

透水係数の空間分布モデルの適用性に関する一考察

齋藤雅彦¹・川谷 健²

¹正会員 博士(工) 神戸大学助手 都市安全研究センター(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

²フェロー会員 Ph.D 神戸大学教授 都市安全研究センター(同上)

現在提案されている種々の透水係数の空間分布モデルのうち、比較的多く用いられる指數関数モデル、自己回帰モデル、べき乗モデルと、著者らが提案している $1/f$ 型モデルを取り上げ、それぞれのモデルによって生成される透水場の統計的性質について比較検討した。その結果、指數関数モデルおよび自己回帰モデルでは、解析スケールが変化する場合には、分散を一意的に定めることができないこと、また、べき乗モデルでは、解像度が変化する場合に分散を一意的に定めることができないことを示した。一方、 $1/f$ 型モデルは、スケールおよび解像度の変化に対する分散の変化が、対数関数で近似され一意的に定まること、また実地盤の観測結果の再現性も優れていることが明らかになった。

Key Words : hydraulic conductivity, geostatistical model, heterogeneity, $1/f$ noise, fractal, variogram, spectrum, auto-correlation function

1. 序論

一般に、地質学的に同一と判断される地層内においても、透水係数は空間的に大きく変動することが多くの既往の調査・研究によって明らかにされている。しかしながら、原位置試験やサンプリング調査によって得られる情報は局所的あるいは平均的なものとならざるを得ず、空間的変動の全貌を把握することは現時点ではほとんど不可能である。

このため、現実に地下水に関する解析を実施する際には、限られた調査地点において得られた調査結果から地質学的に同一と見なすことができる地層については、透水係数は一定値と仮定されることが多い。そして、その限りにおいては、いかに数理的に精緻な解析モデルを用いたとしても、十分信頼性の高い解析結果を得ることは困難である。とくに、地下水汚染問題等の地盤内の物質移動に関しては、地盤内の流速分布が重要な影響を与えるため、その挙動を把握する上で不均質性の影響を無視することはできない。

上記のような問題に対して、地盤の統計的性質や空間的な相関関係を用いて不均質地盤の空間分布モデルを構築し、解析結果の信頼性を確率的に評価しようとする試みがなされている。

Smith and Freeze^{1), 2)} は、空間的な相関性を取り入れた自己回帰モデルを用いて透水係数分布を発生させ、モンテカルロ法により 1 次元および 2 次元浸透場における不均質性の影響について論じている。また、原田・高木³⁾ は、空間的相関性を指數関数型の自己相関関数と仮定した上で、定常揚水試験の信頼性を理論的に評価している。

一方で、透水係数の空間分布を逆解析により評価しようとする試みも多くなっている。奥野ら^{4), 5)} は、逆解析手法の妥当性を検証するために、実地盤に代わり、2 次元浸透場における指數関数型の共分散関数を用いた分布モデルによる模擬地盤を用いている。また、前川ら⁶⁾ は、実測によって得られたバリオグラムに、べき乗型関数を当てはめ、透水係数分布のフラクタル次元を推定し、岩盤内の透水係数分布を推定している。中川・神野⁷⁾ は、トレーサー試験結果と数値計算結果を比較し、それらの適合度から自己回帰モデルのパラメータを評価する方法を提案している。

以上のような確率論的評価あるいは空間分布の推定に用いられる透水係数の空間分布モデルは、実測値から得られた共分散関数やバリオグラムを近似関数で表現したものである。近似関数としては、先に挙げた指數関数、べき乗関数の他、種々のものが提

案されている⁸⁾。

これらの近似関数の適否については、一般に実測値との適合性を基に判断されるが、その理論的背景は明確ではない。

これに対し、著者ら⁹⁾は理論的考察に基づき、透水係数分布の1次元パワースペクトル密度関数が $1/f$ 型となる空間分布モデル（以下 $1/f$ 型モデルと記す）を提案した。しかし、現時点でその統計的性質に関する検討は十分ではない。

また、これらの空間分布モデルを用いてモデル地盤を生成する際に必要なパラメータは、平均値、ばらつきを表すパラメータ（多くの場合は分散）、および空間的な相関性を表すパラメータの3種類に大別され、通常は限られた実測値に基づいて決定される。ここで、平均値以外のパラメータについては、実測値を直接的に用いることができない場合が多い。たとえば、分散に関しては、解析対象領域と調査範囲が一致しない場合があること、調査に用いるサンプルのサイズによって標本分散が左右されること¹⁰⁾等を考慮しなければならない。また、モデル地盤を有限要素法や差分法等の数値解析に用いる際には、サンプルサイズとメッシュサイズあるいはグリッドサイズとの違いも考慮する必要がある。また、相関性を表すパラメータについては、たとえば指数関数モデルにおける相関性を表すパラメータ（積分特性距離）は、地盤固有の値ではなく、概ね解析スケールに比例することが報告されており^{11), 12)}、調査範囲が解析対象領域より小さい場合などは、観測値をそのまま用いると相関性を過小評価する危険性がある。

本研究では、従来提案されている空間分布モデルのうち、比較的よく用いられる指数関数モデル、自己回帰モデルおよびべき乗モデルに加え、著者らの提案する $1/f$ 型モデルをとりあげ、これらのモデルによって生成される模擬地盤の統計的性質を検討する。そして各空間分布モデルの特徴を明らかにした上で、モデルパラメータを設定する際の問題点について考察し、モデルとしての適用性について論じる。

2. 空間分布モデルの統計的性質と生成方法

本章では、対象を2次元等方性地盤に限定し、これに対する各モデルの統計的性質として、自己相関係数、バリオグラム、およびパワースペクトル密度関数（以下パワースペクトルと記す）について整理するとともに、各モデルの模擬地盤の生成方法について述べる。

(1) 指数関数モデル

一般に、自然地盤における土質定数の相関性は、2点間の距離が大きくなるにしたがって低下する。透水係数の場合は、頻度分布がほぼ対数正規分布となることから、相関性は対数変換値で評価される。

指数関数モデルでは、透水係数の対数変換値の確率場に対して、自己相関係数を、式(1)のように指数関数で近似する。

$$\rho(r) = \exp(-r/L) \quad (1)$$

ここに、 $\rho(r)$ は自己相関係数、 r は2点間の距離、 L は積分特性距離（自己相関距離）である。式(1)における積分特性距離 L は、距離の次元を持ち、任意の2点間の相関性を特徴づけるパラメータである。定性的には、 L が0に近づくほどランダム性が増す。しかし、ある地盤に対して固有の値が定まるのではなく、解析スケールによって変化し、概ね解析スケールの1/10程度が一つの目安となることが報告されている^{11), 12)}。

一方、式(2)で定義される（セミ）バリオグラム $\gamma(r)$ は、クリギング推定法等によって空間分布を推定する際に用いられ、自己相関係数との関係は式(3)で示される。

$$\gamma(r) = \frac{1}{2} E[(Y(\mathbf{p} + \mathbf{r}) - Y(\mathbf{p}))^2] \quad (2)$$

$$\gamma(r) = \sigma_Y^2 [1 - \rho(r)] \quad (3)$$

ここに、 $\gamma(r)$ はセミバリオグラム、 $Y(\mathbf{p})$ は位置 \mathbf{p} における透水係数の対数変換値 ($Y(\mathbf{p}) = \log K(\mathbf{p})$)、 E は[]内の期待値を表す記号、 σ_Y は標準偏差である。

つぎに、パワースペクトルは、2次元等方性の場合、以下のように共分散関数を用いてハンケル変換形のスペクトル表現で表せる¹³⁾。

$$R(r) = \sigma_Y^2 \cdot \rho(r) \quad (4)$$

$$S(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda \cdot r) \cdot R(r) \cdot r \cdot dr \quad (0 \leq \lambda < \infty) \quad (5)$$

ここに、 $R(r)$ は共分散関数、 λ は2次元空間周波数ベクトルの大きさ、 $S(\lambda)$ はパワースペクトル、 $J_0(\lambda r)$ は0次のベッセル関数である。式(1)、式(4)および式(5)より、指数関数モデルのパワースペクトルは式(6)のように求められる。

$$S(\lambda) = \frac{2\pi\sigma_Y^2}{L(\lambda^2 + L^2)^{3/2}} \quad (6)$$

指数関数モデルを用いてサンプル場を生成する方法としては、共分散行列をコレスキーフ分解して得ら

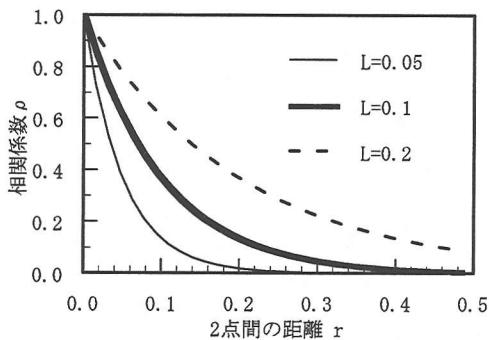


図-1 指数関数モデルの自己相関係数

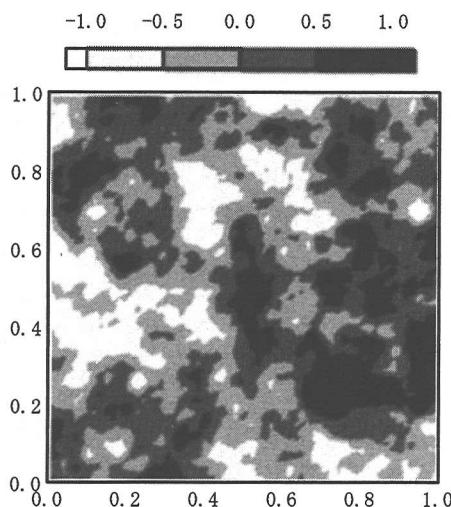


図-2 指数関数モデルによる透水係数分布の一例

れる下三角行列を正規乱数ベクトルに乗じる方法が一般的である。ただし、この方法は、要素数が多くなる場合、すなわち、共分散行列のサイズが大きくなると、メモリー容量の制約を受け、また計算にも長時間を要する。このため、本研究では、式(6)よりパワースペクトルおよびフーリエスペクトルを求めた上で、複素乱数を用いて2次元FFTにより模擬地盤を生成した。

図-1は、 1×1 の領域における自己相関係数の理論値 ($L=0.05, 0.1, 0.2$)、図-2は、 $L=0.1$ として、この方法によって生成された透水係数分布の一例である。ここで、透水係数の対数変換値の平均値 Y_m 、および標準偏差 σ_Y は、それぞれ $Y_m = 0$ および $\sigma_Y = 0.5$ とし、分割数は 64×64 とした。

(2) 自己回帰モデル

2次元等方性の自己回帰モデルは、透水係数の対数変換値 $Y(p)$ の分布が式(7)の自己回帰式に従うもの

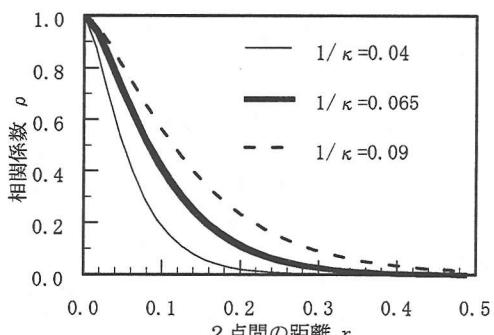


図-3 自己回帰モデルの自己相関係数

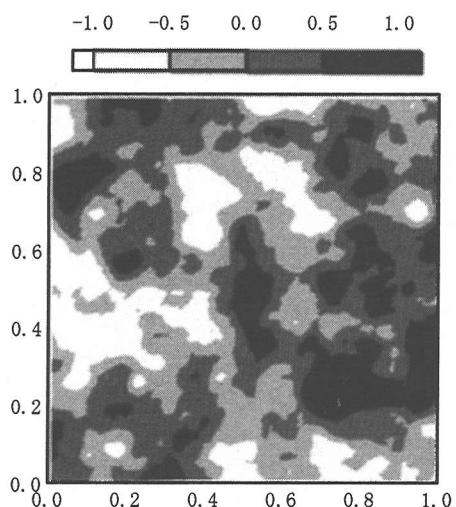


図-4 自己回帰モデルによる透水係数分布の一例

と仮定する。

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \kappa^2 Y = \eta W(x, y) \quad (7)$$

ここに、 κ, η は定数、 $W(x, y)$ は白色雑音場である。

式(7)において、2点間の相関性を特徴づけるパラメータは κ であり、距離の逆数の次元を持つが、指数関数モデルにおける積分特性距離 L と同様に、地盤特有のものではなく、解析スケールに応じて変化する。この自己回帰モデルの共分散関数、およびパワースペクトルは、以下のように与えられる¹³⁾。

$$R(r) = \frac{\eta^2}{4\pi\kappa^2} \kappa r \cdot K_1(\kappa r) = \sigma_Y^2 \cdot \kappa r \cdot K_1(\kappa r) \quad (8)$$

$$S(\lambda) = \frac{\eta^2}{4\pi^2 (\lambda^2 + \kappa^2)^2} = \frac{\sigma_Y^2 \kappa^2}{\pi (\lambda^2 + \kappa^2)^2} \quad (9)$$

ここに, $K_1(\kappa r)$ は1次の第2種変形ベッセル関数である.

自己回帰モデルによるサンプル場は, 式(7)を差分法や有限要素法で解くことによって容易に得られる. しかし, 同一の乱数系列を用いることによってモデル間の相違をより明瞭に示すため, 本研究では指數関数モデルと同様に, 式(9)から2次元FFTによって模擬地盤を生成した.

図-3は, 1×1 の領域における自己相関係数の理論値 ($1/\kappa=0.04, 0.065, 0.09$), 図-4は, $1/\kappa=0.065$ として, 生成された透水係数分布の一例である. このとき, 実現値は, 図-2の指數関数モデルと同一の乱数系列を用いている.

(3) べき乗モデル

べき乗モデルでは, 式(2)のパリオグラムを, 式(10)で表されるべき乗型の関数(フラクタルスケーリング則)によって近似する.

$$\gamma(r)=a \cdot r^{2H} \quad (10)$$

ここで, a, H は定数である. 式(3)および式(10)より, 自己相関係数は式(11)となる.

$$\rho(r)=1-\frac{a}{\sigma_y^2}r^{2H} \quad (11)$$

式(10)において, 2点間の相關性を特徴づけるパラメータは定数 H ($0 < H < 1$) である. 定的には H が小さいほど2点間の相關性は小さい. これまでに報告されている式(10)の適用例によれば, H の値は1次元場において0.1~0.5程度, 2次元場では0.25程度となっている^{6), 14), 15)}. また, σ_y は定数 a および H によって変化する.

先に示した指數関数モデルおよび自己回帰モデルのパリオグラムは $r \rightarrow \infty$ で σ_y^2 に収束するのに対し, べき乗モデルのパリオグラムは無限大に発散する. また, 指數関数モデルのパラメータ L および自己回帰モデルのパラメータ κ は解析スケールによって異なるが, べき乗モデルにおけるパラメータ H はスケールの影響を受けない.

べき乗モデルのパワースペクトルは, 以下のように近似できるとされている^{14), 16)}.

$$S(\lambda)=S(1) \cdot \lambda^{-(2H+d)} \quad (12)$$

ここに, $S(1)$ は, $\lambda=1$ におけるスペクトル密度, d は対象とする空間の次元である. ただし, 式(12)は, $H=0$ の場合は成り立たないことに注意する必要がある. たとえば, 式(10)において, $H=0$ とすると,

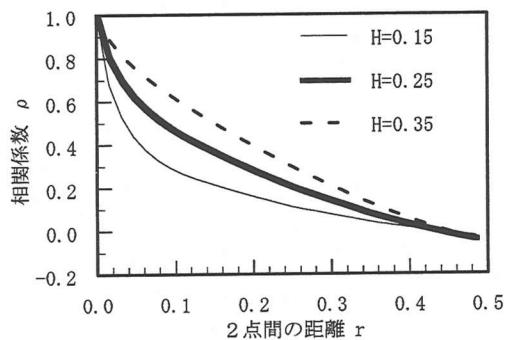


図-5 べき乗モデルによる自己相関係数

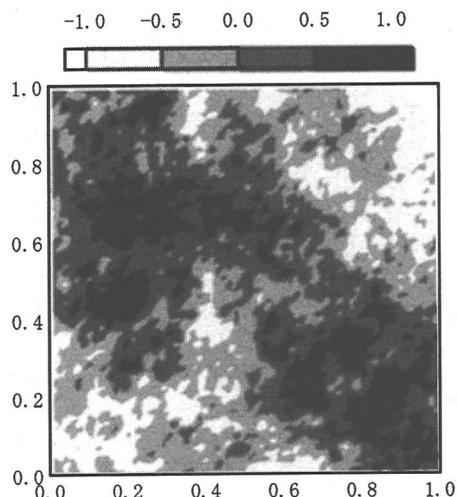


図-6 べき乗モデルによる透水係数分布の一例

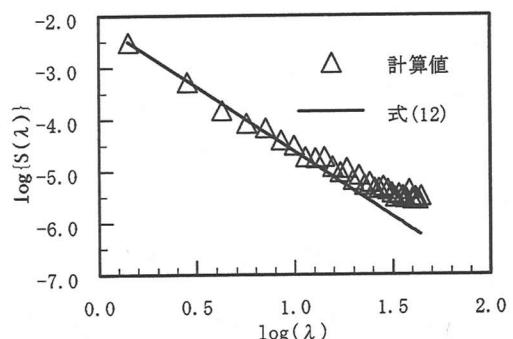


図-7 べき乗モデルのパワースペクトル($H=0.25$)

$\rho(r) \approx a (r > 0)$ となるが, これはほぼ白色雑音場であることを表す. この場合, パワースペクトルも λ に関わらずほぼ一定値となり, 式(12)の形にはならない.

べき乗モデルによるサンプル場の生成は, Bellin and Rubin¹⁷⁾によって開発された生成プログラム(HYDRO-GEN)を用いた. これは, インターネ

ット上で無償公開されている。(http://www.ing.unitn.it/~bellin/Hydro_ge.htm)

図-5は、べき乗モデルにおける自己相関係数($\alpha=0.34$; $H=0.15, 0.25, 0.35$)、図-6は、 $H=0.25$ として、生成された透水係数分布の一例である。また、図-7は、 $H=0.25$ として、異なる乱数を用いて透水係数分布を100回生成し、それらのパワースペクトルの平均値を示している。図-7より、生成された透水係数分布から求めたパワースペクトルは、低い周波数領域では式(12)の直線上にあるが、高い周波数領域では式(12)に従っていないことがわかる。

(4) $1/f$ 型モデル

著者ら⁹⁾が提案している $1/f$ 型モデルは、先に述べた各モデルのように近似関数や微分方程式を用いるのではなく、透水係数分布に関する理論的考察に基づいた一定の生成規則に従って模擬地盤を生成する。以下ではその生成方法の概要と基本的な性質について述べる。

a) 生成方法

図-8に示すように、 x, y 方向の等価透水係数が、

$$K_x^0 = \Phi, \quad K_y^0 = \Psi \quad (13)$$

である異方性の矩形領域を考える。この領域を4個の要素に分割し、それぞれの x, y 方向の等価透水係数を $K_{1x}^{-1}, K_{4x}^{-1}, K_{1y}^{-1}, K_{4y}^{-1}$ とする。また、隣接する2つの要素からなる領域の等価透水係数を $K_{Ax}^{-1}, K_{Bx}^{-1}, K_{Cy}^{-1}, K_{Dy}^{-1}$ とする。

ここで、 x 方向について、不均質性を表す確率変数 $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ を導入して、

$$K_{1x}^{-1} = \alpha_x \Phi, \quad K_{4x}^{-1} = \beta_x \Phi \quad (14)$$

$$K_{Ax}^{-1} = \gamma_x \Phi, \quad K_{Bx}^{-1} = (2 - \gamma_x) \Phi \quad (15)$$

とすると、 K_{2x}^{-1}, K_{3x}^{-1} は、

$$K_{2x}^{-1} = \frac{\alpha_x \gamma_x}{2\alpha_x - \gamma_x} \Phi \quad (16)$$

$$K_{3x}^{-1} = \frac{(2 - \gamma_x)\beta_x}{2\beta_x + \gamma_x - 2} \Phi \quad (17)$$

となる。このとき、 γ_x の制約条件は、

$$0 < \gamma_x < 2 \quad (18)$$

また、 α_x, β_x の制約条件は、

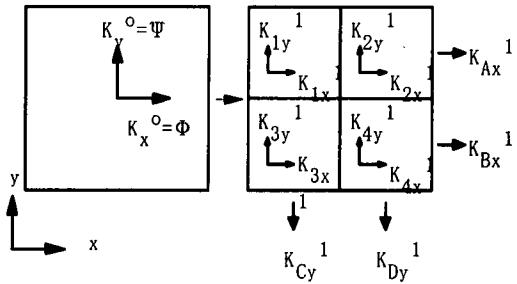


図-8 領域の分割

$$\alpha_x > \frac{\gamma_x}{2}, \quad \beta_x > \frac{2 - \gamma_x}{2} \quad (19)$$

となる。

つぎに、

$$\alpha'_x = \frac{\alpha_x}{\gamma_x}, \quad \beta'_x = \frac{\beta_x}{2 - \gamma_x}, \quad \gamma'_x = \frac{1}{\gamma_x} \quad (20)$$

とおくと、 $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ および γ'_x が、それぞれ確率変数であることから、 $\alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x$ も確率変数となる。このとき、 $\alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x$ の制約条件は、

$$\alpha'_x > 0.5, \beta'_x > 0.5, \gamma'_x > 0.5 \quad (21)$$

となる。さらに、

$$\alpha'_{xm} \geq 1, \beta'_{xm} \geq 1, \gamma'_{xm} \geq 1 \quad (22)$$

ならびに、

$$0.5 < \alpha'_{xn} < 1, \quad 0.5 < \beta'_{xn} < 1, \quad 0.5 < \gamma'_{xn} < 1 \quad (23)$$

とすると、 $\alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x$ のとりうる値は、

$$\alpha'_x = \alpha'_{xm} \quad \text{or} \quad \alpha'_x = \alpha'_{xn} = \frac{\alpha'_{xm}}{2\alpha'_{xm} - 1} \quad (24)$$

$$\beta'_x = \beta'_{xm} \quad \text{or} \quad \beta'_x = \beta'_{xn} = \frac{\beta'_{xm}}{2\beta'_{xm} - 1} \quad (25)$$

$$\gamma'_x = \gamma'_{xm} \quad \text{or} \quad \gamma'_x = \gamma'_{xn} = \frac{\gamma'_{xm}}{2\gamma'_{xm} - 1} \quad (26)$$

となる。このようにして、式(22)を満たす $\alpha'_{xm}, \beta'_{xm}, \gamma'_{xm}$ から式(24)～式(26)により $\alpha'_x, \beta'_x, \gamma'_x$ が与えられると、式(20)より $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ が得られ、さらに式(14)、式(16)、および式(17)より、 K_{1x}^{-1}, K_{4x}^{-1} が得られる。

ここで、 $\alpha'_{xm}, \beta'_{xm}, \gamma'_{xm}$ の確率密度関数は、明かではないが、本研究では、次式に示す指數分布を仮定した。

$$p(\chi_m) = \theta_{xm} \exp\{-\theta_{xm}(\chi_m - 1)\} \quad (\chi_m \geq 1) \quad (27)$$

ここに, $p(\chi_m)$ は確率密度, χ は α' , β' , および γ' を表す記号, θ_{χ_m} はばらつきを支配するパラメータである.

以上の操作を N 回繰り返せば, 領域は 4^N 個の要素に分割され, x 方向の透水係数の空間分布が決定される.

y 方向については, x 方向の透水係数と等しいと仮定する.

このモデルによって生成された透水係数分布は, 自動的に対数正規分布に従うこと, および 1 次元のパワースペクトルは, $1/f$ 型となることが確認されている⁹⁾.

b) 自己相関係数とパワースペクトル

図-9は, $\theta_{\alpha_m} = \theta_{\beta_m} = 1.25$, $\theta_{\gamma_m} = 2.5$ として, 透水係数分布を100回生成し, それらの2次元自己相関係数の平均値を示したものである. 相関係数の等高線がほぼ同心円状になっていることから, この条件では, 透水係数分布は平均すると等方性となっていることがわかる.

図-10は, 図-9における $r_y=0$, $r_x \geq 0$ の断面を示したものであり, 図-11は図-10の r_x 軸を対数軸としたものである. 図-10より, このモデルによって生成された透水係数分布は, 指数関数モデル ($L=0.1$) と比較して, ランダム性が強いことがわかる. また図-11では, 自己相関係数は, ほぼ直線となっていていることから, 対数関数で近似し得ると考えられる.

$1/f$ 型モデルにおける相関性の制御は, 確率変数 α , β , γ のばらつきを定めるパラメータ θ を各分割段階で変化させることによって可能である. 指数分布の性質は, θ が大きくなるほどばらつきが小さくなる. すなわち, 分割を進めていくにつれて θ を大きくしていくれば, 最終段階での透水係数のばらつきは小さくなり, 相関性を高めることができる. 具体的には, i 回目の分割時のパラメータ θ^i に対して $i+1$ 回目のパラメータ θ^{i+1} を次式で定める.

$$\theta^{i+1} = \varepsilon \theta^i \quad (1 \leq i < N, \varepsilon > 0) \quad (28)$$

ここに, ε は定数であり, $0 < \varepsilon < 1$ とすると, 相関性は小さくなり, $1 < \varepsilon$ とすると相関性は大きくなる.

図-12は, $\theta_{\alpha_m}^1 = \theta_{\beta_m}^1 = 1.25$, $\theta_{\gamma_m}^1 = 2.5$ として, それぞれ $\varepsilon = 1.1$ および $\varepsilon = 1.5$ の場合のパワースペクトル(図-9と同様に, 100回の平均値) および回帰直線を示す. ここで, 回帰直線の傾きは, $\varepsilon = 1.1$ の場合に -2.11, $\varepsilon = 1.5$ の場合に -2.70 が得られている. これより, 2次元場における $1/f$ 型モデルのパワースペクトルは, $\varepsilon = 1.0$ とした場合, 概ね λ^{-2} に比例する. また, ε が大きくなると, スペクトルの傾きが増し

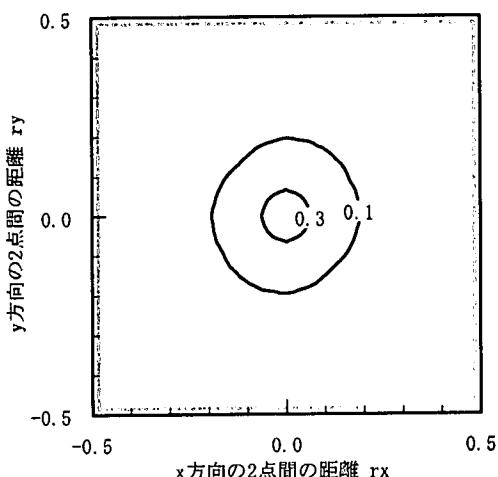


図-9 $1/f$ 型モデルの自己相関係数分布

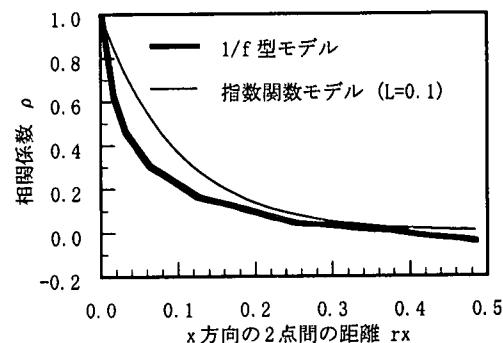


図-10 $1/f$ 型モデルの自己相関係数 ($ry=0$, $rx \geq 0$)

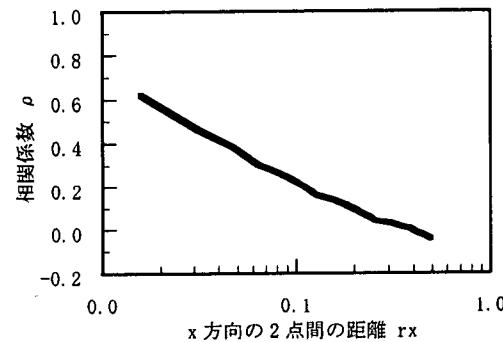


図-11 $1/f$ 型モデルの自己相関係数 ($ry=0$, $rx \geq 0$)
(片対数軸)

ていることから, 相関性が大きくなっていることが示される.

c) $1/f$ 型モデルの問題点と対処

この方法の問題点の一つとして, 局所的に相関性のばらつきが生じる点が挙げられる. たとえば,

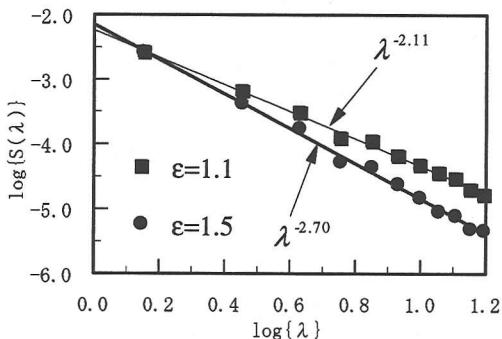


図-12 1/fモデルのパワースペクトル

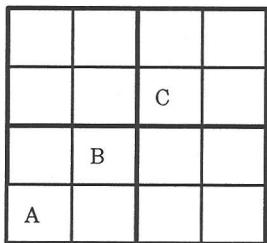


図-13 2回分割する場合

図-13のように2回分割する場合、全体領域は16の小領域（要素）に分割される。このとき、A-B、およびB-Cの要素間距離は等しくなるが、相関性はA-B間の方が強くなる。これは、2回目の分割の際には、1回目に分割された矩形要素ごとに独立して分割規則を適用するため、例え隣接する要素間であっても、その後の分割では連続性が考慮されないためである。このことは、自己相関係数が小さく評価される原因の一つと考えられる。

上記のような問題を回避するために、以下では、図-12で求められたパワースペクトルを直接用いてサンプル場を生成する方法を採用する。すなわち、以下の式(29)を用いてFFTにより透水係数分布を生成する。

$$S(\lambda) \propto \lambda^{\zeta} \quad (29)$$

ここに、 ζ はスペクトルの傾きである。

図-14は、図-12($\varepsilon=1.1$)に基づいて $\zeta=2.1$ として生成された透水係数分布の自己相関係数（100回の平均値）、図-15は、透水係数分布の一例である。図-14より、指数関数モデル ($L=0.1$)とほぼ同様の自己相関係数が得られている。このことから、自然地盤におけるスペクトルの傾き ζ については、 $\zeta=2.0$ 程度が一つの目安と考えられる。

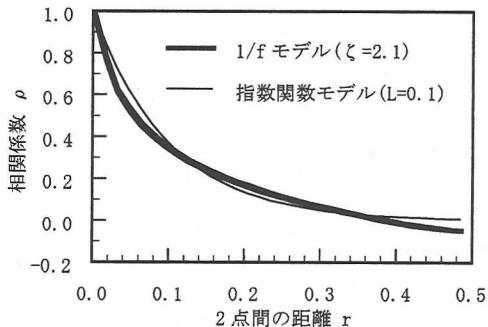


図-14 1/fモデルの自己相関係数($\zeta=2.1$)

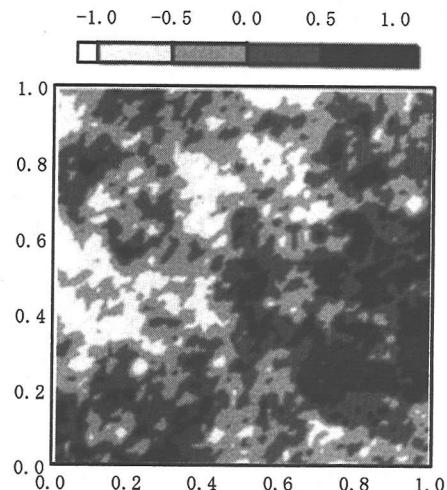


図-15 1/fモデルによる透水係数分布の一例

実際には、図-14の1/f型モデルのような実測値が得られた場合、指数関数モデルが適用されることが多い。しかしながら、図-15と図-2（同一の乱数を用いた指数関数モデルによる透水係数分布）を比較すると、図-15の方がより細かい変動が見られ、両者の分布の性質は明らかに異なることがわかる。

3. 解析スケールの変化と分散の関係

一般に、解析対象となる領域は有限であるが、問題に応じてそのスケールは大きく異なる。たとえば、広域地下水の挙動を解析する場合などは、一辺が數km～数十km程度の領域が解析の対象となるのに対し、建設工事に伴う地下水処理問題などでは、数十m～数百m程度の解析領域を扱うことが多い。また、解析対象領域に対して、調査地点が常に領域全体に渡って均等に配置されているとは限らず、一部の調査範囲のデータをもとに全体のモデルパラメータを

設定しなければならないことも少なくない。

前章では、解析スケールと各モデルにおける相関性に関するパラメータの関係について若干触れたが、本章では、解析スケールと分散の関係について考察する。

(1) 指数関数モデルおよび自己回帰モデル

指数関数モデルおよび自己回帰モデルにおいては、スケールを拡大していくば分散は一定値に収束する。しかし、有限な解析領域の内部にも、それ以下のスケールの領域を無数に含んでおり、これらの部分領域の分散は、当然のことながら全体領域の分散とは異なる。このため、分散を設定する際に、調査範囲が解析対象領域と一致していない場合などでは、観測結果を直接用いることはできない。

以下では、 1×1 および 0.5×0.5 の全体領域をそれぞれ 64×64 個および 32×32 個の同じ大きさの小領域（以下要素と記す）に分割し、透水係数分布を発生させ、その内部から $m \times m$ 個の部分領域を抽出し分散の平均値 $\sigma^2(m)$ を求め、スケール m に対する $\sigma^2(m)$ の変化について調べた。

図-16および図-17の実線は、全体領域を 1×1 とした場合の指数関数モデルおよび自己回帰モデルにおける m に対する $\sigma^2(m)$ の変化を示している。各モデルのパラメータは、それぞれ $L=0.1$ および $1/\kappa=0.065$ であり、領域全体の分散は、 $\sigma_r^2=0.25$ とした。また、横軸は対数目盛で表示している。

これより、 m が大きくなるにしたがって一定値に漸近すること、および解析領域が小さくなるほど分散は減少することがわかる。これに従うならば、要素サイズが同じであれば、解析領域を拡大する場合は $\sigma(m)=\sigma_r$ とし、縮小する場合は、図から直接求めることになる。たとえば、 0.5×0.5 の部分領域の分散は $m=32$ に相当し、 $\sigma^2=0.23$ となる。

図-16および図-17の破線は、 0.5×0.5 の領域に対して 32×32 個の要素に分割し、 $\sigma_r^2=0.23$ として、同様に $\sigma^2(m)$ の変化を求めたものである。このとき、指数関数モデルおよび自己回帰モデルのパラメータ（ $L, 1/\kappa$ ）は、距離の次元を持ち、これらはほぼ解析スケールに比例すると考えられることから、それぞれ $L=0.05$ および $1/\kappa=0.0325$ とした。

実線と破線を比較すると、両者は異なった曲線を示していることがわかる。また、これとは逆の場合、すなわち先に破線が得られていたとしても、分散は0.23程度に収束するため、これを基に実線を得ることはできない。このことは、相関性を表すパラメータを解析スケールに応じて設定したとしても、分散に関しては一意性がなく、領域を拡大または縮小し

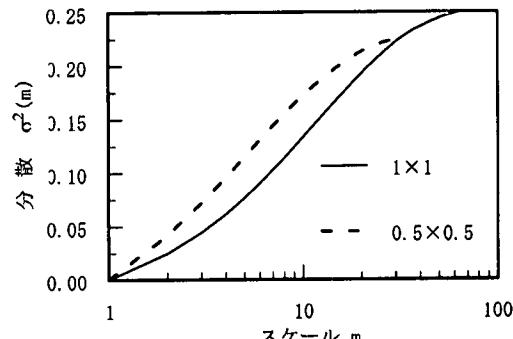


図-16 解析スケールと分散の関係
(指数関数モデル)

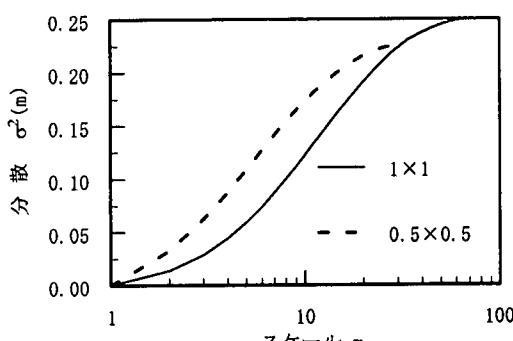


図-17 解析スケールと分散の関係
(自己回帰モデル)

た場合には、統計的性質が変化してしまうことを示している。

すなわち、指数関数モデルおよび自己回帰モデルでは、解析スケールに關係するパラメータによって統計的性質が規定されてしまうため、スケールを変化させると、透水係数分布の性質も変化し、とくに分散を適切に設定することが困難であることがわかる。

(2) べき乗モデル

べき乗モデルのパラメータは、解析スケールとは無関係であり、スケールが変化したとしても、常に同一の値を用いる。

図-18は、図-16および図-17と同様に、 m に対する $\sigma^2(m)$ の変化を示している。ここで用いたパラメータは、それぞれ $a=0.34$ および $H=0.25$ である。これより、べき乗モデルにおいては、解析スケールに応じて分散は一意的に定まり、統計的性質は変化しないことがわかる。すなわち、ある解析スケールにおいてパラメータ a および H が定まれば、どのようなスケールにおいてもその性質は保たれるため、スケールの変化に対しては、べき乗モデルは指数関数モ

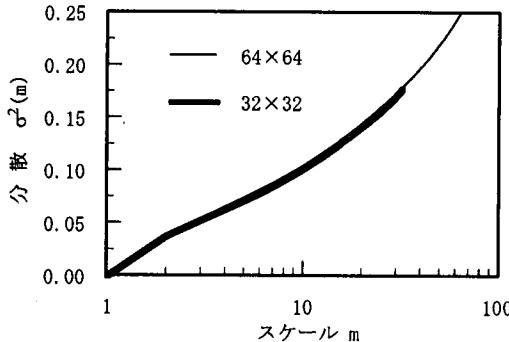


図-18 解析スケールと分散の関係
(べき乗モデル)

デル、および自己回帰モデルと比較して有利である。

(3) 1/f型モデル

1/f型モデルで用いられるパラメータは、式(29)における ζ および比例定数である。ここで比例定数は、Yの分散に関わるが、任意の正数を用いて透水係数分布を生成したとしても、確率分布は正規分布となるため、生成後に平均値および分散を操作することは容易である。また、 ζ に関しては、 $\zeta \approx 2.0$ であることから実質的に必要となるパラメータは分散 σ^2 のみである。

図-19は、図-18と同様に解析スケールと分散の関係を示している ($\zeta=2.1$ の場合)。べき乗モデルと同様に、分散は解析スケールに応じて一意的に定まり、統計的性質はスケールの変化に対して不变であることがわかる。それに加えて、1/f型モデルでは、スケールと分散の関係が、片対数紙上ではほぼ比例関係にあること、すなわち両者の関係は対数関数で表現し得ることがわかる。

これにより、ある解析スケール μ における確率場の分散 $\sigma^2(\mu)$ が既知であれば、スケールと分散の関係が式(30)のような簡単な関数の形で求められ、任意のスケール m に対する分散 $\sigma^2(m)$ を得ることができることになる。

$$\sigma^2(m) = \frac{\sigma^2(\mu)}{\log(\mu)} \log(m) \quad (30)$$

また、図-20は 1×1 の全体領域から 0.5×0.5 の部分領域を抽出した場合（すなわち $m=32$ ）の自己相関係数である。これより、1/f型モデルの自己相関係数は、 $L=0.05$ とした指数関数モデルの自己相関係数と類似しており、スケールに応じた自己相関となっていることが確認できる。

図-21は全体領域および部分領域のバリオグラム

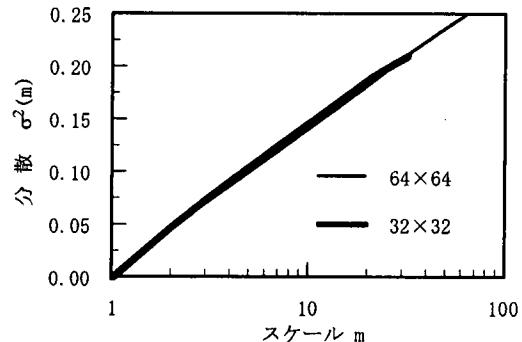


図-19 解析スケールと分散の関係
(1/f型モデル)

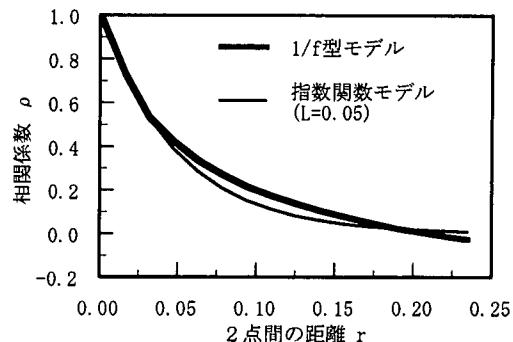


図-20 部分領域の自己相関係数($m=32$)

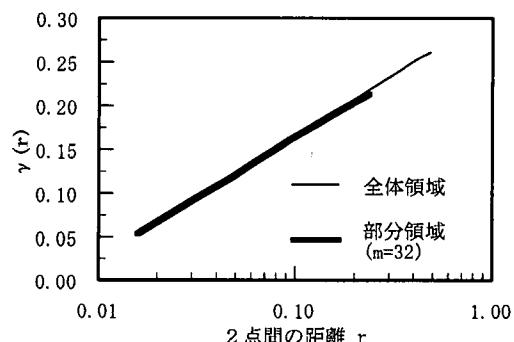


図-21 1/f型モデルのバリオグラム

を示しているが、片対数上で直線的に増加しており、全体領域のバリオグラムは部分領域のバリオグラムを延長することによって得られることがわかる。

このように、1/f型モデルも、べき乗モデルと同様にスケールの変化に対して容易に対応することができる。

4. 解像度の変化と分散の関係

有限要素法や差分法などの数値解析を実行する場

合、メッシュサイズやグリッドサイズは対象とする問題に応じて設定される。不均質場のシミュレーションの際には、各要素内の透水係数の平均値を要素ごとに与える。このとき、平均化する大きさについては、下限値としてBear¹⁸⁾が示したREV(Representative Elementary Volume)以外に明確な基準は存在しない。

一方で、ある解析領域に対して、平均化する要素の大きさが異なれば確率場の分散も変化する。定性的には分割数を多くする(=解像度を上げる)と、分散は大きくなり、粗くすると分散は小さくなる。極端な例として、解析領域内の透水係数を一つの値で代表させるならば、分散は0となる。

また、分散を実測値から求める場合、サンプルのサイズによって分散が変化することも知られている。一般的にはサンプルのサイズを大きくすることは、解像度を下げることを意味し、分散は小さくなる。つまり、分散の実測値を直接数値解析に用いるためには、サンプリングの解像度と数値解析の解像度を等しくする、すなわち要素サイズと等しいサンプルを採取しなければならないが、現実的には不可能であり、サンプルの大きさと数値解析の解像度の違いを考慮した上で分散を設定する必要がある。

本章では、以上のような解像度と分散の関係に着目し、各空間分布モデルにおけるこれらの関係について考察する。

(1) 指数関数モデルおよび自己回帰モデル

ある一定の正方形領域を、 $n \times n$ 個の要素に分割した場合の解像度を n で表し、透水係数の対数値 Y の分散を $\sigma^2(n)$ とする。はじめに、 $\sigma^2(2^N)$ を既知として領域を $2^N \times 2^N$ 個の要素に分割し、透水係数分布を発生させる。つぎに解像度を 2^{N-1} に低下させた場合、要素の面積は4倍となるが、このとき各要素の透水係数の対数値は解像度 2^N の場において隣接する 2×2 個の要素の平均値とする。このような平均化操作を M 回繰り返した場合の分散 $\sigma^2(n)$ の変化について調べる。

図-22および図-23の実線は、 $N=6$ として指数関数モデルおよび自己回帰モデルについて分散 $\sigma^2(n)$ の変化を求めたものである(領域: 1×1 , $L=0.1$, $1/\kappa=0.065$)。任意の解像度 n ($n < 2^N$)における分散は、このようにして得られた曲線を適当な関数で補間することによって得られる。破線は、 $n=32$ における分散を実線から求め、 $N=5$ として同様に $\sigma^2(n)$ の変化を求めたものである。図-22および図-23より、解像度を低下させる場合は、内挿により分散は一意的に定まることがわかる。これは、解像度を変化させ

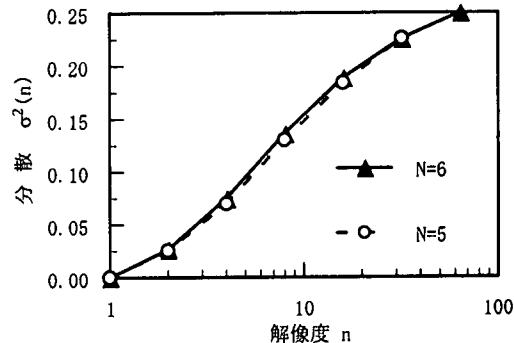


図-22 解像度と分散の関係(指數関数モデル)

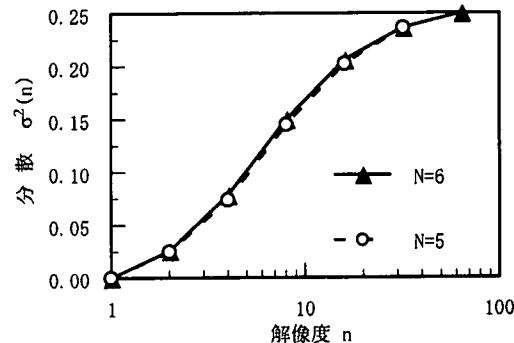


図-23 解像度と分散の関係(自己回帰モデル)

ても、スケールに關係するモデルパラメータは変わらず、統計的性質は変化しないためである。ただし、解像度を上げる場合、すなわち $n > 2^N$ の分散を求めるためには、外挿関数を用いなければならず、その妥当性をその都度確認しておく必要があると思われる。

しかしながら、一例として $100m \times 100m$ の領域から直径 $0.1m$ のサンプルを無作為に採取した場合を考えると、得られた標本分散は解像度 1000 の確率場に対応するものであり、図-22あるいは図-23の関係を得るために $N=10$ の場を基準にする必要がある。つまり実際には解析対象領域が大きくなると、これらの関係を得ることは計算上困難と考えられる。

(2) べき乗モデル

指數関数モデルおよび自己回帰モデルと同様に、 $N=6$ として平均化操作によって分散の変化を求め、 $n=32$ における分散から同様に $N=5$ の場合の分散の変化を求めた(図-24)。ここで、 $N=6$ としたときのパラメータは、それぞれ $a=0.34$, $H=0.25$ とした。

べき乗モデルの場合、分散はパラメータとして陽に表れないが、 a によって変化させることができる。 $N=6$ のとき、 $n=32$ の分散は $n=64$ の分散の約0.85倍であることから、 $N=5$ では、 $a = 0.34 \times 0.85 = 0.29$ とした。

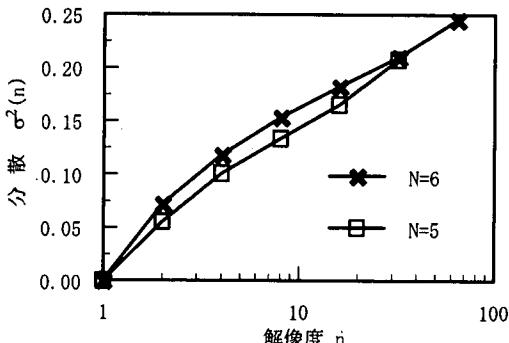


図-24 解像度と分散の関係（べき乗モデル）

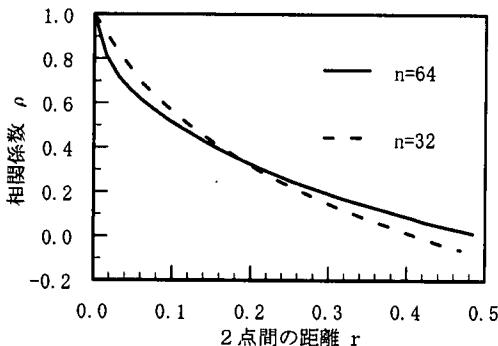


図-25 平均化による自己相関係数の変化
(べき乗モデル)

図-24より、 $N=6$ と、 $N=5$ の場合では分散の変化が異なっており、一意性が無いことがわかる。また、図-25は $N=6$ における解像度 $n=64$ および $n=32$ の場合の自己相関係数(100回の試行の平均値)を示しており、平均化の前後で自己相関係数を比較したものである。これより、平均化後の自己相関係数は、もとの自己相関係数と異なっていることがわかる。つまり、平均化することによって統計的性質が変化するため、分散が一意的に定まらないものと考えられる。

(3) $1/f$ 型モデル

これまでと同様に、平均化操作による分散の変化について検討する。図-26は、 $N=6$ および $N=5$ の場合の分散の変化を示している。ここで用いたパラメータは、 $\zeta=2.1$ 、 $\sigma^2(64)=0.25$ 、 $\sigma^2(32)=0.205$ とした。

図-26は、2章においてスケール変化と分散の関係を示した図-19とほぼ同一の関係であることがわかる。すなわち、 $1/f$ 型モデルでは、スケールが変化する場合と同様に、片対数紙上で直線分布となり、分散の変化は対数関数となっている。また、解像度を変化させたとしても、分散は一意的に定めること

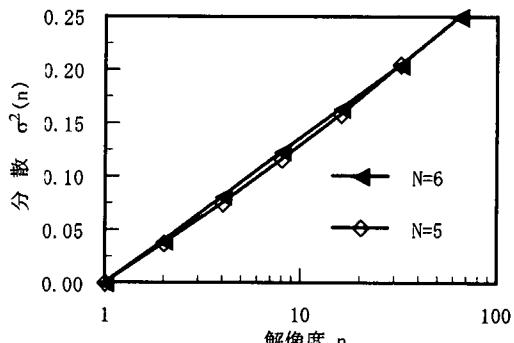


図-26 解像度と分散の関係（ $1/f$ 型モデル）

ができ、任意の解像度に対する分散を容易に計算することが可能である。

たとえば、解像度 ν の確率場に対する標本分散 $S^2(\nu)$ が得られている場合、任意の解像度 n ($n \geq 1$)における分散 $\sigma^2(n)$ は、次式より推定することができる。

$$\sigma^2(n) = \frac{S^2(\nu)}{\log(\nu)} \log(n) \quad (31)$$

このように、 $1/f$ 型モデルの場合、式(30)および式(31)を用いれば、解析スケールと調査範囲の相違、およびサンプルサイズと数値解析上の分割サイズの相違を考慮した分散を容易に設定することができる。

ここで、解像度変化と分散の関係が、スケール変化と分散の関係と等しくなる理由は、 $1/f$ 型モデルにおけるサンプル場の生成方法から説明することができる。

正方形領域の分割によって $1/f$ 型モデルのサンプル場を生成する場合、必要となるパラメータは、 θ^1 および ε である。ここで、 $\varepsilon \approx 1$ とすると実質的に必要なパラメータは変動の大きさを決める θ^1 のみである。また、分割のプロセスは、解析スケールを一定として解像度を上げていくことを前提に構成されているが、常に相対的な関係のみを用いており、絶対的な長さは無関係である。

つまり、この生成プロセスでは、スケールが一定の場において解像度を上げるプロセスと、解像度が一定の場においてスケールを拡大していくプロセスの区別は無い。したがって両者は統計的に同じ性質を示すのである。

5. 実測値との比較

広域的な透水係数分布について、これまでにいく

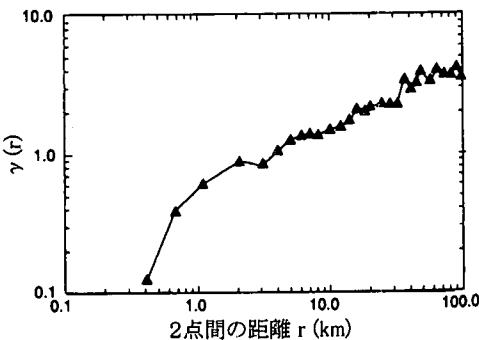


図-27 砂岩層における透水量係数のバリオグラムの実測例¹⁸⁾

つかの調査事例が報告されている。ここでは、Desbarats and Bachu¹⁹⁾によって報告されたカナダ・アルバータ州内の約70,000km²での透水量係数分布の調査結果を取り上げ、1/f型モデルによる透水量係数分布と比較し、モデルの妥当性を検証する。

(1) 解析領域および解析方法

調査対象領域は概ね200km×350kmであり、地質は砂岩層である。なお、その他調査内容の詳細については、参考文献を参照されたい。

図-27は、透水量係数の自然対数変換値のバリオグラムを両対数紙に表示したものである。このようにバリオグラムが一定値に収束しない場合、指數関数モデルや自己回帰モデルは適用し難いと考えられる。

ここで、調査地点間の最小距離は400mとなっており、解析スケールは短辺でも200kmであるから、この領域をモデル化するためには、500×500個の要素が必要となる。これは計算する際に大きな負荷となる。しかしながら、1/f型モデルのバリオグラムは、対数関数で近似し得るので外挿が可能である。この性質を利用して、まず51.2km四方の領域をとりあげ、128×128個の領域に分割し、バリオグラムを求める。つぎにこれを100kmに延長し、図-27と比較する。

(2) 解析結果

図-28は、 $\zeta=2.0, 2.1, 2.2$ として1/f型モデルにより透水量係数分布を30回発生させ、それらのバリオグラムの平均値から片対数紙上で回帰直線を求めたものである。ここで分散 σ_r^2 は、図-27における $r=25\text{km}$ 付近の $\gamma(r)$ のおよその値から、 $\sigma_r^2=2.2$ ($\sigma_r=1.48$)とする。これより、 $\zeta=2.2$ とした場合に最も再現性が高いと判断した。

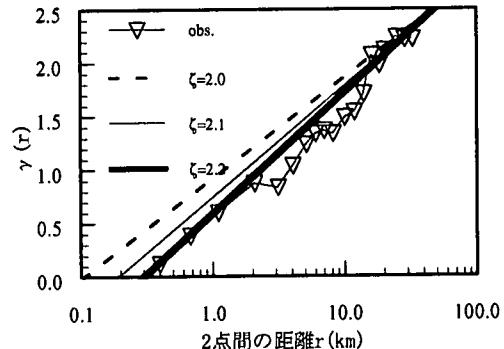


図-28 1/f型モデルによるバリオグラム

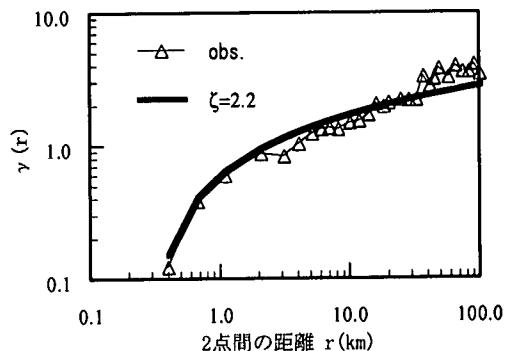


図-29 バリオグラムの実測例との比較

図-29は、 $\zeta=2.2$ の場合の回帰直線を両対数紙上に表示し、実測例と比較したものである。 $\zeta=2.2$ として求めたバリオグラムは図-27の実測値の特徴を広範囲にわたって良好に再現していることがわかる。

以上のように、1/f型モデルは実地盤を模擬するモデルとして妥当性が高いことが確認される。

6. 結論

本論文では、透水係数の空間分布モデルについて、指數関数モデル、自己回帰モデル、べき乗モデル、および1/f型モデルをとりあげ、それらの統計的性質等について整理した上で、モデルの適用性について考察した。以下に得られた結果をまとめると。

- 1) 2次元等方性地盤に対する1/f型モデルのパワースペクトルは、ほぼ $1/\lambda^2$ に比例する。
- 2) 1/f型モデルの自己相関係数は、対数関数となる。また、相関性は解析スケールに応じて変化し、これを指數関数モデルで近似した場合の積分特性距離 L は、解析スケールの0.1倍程度となる。これは、実地盤より得られている知見と一

致する。

- 3) 指数関数モデルおよび自己回帰モデルは、解析スケールの変化に対して分散が一意的に定まらない。
- 4) べき乗モデルは、解像度が変化すると自己相関係数が変化し、分散も一意的に定まらない。
- 5) $1/f$ 型モデルでは、スケールの変化および解像度の変化に対して、分散は同様に変化し、対数関数で近似し得る。このためいづれの変化に対しても一意的に分散が定まるとともに、容易に内挿・外挿することができる。
- 6) 実測によって求めたれたバリオグラムに対して、 $1/f$ 型モデルは良好な再現性を有することが確認された。

以上のように、 $1/f$ 型モデルは、透水係数の空間分布モデルとして優れた特徴を持っていることが明らかになった。また、これらに加えて、 $1/f$ 型モデルの最大の利点は、他のモデルのように関数近似に基づくものではなく、確率的な数理モデルが存在する点である。

なお、本研究では、2次元等方性地盤を対象としたが、3次元および異方性地盤への拡張は、パワースペクトル分布を操作することにより可能であると考えられる。

今後の課題としては、多くの実地盤に適用することによって、実務に用いる際の問題点等を把握すること、および地盤の不均質性が重要となる地下水汚染問題等の移流分散現象へ適用し、分散係数のスケール依存性や解像度依存性について検討すること等が挙げられる。

参考文献

- 1) Smith, L. and Freeze, R. A. : Stochastic analysis of steady state groundwater flow in a bounded domain, 1. One-dimensional simulations, *Water Resources Research*, Vol.15, No.3, pp.521-528, 1979.
- 2) Smith, L. and Freeze, R. A. : Stochastic analysis of steady state groundwater flow in a bounded domain, 2. Two-dimensional simulations, *Water Resources Research*, Vol.15, No.6, pp.1543-1559, 1979.
- 3) 原田守博、高木不折：不均質帶水層における透水試験結果の不確定性、土木学会論文集、No.443／II-18, pp.109-112, 1992.
- 4) 奥野哲夫、鈴木 誠：不圧地下水を対象とした拡張カルマンフィルタによる透水係数の空間分布推定法、土木学会論文集、No.469／III-23, pp.93-102, 1993.
- 5) 奥野哲夫、鈴木 誠、市川康明：複数の揚水試験結果を用いた透水係数の空間分布推定と地下水流动の将来予測、土木学会論文集、No.493／III-27, pp.165-174, 1994.
- 6) 前川恵輔、尾方伸久、柳澤孝一、高瀬博康：フランタル理論による堆積岩中の透水係数分布の推定、動燃技報、No.98, pp.71-76, 1996.
- 7) 中川 啓、神野健二：現地トレーサー試験と数値計算による不均一浸透場の推定、土木学会論文集、No.656／II-52, pp.47-59, 2000.
- 8) de Marsily, G. : *Quantitative Hydrogeology*, Academic Press Inc., 303p., 1986.
- 9) 斎藤雅彦、川谷 健：透水係数の空間分布に関する理論的考察、土木学会論文集、No.645／III-50, pp.103-114, 2000.
- 10) 田代猛彦、片桐真：大型透水試験機による森林土壤の透水係数の測定（I），日本林学会誌，Vol.74, pp.373-382, 1992.
- 11) Gether, L. W. : *Stochastic Subsurface Hydrology*, Prentice-Hall, New Jersey, 1993.
- 12) Di Federico, V. and Neuman, S. P. : Scaling of random fields by means of truncated power variograms and associated spectra, *Water Resources Research*, Vol.33, No.5, pp.1075-1085, 1997.
- 13) 小倉久直：確率過程入門, 163-168p., 森北出版, 1998.
- 14) Chang, Ching-Min and Kemblowski, M. W. : Infiltration in soils with fractal permeability distribution, *GROUND WATER*, Vol.31, No.2, pp.187-192, 1993.
- 15) Neuman, S. P. : Generalized scaling of permeabilities: validation and effect of support scale, *Geophys. Res. Lett.*, Vol.21, pp.349-352, 1994.
- 16) Mandelbrot, B. B. and Van Ness, J. W. : Fractional brownian motions, *SIAM Review*, Vol.10, pp.422-437, 1968.
- 17) Bellin, A. and Rubin, Y. : HYDRO_GEN: A new random number generator for correlated properties, *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, Vol.10, No.4, pp.253-278, 1996.
- 18) Bear, J. : *Dynamics of fluids in porous media*, 764p., Elsevier, New York, 1972.
- 19) Desbarats, A. J. and Bachu, S. : Geostatistical analysis of aquifer Heterogeneity from the core scale to the basin scale: A case study, *Water Resources Research*, Vol.30, No.3, pp.673-684, 1994.

(2001. 2. 13 受付)

STUDY ON APPLICABILITY OF GEOSTATISTICAL MODELS OF HYDRAULIC CONDUCTIVITY

Masahiko SAITO and Takeshi KAWATANI

This paper investigates the applicability of geostatistical models of hydraulic conductivity. The model studied herein are statistical properties of exponential model, autoregressive model, and power model in addition to $1/f$ model which authors have proposed. The results show that the variance is not uniquely determined in the former three models because the change of the variance depends on the domain size in both exponential model and autoregressive model and depends on the resolution in power model. On the other hand, in $1/f$ model, the variance is uniquely determined regardless of the domain size and the resolution. Moreover, the $1/f$ model can reproduce well the observed variogram.