

局所5次スプライン内挿法(QSI法)を利用した コロケート格子による流体解析手法

牛島 省¹・瀬津 家久²・山上 路生³・坂根 由季子³

¹ 正会員 工博 京都大学大学院 助教授 環境地球工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

² フェロー会員 工博 京都大学大学院 教授 環境地球工学専攻

³ 学生員 京都大学大学院 環境地球工学専攻

離散化された変数の局所的な分布を5次スプライン関数により4階微分まで連続な関数として表現し、基礎方程式中の移流項をその微分量から計算する計算手法(QSI法)を提案した。このQSI法を1次元および2次元の移流問題に適用し、QSI法の有効性を確認した。さらに、実際の流体計算へ適用するため、collocated格子における安定な計算手法にQSI法を導入した。2次元キャビティ流れの解析を行った結果、5次風上差分に見られるstaggered格子からcollocated格子への移行に伴う精度の低下がQSI法には見られず、QSI法では逆に精度が向上するという傾向が確認された。これより、QSI法はstaggered格子において5次風上差分より高精度であるだけでなく、特にcollocated格子において同手法より有効性が高いことが示された。

Key Words : QSI method, quintic spline function, collocated grid, convection term, cavity flow

1. 緒言

流体解析においては、基礎方程式中の移流項などに対する解析スキームの離散化精度や計算格子点に対する変数配置の方法などが、得られる解の精度を大きく左右する一つの要因であることから、従来より多くの検討が行われ、各種の計算手法が提案されている。

近年、水工学の分野においても、非線形乱流モデルや各種の低Reynolds数乱流モデルなど、乱流構造の詳細を扱う解析モデルの適用性が検討されるようになった^{1),2)}。このようなRANSモデルの検証や精度比較の際には、解析スキームの精度が十分高いことが必要となる。すなわち、スキームに起因する数値拡散により、2次流の強度が左右されたり、壁面付近における差分精度の低下が内部流動に影響しないよう配慮することが重要である。特に、解析対象が高次の乱流特性量などの詳細なものになる程、それに適合した解析精度を有する解析スキームを選択することが必要である。

これまでに主として移流問題を対象として提案された高次精度のスキームとしては、高次の中心差分に数値拡散項を付加して安定化させる原理に基づく3次風上差分³⁾や5次風上差分⁴⁾、計算点上の値に対する2次以上の多項式による空間内挿を利用する手法⁵⁾、また導関数に関する離散化式を扱うCIP法⁶⁾、その他にも6-point scheme⁷⁾、HORNETスキーム⁸⁾など数多くのものがある。高精度のスキームが必要とされ

る乱流の直接計算(DNS)までを視野に入れた場合、既往研究^{4),9),10)}などを参考にすると、解析精度に関しては高々5次精度を有するスキームが現時点ではほぼ妥当であることが示されている。

一方、このような解析スキームの精度を計算格子点への変数配置と関連づけて検討した例は比較的少数であるが、境界適合格子や非構造格子などへの拡張性を考慮すると、staggered格子(食い違い格子)ではなく、圧力と流速成分が同一の点に定義されるcollocated格子を利用する解析手法が有効である。

これらの背景を考慮して、本研究では、5次風上差分と同等あるいはそれ以上の精度を有し、しかもcollocated格子を利用した解析アルゴリズムとの親和性のすぐれたスキームを提案することを目的とした検討を行った。

本研究で提案する計算手法では、離散化された変数 ϕ の x_i 方向の局所的な分布を5次スプライン関数(quintic spline function)により4階微分まで連続な関数 $S(x_i)$ として表現する。そして、基礎方程式中の非保存形表示された移流項中の ϕ の空間微分を $S(x_i)$ の微分量から計算するとともに、計算点上で空間内挿が必要な際には、 $S(x_i)$ からその値を求める。本研究では、この計算手法をQSI(quintic spline interpolation)法と表記する。スプライン関数を利用した解析手法としては、離散化された ϕ の分布を3次スプライン関数

で空間内挿し、Lagrange スキーム上で移流項を解析する方法が著者の 1 人により LCS 法¹¹⁾として提案されている。この LCS 法は 3 次風上差分法よりも高精度であることが示されているが、ここでは 5 次精度相当のスキームを提案するために、新たに 5 次スプライン関数を用いるとともに、計算処理を簡単なものとするため Lagrange スキームではなく、内挿関数の微分量を Euler スキームで利用するものとした。

本研究では、QSI 法を 1 次元および 2 次元の移流問題に適用し、他のスキームとの精度の比較を行った。特に、1 次元計算では壁面近傍の計算点配置を想定した精度の比較を行い、QSI 法の有効性を確認した。さらに、実際の流体計算へ適用するため、collocated 格子において、圧力振動を起こさない安定なスキームに QSI 法を導入した。この計算手法を用いて 2 次元キャビティ流れの解析を行った結果、5 次風上差分に見られる staggered 格子から collocated 格子への移行に伴う精度の低下がなく、QSI 法では逆に精度が向上するという傾向が確認された。従って、QSI 法は staggered 格子において 5 次風上差分より高精度であるだけでなく、特に collocated 格子において同手法より有効性が高いことが示された。

2. 数値解析手法

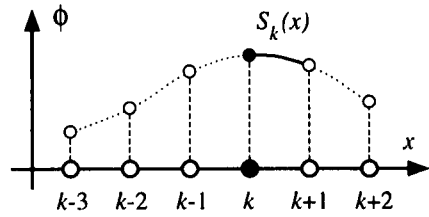
(1) QSI 法による移流項の計算

3 次元空間中のある方向の座標成分 x_i ($i = 1, 2, 3$) を簡単のため x と表示するとき、区間 $[x_k, x_{k+1}]$ (ここに $x_k < x_{k+1}$; $k = 1, 2, \dots, N-1$) において、5 次スプライン関数 $S_k(x)$ は一般に次のような 5 次の多項式として表される。

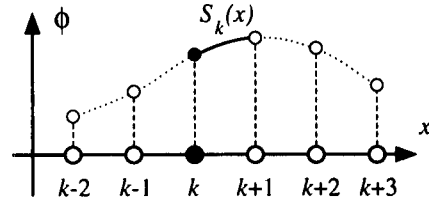
$$S_k(x) = A_k + B_k(x - x_k) + C_k(x - x_k)^2 + D_k(x - x_k)^3 + E_k(x - x_k)^4 + F_k(x - x_k)^5 \quad (1)$$

ここで、 $A_k, B_k, C_k, D_k, E_k, F_k$ は区間ごとに定められる係数である。これらの係数は、全節点において関数値が ϕ_k に一致することに加えて、節点 x_k ($k = 2, 3, \dots, N-1$) において、4 階微分まで関数が節点の両側で連続であること、また両端 x_1 および x_N で必要な数の境界条件を与えることにより、一意的に定めることができる。

しかしながら、式 (1) の係数を求めるために、このような手順で導かれた行列方程式は計算の際に数値的に不安定になる場合があることが指摘されている¹²⁾。これに対して、2 次の B スプライン関数を用いて、求めようとする 5 次の自然スプライン関数の 3 階微分関数を定めることにより、数値的に安定な行列方程式を



(a) $u \geq 0$ の場合



(b) $u < 0$ の場合

図-1 区間 $[x_k, x_{k+1}]$ における $S_k(x)$ の導出

導き、式 (1) の係数を算出する方法が提案されている¹³⁾。QSI 法では、これと同様のアルゴリズムを利用するが、後述のように、移流項の評価のためには一部の係数 (B_k) のみが得られればよいので、本研究では他の係数の算出部分をスキップすることで、若干の高速化を図っている。この計算アルゴリズムを用いる場合、3 個以上計算節点があれば 5 次スプライン関数が定まるが、計算精度と計算時間を考慮した結果、QSI 法では、6 個の節点を用いてその中に含まれるある 1 つの区間の 5 次スプライン関数を求めることとした。また、試計算の結果、解析精度を向上させるためには、流速の符号に応じて利用する節点を定めるのが有効であることが見いだされた。

流速 u が定数として与えられる非保存系表示された 1 次元場の移流方程式

$$u \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

を例にとると、式 (2) 左辺第 2 項の空間微分が 5 次スプライン関数の 1 階微分として求められる。具体的には、節点 x_k において、図-1 に示すように流速 u の値に応じて風上側に 3 点、その逆側に 2 点の節点を加えた合計 6 点の節点から区間 $[x_k, x_{k+1}]$ における 5 次スプライン関数 $S_k(x)$ を定める。この $S_k(x)$ を用いれば、節点 x_k における式 (2) 左辺第 2 項は次式のようになる。

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_k = u \frac{\partial S_k(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_k} = u B_k \quad (3)$$

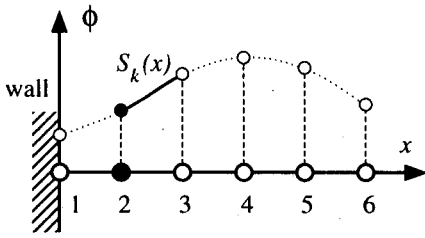


図-2 壁面近傍における $S_k(x)$ の導出例

なお、この5次スプライン関数を求める場合には、節点間隔が必ずしも等間隔である必要はないため、格子配置が不等間隔であることに起因する煩雑な離散化式の導出などは不要となる。

(2) 壁面近傍における QSI 法の特徴

5次精度の風上差分⁴⁾では、式(2)左辺第2項は次のように離散化される。

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_k = u [\phi_{k+3} - 9\phi_{k+2} + 45\phi_{k+1} - 45\phi_{k-1} + 9\phi_{k-2} - \phi_{k-3}] / (60\Delta x) + |u| [-\phi_{k+3} + 6\phi_{k+2} - 15\phi_{k+1} + 20\phi_k - 15\phi_{k-1} + 6\phi_{k-2} - \phi_{k-3}] / (60\Delta x) \quad (4)$$

上記の離散化式からわかるように、1次元の5次風上差分では u の符号に応じて、対象とする計算点の周辺の合計6点の計算点を利用する。このため、壁面近傍領域においては、壁面方向に十分な数の計算点を確保できないという問題が生ずる。これは高精度の差分法一般に見られる問題であり、壁面付近では利用できる計算点数の制限を受けるため、流体側に偏った計算点上の変数を用いて差分精度を確保したり、利用する計算点数が少ない低次の差分スキームに切り替えるなどの方法が一般に取られる。例えば、図-2に示す節点2の計算点においては、壁面側の利用可能な計算点は節点1の1点のみである。このため、節点2では1次の風上差分、また同様に節点3では3次の風上差分に切り替えるという方法が考えられる。

QSI法においても当然壁面の影響を避けることはできないが、例えば図-2に示される節点2においては、節点1から6までの6点の ϕ を用いて節点2と3の間の区間における5次スプライン関数を求めれば、式(3)を用いて式(2)左辺第2項を求めることが可能である。この方法では後述するように図-1に示した方法と比較して精度が低下するが、1次および3次の風上差分を用いる場合と比較して精度が高い。また、図-1に示す方法との違いは、 $S_k(x)$ を算出する節点位置の違いだけであるので、計算手順が簡単であることも利点となる。

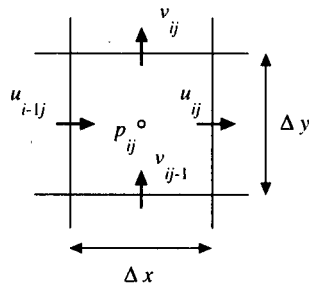


図-3 staggered 格子上的変数の配置例

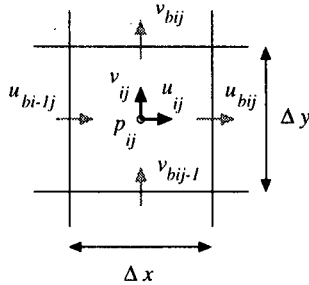


図-4 collocated 格子上的変数の配置例

(3) collocated 格子における流速と圧力の計算法

QSI法を実際の流体計算に適用するため、staggered 格子より拡張性の点で有利な collocated 格子における解析アルゴリズムに同手法を導入する。

流速と圧力が同一の計算点上で定義される regular 格子を利用する場合、流速と圧力が一点おきに振動する不自然な解が発生することが指摘されている¹⁴⁾。この振動解は、2次元場ではチェッカーボード状の流速と圧力の分布をもたらすため、チェッカーボード問題といわれることがある¹⁴⁾。図-3に示す staggered 格子はこのような圧力振動を抑制するために提案されたものである。一方、Rhie and Chow¹⁵⁾が提案し、その後 FLIP¹⁶⁾などの手法に利用されている collocated 格子は、セル中心に流速と圧力を配置し、さらに振動解を防ぐためにセル境界面で定義される流速を利用する。

この手法で用いる collocated 格子では、図-3に示す staggered 格子と異なり、図-4に示すように、セルの中心に圧力と流速が定義され、さらにセル境界においても流速が定義される。セル中心において圧力項を除いた運動方程式から流速の推定値が求められ、これをセル境界面上に空間内挿した流速を用いて圧力計算が行われる。連続式を満足するよう補正されたセル境界面上の流速は再びセル中心に空間内挿されて新しい計算ステップの流速値が求められる。この方法に基づけば、Koshizukaら¹⁷⁾が示した圧力振動モードの抑制作用と同様の効果により、チェッカーボード問題を起こすことなく、collocated 格子において流速と圧力がカップリングする問題を扱うことができる。

具体的な解析手順を以下に示す。解析対象となる基礎方程式は、次式で示される2次元場の連続式とNavier-Stokes方程式である。ただし、ここでは外力項は特に問題とならないので省略している。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

式(6)および(7)の移流項と拡散項をまとめてそれぞれ f_u および f_v と表す。

$$f_u^n = -u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

$$f_v^n = -u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

式(8)および式(9)中の移流項は、QSI法により評価される。圧力項をSMAC法¹⁸⁾に基づき陰的に扱うと次式が導かれる。

$$u^{n+1} = u^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} + FU^n \Delta t \quad (10)$$

$$v^{n+1} = v^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} + FV^n \Delta t \quad (11)$$

時間方向の離散化に3次精度のAdams-Bashforth法(以下AB法)¹⁹⁾を用いる場合には、 FU^n と FV^n は以下のように表される。

$$FU^n = \frac{23f_u^n - 16f_u^{n-1} + 5f_u^{n-2}}{12} \quad (12)$$

$$FV^n = \frac{23f_v^n - 16f_v^{n-1} + 5f_v^{n-2}}{12} \quad (13)$$

ここで、セルの中心に位置し、次式で定義される流速 u_c と v_c を導入する。

$$u_c^n = u^n + FU^n \Delta t \quad (14)$$

$$v_c^n = v^n + FV^n \Delta t \quad (15)$$

上式は、式(10)および式(11)から圧力項を除いたものとなっている。すなわち、

$$u^{n+1} = u_c - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \quad (16)$$

$$v^{n+1} = v_c - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} \quad (17)$$

一方、セル境界上に位置する流速 u_b および v_b の推定値である \hat{u}_b と \hat{v}_b は、それぞれセル中心の流速 u_c および v_c を空間内挿して定める。QSI法を用いる場合には、空間内挿に5次スプライン関数 $S_{xij}(x_b)$ および $S_{yij}(y_b)$ を利用することができる。なお、空間内挿に関して精度向上を図る既往研究も見られるが²⁰⁾、後述する2次元キャビティ流れの計算では、空間内挿法による解析精度の相違はほとんど認められなかった。このため、計算条件によっては、実際上線形内挿を用いても支障はないようである。

圧力場は \hat{u}_c と \hat{v}_c を用いて計算する。すなわち、 u_b^{n+1} と v_b^{n+1} が次の連続式と圧力勾配を含んだ方程式を満足すると考える。

$$\frac{\partial u_b^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v_b^{n+1}}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

$$u_b^{n+1} = \hat{u}_b - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \quad (19)$$

$$v_b^{n+1} = \hat{v}_b - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} \quad (20)$$

式(19)と式(20)を式(18)に代入することにより次の圧力のPoisson方程式が導かれ、これより圧力場が計算される。

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{\partial \hat{u}_b}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}_b}{\partial y} \right) \quad (21)$$

このPoisson方程式から得られた圧力を用いて、式(19)と式(20)より u_b^{n+1} と v_b^{n+1} が求められる。ここで、 Δu_b と Δv_b を次式のように定義する。

$$\Delta u_b = u_b^{n+1} - \hat{u}_b \quad (22)$$

$$\Delta v_b = v_b^{n+1} - \hat{v}_b \quad (23)$$

上式の Δu_b と Δv_b は、式(16)および式(17)の右辺第2項の圧力勾配に相当する。しかし、式(22)と式(23)から計算された Δu_b と Δv_b はセル境界で得られているため、これらを再び空間内挿してセル中心における値を求める。その結果を式(16)および式(17)に用いることにより、最終的に u^{n+1} と v^{n+1} が得られる。

3. 移流方程式を用いた精度の比較

(1) 1次元移流計算の解析結果

移流項に対する計算精度を比較するため、式(2)で与えられる ϕ の1次元移流方程式に各種の計算手法を適用し、結果を比較する。

QSI法の他に利用した解析スキームは、式(4)で与えられる5次風上差分とQUICKスキーム⁵⁾および3

次風上差分に相当する河村・桑原スキーム³⁾(以下KKスキーム)である。QUICKスキームとKKスキームでは、式(2)左辺第2項はそれぞれ次式で与えられる。

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_k = u \frac{-\phi_{k+2} + 10(\phi_{k+1} - \phi_{k-1}) + \phi_{k-2}}{16\Delta x} + |u| \frac{\phi_{k+2} - 4\phi_{k+1} + 6\phi_i - 4\phi_{k-1} + \phi_{k-2}}{16\Delta x} \quad (24)$$

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_k = u \frac{-\phi_{k+2} + 8(\phi_{k+1} - \phi_{k-1}) + \phi_{k-2}}{12\Delta x} + |u| \frac{\phi_{k+2} - 4\phi_{k+1} + 6\phi_i - 4\phi_{k-1} + \phi_{k-2}}{4\Delta x} \quad (25)$$

時間差分には、2次および3次のAB法を利用したが、全般に両者の相違は顕著ではなかったので、本節では2次のAB法を用いた結果のみを示す。

計算では、式(2)中の u を正の定数(1.0)とした。解析領域は長さ100.0の1次元場であり、計算メッシュ間隔 Δx を1.0として移流方程式の計算を行う計算点を101点設定し、その両端に境界条件を設定するための計算点を配置して両端で周期境界条件が成り立つものとした。また、各種計算スキームの安定性と実際の流体計算におけるクーラン数のオーダを考慮して、時間ステップ Δt は0.1、すなわちクーラン数は0.1とした。

周期境界条件を利用した同様の計算は、既往研究^{21), 22)}にも見られるが、ここでは ϕ の初期分布形状を滑らかな関数ではなく、次式のステップ状の分布とした。

$$\phi_i^0 = \begin{cases} 1 & 48 \leq x \leq 52 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (26)$$

このようなステップ状の初期分布に対する移流計算に高次精度差分を適用すると、一般にオーバーシュートおよびアンダーシュートといわれる数値振動が発生する。このような高次精度差分に付随する数値振動を抑制するために、FRAM²³⁾という手法やMMTフィルタ¹⁷⁾の適用などが提案されている。本研究では1次の風上差分を除くすべてのスキームに次式のMMTフィルタを適用するものとした。

$$\phi_i^{n+1} = \max[\min\{\phi^*, \phi_{max}^n\}, \phi_{min}^n] \quad (27)$$

ここに、 ϕ^* は各種スキームにより移流計算された結果であり、 ϕ_{max}^n および ϕ_{min}^n は計算点位置 x_i に移流される物理量が Δt 時刻前に存在した位置、すなわち $x_i - u\Delta t$ を含む計算セルを構成する ϕ^n の最大値および最小値を表す。たとえば、 ϕ_{max}^n は次式で与えられる。

$$\phi_{max}^n = \begin{cases} \max\{\phi_{i-1}^n, \phi_i^n\} & u \geq 0 \\ \max\{\phi_i^n, \phi_{i+1}^n\} & u < 0 \end{cases} \quad (28)$$

ϕ_{min}^n も同様である。

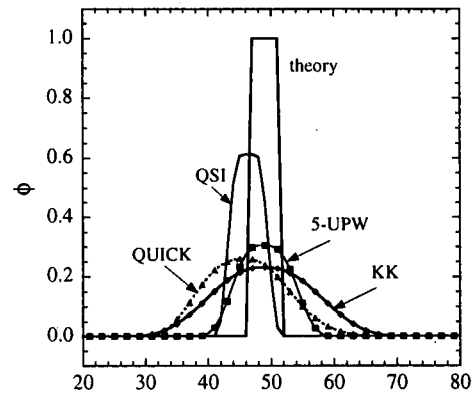


図-5 1次元移流方程式の計算結果

図-5は各種のスキームにより10周期の計算を行った結果を示すものである。この結果から、QSI法とQUICK法では ϕ の分布位置が上流側にややシフトしており、位相誤差が含まれることが示されている。この位相誤差が、QSI法をLESやDNSなどの非定常計算に適用した場合にどの程度影響するかは、より詳細な検討が必要である。一方、QSI法では5次風上差分を含む他のスキームと比較してピーク値の低下がはるかに少ない。このため、少なくとも定常計算における数値解析精度等に関しては、5次風上差分よりも良好な解が得られるものと考えられる。

なお、1次元移流計算においては、クーラン数を0.2以下にとればQSIスキームは安定であった。また、位相誤差は、時間差分に2次のルンゲクッタ法を用いると若干改善されることが確認された。

(2) 境界近傍におけるQSI法の計算精度

上述のように、高次精度差分スキームでは、境界壁付近で低次の差分スキームに切り替えるという方法が取られる場合がある。このような境界壁付近での計算手法の精度を比較するため、風上側に1つの節点のみを持つ場合のQSI法と1次風上差分法、また風上側に2つの節点を持つ場合のQSI法とKKスキームとの比較をそれぞれ行った。1周期の計算結果を図-6および図-7に示す。図中のQSI-1pおよびQSI-2pが、それぞれ風上側に1および2個の節点を持つ場合、またQSIが通常の風上側に3節点を持つ場合の計算結果である。これらの結果から、QSI-1pおよびQSI-2pは、通常のQSI法の結果と比較してピーク値の低下が認められるが、いずれも1次風上差分およびKKスキームよりは精度が高い。また、QSI-1pでは位相誤差が生じているが、実際の流体計算では壁面に最も近い節点に対してのみこの手法が用いられるので、この影響はさほど重大ではないと考えられる。

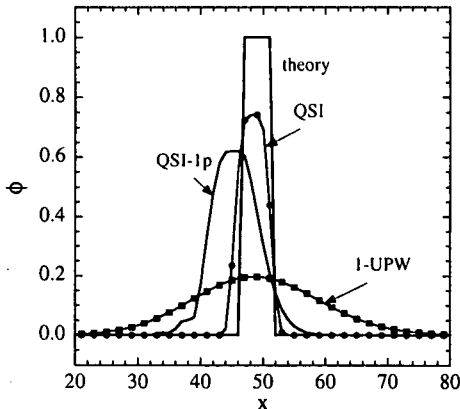


図-6 壁面近傍を想定した1次元移流方程式の計算結果(壁面側計算点1個の場合)

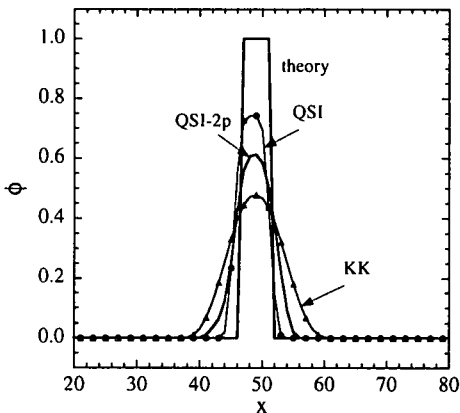


図-7 壁面近傍を想定した1次元移流方程式の計算結果(壁面側計算点2個の場合)

(3) 回転流速場における2次元移流問題への適用

次に、計算領域の境界付近の影響が少ない内部領域におけるスキームの解析精度を確認するため、正方形の計算領域(一辺の長さ1.0)に設定された剛体回転場においてスカラー量 C の2次元移流方程式を解析した。初期条件として計算領域の一部にステップ状に与えたスカラー量 ($C = 1.0$) が1回転後にどのように分布するかを解析した。

図-8(a)は、スカラー量の初期分布を示すものである。これに対して、図-8(b),(c),(d)は、それぞれKKスキーム、5次風上差分、QSI法による計算結果である。いずれの計算手法でも初期のスカラー分布に対して数値拡散によるピークの低下が見られるが、3次精度のKKスキームでは他の結果と比較してピーク値の低減が大きい。また、QSI法では5次風上差分よりこの低減が小さく、より高精度であることが示されている。

4. 2次元キャビティ内の流動計算

(1) 計算条件

実際の流体計算における計算精度を確認するため、QSI法と5次風上差分法を用いて2次元キャビティ内の流動計算²⁴⁾を行った。この計算対象は、これまで差分スキームの精度検証などのベンチマーク計算にしばしば利用されているものである。

基礎方程式は、式(5)の連続式と式(6)および式(7)の運動方程式である。境界条件は次のように与えた。

$$\begin{aligned} u = v = 0 & \quad \text{[左右および下部壁面]} \\ u = 1, v = 0 & \quad \text{[上部壁面]} \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \quad \text{[全ての壁面]} \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、 u および v は水平 (x) 方向および鉛直 (y) 方向の流速、また、式(29)中の $\partial/\partial n$ は壁面法線方向の偏微分を表す。Reynolds数は、キャビティの1辺の長さ(1.0)と上部壁面の移動速度(1.0)を用いて、 $Re = 1/\nu$ と定義される。

(2) QSI法と5次風上差分の精度の比較

壁面近傍の計算点においては、QSI法では上述したQSI-1pおよびQSI-2pを用い、5次風上差分では壁面に最も近接する計算点に1次風上差分、またその内側の計算点にKKスキームを適用した。このように、運動方程式の移流項に対してQSI法と5次風上差分を用いた以外は、基礎方程式の離散化やその他の計算条件はすべて同一とした。拡散項は中央差分で離散化し、時間方向の離散化には、移流項に3次精度のAB法を利用した。また、すべての計算にMMTフィルタを適用した。

2次元キャビティ内の流動計算に5次風上差分を適用した既往の計算結果²⁵⁾においては、細密な不等間隔格子を利用することで、Ghiaの結果²⁴⁾と良く一致する解が得られることが示されている。しかし、ここではQSI法との比較を行うことを目的とするため、スキーム以外の計算条件ができるだけ単純となるよう、比較的粗い等間隔計算格子点(50×50メッシュ)を用いる。また、collocated格子を利用する場合には、セル中心とセル境界の変数の空間内挿方法による計算精度の相違が十分小さかったため、両スキームの計算において5次スプライン内挿ではなく線形内挿を利用した。

最初に、staggered格子を用いた計算結果を図-9に示す。これらの結果は、キャビティの中心を含む鉛直および水平断面における u および v の分布を比較したものである。Reynolds数が1,000の計算結果においては、両スキームの計算結果に差異は見られず、どちらもGhiaの結果とほぼ一致した。しかしながら、計算精

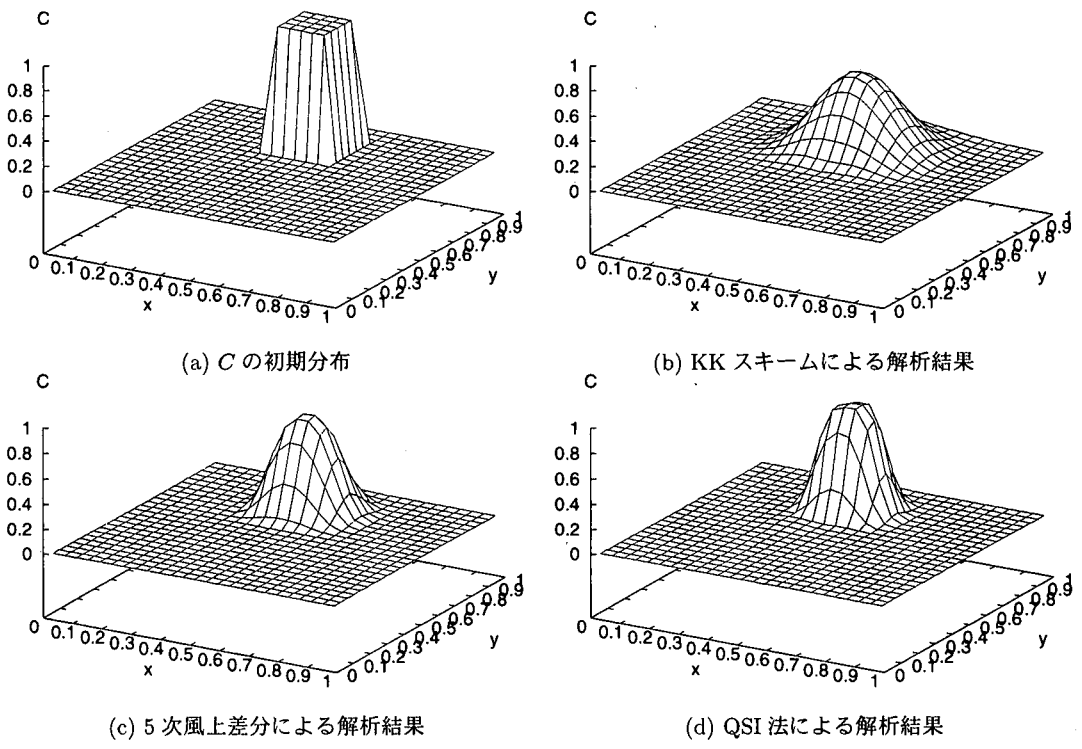


図-8 回転流動場における移流問題の解析結果

度の影響が現れやすい高 Reynolds 数の計算結果においては、QSI 法と 5 次風上差分の計算結果の相違が見られた。図-9(c) から (f) に示されるように、Reynolds 数が 3,200 および 5,000 の計算結果では、壁面近傍の流速の極大値やその発生位置などに関して、QSI 法の計算結果は Ghia の結果により近いものとなった。

次に、同様の計算格子点数で collocated 格子を用いた場合の計算結果を図-10 に示す。この計算でも、同様に Reynolds 数を 1,000 から 5,000 まで変化させた staggered 格子を用いた場合には、Reynolds 数が 1,000 では 5 次風上差分と QSI 法の間ほとんど相違は見られなかったが、collocated 格子の場合には、図-10(a),(b) に示されるように、5 次風上差分の結果は対応する staggered 格子の結果と比較して Ghia の値からの相違が大きくなり、解析精度がやや低下した。同様の傾向は、Reynolds 数が 3,200 および 5,000 の場合にも見られる。これに対して、QSI 法を利用した場合には、Reynolds 数 3,200 および 5,000 の結果に示されるように、計算結果は逆に collocated 格子を利用した場合の方が精度が高くなっている。

以上の結果から、QSI 法は staggered 格子を含めて全般に 5 次風上差分よりも高精度であるが、特に collocated 格子上で有効であることが確認できた。

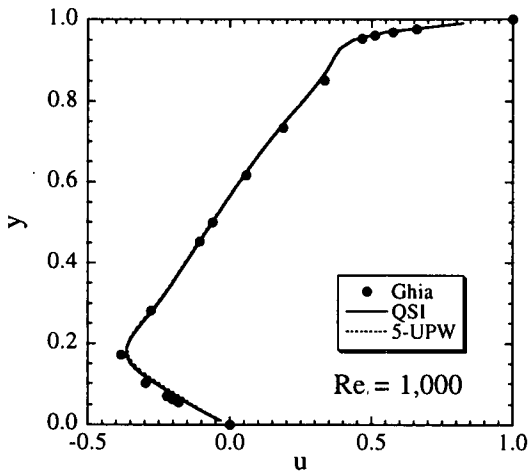
(3) 詳細格子分割上の QSI 法による解析結果

以上の結果から、実際の流体計算に対する collocated 格子上で QSI 法の有効性が確認されたが、最後に QSI 法を用いて、詳細な計算格子分割を行なった場合に、Ghia の結果とほぼ一致する解析結果が得られることを示す。計算精度への影響は小さいが、ここでは collocated 格子におけるセル中心とセル境界の空間内挿に 5 次スプライン内挿を用いた。その他の計算条件は、上記の条件と同様である。図-11 は、Reynolds 数 3,200 と 5,000 を対象とした QSI 法による解析結果を示したものである。等間隔の計算格子を用いるため、 100×100 という詳細な格子点を配置した。図-11 の結果に示されるように、計算結果は Ghia の値にほぼ一致することが示された。

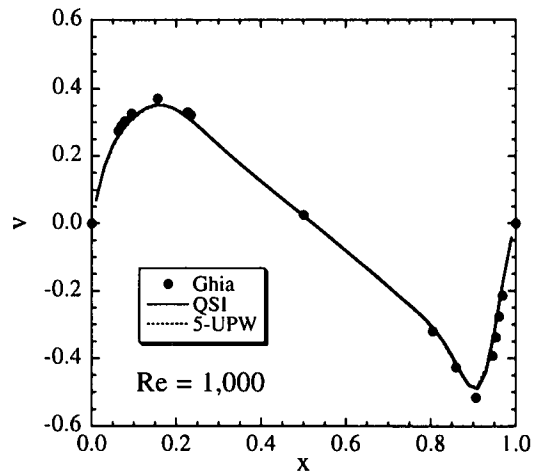
5. 結言

本研究では、計算格子点上で離散化された変数の分布を 5 次スプライン関数を利用して 4 階微分まで連続な関数として近似し、基礎方程式中の移流項をその微分量から求める計算手法 (QSI 法) を提案した。

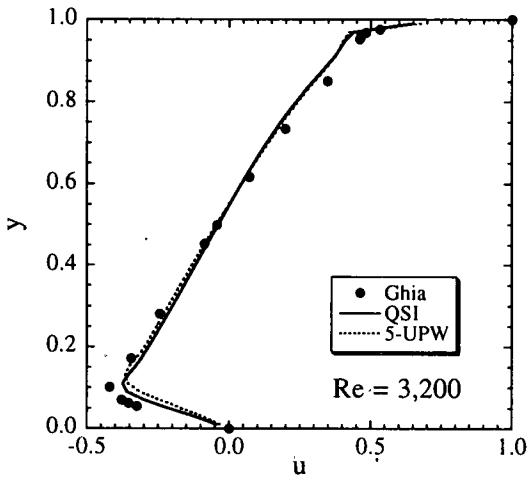
提案された QSI 法を用いて 1 次元移流方程式を解析し、他のスキームによる結果との比較を行った。その結果、QSI 法では QUICK 法と同程度の若干の位相誤



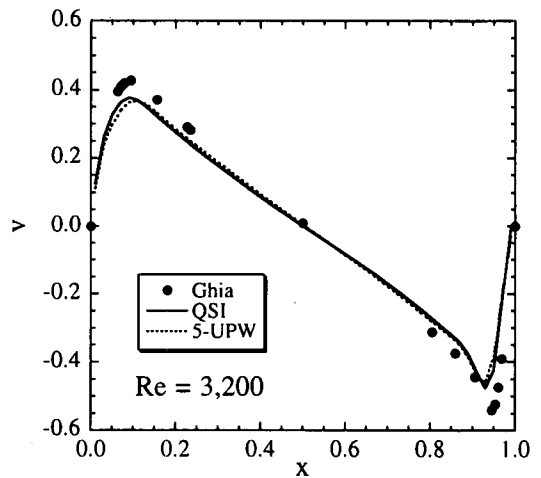
(a) u の分布 ($x = 0.5, Re = 1,000$)



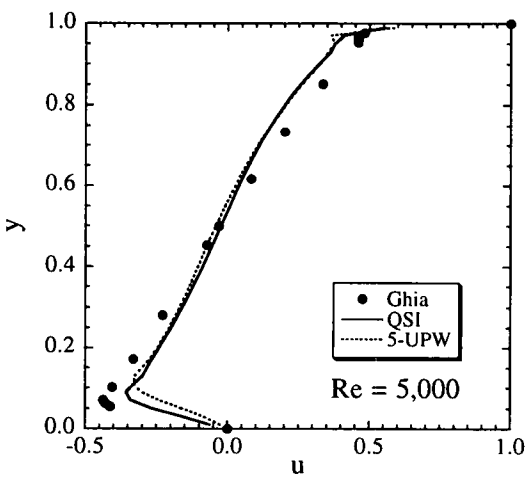
(b) v の分布 ($y = 0.5, Re = 1,000$)



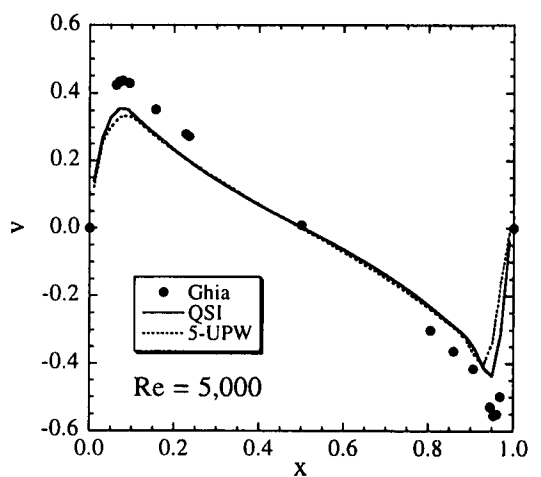
(c) u の分布 ($x = 0.5, Re = 3,200$)



(d) v の分布 ($y = 0.5, Re = 3,200$)

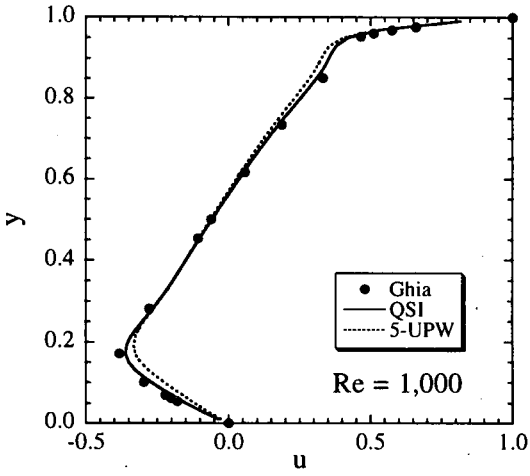


(e) u の分布 ($x = 0.5, Re = 5,000$)

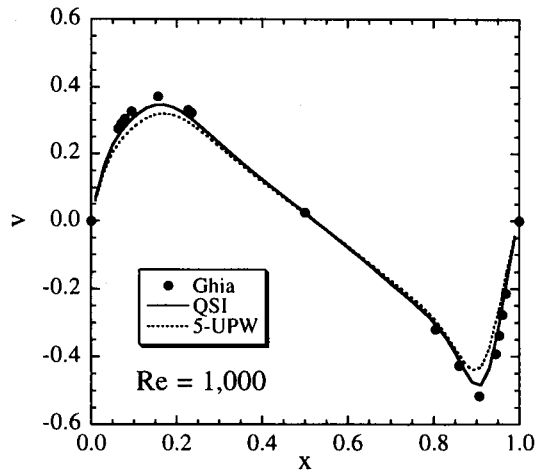


(f) v の分布 ($y = 0.5, Re = 5,000$)

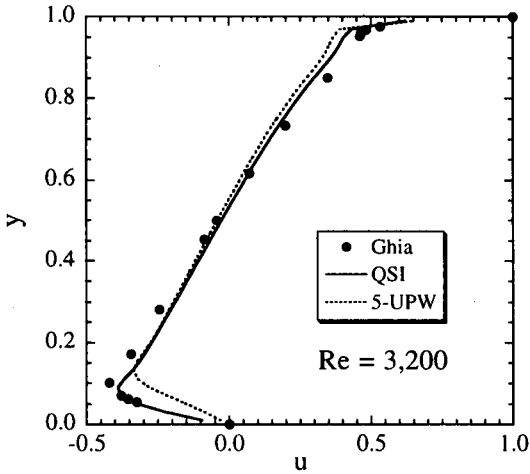
図-9 2次元キャビティ内の流動計算結果, staggered 格子 (● = Ghia, 実線 = QSI 法, 破線 = 5 次風上差分)



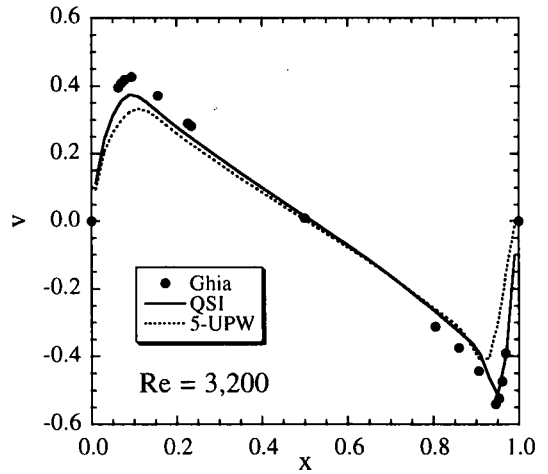
(a) u の分布 ($x = 0.5, Re = 1,000$)



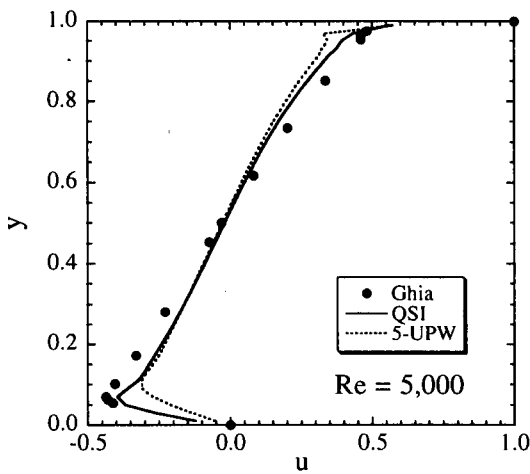
(b) v の分布 ($y = 0.5, Re = 1,000$)



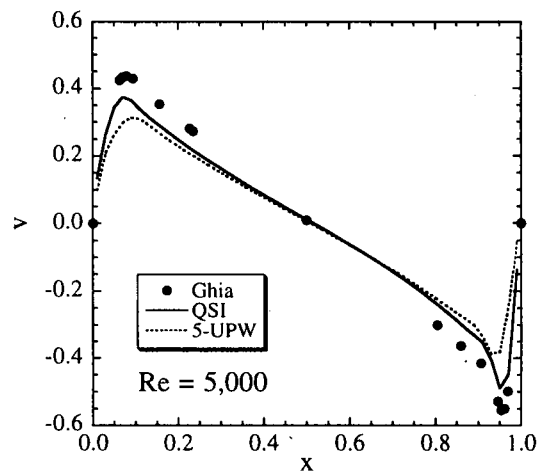
(c) u の分布 ($x = 0.5, Re = 3,200$)



(d) v の分布 ($y = 0.5, Re = 3,200$)



(e) u の分布 ($x = 0.5, Re = 5,000$)



(f) v の分布 ($y = 0.5, Re = 5,000$)

図-10 2次元キャビティ内の流動計算結果, collocated 格子 (● = Ghia, 実線 = QSI 法, 破線 = 5 次風上差分)

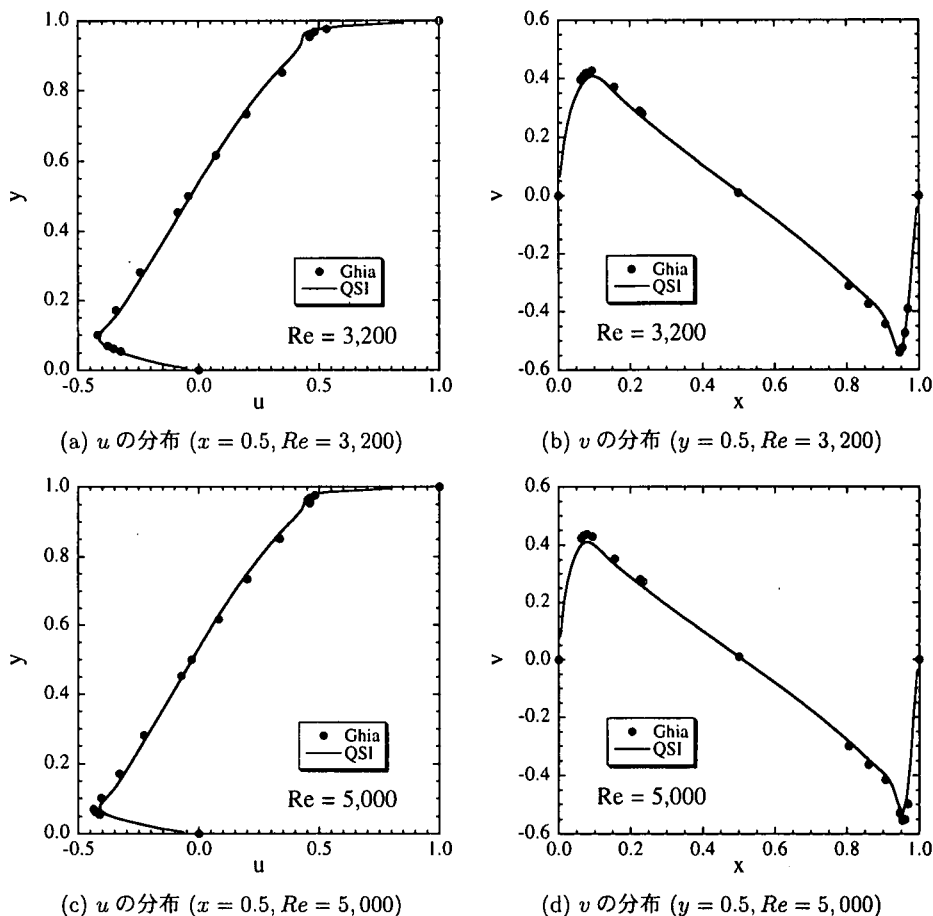


図-11 2次元キャビティ内の流動計算結果, collocated 格子, 詳細メッシュ分割 (● = Ghia, 実線 = QSI 法)

差が生ずるが, 初期スカラー量のピーク値が5次風上差分と比較しても低減しにくいことが明らかになった。また, 壁面近傍においても5次スプライン関数を定める際の節点位置を変えることにより, 比較的高い精度を維持し得ることを示した。さらに, 2次元回転流れ場における移流問題にQSI法を適用し, QSI法は5次風上差分よりも精度が高いことを確認した。

さらに, 2次元キャビティ流れの解析を行った結果, QSI法はcollocated格子において5次風上差分より有効性が高いことが示された。スプライン関数は, 離散化された値を数学的に最も滑らかに近似することができる関数である。このため, テーラ展開に基づく5次風上差分と比較してQSI法は良好な結果をもたらしたと考えられる。

本研究で提案したQSI法はRANSモデルなどによる平均流動場の数値解析などに有用であり, 特にcollocated格子を用いた境界適合格子や非構造格子などの幅広い計算手法に活用されるものと考えられる。

参考文献

- 1) 木村一郎, 細田尚: 乱れ強さ非負条件を考慮した非線形 $k-\epsilon$ モデルによる立方体周辺の流れの三次元解析, 水工学論文集, Vol. 44, pp. 599-604, 2000.
- 2) 中山昭彦, 横嶋哲: 開水路乱流予測計算における低レイノルズ数乱流モデルの有用性, 土木学会論文集, Vol. II-48, No. 628, pp. 131-148, 1999.
- 3) Kawamura, T. and Kuwahara, K.: Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness, *AIAA Paper*, Vol. 84-0340, 1984.
- 4) 宮内敏雄, 平田徹, 店橋護: 高精度差分法による三次元一様等方性乱流の直接数値計算 (スペクトル法および実験との比較), 日本機械学会論文集 (B編), Vol. 61, No. 592, pp. 4400-4405, 1995.
- 5) Leonard, B. P.: A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation, *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 19, pp. 59-98, 1979.
- 6) Yabe, T. and Aoki, T.: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial inter-

- polation II. Two- and three-dimensional solver, *Computer Physics Communications*, Vol. 66, pp. 233-242, 1991.
- 7) Komatsu, T., Holly, F. M., Nakashiki, N. and Ohgushi, K.: Numerical calculation of pollutant transport in one and two dimensions, *J. Hydrosci. and Hydraul. Eng., JSCE*, Vol. 3, No. 2, pp. 15-30, 1985.
 - 8) 朝位孝二, 小松利光, 大串浩一郎, 羽田野袈裟義: 移流方程式の高精度数値計算手法に関する研究, 土木学会論文集, Vol. II-42, No. 586, pp. 13-22, 1998.
 - 9) 岩瀬世彦, 河本真司, 棚橋隆彦: 差分法による3次元移流方程式の高精度計算について, 日本機械学会論文集 (B編), Vol. 57, No. 540, 1991.
 - 10) 宮内敏雄, 平田徹, 店橋護: 高次精度差分法による二次元円柱周り流れの直接数値計算高次精度差分法による三次元一様等方性乱流の直接数値計算 (流出境界条件の検討), 日本機械学会論文集 (B編), Vol. 62, No. 600, pp. 2942-2949, 1996.
 - 11) Ushijima, S.: Prediction of thermal stratification in a curved duct with 3D boundary-fitted coordinates, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 19, pp. 647-665, 1994.
 - 12) Spath, H.: *One dimensional spline interpolation algorithms*, A K Peters Ltd., 1995.
 - 13) Herriot, J. G. and Reinsch, C. H.: Procedures for quintic natural spline interpolation, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 2, No. 3, pp. 281-289, 1976.
 - 14) Patankar, S. V. (水谷幸夫, 香月 正司共訳): コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, 森北出版, 1995.
 - 15) Rhie, C. M. and Chow, W. L.: Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.
 - 16) Brackbill, J. U., Kothe, D. B. and Ruppel, H. M.: FLIP: A low-dissipation particle-cell method for fluid flow, *Comput. Phys. Commun.*, Vol. 48, pp. 25-38, 1988.
 - 17) Koshizuka, S., Oka, Y., Kondo, S. and Togo, Y.: Interpolating matrix method: A finite difference method for arbitrary arrangement of mesh points, *J. Comput. Phys.*, Vol. 75, pp. 444-468, 1988.
 - 18) Amsden, A. A. and Harlow, F. H.: A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 6, pp. 322-325, 1970.
 - 19) 永博夫, 山本泰, 棚橋隆彦: 差分法による移流方程式の高精度計算について, 日本機械学会論文集 (B編), Vol. 56, No. 522, pp. 433-440, 1990.
 - 20) 稲垣昌英, 安倍賢一: コロケーション格子を用いたLESの計算精度改善に関する一考察, 日本機械学会論文集 (B編), Vol. 64, No. 623, pp. 1981-1988, 1998.
 - 21) 永翁龍一, 清野文雄, 斎藤隆之: 風上差分法および中心差分法を用いた波動現象の数値シミュレーション, 日本機械学会論文集 (B編), Vol. 61, No. 592, pp. 4394-4399, 1995.
 - 22) 林俊一郎, 大本照憲, 矢北孝一, 平川隆一: 一般座標系 Regular 格子による開水路乱流の DNS, 水工学論文集, Vol. 44, pp. 593-598, 2000.
 - 23) Chapman, M.: FRAM — Nonlinear damping algorithms for the continuity equation, *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 25-38, 1981.
 - 24) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T.: High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387-411, 1982.
 - 25) 本田逸郎, 丹野雅之, 大庭英樹: 高次精度差分スキームを用いた二次元キャビティ流れの数値解析, 日本機械学会論文集 (B編), Vol. 60, No. 578, pp. 3287-3291, 1994.

(2000.10.23 受付)

HIGHER-ORDER NUMERICAL SCHEME (QSI-METHOD) ON COLLOCATED GRID WITH LOCAL QUINTIC SPLINE INTERPOLATION

Satoru USHIJIMA, Iehisa NEZU, Michio SANJOU and Yukiko SAKANE

A higher-order computational scheme utilizing quintic spline interpolation, QSI method, has been proposed. The derivatives in the governing equations are evaluated by differentiating the quintic spline function. This computational method was applied to one- and two-dimensional pure advection problems. As a result, it was shown that the numerical accuracy in the QSI method is superior to a fifth-order upwind difference. In addition, two-dimensional cavity flows were solved with staggered and collocated grid systems. In the results of QSI scheme, it was shown that the accuracy of the QSI method is rather improved in the collocated system and that the accuracy is generally better than that of the 5th-order upwind difference.