_{6,4}^{\pm} \rightarrow OB_{3,2}^{\pm}$ では、同じ物理特性を持つ平行縞の方向は変わらず、その間隔が粗大化する。一

方、 $OB_{n\bar{n}}^{\pm} \rightarrow EC_{n\bar{n}kl}^{\pm}$ では、同じ物理特性を持つ点が離散的、かつ周期的に存在するようになる。

3. 直方体領域のパターン

本節では、2節で紹介した等方均質な二次元長方形領域の分岐メカニズム解析を、等方均質な三次元直方体領域に拡張し、対称性破壊による分岐メカニズムを明らかにする。

(1) 領域の定義

前節での長方形領域 Ω_0 と同様に、等方均質な三次元直方体領域

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid -\frac{L_x}{2} \leq x \leq \frac{L_x}{2}, -\frac{L_y}{2} \leq y \leq \frac{L_y}{2}, -\frac{L_z}{2} \leq z \leq \frac{L_z}{2} \right\} \quad (14)$$

を解析対象として定義する。ここに、 L_x, L_y, L_z はそれぞれ x, y, z 方向の長さである。式(2)で定義した正規化座標 $\xi, \bar{\xi}$ および

$$\hat{\xi} = \frac{z}{L_z} + \frac{1}{2} \quad (15)$$

を用いれば、領域 Ω は

$$\Omega = \left\{ (\xi, \bar{\xi}, \hat{\xi}) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \bar{\xi} \leq 1, 0 \leq \hat{\xi} \leq 1 \right\} \quad (16)$$

と表される。この領域 Ω は式(4)、(5)で定義した yz, zx 平面に関する鏡映対称性に加え

$$\hat{\sigma}: z \mapsto -z \quad (\hat{\xi} \mapsto 1 - \hat{\xi}) \quad (17)$$

により定義される xy 平面に関する鏡映対称性を有している。

さらに、直方体領域 Ω は、周期境界条件により、式(6)、(7)で定義される $\xi, \bar{\xi}$ 方向の任意の長さの並進対称性(以後、連続並進対称性と呼ぶ)に加え

$$\hat{r}(\hat{\psi}): \hat{\xi} \mapsto \hat{\xi} + \hat{\psi} \quad (18)$$

により定義される $\hat{\xi}$ 方向の連続並進対称性も有する。

したがって、直方体領域 Ω の対称性を表す群は

$$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v} \quad (19)$$

により定義される。ここに

$$\hat{C}_{\infty v} = \left\langle \hat{\sigma}, \hat{r}(\hat{\psi}) \right\rangle = \left\{ \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\hat{\psi}) \mid 0 \leq \hat{\psi} \leq 1 \right\} \quad (20)$$

である。

(2) $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ -同変系の分岐メカニズム

等方均質な直方体領域 Ω の分岐パターンを $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ -同変系の数理的な構造を調べることににより求める。このために、まず、群論的分岐理論に基づく分岐方程式を求め、その分岐解の対称性を導く必要があ

²⁾ 多重度 M は分岐点の核空間の次元であり、多重度 M の分岐点を M 重分岐点と呼ぶ。

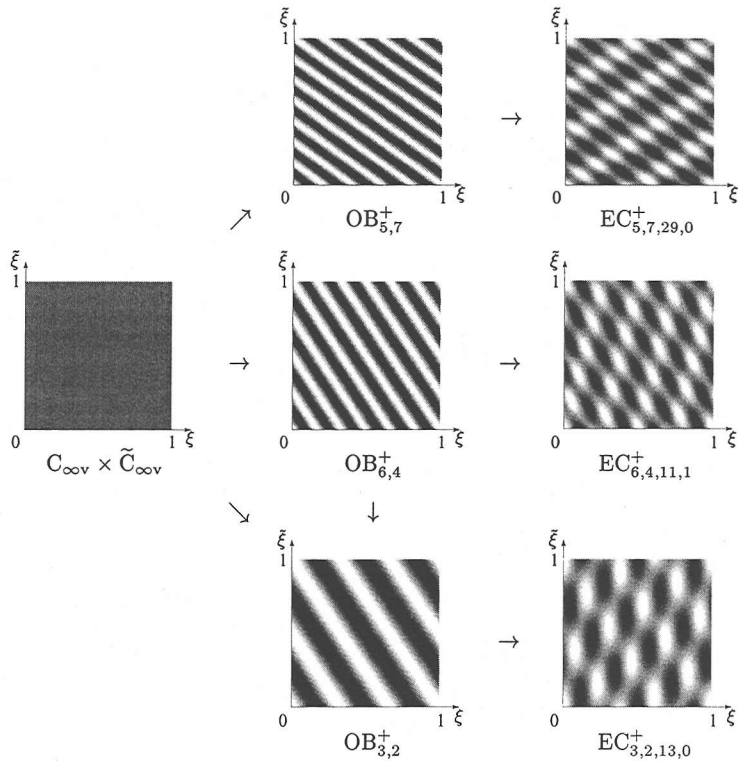


図-2 エシェロンモード発生までの分岐の階層構造の仕組み図

るが、これらの詳細に関しては付録 I~IV に譲り、ここでは得られる分岐パターンの対称性に関する主要な結果だけをまとめる。表-1に $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ -同変系の特異点の多重度ごとに、既約表現、それに対応する特異点の核空間の対称性、分岐解の対称性を示す。本論文で扱う多重特異点は、全て分岐点である。また、多重分岐点は、系の群対称性に起因する群論的多重分岐点³とパラメトリックな多重分岐点に分類されるが、本論文では対称な系の定性的な性質に着目するため、群論的多重分岐点のみを扱う。なお、表-1において、例えば $DI_{\bar{n}\bar{n}}$ は yz 平面における、 $DI_{\bar{n}\bar{n}}$ は zx 平面におけるダイヤモンドパターンをそれぞれ表す。また、 $OB_{\bar{n}\bar{n}}^{\pm}$ 、 $OB_{\bar{n}\bar{n}}^{\pm}$ も同様に定義される。

$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ -同変系の1次分岐の仕組み図(一部抜粋)を図-3に示す。図中、括弧付きの数値により特異点の多重度 M を表す。4重分岐点からは二次元長方形領域の1次分岐パターンを平面に直交する方向に引き延ばしたパターン、8重分岐点からは後述する3つの分岐パターンが発生する。既約表現や分岐点の核空間などの詳細は付録 I に譲り、以下では分岐点の多重度 M といくつかの分岐解の対称性について述べる。

³ 群 G -同変系の分岐点の核空間が G 既約不変部分空間であるとき、分岐点は群論的分岐点と呼ばれる。

a) 単純特異点 ($M = 1$)

単純特異点は、対応する既約表現によって、荷重パラメタ f の極大点、もしくは単純ピッチフォーク分岐点に分類される^{23),24)}。表-1に示すように、分岐点においては、三方向の鏡映対称性のうち、いくつかが無くなる。

b) 2重分岐点 ($M = 2$)

2重分岐点においては、表-1に示すように、三方向の連続並進対称性のうち一方向が離散並進対称性となる。さらに、連続並進対称性が残った方向のうち、一方向または二方向の鏡映対称性を消失する場合もある。

c) 4重分岐点 ($M = 4$)

4重分岐点においては、表-1に示すように、 xy , yz , zx 平面のうち、任意の平面において、前述の二次元長方形領域における1次分岐パターンである $DI_{\bar{n}\bar{n}}$ -不変なダイヤモンドパターンおよび $OB_{\bar{n}\bar{n}}^{\pm}$ -不変なストライプパターンを形成し、この平面に直交する方向の連続並進対称性を保つ。このパターンの対称性は群の直積

$$DI_{\bar{n}\bar{n}} \times \hat{C}_{\infty v}, \quad OB_{\bar{n}\bar{n}}^{\pm} \times \hat{C}_{\infty v} \quad (21)$$

などにより表される。この分岐を、図-3において(4)付きの矢印で示す。この分岐点から発生した分岐経路上においては、式(21)に示されたテンソル積の構造から、さらに $\hat{C}_{\infty v}$ -同変系の2重分岐と同じ分岐が生じる可能性

表-1 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ -同変系の特異点の分類 (特異点の核空間と分岐解の対称性)

M	既約表現 $\mu = (k, \hat{k}, \hat{k})$	対称群	
		特異点の核空間	分岐解
1	(+, +, +)	$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$	極大点 (分岐なし)
	(+, +, -)	$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty}$	$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty}$
	(+, -, +)	$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty} \times \hat{C}_{\infty v}$	$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty} \times \hat{C}_{\infty v}$
	(+, -, -)	$C_{\infty v} \times \tilde{D}_{\infty \infty}$	$C_{\infty v} \times \tilde{D}_{\infty \infty}$
	(-, +, +)	$C_{\infty} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$	$C_{\infty} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$
	(-, +, -)	$\hat{D}_{\infty \infty} \times \tilde{C}_{\infty v}$	$\hat{D}_{\infty \infty} \times \tilde{C}_{\infty v}$
	(-, -, +)	$D_{\infty \infty} \times \hat{C}_{\infty v}$	$D_{\infty \infty} \times \hat{C}_{\infty v}$
	(-, -, -)	$C_{\infty} \times \tilde{C}_{\infty} \times \hat{C}_{\infty}$	$C_{\infty} \times \tilde{C}_{\infty} \times \hat{C}_{\infty}$
2	(+, +, \hat{n})	$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\hat{n}}$	$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\hat{n}v}$
	(+, \hat{n} , +)	$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\hat{n}} \times \hat{C}_{\infty v}$	$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\hat{n}v} \times \hat{C}_{\infty v}$
	(n , +, +)	$C_n \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$	$C_{nv} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$
	(+, -, \hat{n})	$C_{\infty v} \times \langle \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$	$C_{\infty v} \times \langle \hat{\sigma}, \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$
	(-, +, \hat{n})	$\tilde{C}_{\infty v} \times \langle r(\psi), \sigma\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$	$\tilde{C}_{\infty v} \times \langle \hat{\sigma}, r(\psi), \sigma\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$
	(+, \hat{n} , -)	$C_{\infty v} \times \langle \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$	$C_{\infty v} \times \langle \hat{\sigma}, \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$
	(-, \hat{n} , +)	$\hat{C}_{\infty v} \times \langle r(\psi), \sigma\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$	$\hat{C}_{\infty v} \times \langle \hat{\sigma}, r(\psi), \sigma\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$
	(n , +, -)	$\tilde{C}_{\infty v} \times \langle \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$	$\tilde{C}_{\infty v} \times \langle \sigma, \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$
	(n , -, +)	$\hat{C}_{\infty v} \times \langle \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$	$\hat{C}_{\infty v} \times \langle \sigma, \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$
	(-, -, n)	$\langle \sigma\hat{\sigma}, r(\psi), \hat{r}(\hat{\psi}), \sigma\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$	$\langle \hat{\sigma}, \sigma\hat{\sigma}, r(\psi), \hat{r}(\hat{\psi}), \sigma\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$
	(-, n , -)	$\langle \sigma\hat{\sigma}, \hat{r}(\hat{\psi}), r(\psi), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \sigma\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$	$\langle \hat{\sigma}, \sigma\hat{\sigma}, \hat{r}(\hat{\psi}), r(\psi), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \sigma\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$
	(n , -, -)	$\langle \hat{\sigma}\hat{\sigma}, \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$	$\langle \sigma, \hat{\sigma}\hat{\sigma}, \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$
4	(+, \hat{n} , \hat{n})	$C_{\infty v} \times \langle \hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \hat{r}(\frac{-1}{2\hat{n}}) \rangle$	$C_{\infty v} \times DI_{\hat{n}\hat{n}}, C_{\infty v} \times OB_{\hat{n}\hat{n}}^{\pm}$
	(-, \hat{n} , \hat{n})	$\langle r(\psi), \sigma\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \sigma\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$	$DI_{\hat{n}\hat{n}} \times \langle r(\psi), \sigma\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \sigma\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle,$ $OB_{\hat{n}\hat{n}}^{\pm} \times \langle r(\psi), \sigma\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \sigma\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$
	(n , +, \hat{n})	$\tilde{C}_{\infty v} \times \langle \hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) r(\frac{1}{2\hat{n}}), \hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) r(\frac{-1}{2\hat{n}}) \rangle$	$\tilde{C}_{\infty v} \times DI_{\hat{n}\hat{n}}, \tilde{C}_{\infty v} \times OB_{\hat{n}\hat{n}}^{\pm}$
	(n , -, \hat{n})	$\langle \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$	$DI_{\hat{n}\hat{n}} \times \langle \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle,$ $OB_{\hat{n}\hat{n}}^{\pm} \times \langle \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$
	(n , \hat{n} , +)	$\hat{C}_{\infty v} \times \langle r(\frac{1}{2\hat{n}}) \hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), r(\frac{1}{2\hat{n}}) \hat{r}(\frac{-1}{2\hat{n}}) \rangle$	$\hat{C}_{\infty v} \times DI_{\hat{n}\hat{n}}, \hat{C}_{\infty v} \times OB_{\hat{n}\hat{n}}^{\pm}$
	(\hat{n} , \hat{n} , -)	$\langle \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$	$DI_{\hat{n}\hat{n}} \times \langle \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle,$ $OB_{\hat{n}\hat{n}}^{\pm} \times \langle \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \hat{\sigma}\hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$
	8	$\langle r(\frac{1}{2\hat{n}}) \hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) \hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}), \hat{r}(\frac{1}{2\hat{n}}) r(\frac{1}{2\hat{n}}) \rangle$	$DI_{\hat{n}\hat{n}\hat{n}}, OB_{\hat{n}\hat{n}\hat{n}}^{\pm\pm}, CL_{\hat{n}\hat{n}\hat{n}}^{\pm}, \hat{C}L_{\hat{n}\hat{n}\hat{n}}^{\pm}, \hat{C}L_{\hat{n}\hat{n}\hat{n}}^{\pm}$

$$C_{\infty} = \{r(\psi) \mid 0 \leq \psi < 1\}, \tilde{C}_{\infty} = \{\hat{r}(\hat{\psi}) \mid 0 \leq \hat{\psi} < 1\}, \hat{C}_{\infty} = \{\hat{r}(\hat{\psi}) \mid 0 \leq \hat{\psi} < 1\}$$

$$D_{\infty \infty} = \{\sigma\hat{\sigma}, r(\psi), \hat{r}(\hat{\psi})\}, \tilde{D}_{\infty \infty} = \{\hat{\sigma}\hat{\sigma}, \hat{r}(\hat{\psi}), \hat{r}(\hat{\psi})\}, \hat{D}_{\infty \infty} = \{\hat{\sigma}\hat{\sigma}, \hat{r}(\hat{\psi}), r(\psi)\}$$

$$C_n = \langle r(\frac{1}{n}) \rangle, \tilde{C}_{\hat{n}} = \langle \hat{r}(\frac{1}{\hat{n}}) \rangle, \hat{C}_{\hat{n}} = \langle \hat{r}(\frac{1}{\hat{n}}) \rangle, C_{nv} = \langle \sigma, r(\frac{1}{n}) \rangle, \tilde{C}_{\hat{n}v} = \langle \hat{\sigma}, \hat{r}(\frac{1}{\hat{n}}) \rangle, \hat{C}_{\hat{n}v} = \langle \hat{\sigma}, \hat{r}(\frac{1}{\hat{n}}) \rangle$$

がある。すなわち、 $DI_{\hat{n}\hat{n}} \times \hat{C}_{\infty v} \rightarrow DI_{\hat{n}\hat{n}} \times \hat{C}_{\hat{n}v}$ もしくは $OB_{\hat{n}\hat{n}}^{\pm} \times \hat{C}_{\infty v} \rightarrow OB_{\hat{n}\hat{n}}^{\pm} \times \hat{C}_{\hat{n}v}$ であり、一方の連続並進対称性が離散並進になる。この分岐については、後述のパターンシミュレーションを参照されたい (図-10(a)→(b))。

また、4重分岐点においては、連続並進の方向の鏡映対称性を消失する場合もある。この分岐は、従来の二次元解析では得られない。

d) 8重分岐点

表-1に示したように、8重分岐点において生じる分

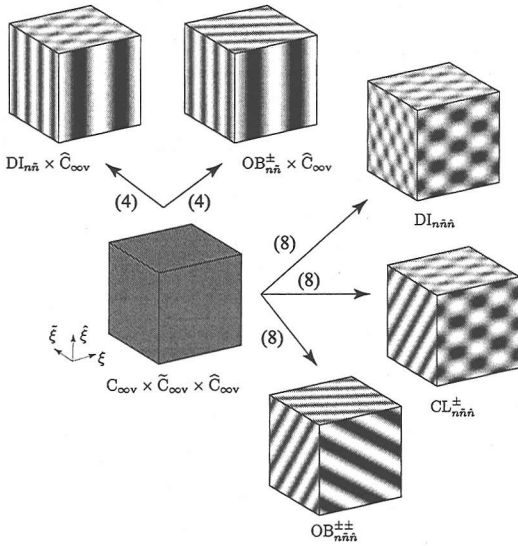


図-3 $C_{oo\bar{v}} \times \tilde{C}_{oo\bar{v}} \times \hat{C}_{oo\bar{v}}$ -同変系の分岐の仕組み図

岐パターンは $OB_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm\pm}$, $CL_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm}$, $\tilde{CL}_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm}$, $\widehat{CL}_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm}$, $DI_{n\bar{n}\bar{n}}$ -不変パターンである。これらを二次元領域での結果を参考にし、順に層状パターン、柱状パターン、ダイヤモンドパターンと呼ぶこととする。以下、各々のパターンの特性を調べる。

層状パターン: 図-4のように、 xy , yz , zx のそれぞれの平面において二次元領域でのストライプパターンを呈する持つものを、層状パターンと呼ぶこととする。層状パターンの持つ対称性は

$$OB_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm\pm} = \left\langle \sigma \bar{\sigma} \hat{\sigma}, \left\{ r(\psi) \bar{r}(\bar{\psi}) \hat{r}(\hat{\psi}) \mid n\psi + \bar{n}\bar{\psi} \pm \hat{n}\hat{\psi} \in \mathbf{Z} \right\} \right\rangle, \quad (22)$$

$$OB_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm} = \left\langle \sigma \bar{\sigma} \hat{\sigma}, \left\{ r(\psi) \bar{r}(\bar{\psi}) \hat{r}(\hat{\psi}) \mid n\psi - \bar{n}\bar{\psi} \pm \hat{n}\hat{\psi} \in \mathbf{Z} \right\} \right\rangle \quad (23)$$

により表される (以下、複号同順)。元 $\{r(\psi) \bar{r}(\bar{\psi}) \hat{r}(\hat{\psi}) \mid n\psi + \bar{n}\bar{\psi} \pm \hat{n}\hat{\psi} \in \mathbf{Z}\}$, $\{r(\psi) \bar{r}(\bar{\psi}) \hat{r}(\hat{\psi}) \mid n\psi - \bar{n}\bar{\psi} \pm \hat{n}\hat{\psi} \in \mathbf{Z}\}$ はそれぞれ、平面群

$$n\xi + \bar{n}\bar{\xi} \pm \hat{n}\hat{\xi} \in \mathbf{Z}, \quad n\xi - \bar{n}\bar{\xi} \pm \hat{n}\hat{\xi} \in \mathbf{Z}$$

の面内における任意の方向の連続並進変換を表す。この変換に対する不変性より、これらの同一平面上にある点は、同じ物理特性を持つことが分かる。式 (22), (23) における $OB_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm\pm}$ の上付きの符号の組み合わせにより、図-4(a)~(d) に示すように同じ物理特性を持つ平面の向きが決まる。

柱状パターン: 図-5に示す柱状パターンは、 xy , yz , zx 平面のうち、一つの面では二次元でのストライプパターンを、他の二面においては二次元でのダイヤモンド

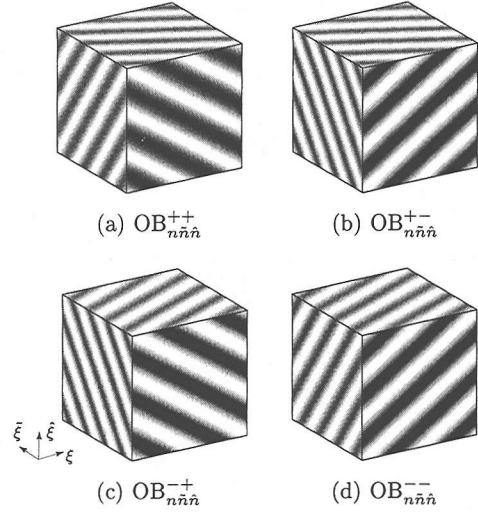


図-4 層状パターン $OB_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm\pm}$ ($n=2, \bar{n}=4, \hat{n}=3$)。

パターンを呈する。このパターンの対称性は群 $CL_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm}$, $\tilde{CL}_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm}$, $\widehat{CL}_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm}$ により表される。例えば、群 $CL_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm}$ は

$$CL_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm} = \left\langle \bar{\sigma} \hat{\sigma}, \sigma, r\left(\frac{1}{2n}\right) \bar{r}\left(\frac{1}{2\bar{n}}\right), \left\{ \bar{r}(\bar{\psi}) \hat{r}(\hat{\psi}) \mid \bar{n}\bar{\psi} \pm \hat{n}\hat{\psi} \in \mathbf{Z} \right\} \right\rangle \quad (24)$$

により定義され、 yz 平面では式 (11) の $OB_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm}$ -不変ストライプパターンを、 zx , xy 平面では式 (10) の $DI_{n\bar{n}\bar{n}}$ -不変ダイヤモンドパターンを呈する。 $CL_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm}$ の上付きの符号はストライプパターンの方向を表す。 $\tilde{CL}_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm}$, $\widehat{CL}_{n\bar{n}\bar{n}}^{\pm}$ の対称性を持つ他の柱状パターンは、ストライプパターンを呈する面がそれぞれ異なる。これらのパターンの対称性を表す群の定義や詳細は付録 I (式 (I.25), (I.26)) で述べる。

ダイヤモンドパターン: 三次元領域において図-6のような $n \times \bar{n} \times \hat{n}$ 個の同じ形のダイヤモンドブロックの配列を持つパターンの対称性は

$$DI_{n\bar{n}\bar{n}} = \left\langle \sigma, \bar{\sigma}, \hat{\sigma}, r\left(\frac{1}{2n}\right) \bar{r}\left(\frac{1}{2\bar{n}}\right), \bar{r}\left(\frac{1}{2\bar{n}}\right) \hat{r}\left(\frac{1}{2\hat{n}}\right), \hat{r}\left(\frac{1}{2\hat{n}}\right) r\left(\frac{1}{2n}\right) \right\rangle \quad (25)$$

により定義される。この群が表す対称性を持つパターンを、三次元のダイヤモンドパターンと呼ぶ。このパターンは、 xy , yz , zx のそれぞれの平面において二次元領域のダイヤモンドパターンを呈する。

4. パターンシミュレーション

この節では、自然界に見られるいくつかのパターンの三次元パターンシミュレーションを行う。これは、著

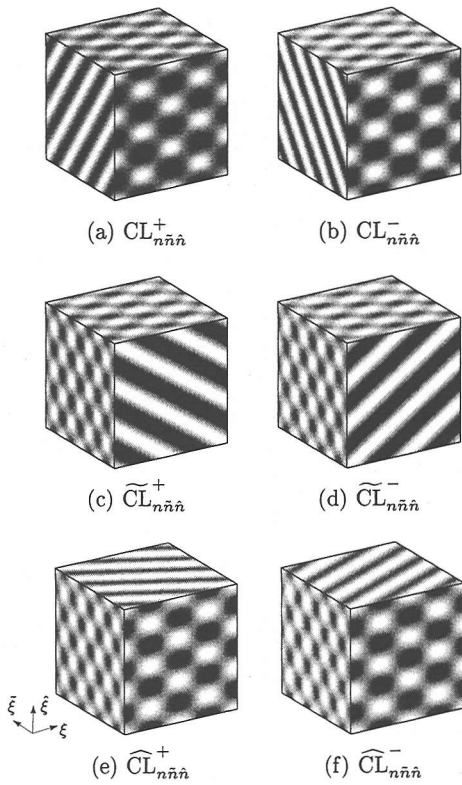


図-5 柱状パターン $CL_{n\bar{n}\hat{n}}^{\pm}$, $\widetilde{CL}_{n\bar{n}\hat{n}}^{\pm}$, $\widehat{CL}_{n\bar{n}\hat{n}}^{\pm}$ ($n = 2, \bar{n} = 4, \hat{n} = 3$).

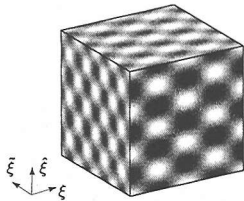


図-6 ダイヤモンドパターン $DI_{n\bar{n}\hat{n}}$ ($n = 2, \bar{n} = 4, \hat{n} = 3$).

者らの過去の二次元画像シミュレーション^{29),30)}の手法を、前節までの結果を用いて三次元に拡張したものである。それに伴い、二次元画像シミュレーションも含めて、以下では全てパターンシミュレーションと呼ぶこととする。本節の目的は、二次元で構築したパターンシミュレーションの三次元パターンへの適用性を示すこと、およびパターン形成の様子を復元することにより、前節までで数理的に明らかにした分岐メカニズムの妥当性を確認することである。また、このパターンシミュレーションにより、識別が困難なためにこれまで見落とされがちであった変形パターンの遷移過程を、理論的裏付けのもとに推定することが可能となる。

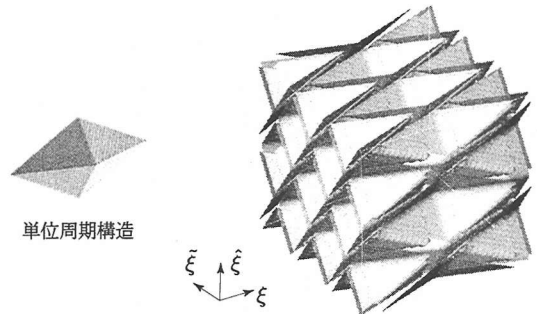


図-7 方解石節理の理想化モデル

二次元パターンシミュレーションの詳細に関しては文献^{29),30)}に譲り、その概要を以下にまとめる。

1. ひずみ、粒子の回転、弾性波速度など、何らかの物理特性の大きさを濃淡で表した画像から、数値データを取り出す。
2. 数値データを多重 Fourier 級数に展開する。
3. 各級数項を群対称性により分類する。
4. 分類された級数項の係数の大きさを対称性ごとに相対的に比較し、優位な大きさを持つものがあれば、その対称性を持つパターンが分岐により発生したと推定する。
5. 推定されたパターンの遷移過程に基づいて、各過程における Fourier 級数項により画像を作成し、パターン形成のシミュレーションを行う。

以下、上記二次元パターンシミュレーションを三次元へ適用するための具体的な手順を示す。

解析対象とする三次元パターンは、写真-1, 2の実データに基づいて作成した三次元数値データ(図-7, 8⁴⁾)である⁵。ここでは、解析の簡略化のために、 xy , yz , zx 平面に関する鏡映対称性を持つものとして三次元数値データを作成した。作成した三次元数値データを、三重 Fourier 級数

$$w(\xi, \hat{\xi}, \tilde{\xi}) = \sum_{n=0}^N \sum_{\bar{n}=0}^N \sum_{\hat{n}=0}^N A_{n\bar{n}\hat{n}} \cos 2\pi n\xi \cos 2\pi \bar{n}\hat{\xi} \cos 2\pi \hat{n}\tilde{\xi} \quad (26)$$

により展開する。各級数項を、本論文で明らかにした三次元パターンの群対称性により分類し、前述のパターンシミュレーションの手法にしたがって、パターン形成のシミュレーションを行う。三次元数値データの解像度が

⁴ 128³ 個の各点に 256 階調を対応させた三次元数値データを等数値面により表した。

⁵ ここで用いる三次元数値データは、三次元座標の各点にスカラー値を対応させたものである。また、スカラー値は、弾性波速度など、その点の物性を定量的に表すものを想定している。ただし、パターンシミュレーションの手法自体は、三次元座標の各点に変位などのベクトル量が対応するようなベクトル場においても、原理的には適用可能である。

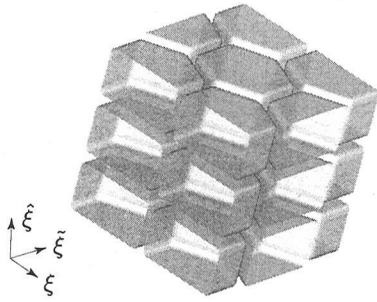


図-8 玄武岩節理の理想化モデル

表-2 Fourier 係数の上位 5 項: 方解石理想化モデル

順位	(n, \tilde{n}, \hat{n})	$A_{n\tilde{n}\hat{n}}$
1	(1,3,2)	107
2	(2,6,4)	20.0
3	(3,9,6)	18.4
4	(4,12,8)	16.2
5	(6,15,10)	13.8

128 であるので、ここでは $N = 64$ とした。

(1) 方解石節理

方解石は石灰岩の主要な構成鉱物であり、いくつかの方向の層状節理を持つことが知られている。ここでは、写真-2に示した標本を単位周期構造としてモデル化した解析モデル(図-7)に対して、この節理のパターンシミュレーションを行う。解析モデルは、平行 8 面体の単位周期構造を空間上に隙間なく埋め尽くし、その空間のある領域を切り出したものである。式(26)により三重 Fourier 級数展開した結果から、場の平均値を表す A_{000} を除いた絶対値の上位 5 項を表-2に示す。表-2に現れる級数項は、全て $DI_{1,3,2}$ の対称性を持つため、 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ -不変系から $DI_{1,3,2}$ -不変パターンへの 1 次分岐が生じると考えられる。したがって、まず順位 1 までの級数項を含む図-9(a)のパターンへ分岐し、その後さらに同 $DI_{1,3,2}$ の対称性を持つ高次の Fourier 級数項が混入することにより、図-9(b), (c)に示すパターンを経て、最終的に図-7に示したパターンに至ったと推定できる。

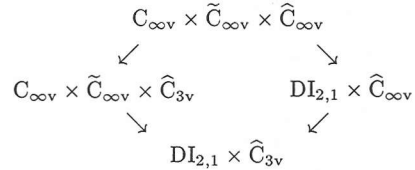
(2) 玄武岩節理

写真-1に示した玄武岩に見られる節理を、図-8に示すように理想化し、パターンシミュレーションを行う。理想化モデルは、方解石節理と同様の手法により、正六角柱の単位周期構造から作成した。式(26)により展開した三重 Fourier 級数の各係数 $A_{n\tilde{n}\hat{n}}$ の中で、 A_{000} を除いて絶対値の大きなものから順に 16 項を表-3に示す。

表-3 Fourier 係数の上位 12 項: 玄武岩理想化モデル

順位	(n, \tilde{n}, \hat{n})	$A_{n\tilde{n}\hat{n}}$	順位	(n, \tilde{n}, \hat{n})	$A_{n\tilde{n}\hat{n}}$
1	(0,0,3)	36.6	9	(6,1,0)	3.53
2	(0,0,6)	25.8	10	(8,0,0)	3.38
3	(0,0,9)	15.1	11	(0,4,0)	2.93
4	(0,0,12)	6.45	12	(4,2,0)	2.89
5	(0,2,0)	-6.32	13	(4,4,0)	-2.80
6	(2,1,0)	6.14	14	(2,5,0)	2.69
7	(4,0,0)	4.53	15	(0,2,3)	2.69
8	(2,3,0)	-4.03	16	(2,1,3)	-2.61

表-3より、1~4 項までが $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{3v}$ の対称性を持つ項、5~14 項までが $DI_{2,1} \times \tilde{C}_{\infty v}$ の対称性を持つ項、15, 16 項は $DI_{2,1} \times \hat{C}_{3v}$ の対称性を持つ項であることが分かる。したがって、一様場から



という分岐を起こしたと考えられる。ここでは $DI_{2,1} \times \hat{C}_{\infty v}$ を経由する分岐を仮定し、まず、図-10(a)に示す $DI_{2,1} \times \hat{C}_{\infty v}$ -不変パターンへの分岐が起こり、次いで $DI_{2,1} \times \hat{C}_{\infty v}$ の対称性を持つ高次項が混入し、さらに、図-10(b)に示す $DI_{2,1} \times \hat{C}_{3v}$ -不変パターンへと分岐し、さらに同様の対称性を持つ高次項が混入し図-10(c)に示すパターンとなり、最終的に図-8のようなパターンに至ったと推定できる。

5. おわりに

本論文では、等方均質な二次元領域に関して群論的分岐理論から導かれていた結果を三次元領域へ拡張し、等方均質な三次元材料の 1 次分岐の仕組みと 1 次分岐により生じる分岐パターンを明らかにした。また、本論文で明らかにした分岐メカニズムに基づき、現実に見られる岩盤の節理の三次元パターンシミュレーションを行い、そのメカニズムの妥当性を検証した。現実の三次元物理現象を二次元現象としてとらえることは、それと直交する方向の対称性を固定することになる。そのため、固定した方向に存在する対称性の喪失を伴う分岐を見逃してしまう可能性がある。したがって、実際の物理現象で見られる分岐を表すには、現象を表す数理モデルを三次元として考えることが必要不可欠である。群論的分岐理論は、対称性に基づいて生じる分岐の可能性を全て網羅するものであり、その結果得られる情報は表-1に示すよ

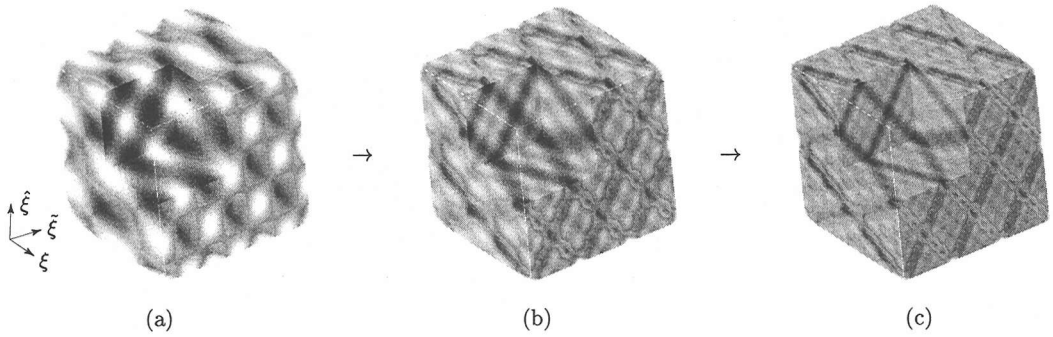


図-9 三重 Fourier 級数による方解石節理のパターンシミュレーション

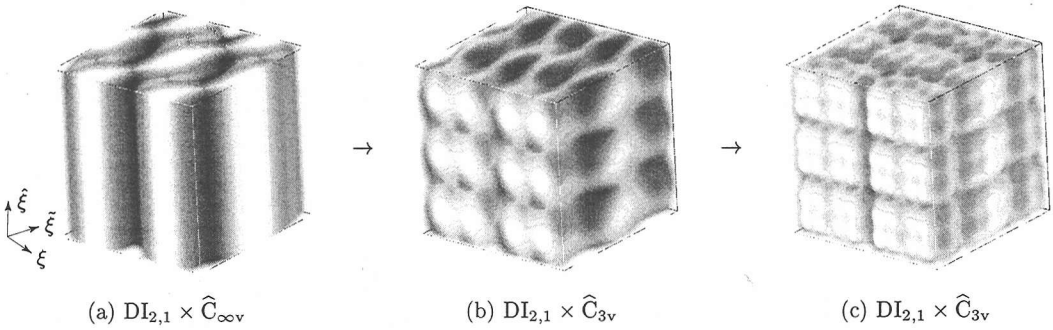


図-10 三重 Fourier 級数による玄武岩節理のパターンシミュレーション

うに膨大なものとなる。そこで、その膨大な情報からいかに実現象と対応するものを抽出するかが重要であり、本研究はその第一歩となるものである。

今後の課題は、本論文で明らかになった1次分岐パターンからさらに分岐が起きるときの分岐メカニズムを明らかにすること、およびそれも含めた三次元パターンシミュレーションを実際の三次元パターンへ適用することである。また、岩の節理の対称性を踏まえた力学モデルの構築なども、重要な研究課題である。

謝辞：この研究は文部省（現文部科学省）科学研究費補助金奨励研究（A）（課題番号 12750416 平成 12, 13 年度）の補助を得た。また、広島大学工学部、有尾氏より玄武岩の写真-1を、群馬県立自然史博物館から方解石標本の写真-2を提供して頂いた。ここに関係各者への謝意を表す。

付録 I $C_{ooV} \times \tilde{C}_{ooV} \times \hat{C}_{ooV}$ -同変系の1次分岐

この節では、本文第3節で概説した $C_{ooV} \times \tilde{C}_{ooV} \times \hat{C}_{ooV}$ -同変系の1次分岐の数学的側面を補足する。

$C_{ooV} \times \tilde{C}_{ooV} \times \hat{C}_{ooV}$ は $O(2)$ と同型の3つの群 C_{ooV} , \tilde{C}_{ooV} , \hat{C}_{ooV} の直積であるため、その既約表現は3つの $O(2)$ の既約表現のテンソル積で与えられる。いま、 $C_{ooV} = \langle \sigma, r(\psi) \rangle (\simeq O(2))$ の既約表現を

$$R(C_{ooV}) = \{+, -, 1, 2, \dots\} \quad (I.1)$$

と表すことにする。ここに、「+」および「-」は

$$T^{(+)}(r(\psi)) = 1, \quad T^{(+)}(\sigma) = 1, \quad (I.2)$$

$$T^{(-)}(r(\psi)) = 1, \quad T^{(-)}(\sigma) = -1 \quad (I.3)$$

で定義される1次既約表現を表す。ただし、 $T^{(\mu)}(\cdot)$ は既約表現 μ に対する表現行列を表す。式 (I.1) における n ($n = 1, 2, \dots$) は

$$T^{(n)}(r(\psi)) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi n\psi) & -\sin(2\pi n\psi) \\ \sin(2\pi n\psi) & \cos(2\pi n\psi) \end{pmatrix}, \quad (I.4)$$

$$T^{(n)}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で定義される2次既約表現である。また、 C_{ooV} , \tilde{C}_{ooV} , \hat{C}_{ooV} における、

$$\sigma \leftrightarrow \bar{\sigma}, \quad \sigma \leftrightarrow \hat{\sigma}, \quad r(\psi) \leftrightarrow \bar{r}(\bar{\psi}), \quad r(\psi) \leftrightarrow \hat{r}(\hat{\psi})$$

の対応関係より, $\tilde{C}_{\infty v}, \hat{C}_{\infty v} (\simeq O(2))$ の既約表現は

$$\begin{aligned} R(\tilde{C}_{\infty v}) &= \{+, -, 1, 2, \dots\}, \\ R(\hat{C}_{\infty v}) &= \{+, -, 1, 2, \dots\} \end{aligned} \quad (I.5)$$

で表すことができる.

以上より, $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ の既約表現は

$$\begin{aligned} R(C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}) \\ = \{(k, \bar{k}, \hat{k}) \mid k, \bar{k}, \hat{k} = +, -, 1, 2, \dots\} \end{aligned} \quad (I.6)$$

で与えられる. ここに (k, \bar{k}, \hat{k}) は $C_{\infty v}, \tilde{C}_{\infty v}, \hat{C}_{\infty v}$ の既約表現 k, \bar{k}, \hat{k} のテンソル積で与えられる既約表現を表す. 既約表現 (k, \bar{k}, \hat{k}) の次数は k, \bar{k}, \hat{k} それぞれの次数の積に等しく, 1, 2, 4, 8 のいずれかである. また, 特異点での多重度は, 対応する既約表現の次数に等しい.

$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ -不変系の特異点と分岐解を分類するために, 既約表現 $\mu = (k, \bar{k}, \hat{k})$ に対応する核空間の対称性を表す群を表-1にまとめた. ここで注意すべきことは, 分岐方程式を解いて得られる分岐解の対称性は, 特異点の核空間の対称性よりも高い場合があるということである.

次節以降, 多重度 2, 4, 8 の分岐点それぞれに対応する分岐方程式を求め, この方程式を解くことにより分岐解の対称性を求める.

(1) 2 重分岐点

2 次既約表現 (n, \bar{k}, \hat{k}) ($\bar{k}, \hat{k} = +, -$), (k, \bar{n}, \hat{k}) ($k, \hat{k} = +, -$), (k, \bar{k}, \hat{n}) ($k, \bar{k} = +, -$) は 2 重分岐点に対応する. このうち, $(n, +, +)$, $(+, \bar{n}, +)$, $(+, +, \hat{n})$ については, $O(2)$ -同変系に関する結果^{23), 25)}を直接適用できる. また, $(n, +, -)$, $(n, -, +)$, $(+, \bar{n}, -)$, $(-, \bar{n}, +)$, $(+, -, \hat{n})$, $(-, +, \hat{n})$ に関しては, $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ -同変系の結果³⁴⁾を直接適用できる. そこで, ここでは, 既約表現 $(n, -, -)$ に対応する分岐点での分岐方程式を考える. $(-, \bar{n}, -)$, $(-, -, \hat{n})$ の場合も同様である.

定式化を簡略にするために, 2 重分岐点の分岐方程式の変数として, 2 つの実変数 w_1, w_2 を用いる代わりに, 1 つの複素変数 $z = w_1 + iw_2$ を用いる. ここに, i は虚数単位である. すると, 分岐方程式は

$$F(f, z, \bar{z}) = z \sum_{a=0}^{\infty} \hat{A}_a(f) |z|^{2a} = 0 \quad (I.7)$$

と表される (付録 II 参照). 分岐方程式 (I.7) の解は, 自明解 $z = 0$, もしくは

$$\sum_{a=0}^{\infty} \hat{A}_a(f) |z|^{2a} = 0$$

を満たす分岐解である. したがって, 分岐解が存在するならば, $|z| = \Phi(f)$ の形で与えられることが分かる.

このような複素解の代表解として, 実数解を考えても

一般性は失われない⁶⁾ため, ここでは実数解のみを考える. すると, 式 (II.1) より, 分岐解は

$$\left\langle \sigma, \bar{\sigma} \hat{\sigma}, \bar{\sigma} r \left(\frac{1}{2n} \right), \hat{\sigma} r \left(\frac{1}{2n} \right), \bar{r}(\hat{\psi}), \hat{r}(\hat{\psi}) \right\rangle$$

に対して不変であることが分かる.

(2) 4 重分岐点

4 次既約表現 (n, \bar{n}, \hat{k}) ($\hat{k} = +, -$), (n, \bar{k}, \hat{n}) ($\bar{k} = +, -$), (k, \bar{n}, \hat{n}) ($k = +, -$) は 4 重分岐点に対応する. このうち, $(n, \bar{n}, +)$, $(n, +, \hat{n})$, $(+, \bar{n}, \hat{n})$ に関しては, $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ -同変系の 4 重分岐点の結果³⁴⁾を直接適用できる. そこで, ここでは, 既約表現 $(n, \bar{n}, -)$ に対応する分岐点での分岐方程式を考える. $(n, -, \hat{n})$, $(-, \bar{n}, \hat{n})$ の場合も同様である.

2 重分岐点の場合と同様に, 分岐方程式の変数として 4 つの実変数 w_1, w_2, w_3, w_4 を用いる代わりに, 2 つの複素変数 $z_1 = w_1 + iw_2, z_2 = w_3 + iw_4$ を用いる. すると, 分岐方程式は

$$F_1(f, z_1, z_2, \bar{z}_2, \bar{z}_1) = F_2(f, z_1, z_2, \bar{z}_2, \bar{z}_1) = 0 \quad (I.8)$$

と書ける. ここで, 分岐方程式の対称条件を考慮すると, 付録 III より式 (I.8) は

$$\begin{aligned} F_1 &= z_1 \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \hat{A}_{ab}(f) |z_1|^{2a} |z_2|^{2b} = 0, \\ F_2 &= z_2 \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \hat{A}_{ab}(f) |z_1|^{2b} |z_2|^{2a} = 0 \end{aligned} \quad (I.9)$$

と表される. 分岐方程式 (I.9) の解は

- a) $z_1 = z_2 = 0$,
- b-i) $z_1 \neq 0, z_2 = 0$,
- b-ii) $z_2 \neq 0, z_1 = 0$,
- c) $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$

と分類される.

a) 自明解 ($z_1 = z_2 = 0$)

解 $z_1 = z_2 = 0$ は $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ -不変の変形モードを呈する主経路上の自明解に対応する.

b-i) 層状パターン 1 ($z_1 \neq 0, z_2 = 0$)

この場合, 分岐方程式 $F_2 = 0$ は満足され, $F_1/z_1 = 0$ は

$$\sum_{a=0}^{\infty} \hat{A}_{a0}(f) |z_1|^{2a} = 0 \quad (I.10)$$

となる. 式 (I.10) は分岐解の解曲面 $|z_1| = \Phi(f)$ を表す. 例によって, これらの解のうち, 実数解のみを考える. このとき, 式 (IV.1) より, この分岐解は

$$OB_{\bar{n}\bar{n}}^+ \left\langle \hat{\sigma} r \left(\frac{1}{2n} \right), \hat{\sigma} \bar{r} \left(\frac{1}{2n} \right), \hat{r}(\hat{\psi}) \right\rangle$$

に対し不変なパターンとなる

⁶⁾ 他の複素解は実数解の $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ の元による変換で得られる.

b-ii) 層状パターン 2 ($z_1 = 0, z_2 \neq 0$)

この場合、分岐方程式 $F_1 = 0$ は満足され、 $F_2/z_2 = 0$ は

$$\sum_{a=0}^{\infty} \hat{A}_{a0}(f) |z_2|^{2a} = 0 \quad (\text{I.11})$$

となる。式 (I.11) の解のうち、実数解のみを考える。このとき、式 (IV.1) より、この分岐解は

$$\text{OB}_{n\bar{n}} \times \left\langle \hat{\sigma}r \left(\frac{1}{2n} \right), \hat{\sigma}\bar{r} \left(\frac{1}{2\bar{n}} \right), \hat{r}(\hat{\psi}) \right\rangle$$

に関して不変なパターンとなる。

c) 柱状パターン ($z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$)

この場合、式 (I.9) は、 $F_1/z_1 = F_2/z_2 = 0$ より

$$\sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \hat{A}_{ab}(f) |z_1|^{2a} |z_2|^{2b} = 0, \\ \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \hat{A}_{ab}(f) |z_1|^{2b} |z_2|^{2a} = 0$$

となる。この分岐方程式の解は

$$|z_1| = |z_2| = \Phi(f) \quad (\text{I.12})$$

により与えられる。ここに、 $\Phi(f)$ は

$$\sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \hat{A}_{ab}(f) \Phi^{2(a+b)} = 0 \quad (\text{I.13})$$

の解である。

このような複素解の代表解として、実数解 $z_1 = z_2$ を考える。このとき、式 (IV.1) より、分岐解は

$$\text{DI}_{n\bar{n}} \times \left\langle \hat{\sigma}r \left(\frac{1}{2n} \right), \hat{\sigma}\bar{r} \left(\frac{1}{2\bar{n}} \right), \hat{r}(\hat{\psi}) \right\rangle$$

に対して不変なパターンとなる。

(3) 8 重分岐点

8 次既約表現 (n, \bar{n}, \hat{n}) に対応する $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ ($\simeq O(2) \times O(2) \times O(2)$)-同変系の 8 重分岐点での分岐方程式を、 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ ($\simeq O(2) \times O(2)$)-同変系に対する Ikeda and Murota²⁶⁾, Murota et al.³⁴⁾ の手法を用いて解く。

前節と同様に、分岐方程式の変数として 8 つの実変数 w_1, \dots, w_8 を用いる代わりに、4 つの複素変数 $z_1 = w_1 + iw_2, z_2 = w_3 + iw_4, z_3 = w_5 + iw_6, z_4 = w_7 + iw_8$ を用いる。すると、分岐方程式は

$$F_i(f, z_1, z_2, z_3, z_4, \bar{z}_4, \bar{z}_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (\text{I.14})$$

と表される。分岐方程式の対称性 (付録 IV) より、上式の F_1, F_2, F_3, F_4 は

$$F_1 = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} |z_1|^{2a} |z_2|^{2b} |z_3|^{2c} |z_4|^{2d} \\ \times \left\{ B_{abcde}(f) (\bar{z}_1 z_2 z_3 \bar{z}_4)^e z_2 z_3 \bar{z}_4 \right. \\ \left. + C_{abcde}(f) (z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4)^e z_1 \right\}, \quad (\text{I.15})$$

$$F_2 = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} |z_1|^{2b} |z_2|^{2a} |z_3|^{2d} |z_4|^{2c} \\ \times \left\{ B_{abcde}(f) (z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4)^e z_1 \bar{z}_3 z_4 \right. \\ \left. + C_{abcde}(f) (\bar{z}_1 z_2 z_3 \bar{z}_4)^e z_2 \right\}, \quad (\text{I.16})$$

$$F_3 = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} |z_1|^{2c} |z_2|^{2d} |z_3|^{2a} |z_4|^{2b} \\ \times \left\{ B_{abcde}(f) (z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4)^e z_1 \bar{z}_2 z_4 \right. \\ \left. + C_{abcde}(f) (\bar{z}_1 z_2 z_3 \bar{z}_4)^e z_3 \right\}, \quad (\text{I.17})$$

$$F_4 = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} |z_1|^{2d} |z_2|^{2c} |z_3|^{2b} |z_4|^{2a} \\ \times \left\{ B_{abcde}(f) (\bar{z}_1 z_2 z_3 \bar{z}_4)^e \bar{z}_1 z_2 z_3 \right. \\ \left. + C_{abcde}(f) (z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4)^e z_4 \right\} \quad (\text{I.18})$$

と表される。分岐方程式 (I.14) の解は

- $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$,
- z_i のうち、三つはゼロで、他は非ゼロ。例えば、 $z_1 \neq 0, z_2 = z_3 = z_4 = 0$,
- z_i のうち、二つはゼロで、他は非ゼロ。例えば、 $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_3 = z_4 = 0$,
- $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_3 \neq 0, z_4 \neq 0$

と分類される。

a) 自明解

解 $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$ は $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ -不変の変形モードを呈する主経路上の自明解に対応する。

b) 層状パターン

例えば $z_1 \neq 0$ かつ $z_2 = z_3 = z_4 = 0$ の場合、分岐方程式 $F_2 = F_3 = F_4 = 0$ は満たされ、 $F_1/z_1 = 0$ は

$$\sum_{a=0}^{\infty} C_{a0000}(f) |z_1|^{2a} = 0 \quad (\text{I.19})$$

となる。これより、分岐方程式 (I.14) の解曲面は

$$|z_1| = \Phi(f) \quad (\text{I.20})$$

で表されることが分かる。ここに、 $\Phi(f)$ は

$$\sum_{a=0}^{\infty} C_{a0000}(f) \Phi^{2a} = 0 \quad (\text{I.21})$$

の解である。このような複素解の代表解として、実数解を考えることとする。このとき、式 (IV.1) より、実数解 z_1 は

$$\left\langle \sigma \hat{\sigma} \hat{\sigma}, \{r(\hat{\psi}) \bar{r}(\hat{\psi}) \hat{r}(\hat{\psi}) | n\hat{\psi} + \bar{n}\hat{\psi} + \hat{n}\hat{\psi} \in \mathbf{Z} \} \right\rangle$$

すなわち式 (22) で定義された群 $\text{OB}_{n\bar{n}\hat{n}}^{++}$ に関して不変な層状パターンとなる。図-4(a) に示すように、同じ物理特性を持つ点が、平面群

$$n\xi + \bar{n}\bar{\xi} + \hat{n}\hat{\xi} \in \mathbf{Z}$$

に平行な平面を形成する。

表-4 各柱状パターンの対称群とその生成元

	対称群	生成元
$z_1 \neq 0, z_4 \neq 0, z_2 = z_3 = 0$	$CL_{n\bar{n}\hat{n}}^+$	$\bar{\sigma}\hat{\sigma}, \sigma, \left\{ r(\psi)\bar{r}(\bar{\psi})\hat{r}(\hat{\psi}) \mid \pm n\psi + \bar{n}\bar{\psi} + \hat{n}\hat{\psi} \in \mathbf{Z} \right\}$
$z_2 \neq 0, z_3 \neq 0, z_1 = z_4 = 0$	$CL_{n\bar{n}\hat{n}}^-$	$\bar{\sigma}\hat{\sigma}, \sigma, \left\{ r(\psi)\bar{r}(\bar{\psi})\hat{r}(\hat{\psi}) \mid \pm n\psi + \bar{n}\bar{\psi} - \hat{n}\hat{\psi} \in \mathbf{Z} \right\}$
$z_1 \neq 0, z_3 \neq 0, z_2 = z_4 = 0$	$\widetilde{CL}_{n\bar{n}\hat{n}}^+$	$\sigma\bar{\sigma}, \bar{\sigma}, \left\{ r(\psi)\bar{r}(\bar{\psi})\hat{r}(\hat{\psi}) \mid n\psi \pm \bar{n}\bar{\psi} + \hat{n}\hat{\psi} \in \mathbf{Z} \right\}$
$z_2 \neq 0, z_4 \neq 0, z_1 = z_3 = 0$	$\widetilde{CL}_{n\bar{n}\hat{n}}^-$	$\sigma\bar{\sigma}, \bar{\sigma}, \left\{ r(\psi)\bar{r}(\bar{\psi})\hat{r}(\hat{\psi}) \mid n\psi \pm \bar{n}\bar{\psi} - \hat{n}\hat{\psi} \in \mathbf{Z} \right\}$
$z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_3 = z_4 = 0$	$\widehat{CL}_{n\bar{n}\hat{n}}^+$	$\sigma\bar{\sigma}, \hat{\sigma}, \left\{ r(\psi)\bar{r}(\bar{\psi})\hat{r}(\hat{\psi}) \mid n\psi + \bar{n}\bar{\psi} \pm \hat{n}\hat{\psi} \in \mathbf{Z} \right\}$
$z_3 \neq 0, z_4 \neq 0, z_1 = z_2 = 0$	$\widehat{CL}_{n\bar{n}\hat{n}}^-$	$\sigma\bar{\sigma}, \hat{\sigma}, \left\{ r(\psi)\bar{r}(\bar{\psi})\hat{r}(\hat{\psi}) \mid n\psi - \bar{n}\bar{\psi} \pm \hat{n}\hat{\psi} \in \mathbf{Z} \right\}$

$z_2 \neq 0$ かつ $z_1 = z_3 = z_4 = 0$, $z_3 \neq 0$ かつ $z_1 = z_2 = z_4 = 0$, $z_4 \neq 0$ かつ $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ の場合も同様に、同じ物理特性を持つ点がそれぞれ

$$n\xi + \bar{n}\bar{\xi} - \hat{n}\hat{\xi} \in \mathbf{Z},$$

$$n\xi - \bar{n}\bar{\xi} + \hat{n}\hat{\xi} \in \mathbf{Z},$$

$$n\xi - \bar{n}\bar{\xi} - \hat{n}\hat{\xi} \in \mathbf{Z}$$

に平行な平面を形成し、 $OB_{n\bar{n}\hat{n}}^{+-}$, $OB_{n\bar{n}\hat{n}}^{-+}$, $OB_{n\bar{n}\hat{n}}^{--}$ 不変な層状パターンとなる。また、これらのパターンを図-4に示した。図-4から分かるように、このパターンは、平面群

$$n\xi \pm \bar{n}\bar{\xi} \pm \hat{n}\hat{\xi} \in \mathbf{Z}$$

内の任意の方向の連続並進変換、および面外方向への有限長さの離散並進変換に対して不変である。したがって、 $C_{\infty v} \times \widetilde{C}_{\infty v} \times \widehat{C}_{\infty v}$ から $OB_{n\bar{n}\hat{n}}^{\pm\pm}$ への分岐により、三方向の連続並進のうち、一つが離散並進となり、対称性が喪失する。また、この三次元パターンは xy, yz, zx 面においては二次元領域のストライプパターンを呈する。

c) 柱状パターン

例えば、 $z_1 \neq 0, z_4 \neq 0, z_2 = z_3 = 0$ の場合、分岐方程式 $F_2 = F_3 = 0$ は満たされ、 $F_1/z_1 = F_4/z_4 = 0$ は

$$\sum_{a=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} C_{a00d0} |z_1|^{2a} |z_4|^{2d} = 0, \quad (I.22)$$

$$\sum_{a=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} C_{a00d0} |z_1|^{2d} |z_4|^{2a} = 0$$

となる。したがって、分岐点近傍における解の一般形は

$$|z_1| = |z_4| = \Phi(f) \quad (I.23)$$

で表されることが分かる。ここに、 $\Phi(f)$ は

$$\sum_{a=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} C_{a00d0} \Phi^{2(a+d)} = 0 \quad (I.24)$$

の解である。層状パターンの解析と同様に、実数解についてのみ考えれば、式 (IV.1) より、対応する分岐解は

$$\left\{ \bar{\sigma}\hat{\sigma}, \sigma, \left\{ r(\psi)\bar{r}(\bar{\psi})\hat{r}(\hat{\psi}) \mid \pm n\psi + \bar{n}\bar{\psi} + \hat{n}\hat{\psi} \in \mathbf{Z} \right\} \right\}$$

に関して不変である。この群は式 (24) により定義される群 $CL_{n\bar{n}\hat{n}}^+$ と等価である。 $CL_{n\bar{n}\hat{n}}^+$ -不変なパターンを図-5(a) に示した。このパターンは直線群

$$\pm n\psi + \bar{n}\bar{\psi} + \hat{n}\hat{\psi} \in \mathbf{Z}$$

方向の連続並進変換に対して不変であり、またそれと直交する二方向の離散並進変換に対しても不変である。したがって、 $C_{\infty v} \times \widetilde{C}_{\infty v} \times \widehat{C}_{\infty v}$ から $CL_{n\bar{n}\hat{n}}^{\pm}$ への分岐により、三方向の連続並進対称性のうち、二つが離散並進へと対称性を喪失することが分かる。また、このパターンは yz 面においては二次元のストライプパターン、 xy, zx 面においては二次元のダイヤモンドパターンを呈する。

$z_2 \neq 0, z_3 \neq 0, z_1 = z_4 = 0$ の場合、前述のケースと同様に考えることにより、分岐解は $CL_{n\bar{n}\hat{n}}^-$ -不変となることが分かる。

$z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_3 = z_4 = 0$ など他の場合における分岐解の対称性については、表-4に分類した。ここに、部分群 $CL_{n\bar{n}\hat{n}}^{\pm}$ は式 (24)、 $\widetilde{CL}_{n\bar{n}\hat{n}}^{\pm}$ および $\widehat{CL}_{n\bar{n}\hat{n}}^{\pm}$ は

$$\widetilde{CL}_{n\bar{n}\hat{n}}^{\pm} = \left\langle \bar{\sigma}\sigma, \bar{\sigma}, \hat{r} \left(\frac{1}{2\bar{n}} \right) \hat{r} \left(\frac{1}{2\hat{n}} \right) \left\{ \hat{r}(\hat{\psi})r(\psi) \mid \hat{n}\hat{\psi} \pm n\psi \in \mathbf{Z} \right\} \right\rangle, \quad (I.25)$$

$$\widehat{CL}_{n\bar{n}\hat{n}}^{\pm} = \left\langle \sigma\bar{\sigma}, \hat{\sigma}, \hat{r} \left(\frac{1}{2\bar{n}} \right) r \left(\frac{1}{2\hat{n}} \right) \left\{ r(\psi)\bar{r}(\bar{\psi}) \mid n\psi \pm \bar{n}\bar{\psi} \in \mathbf{Z} \right\} \right\rangle, \quad (I.26)$$

により定義される(複号同順)。また、それぞれのパターンを図-5に示した。この図から、 $\widetilde{CL}_{n\bar{n}\hat{n}}^{\pm}$, $\widehat{CL}_{n\bar{n}\hat{n}}^{\pm}$ はそれぞれ zx 面、 xy 面においてストライプパターン、他の二面ではダイヤモンドパターンを呈することが分かる。 $CL_{n\bar{n}\hat{n}}^{\pm}$ と同様、符号によりストライプパターンの方向が変化する。

d) ダイヤモンドパターン

$z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_3 \neq 0, z_4 \neq 0$ の場合, 分岐方程式 (I.15)~(I.18) は $F_1 \bar{z}_1 = F_2 \bar{z}_2 = F_3 \bar{z}_3 = F_4 \bar{z}_4 = 0$ より

$$\begin{aligned} & \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} |z_1|^{2a} |z_2|^{2b} |z_3|^{2c} |z_4|^{2d} (\bar{z}_1 z_2 z_3 \bar{z}_4)^e \\ & \quad \times \left\{ B_{abcde}(f) \bar{z}_1 z_2 z_3 \bar{z}_4 + C_{abcde}(f) |z_1|^2 \right\} = 0 \\ & \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} |z_1|^{2b} |z_2|^{2a} |z_3|^{2d} |z_4|^{2c} (z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4)^e \\ & \quad \times \left\{ B_{abcde}(f) z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4 + C_{abcde}(f) |z_2|^2 \right\} = 0 \\ & \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} |z_1|^{2c} |z_2|^{2d} |z_3|^{2a} |z_4|^{2b} (z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4)^e \\ & \quad \times \left\{ B_{abcde}(f) z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4 + C_{abcde}(f) |z_3|^2 \right\} = 0 \\ & \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} |z_1|^{2d} |z_2|^{2c} |z_3|^{2b} |z_4|^{2a} (\bar{z}_1 z_2 z_3 \bar{z}_4)^e \\ & \quad \times \left\{ B_{abcde}(f) \bar{z}_1 z_2 z_3 \bar{z}_4 + C_{abcde}(f) |z_4|^2 \right\} = 0 \end{aligned}$$

となる. この分岐方程式の解は

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = \Phi(f), \quad z_1 z_4 = z_2 z_3 \quad (\text{I.27})$$

により与えられる. ここに, $\Phi(f)$ は

$$\begin{aligned} & \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} \\ & (B_{abcde} |\Phi|^2 + C_{abcde}) |\Phi|^{2(a+b+c+d+2e)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

の解である. 式 (IV.1) より, 対応する実数分岐解は

$$\left\langle \sigma, \bar{\sigma}, \hat{\sigma}, \left\{ r(\psi) \bar{r}(\bar{\psi}) \hat{r}(\hat{\psi}) \mid n\psi \pm \bar{n}\bar{\psi} \pm \hat{n}\hat{\psi} \in \mathbf{Z} \right\} \right\rangle$$

に関して不変である. この群は式 (25) で定義した $DI_{n\bar{n}\hat{n}}$ と等価である. この群 $DI_{n\bar{n}\hat{n}}$ の対称性を持つパターンを 図-6 に示した. 以上より, $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ から $DI_{n\bar{n}\hat{n}}$ への分岐においては, 三方向の連続並進対称性が全て離散並進対称性へとなることが分かる. また, このパターンは xy, yz, zx 面のすべてにおいて, 二次元のダイヤモンドパターンの対称性を持つ.

付録 II 既約表現 $(n, -, -)$ に対応する 2 重分岐点の分岐方程式

本節では, $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ -同変系の既約表現 $(n, -, -)$ に対応する 2 重分岐点の分岐方程式の具体形を導く.

群 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ の 6 つの生成元の複素変数 z への作用は

$$\begin{aligned} r(\psi) &: z \mapsto \omega z, \\ \sigma &: z \mapsto \bar{z}, \\ \bar{r}(\bar{\psi}) &: z \mapsto z, \\ \hat{\sigma} &: z \mapsto -z, \\ \hat{r}(\hat{\psi}) &: z \mapsto z, \\ \hat{\sigma} &: z \mapsto -z \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

で与えられる. ここに, $\omega = \exp(i2\pi n\psi)$ であり, $(\bar{\cdot})$ は複素共役を表す.

分岐方程式 (I.7) の群 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ に対する同変性は, 式 (II.1) の 6 つの生成元に対する同変性

$$\omega F(f, z) = F(f, \omega z), \quad (\text{II.2})$$

$$\overline{F(f, z)} = F(f, \bar{z}), \quad (\text{II.3})$$

$$-F(f, z) = F(f, -z) \quad (\text{II.4})$$

で表せる.

ここで, F を

$$F(f, z) = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} A_{ab}(f) z^a \bar{z}^b \quad (\text{II.5})$$

の形に展開する. これは, 分岐解析ではよく使う手法であり, 実際は低次項のみが重要である⁷. 式 (II.5) を式 (II.2) - (II.4) に代入すると

$$\exp[i2\pi n\psi(a-b-1)] = 1, \quad (\text{II.6})$$

$$A_{ab}(f) = \overline{A_{ab}(f)}, \quad (\text{II.7})$$

$$(-1)^{a+b} = -1 \quad (\text{II.8})$$

を得る. 式 (II.6) において, 実数 ψ は任意であるので, (a, b) は

$$a - b - 1 = 0$$

を満たす. したがって, 式 (II.5) の F は

$$F = z \sum_{a=0}^{\infty} \hat{A}_a(f) |z|^{2a} \quad (\text{II.9})$$

と表される. ここに, $\hat{A}_a(f) = A_{a+1,a}(f)$ であり, 式 (II.7) より実数であることが分かる. また, $(f, z) = (0, 0)$ は分岐点なので, $\hat{A}_0(0) = 0$ である.

付録 III 既約表現 $(n, \bar{n}, -)$ に対応する 4 重分岐点の分岐方程式

本節では, $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ -同変系の既約表現 $(n, \bar{n}, -)$ に対応する 4 重分岐点の分岐方程式の具体形を導く.

群 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \times \hat{C}_{\infty v}$ の $(n, \bar{n}, -)$ で表される 4 次既約表現を

$$T(r(\psi)) = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix}, \quad T(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

⁷ 分岐点近傍での解軌道を考えるので z は微小であり, 高次項の影響は小さい.

$$T(\hat{r}(\bar{\psi})) = \begin{pmatrix} \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\zeta} \end{pmatrix}, \quad T(\bar{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T(\hat{r}(\hat{\psi})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(\hat{\sigma}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定義する。ここに、 ω, ζ は

$$\omega = \exp(i2\pi n\psi), \quad \zeta = \exp(i2\pi \bar{n}\bar{\psi})$$

である。したがって、 $C_{\infty \times \infty} \times \tilde{C}_{\infty \times \infty} \times \hat{C}_{\infty \times \infty}$ の生成元の複素変数 (z_1, z_2) に対する作用は

$$\begin{aligned} r(\psi) &: z_1 \mapsto \omega z_1, & z_2 &\mapsto \omega z_2, \\ \sigma &: z_1 \mapsto \bar{z}_2, & z_2 &\mapsto \bar{z}_1, \\ \hat{r}(\bar{\psi}) &: z_1 \mapsto \zeta z_1, & z_2 &\mapsto \bar{\zeta} z_2, \\ \bar{\sigma} &: z_1 \mapsto z_2, & z_2 &\mapsto z_1, \\ \hat{r}(\hat{\psi}) &: z_1 \mapsto z_1, & z_2 &\mapsto z_2, \\ \hat{\sigma} &: z_1 \mapsto -z_1, & z_2 &\mapsto -z_2 \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

で与えられる。

分岐方程式 (I.8) の群 $C_{\infty \times \infty} \times \tilde{C}_{\infty \times \infty} \times \hat{C}_{\infty \times \infty}$ に対する同変性は

$$\begin{aligned} \omega F_1(f, z_1, z_2) &= F_1(f, \omega z_1, \omega z_2), \\ \omega F_2(f, z_1, z_2) &= F_2(f, \omega z_1, \omega z_2), \\ \overline{F_2(f, z_1, z_2)} &= F_1(f, \bar{z}_2, \bar{z}_1), \\ \overline{F_1(f, z_1, z_2)} &= F_2(f, \bar{z}_2, \bar{z}_1), \\ \zeta F_1(f, z_1, z_2) &= F_1(f, \zeta z_1, \bar{\zeta} z_2), \\ \bar{\zeta} F_2(f, z_1, z_2) &= F_2(f, \zeta z_1, \bar{\zeta} z_2), \\ F_2(f, z_1, z_2) &= F_1(f, z_2, z_1), \\ F_1(f, z_1, z_2) &= F_2(f, z_2, z_1), \\ -F_1(f, z_1, z_2) &= F_1(f, -z_1, -z_2), \\ -F_2(f, z_1, z_2) &= F_2(f, -z_1, -z_2) \end{aligned}$$

で表される。これらの条件より、独立な同変条件式として

$$\omega F_1(f, z_1, z_2) = F_1(f, \omega z_1, \omega z_2), \quad (\text{III.2})$$

$$\zeta F_1(f, z_1, z_2) = F_1(f, \zeta z_1, \bar{\zeta} z_2), \quad (\text{III.3})$$

$$\overline{F_1(f, z_1, z_2)} = F_1(f, \bar{z}_1, \bar{z}_2), \quad (\text{III.4})$$

$$F_2(f, z_1, z_2) = F_1(f, z_2, z_1), \quad (\text{III.5})$$

$$-F_1(f, z_1, z_2) = F_1(f, -z_1, -z_2) \quad (\text{III.6})$$

を得る。

ここで、 F_1 を

$$F_1(f, z_1, z_2) = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} A_{abcd}(f) z_1^a z_2^b \bar{z}_1^c \bar{z}_2^d \quad (\text{III.7})$$

の形に展開し、式 (III.2)-(III.4)、(III.6) に代入すると

$$1 = \exp[i2\pi n\psi(a+b-c-d-1)], \quad (\text{III.8})$$

$$1 = \exp[i2\pi \bar{n}\bar{\psi}(a-b-c+d-1)], \quad (\text{III.9})$$

$$A_{abcd}(f) = \overline{A_{abcd}(f)} \quad (\text{III.10})$$

$$(-1)^{a+b+c+d} = -1 \quad (\text{III.11})$$

を得る。式 (III.8)、(III.9) は任意の実数 $\psi, \bar{\psi}$ について成り立つため、 (a, b, c, d) は

$$a+b-c-d-1 = a-b-c+d-1 = 0$$

を満たす。これより

$$a-c=1, \quad b=d \quad (\text{III.12})$$

を得る。式 (III.12) より、式 (III.7) の F_1 は

$$F_1 = z_1 \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \hat{A}_{ab}(f) |z_1|^{2a} |z_2|^{2b} \quad (\text{III.13})$$

と表される。ここに、 $\hat{A}_{ab}(f) = \hat{A}_{a+1, bab}(f)$ であり、式 (III.10) より $\hat{A}_{ab}(f)$ は実数であることが分かる。さらに、式 (III.13) を式 (III.5) に代入して、 F_2 が

$$F_2 = z_2 \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \hat{A}_{ab}(f) |z_1|^{2b} |z_2|^{2a} \quad (\text{III.14})$$

と得られる。式 (III.13) および (III.14) が分岐方程式 (I.8) の具体形である。また、 $(f, z_1, z_2) = (0, 0, 0)$ は分岐点なので、 $\hat{A}_{00}(0) = 0$ である。

付録 IV 既約表現 (n, \bar{n}, \hat{n}) に対応する 8 重分岐点の分岐方程式

本節では、 $C_{\infty \times \infty} \times \tilde{C}_{\infty \times \infty} \times \hat{C}_{\infty \times \infty}$ -同変系の既約表現 (n, \bar{n}, \hat{n}) に対応する 8 重分岐点の分岐方程式の具体形を導く。

群 $C_{\infty \times \infty} \times \tilde{C}_{\infty \times \infty} \times \hat{C}_{\infty \times \infty}$ の (n, \bar{n}, \hat{n}) で表される 8 次既約表現を

$$\hat{T}(r(\psi)) = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix},$$

$$\hat{T}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{T}(\bar{r}(\bar{\psi})) = \begin{pmatrix} \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\zeta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\zeta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\zeta} \end{pmatrix},$$

$$\hat{T}(\hat{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{T}(\hat{r}(\hat{\psi})) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\xi} \end{pmatrix},$$

$$\hat{T}(\hat{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義する。ここに、 ω, ζ, ξ は

$$\omega = \exp(i2\pi n\psi), \quad \zeta = \exp(i2\pi \hat{n}\bar{\psi}),$$

$$\xi = \exp(i2\pi \hat{n}\psi)$$

である。したがって、 $C_{\text{ovv}} \times \bar{C}_{\text{ovv}} \times \hat{C}_{\text{ovv}}$ の複素変数

(z_1, z_2, z_3, z_4) に対する作用は

$$r(\psi): z_1 \mapsto \omega z_1, \quad z_2 \mapsto \omega z_2,$$

$$z_3 \mapsto \omega z_3, \quad z_4 \mapsto \omega z_4,$$

$$\sigma: z_1 \mapsto \bar{z}_4, \quad z_2 \mapsto \bar{z}_3,$$

$$z_3 \mapsto \bar{z}_2, \quad z_4 \mapsto \bar{z}_1,$$

$$\bar{r}(\bar{\psi}): z_1 \mapsto \zeta z_1, \quad z_2 \mapsto \zeta z_2,$$

$$z_3 \mapsto \bar{\zeta} z_3, \quad z_4 \mapsto \bar{\zeta} z_4,$$

$$\hat{\sigma}: z_1 \mapsto z_3, \quad z_2 \mapsto z_4,$$

$$z_3 \mapsto z_1, \quad z_4 \mapsto z_2,$$

$$\hat{r}(\hat{\psi}): z_1 \mapsto \xi z_1, \quad z_2 \mapsto \bar{\xi} z_2,$$

$$z_3 \mapsto \xi z_3, \quad z_4 \mapsto \bar{\xi} z_4,$$

$$\hat{\sigma}: z_1 \mapsto z_2, \quad z_2 \mapsto z_1,$$

$$z_3 \mapsto z_4, \quad z_4 \mapsto z_3$$

(IV.1)

で与えられる。

分岐方程式 (I.8) の並進変換に関する同変条件式は

$$\omega F_j(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_j(f, \omega z_1, \omega z_2, \omega z_3, \omega z_4),$$

$$j = 1, 2, 3, 4,$$

$$\zeta F_j(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_j(f, \zeta z_1, \zeta z_2, \bar{\zeta} z_3, \bar{\zeta} z_4),$$

$$j = 1, 2,$$

$$\bar{\zeta} F_j(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_j(f, \zeta z_1, \zeta z_2, \bar{\zeta} z_3, \bar{\zeta} z_4),$$

$$j = 3, 4,$$

$$\xi F_j(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_j(f, \xi z_1, \bar{\xi} z_2, \xi z_3, \bar{\xi} z_4),$$

$$j = 1, 3,$$

$$\bar{\xi} F_j(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_j(f, \xi z_1, \bar{\xi} z_2, \xi z_3, \bar{\xi} z_4),$$

$$j = 2, 4$$

と表され、鏡映変換に関する同変条件式は

$$\overline{F_j(f, z_1, z_2, z_3, z_4)} = F_{5-j}(f, \bar{z}_4, \bar{z}_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1),$$

$$j = 1, 2, 3, 4,$$

$$F_3(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_1(f, z_3, z_4, z_1, z_2),$$

$$F_4(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_2(f, z_3, z_4, z_1, z_2),$$

$$F_1(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_3(f, z_3, z_4, z_1, z_2),$$

$$F_2(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_4(f, z_3, z_4, z_1, z_2),$$

$$F_2(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_1(f, z_2, z_1, z_4, z_3),$$

$$F_1(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_2(f, z_2, z_1, z_4, z_3),$$

$$F_4(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_3(f, z_2, z_1, z_4, z_3),$$

$$F_3(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_4(f, z_2, z_1, z_4, z_3)$$

と表される。これらの関係から、独立な同変条件式として

$$\omega F_1(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_1(f, \omega z_1, \omega z_2, \omega z_3, \omega z_4),$$

$$(IV.2)$$

$$\zeta F_1(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_1(f, \zeta z_1, \zeta z_2, \bar{\zeta} z_3, \bar{\zeta} z_4),$$

(IV.3)

$$\xi F_1(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_1(f, \xi z_1, \bar{\xi} z_2, \xi z_3, \bar{\xi} z_4), \quad (IV.4)$$

$$\overline{F_1(f, z_1, z_2, z_3, z_4)} = F_1(f, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4), \quad (IV.5)$$

$$F_2(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_1(f, z_2, z_1, z_4, z_3), \quad (IV.6)$$

$$F_3(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_1(f, z_3, z_4, z_1, z_2), \quad (IV.7)$$

$$F_4(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = F_1(f, z_4, z_3, z_2, z_1) \quad (IV.8)$$

を得る。

ここで、 F_1 を

$$F_1(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \quad (IV.9)$$

$$A_{abcde fgh} (f) z_1^a z_2^b z_3^c z_4^d \bar{z}_4^e \bar{z}_3^g \bar{z}_2^h \bar{z}_1^i$$

の形に展開し、式(IV.2)-(IV.5)に代入すると

$$\begin{aligned} \exp[i2\pi n\psi(a+b+c+d-e-g-h-i-1)] &= 0, \\ \exp[i2\pi n\tilde{\psi}(a+b-c-d+e+g-h-i-1)] &= 0, \\ \exp[i2\pi n\hat{\psi}(a-b+c-d+e-g+h-i-1)] &= 0, \end{aligned} \quad (IV.10)$$

$$A_{abcdeghi}(f) = \overline{A_{abcdeghi}(f)} \quad (IV.11)$$

を得る。式(IV.10)は任意の実数 $\psi, \tilde{\psi}, \hat{\psi}$ について成り立つため、 (a, b, c, d, e, g, h, i) は

$$\begin{aligned} a+b+c+d-e-g-h-i &= 1, \\ a+b-c-d+e+g-h-i &= 1, \\ a-b+c-d+e-g+h-i &= 1 \end{aligned}$$

を満たす。これより

$$\begin{aligned} b &= 1-a+h+i, & c &= 1-a+g+i, \\ e &= 1-a+d+i \end{aligned} \quad (IV.12)$$

を得る。式(IV.12)により、式(IV.9)の F_1 は

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} |z_1|^{2a} |z_2|^{2b} |z_3|^{2c} |z_4|^{2d} \\ &\quad \times \left\{ B_{abcde}(f) (\bar{z}_1 z_2 z_3 \bar{z}_4)^e z_2 z_3 \bar{z}_4 \right. \\ &\quad \left. + C_{abcde}(f) (z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 z_4)^e z_1 \right\} \end{aligned} \quad (IV.13)$$

と表される。ここに

$$B_{abcde}(f) = A_{a,1+b+e,1+c+e,d,1+d+e,c,b,a+e}(f)$$

$$C_{abcde}(f) = A_{a+e+1,b,c,d+e,d,c+e,b+e,a}(f)$$

であり、式(IV.11)より $B_{abcde}(f), C_{abcde}(f)$ ともに実数であることが分かる。 F_2, F_3, F_4 に関して同様に、式(I.16)-(I.18)により表される。また、 $(f, z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 0, 0, 0, 0)$ は分岐点なので $C_{00000}(0) = 0$ である。

参考文献

- 1) Chang, Y.W. and Asaro, R.J.: An experimental study of shear localization in aluminum-copper single crystals, *Acta Metallurgica*, Vol. 29, pp. 241-257, 1981.
- 2) Bai, Y. and Dodd, B.: *Adiabatic Shear Localization—Occurrence, Theories and Applications*, Pergamon, Oxford, 1992.
- 3) Duszek-Perzyna, M.K. and Perzyna, P.: Adiabatic shear band localization in elastic-plastic single crystals, *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 30, pp. 61-89, 1993.
- 4) Poirier, J.-P.: *Creep of Crystals: High-temperature Deformation Processes in Metals, Ceramics and Minerals*, Cambridge Earth Sci. Series 4, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- 5) Ikeda, K., Murota, K. and Nakano, M.: Echelon modes in uniform materials, *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 31, pp. 2709-2733, 1994.
- 6) Mühlhaus, H.-B. and Vardoulakis, I.: The thickness of shear bands in granular materials, *Géotechnique*, Vol. 37, pp. 271-283, 1987.
- 7) Davis, G.H.: *Structural Geology of Rocks & Regions*, John Wiley, Singapore, 1984.
- 8) 三木幸蔵: 岩盤力学入門, 鹿島出版会, 1986.
- 9) Yamaki, N.: *Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells*, North-Holland series in Applied Mathematics and Mechanics Vol. 27, Elsevier, Amsterdam, 1984.
- 10) Hill, R. and Hutchinson, J.W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *J. Mech. Phys. Solid*, Vol. 23, pp. 239-264, 1975.
- 11) Nguyen, S.Q. and Triantafyllidis, N.: Plastic bifurcation and postbifurcation analysis for generalized standard continua, *J. Mech. Phys. Solid*, Vol. 37, pp. 545-566, 1989.
- 12) Zhou, M., Needleman, A. and Clifton, R.J.: Finite element simulations of shear localization in plane impact, *J. Mech. Phys. Solid*, Vol. 23, pp. 239-264, 1975.
- 13) Wriggers, P.: Continuum mechanics, nonlinear finite element techniques and computational stability, in E. Stein ed.: *Progress in Computational Analysis of Inelastic Structure*, pp. 234-287, 1993.
- 14) Morgensern, J. and Tchalenko, N.: Microscopic structures in kaolin subjected to direct shear, *Géotechnique*, Vol. 17, pp. 309-328, 1967.
- 15) Otani, J., Mukunoki, T., and Obara, Y.: Application of X-ray CT method for characterization of failure in solids, *Soils and Foundations*, Vol. 40, No. 2, pp. 111-118, 2000.
- 16) Goto, S. and Tatsuoka, F.: Effect of end conditions on triaxial compressive strength for cohesionless soil, *Advanced Triaxial Testing of Soil and Rock, ASTM STP 977*, pp. 692-705, 1988.

- 17) Sakai, T.: A study of a particle size effect of a trap-door problem with glass beads, *Deformation and Progressive Failure in Geomechanics, Proc. of IS-Nagoya '97* (Ed. by Asaoka, A., Adachi, T. and Oka, F.), pp. 145-150, 1997.
- 18) Asaoka, A. and Noda, T.: Imperfection-sensitive bifurcation of cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries. *Soils and Foundations*, Vol. 35, No. 1, pp. 83-110, 1995.
- 19) Yatomi, C. and Shibi, T.: Antisymmetric bifurcation analysis in a circular cylinder of a non-coaxial cam-clay model. *Deformation and Progressive Failure in Geomechanics, Proc. of IS-Nagoya '97* (Ed. by Asaoka, A., Adachi, T. and Oka, F.), pp. 9-14, 1997.
- 20) 小林一三, 飯塚 敦, 太田秀樹: 正規粘土供試体せん断時における局所変形の遷移. 土木学会論文集, No. 617/III-46, pp. 1-18, 1999.
- 21) Murakami, A., Sakaguchi, H., and Hasegawa, T.: Dislocation, vortex and couple stress in the formation of shear bands under trap-door problems. *Soils and Foundations*, Vol.37, No.1, pp.123-135, 1997.
- 22) Sattinger, D.H.: *Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory*, Lecture Notes in Mathematics 762, Springer, Berlin, 1979.
- 23) Sattinger, D.H.: *Branching in the Presence of Symmetry*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 40, SIAM, Philadelphia, 1983.
- 24) Golubitsky, M. and Schaeffer, D.G.: *Singularities and Groups in Bifurcation Theory Vol. 1*, Springer, New York, 1985.
- 25) Golubitsky, M., Stewart, I. and Schaeffer, D.G.: *Singularities and Groups in Bifurcation Theory Vol. 2*, Springer, New York, 1988.
- 26) Ikeda, K. and Murota, K.: *Imperfect Bifurcation Phenomena in Structures and Materials—An Engineering Use of Group-theoretic Bifurcation Theory* (To appear in Springer).
- 27) Turcotte, D.L.: *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics 2nd ed.*, Cambridge university press, Cambridge, 1997.
- 28) Ikeda, K., Murota, K., Yamakawa, Y. and Yanagisawa, E.: Mode switching and recursive bifurcation in granular materials, *J. Mech. Phys. Solid*, Vol. 45, pp. 1929-1953, 1997.
- 29) 齊木 功, 村上真也, 池田浩宏, 佐野郁雄: 分岐理論によるカオリン粘土のせん断帯の画像解析. 応用力学論文集, Vol. 1, pp. 15-22, 1998.
- 30) Ikeda, K., Murakami, S., Saiki, I., Sano, I. and Oguma, N.: Image simulation of uniform materials subjected to recursive bifurcation (To appear in *Int. J. Eng. Science*).
- 31) Oguni, K., Hori, M. and Ikeda, K.: Analysis on evolution pattern of periodically distributed defects, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 34, pp. 3259-3272, 1997.
- 32) Saiki, I., Terada, K., Ikeda, K. and Hori, M.: The number of unit cells in a representative volume element for microstructural bifurcation encountered in a multi-scale modeling (preprint).
- 33) Kim, S.K.: *Group theoretical methods and applications to molecules and crystals*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- 34) Murota, K., Ikeda, K. and Terada, K.: Bifurcation mechanism underlying echelon-mode formation, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 170, pp. 423-448, 1999.

(2001. 3. 1 受付)

BIFURCATION MECHANISM OF PATTERN FORMATION FOR THREE-DIMENSIONAL UNIFORM MATERIALS

Isao SAIKI, Reiko TANAKA and Kiyohiro IKEDA

Pattern formation is often observed on the uniform (or macroscopically uniform) materials subjected to loading or deformation. In order to reveal the mechanism of pattern formation, we here investigate the mathematical structure of the bifurcation of a three-dimensional uniform domain with periodic boundaries by the group-theoretic bifurcation theory. First, we derive the concrete form of the bifurcation equations for three-dimensional uniform periodic materials by extending the results for two dimensional ones in a straightforward manner. Next, the symmetry of the kernel space of the bifurcation point and that of the bifurcation paths are classified by solving the bifurcation equations. Last, we conduct three-dimensional pattern simulation of the bifurcation phenomena of rocks and minerals in which the joint structure is observed.