

スペクトル確率有限要素法による ランダム場の波動伝播解析

本田 利器

正会員 工修 京都大学防災研究所

地盤の物性値などに不確実性がある場合の波動の伝播は、地震動の予測や、観測地震波の特性の把握のためにも重要な課題である。本論文では、そのような問題に対して、スペクトル確率有限要素法を適用することを提案し、その定式化を示す。スペクトル確率有限要素法による解析では、大きい疎なマトリクスを扱う必要がある。本論文では、確率有限要素法を用いて動的な問題を解析する場合に適用できる効率的な解析手法も提案する。そして、確率有限要素法による解析結果を、モンテカルロシミュレーションを用いた数値計算結果と比較し、その妥当性等を検証する。

Key Words : spectral stochastic finite element method, random field, wave propagation

1. はじめに

地震動の正確な再現は、工学、理学の広い分野において、重要な課題であり、多くの様々な調査研究がなされてきている。近年は、解析手法と計算機の処理能力の両方の向上により、大地震時の地震動を高精度に再現することも可能となっており、観測された地震記録の再現に関する報告^{1),2)}も多くなされている。

一方で、活断層の位置や活動可能性、その破壊過程など、現時点では予測が非常に困難、あるいは事実上不可能な点も多い。このような問題に対しては、不確定な項目を減ずるべく努力がなされているが、すべての情報を正確に調査または予測することは不可能である。したがって、不確定な項目についてはその不確定性を定量的に考慮した検討も重要である。

本論文では、波動の伝播媒体である地盤の物性の不確実性による影響に着目する。地震動は地盤中を伝播する波動であるため地盤の物性が地震動の伝播特性に影響を与えることは明らかである。しかし、地盤は不均質な媒体であり、その地盤物性を完全に知ることは不可能である。したがって、地盤情報の不確定性の影響を考慮した地震動の設定法を検討することは重要な課題である。同様の問題に関しては広い分野で種々の検討^{3),4)}がなされてきている。

また、地震動が地盤を伝播する過程において地盤の不均質性により受ける影響についての研究もなされている^{5),6)}。このような地盤の不均質性による影響は、地盤物性が完全に既知であってもよいという点で、厳密

には、地盤条件の不確実性による影響とは異なるものである。しかし、そのような波動伝播現象を理解するためには統計的な解釈によるアプローチが有効であるとされ、例えば、Fehlerら⁷⁾は不均質な地盤を伝播する地震動の包絡線の形状の定式化の検討において、モンテカルロシミュレーションによる結果に基づく検討を行っている。これは、不均質な地盤を伝播する媒体における波動伝播の検討において、地盤物性の分布を確率場として扱うことと同等である。

このような確率場を対象とした解析に用いられる手法としてはモンテカルロシミュレーションが挙げられる。しかし、この手法は大量の計算を行う必要があるため必ずしも合理的ではない。効率的な手法としては確率有限要素法が挙げられる。確率有限要素法としては種々の手法が検討されてきており、Yamazakiら⁸⁾、Vanmarcke and Grigoriu⁹⁾などの研究がある。しかし、例えば、Neumann展開を用いる手法では、展開が収束する範囲が比較的狭く、解析が発散しやすいなど、計算が不安定となる問題等もあり、実際の問題への適用が困難な面もある。近年、Ghanem and Spanos¹⁰⁾は、高い安定性を有する手法として、スペクトル確率有限要素法 (Spectral Stochastic Finite Element Method. 以下、“SSFEM”) を提案している。SSFEMは、静的な問題^{11),12)}や、熱伝導の問題¹³⁾に対しては適用されてきているが、波動伝播等の動的問題の時間領域での解析に対しては適用されていない。

本論文では、このSSFEMを波動伝播解析に適用することを提案し、その有効性について検討する。また、

新しい時間積分法を適用することにより、数値解析を効率的に行う手法を提案し、その妥当性を検証する。

2. スペクトル確率有限要素法 (Spectral Stochastic Finite Element Method)

本章では、本検討で用いる確率有限要素法について簡単に述べる。スペクトル確率有限要素法 (SSFEM) は、Ghanem and Spanos¹⁰⁾により提案されたものである。SSFEM は、不確定性を有する場を Karhunen-Loève 展開により効率的に展開し、また、解を Polynomial Chaos 展開された空間上で求めるものである。以下にその概要を簡潔に述べる。

(1) Karhunen-Loève 展開

SSFEM では、不確定性を有する変数の場を Karhunen-Loève 展開する。本検討の場合、剛性を確率過程と想定し、位置 x における剛性を $G(x, \theta)$ と表す。 θ は確率空間における対応する事象を表す。

Karhunen-Loève 展開では、確率過程 $G(x, \theta)$ を、

$$G(x, \theta) = \bar{G}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\theta) \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \quad (1)$$

と展開する。ここで、 \bar{G} は G の期待値である。展開の基底関数 $f_i(x)$ は、対象とする領域を D として

$$\int_D f_i(x) f_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (2)$$

(δ_{ij} は Kronecker のデルタ) の意味で直交する関数である。また、 λ_i と $f_i(x)$ は、限られた項数で、対象とする確率場との残差を小さくできるように定められた $C(x, y)$ の固有値及び固有関数となっており、

$$\int_D C(x, y) f_i(x) f_j(y) dx dy = \lambda_i \delta_{ij} \quad (3)$$

の解として得られる。また、 ξ_i は、正規直交性を有する独立 Gauss 確率変数であり、 $\langle \cdot \rangle$ で期待値を表すとして、

$$\langle \xi_i(\theta) \xi_j(\theta) \rangle = \delta_{ij} \quad (4)$$

$$\langle \xi_i(\theta) \rangle = 0 \quad (5)$$

を満たす。

実際の計算においては、式 (1) の和を無限大までとすることは不可能である。SSFEM では、展開次数を有限とし、式 (1) の i についての和を有限で打ちきる。

(2) Polynomial Chaos 展開

SSFEM では、解の関数 $u(\theta)$ が、正規直交性を有する独立 Gauss 変数 $\xi_i(\theta) (i = 1, \dots)$ の二乗可積分系の汎関

数であるとして、これを Polynomial Chaos (多項式汎関数) $\Gamma_n(\xi_1(\theta), \dots, \xi_n(\theta)) (n = 0, \dots)$ を用いて展開する。

$$u(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\dots+n_k=n} \sum_{i_1, \dots, i_k} \left\{ a_{i_1, \dots, i_k}^{n_1, \dots, n_k} \times \Gamma_n(\xi_{i_1}(\theta), \dots, \xi_{i_k}(\theta)) \right\} \quad (6)$$

ここで、Polynomial Chaos は、Hermite 多項式汎関数であり、次式で与えられる。

$$\Gamma_n(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n}) = e^{\frac{1}{2}\xi^T \xi} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_n}} e^{-\frac{1}{2}\xi^T \xi} \quad (7)$$

ただし、

$$\xi = (\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})^T. \quad (8)$$

である。また、 n_1, n_2, \dots は、 Γ_n の n 個の引数に表れる ξ_1, ξ_2, \dots の個数を表している。

$\Gamma_n(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})$ は n 次の Polynomial Chaos と呼ばれ、直交性を有する。これらの張る空間が、 n 次の Homogeneous Chaos となる。

SSFEM では、この Polynomial Chaos の引数として、Karhunen-Loève 展開で用いた Gauss 確率変数 $\xi_i(\theta)$ を用いて展開する。

また、Polynomial Chaos 展開においても無限大まで和をとることは不可能であるため、Homogeneous Chaos の展開次数は有限とし、式 (6) において n についての展開次数は有限とする。

なお、以下では、表現を簡単化するため、Ghanem and Spanos¹⁰⁾にならい、式 (6) の Polynomial Chaos $\Gamma_n(\xi_{i_1}(\theta), \dots, \xi_{i_n}(\theta))$ 及び係数 $a_{i_1, \dots, i_n}^{n_1, \dots, n_k}$ に順に適切に番号を与えることで、それぞれ、 $\Psi_i[\{\xi_\ell\}]$ 及び u_i とおく。ここで、 $\{\xi_\ell\}$ は必要な数の確率変数 $\xi_\ell (\ell = 1, 2, \dots)$ の集合を表す。これにより、式 (6) は、

$$u(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \Psi_i[\{\xi_\ell\}] \quad (9)$$

と表記される。また、有限次数の Homogeneous Chaos を考慮するときは、和をとる範囲が有限になり、

$$u(\theta) = \sum_{i=0}^{N_{PC}} u_i \Psi_i[\{\xi_\ell\}] \quad (10)$$

と書ける。ここで、 N_{PC} は、考慮する次数の Homogeneous Chaos を Polynomial Chaos 展開する基底汎関数の総数である。例えば、2 次の Karhunen-Loève 展開を考え、2 次の Homogeneous Chaos を考慮する場合、 $N_{PC} = 5$ となる。この時の $\Psi_i[\{\xi_\ell\}]$ を式 (7) から算出し

て書き下すと次式のようになる。

$$\Psi_0[\xi_1, \xi_2] = 1 \quad (11)$$

$$\Psi_1[\xi_1, \xi_2] = \xi_1 \quad (12)$$

$$\Psi_2[\xi_1, \xi_2] = \xi_2 \quad (13)$$

$$\Psi_3[\xi_1, \xi_2] = \xi_1^2 - 1 \quad (14)$$

$$\Psi_4[\xi_1, \xi_2] = \xi_1 \xi_2 \quad (15)$$

$$\Psi_5[\xi_1, \xi_2] = \xi_2^2 - 1 \quad (16)$$

なお、次数が増えると N_{PC} は急激に増加し、4 次の Karhunen-Loève 展開と 4 次の Homogeneous Chaos を用いる場合は $N_{PC} = 69$ となり、6 次の Karhunen-Loève 展開、4 次の Homogeneous Chaos を用いる場合には $N_{PC} = 209$ となる。

(3) 波動場の SSFEM の定式化

SSFEM は、静的問題や熱伝導問題などには適用されているが、動的問題の時間領域での解析への適用はされていない。そこで、以下では、SSFEM により波動伝播解析に適用するための定式化について述べる。

せん断剛性 G が確率過程である場合の波動伝播の定式化について述べる。せん断剛性の分布は、式 (3) の解を用いて、

$$G_n(x) = \sqrt{\lambda_n} f_n(x) \quad (17)$$

とおき、式 (1) において N_{KL} 次まで展開することで、

$$G(x, \theta) = \bar{G}(x) + \sum_{n=1}^{N_{KL}} \xi_n(\theta) G_n(x) \quad (18)$$

となる。 K_n を、Galerkin 法等で算出されるせん断剛性 $G_n(x)$ に対応する剛性マトリクスをとすると、剛性マトリクスは、

$$K(\theta) = \sum_{n=0}^{N_{KL}} \xi_n(\theta) K_n \quad (19)$$

と得られる。ただし、 $\xi_0 = 1$ とおいており、 K_0 はせん断剛性が $\bar{G}(x)$ のときの剛性マトリクスである。

例として、減衰がない場合を考えるものとする、有限要素法の定式化が

$$Ma(t, \theta) + K(\theta)u(t, \theta) = p(t) \quad (20)$$

と得られる。ここで M は質量マトリクス、 $u(t)$ 、 $a(t)$ 、 $p(t)$ はそれぞれ変位、加速度及び外力ベクトルである。

加速度と変位を式 (10) のように Polynomial Chaos 展開したもの、及び式 (19) を式 (20) に代入すると、

$$M \sum_{i=0}^{N_{PC}} a_i \Psi_i[\{\xi_{\ell}\}] + \sum_{n=0}^{N_{KL}} \xi_n(\theta) K_n \sum_{i=0}^{N_{PC}} u_i \Psi_i[\{\xi_{\ell}\}] = p \quad (21)$$

となる。ここで、時間を表す引数 t は省略した。

式 (21) を、変位場や加速度場を展開している空間内で近似する。同空間への写像を考えるため、基底汎関数である $\Psi_j[\{\xi_{\ell}\}]$ との積の期待値 (内積) をとると次式が得られる。

$$\sum_{i=0}^{N_{PC}} \langle \Psi_i[\{\xi_{\ell}\}] \Psi_j[\{\xi_{\ell}\}] \rangle M a_i + \sum_{n=0}^{N_{KL}} \sum_{i=0}^{N_{PC}} \langle \xi_n \Psi_i[\{\xi_{\ell}\}] \Psi_j[\{\xi_{\ell}\}] \rangle K_n u_i = \langle p \Psi_j[\{\xi_{\ell}\}] \rangle \quad (22)$$

次に、加速度 $a(t, \theta)$ の Polynomial Chaos 展開の係数 $a_j(t)$ が変位の Polynomial Chaos 展開の係数 $u_j(t)$ の 2 次導関数として得られることについて述べる。 $a_j(t)$ は、変位の時間での 2 回微分 $\frac{d^2 u(t)}{dt^2}$ を式 (10) と同様に展開したときの係数であり、

$$a_j(t) = \frac{1}{\langle \Psi_j[\{\xi_{\ell}\}] \Psi_j[\{\xi_{\ell}\}] \rangle} \left\langle \frac{d^2 u(t, \theta)}{dt^2} \Psi_j[\{\xi_{\ell}\}] \right\rangle \quad (23)$$

により求められる。変位の Polynomial Chaos 展開式 (9) を、 Ψ_i が時間依存性を有しないことを考慮して時間微分すると、時間のパラメータ t を明示して

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} \Psi_i[\{\xi_{\ell}\}] \quad (24)$$

となる。式 (24) を式 (23) に代入すると

$$a_j(t) = \frac{d^2}{dt^2} u_j(t) \quad (25)$$

がえられる。したがって、式 (22) は、運動方程式と同様に二階の微分方程式として解くことができる。

(4) 期待値、分散、及び確率密度関数

SSFEM においては、解の期待値、分散及び確率密度関数を評価する事が可能である。以下に、式 (10) で表される変位 $u(\theta)$ を例に定式化等を示す。

期待値は、その定義から明らかのように

$$\langle u(\theta) \rangle = u_0 \quad (26)$$

となる。ただし、ここで、独立な Gauss 確率変数を引数に持つ Hermite 多項式汎関数の性質より

$$\langle \Psi_i \rangle = \begin{cases} 1 & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases} \quad (27)$$

となることを用いている。また、分散は、

$$\langle (u(\theta) - \langle u \rangle)^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N_{PC}} \langle \Psi_i[\{\xi_{\ell}\}] \Psi_i[\{\xi_{\ell}\}] \rangle u_i^2 \quad (28)$$

で与えられる。ただし、 $\Psi_i[\{\xi_{\ell}\}]$ の直交性、すなわち、

$$\langle \Psi_i[\{\xi_{\ell}\}] \Psi_j[\{\xi_{\ell}\}] \rangle \begin{cases} = 0 & (i \neq j) \\ \neq 0 & (i = j) \end{cases} \quad (29)$$

を考慮している。

確率密度関数は、解析的に評価することも可能¹⁰⁾であるが、式(10)において、独立な Gauss 確率変数 ξ_i ($i = 1, 2, \dots$) を生成してシミュレートすることにより評価することが可能である。

(5) SSFEM のマトリクス

SSFEM による波動の伝播の解析においては、式(22)よりマトリクスを構成してこれを解けばよい。SSFEM では、Polynomial Chaos 展開で考慮されている次数までの係数が独立な未知変数となるため、フルマトリクスを用いると仮定すると、そのサイズは、一般の有限要素法のマトリクスの $(N_{PC}+1) \times (N_{PC}+1)$ 倍になる。例えば、Karhunen-Loève 展開を 2 次まで用い (KL=2)、2 次の Homogeneous Chaos までを考慮する (HC=2) とし、 $N_{PC} = 5$ であり、マトリクスの規模は通常の有限要素法の約 $6 \times 6 = 36$ 倍になる。KL=4, HC=4 の時には、 $N_{PC} = 69$ なので、その規模は通常の有限要素法のマトリクスサイズの $70 \times 70 = 4,900$ 倍になる。

しかし、SSFEM のマトリクスは、非常に疎である。

式(22)からもわかるように、SSFEM のマトリクスは、通常の有限要素法で扱う大きさのマトリクス (後述する式(44), (45)に相当する。以下ではこれをブロックとよぶ。) ごとに、 $\langle \Psi_i[\{\xi_{\ell}\}] \Psi_j[\{\xi_{\ell}\}] \rangle$ などの期待値が乗じられた項、またはそれらの和になる。この期待値が多く組み合わせにおいて 0 となるため、マトリクスは疎になる。

質量マトリクスの場合、 $i \neq j$ のとき、

$$\langle \Psi_i[\{\xi_{\ell}\}] \Psi_j[\{\xi_{\ell}\}] \rangle = 0 \quad (30)$$

であるため、非対角ブロックはすべて 0 となる。また、対角ブロックは零マトリクスにはならない。

剛性マトリクスについても、多くの (n, i, j) の組み合わせについて

$$\langle \xi_n \Psi_i[\{\xi_{\ell}\}] \Psi_j[\{\xi_{\ell}\}] \rangle = 0 \quad (31)$$

となるため、やはり疎になる。 $n = 0$ かつ $i = j$ の時、式(31)は非零になるので、剛性マトリクスの場合も、対角マトリクスは零マトリクスにはならない。

このような疎なマトリクスを、ガウスの消去法で解くためには同じサイズのほぼ密なマトリクスを扱う必要があるため、非常に大きいメモリが必要となる。メモリを節約するための方法としては、共役勾配法等の取

束的手法による反復計算を行うことが挙げられる。しかし、収束するまで複数回の計算を行う必要があるため、多くの計算時間が要求される。このような点に鑑み、SSFEM を効率的に処理する手法も提案されている^{14),15)}。

本論文では、解析を効率的に行うための手法として、酒井ら¹⁶⁾、Sakai and Sawada¹⁷⁾や本田・澤田¹⁸⁾が提案した収束計算を伴わない時間積分法 (Non-Iterative Time Integration Scheme, 以下、NITI 法) を適用する方法を提案する。この手法は、定式化が単純であり、プログラムへの導入も容易である。

次節で、NITI 法の定式化について述べる。

3. 時間積分法

(1) 収束計算を伴わない時間積分法 (NITI 法)

NITI 法は、変位依存の外力が作用する問題や剛性が変位量依存の非線形性を有する動的な問題を効率的に計算する手法として酒井らにより示され、本田・澤田らにより速度依存性を有する問題に対しても適用できるよう拡張された手法である。NITI 法は、陽解法と同様に収束計算を要しないが、陰解法と同程度の安定性を有するため、離散時間間隔を大きくとることが可能であり、計算量を減ずることが可能な手法である。NITI 法では、安定性が高い陰解法と、外力が変位などの陰関数である場合でも収束計算が不要な陽解法を組み合わせる。ここでは、陰解法としては Newmark β 法において $\beta = 1/4$ としたものをを用い、陽解法としては中央差分法を用いる。

変位量 u と時刻 t に依存する外力を有する系の運動方程式

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t, u) \quad (32)$$

を対象に定式化を示す。ただし、 M, C, K はそれぞれ質量、減衰、剛性の各マトリクス、 u は変位ベクトルであり、 $\dot{\cdot}$ (変数上に付したドット) は時間微分を表す。

時間間隔 Δt で離散化した時刻を添字 n (n は整数) を用いて $t_n = n\Delta t$ と表すものとし、 $t = t_n$ から $t = t_{n+1}$ へ更新する際の定式化を考える。

まず、時刻 $t = t_{n+1}$ における外力を $f(t_{n+1}, u_n)$ であると仮定して陰解法により時間ステップの更新を行う。この解の加速度、速度、変位をそれぞれ \ddot{u}_{n+1} , \dot{u}_{n+1} , u_{n+1} とすると、これらは

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{n+1} = & \left(K + \frac{2}{\Delta t} C + \frac{4}{\Delta t^2} M \right)^{-1} \left\{ f(t_{n+1}, u_n) \right. \\ & \left. + M \left(\frac{4}{\Delta t^2} u_n + \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_n + \ddot{u}_n \right) + C \left(\frac{2}{\Delta t} u_n + \dot{u}_n \right) \right\} \quad (33) \end{aligned}$$

$$\tilde{u}_{n+1} = -\dot{u}_n + \frac{2}{\Delta t}(\tilde{u}_{n+1} - u_n) \quad (34)$$

$$\tilde{\ddot{u}}_{n+1} = -\ddot{u}_n - \frac{4}{\Delta t}\dot{u}_n + \frac{4}{\Delta t^2}(\tilde{u}_{n+1} - u_n) \quad (35)$$

で与えられる。

しかし、時刻 $t = t_{n+1}$ における外力は $f(t_{n+1}, u_{n+1})$ であるから、このようにして得られた状態量には外力の差分による誤差がある。

一般には、この誤差を除去するために、収束計算を行う必要がある。すなわち、更新した \tilde{u}_{n+1} を用いて評価した外力に対する応答を算出し、そこで得られた \tilde{u}_{n+1} を用いて再度外力を評価する、という計算を \tilde{u}_{n+1} が収束するまで繰り返すことになる。

NITI 法では、収束計算に該当する部分を、陽解法を用いて計算する。これにより収束計算は必要なくなる。考慮すべき外力の差 Δf_u は、

$$\Delta f_u = f(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}) - f(t_{n+1}, u_n) \quad (36)$$

で与えられる。この差分 Δf_u による状態量の変化は、時刻 $t < t_n$ において静止していた系に、時刻 $t = t_n$ に外力 Δf_u が作用した場合の応答に等しい。この応答の変位 Δu_{n+1} 、速度 $\Delta \dot{u}_{n+1}$ 、及び加速度 $\Delta \ddot{u}_{n+1}$ は、中央差分法により、

$$\Delta u_{n+1} = 0 \quad (37)$$

$$\Delta \dot{u}_{n+1} = \left(M + C \frac{\Delta t}{2}\right)^{-1} \Delta f_u \frac{\Delta t}{2} \quad (38)$$

$$\Delta \ddot{u}_{n+1} = \left(M + C \frac{\Delta t}{2}\right)^{-1} \Delta f_u \quad (39)$$

で与えられる。式 (37) にあるように、 Δf_u に対する変位応答 $\Delta u_{n+1} = 0$ であることを考慮すると、時刻 $t = t_{n+1}$ における変位は、

$$u_{n+1} = \tilde{u}_{n+1} \quad (40)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \tilde{\dot{u}}_{n+1} + \Delta \dot{u}_{n+1} \quad (41)$$

$$\ddot{u}_{n+1} = \tilde{\ddot{u}}_{n+1} + \Delta \ddot{u}_{n+1} \quad (42)$$

と求められる。変位量については、外力の差分を考慮することによる変化がないため、変位依存の外力項 $f(t_{n+1}, u_{n+1})$ を更新する必要はない。したがって、これ以上の収束計算等は必要なく、式 (40)、(41)、(42) が、時刻 $t = t_{n+1}$ における状態量 (変位、速度、加速度) である。

なお、以下では、減衰のない系を想定するため、 $C = 0$ となる。

(2) NITI 法の SSFEM への適用

前述したように、SSFEM で用いるマトリクスは、大きいが疎であり、対角ブロック部分は常に非零マトリクスとなる。

提案する計算方法では、剛性マトリクスのうち、対角ブロックの部分のみを剛性マトリクスとして扱い、非対角ブロックに変位を乗じたものを外力項として作用させて定式化する。剛性マトリクス K が、対角ブロックのみからなるマトリクス K^D と、非対角項のみからなるマトリクス K^{ND} を用いて $K = K^D + K^{ND}$ と表せるため、例えば、式 (32) において、 $C = 0$ とすれば、

$$M\ddot{u} + K^D u = f(t, u) - K^{ND} u \quad (43)$$

と定式化される。この時、 K^D は、ほぼ対角化された対称マトリクスとなり、運動方程式 (43) は、ガウスの消去法などの既知の種々の方法により効率的に計算することが可能である。また、右辺は、時間と変位に依存する外力と見なすことが可能であるため、その時間積分には NITI 法を用いることができる。

提案する手法においては、非対角ブロックからなる K^{ND} については、式 (43) に示されるように外力 $K^{ND} u$ としてのみ用いられるため、逆マトリクスを計算する必要はない。したがって、計算時間が節約できる。また、非零項のみを密に収納する配列があれば十分であるため、必要なメモリ量は小さくなる。

また、提案する手法では、対象としている問題を確定的な有限要素法で扱う場合と同じ規模に分割して扱うことが可能である。したがって、非常に大きいマトリクスを扱う必要はなく、効率的な計算が可能である。以下に、定式化などを記す。

式 (22) において

$$M^{ij} = \langle \Psi_i[\{\xi_e\}] \Psi_j[\{\xi_e\}] \rangle M \quad (44)$$

$$K^{ij} = \sum_n \langle \xi_n \Psi_i[\{\xi_e\}] \Psi_j[\{\xi_e\}] \rangle K_n \quad (45)$$

$$p^j = \langle p \Psi_j[\{\xi_e\}] \rangle \quad (46)$$

とおく。

質量マトリクス、及びほぼ対角化されたマトリクス K^D には、対角ブロック以外の要素は含まれない。したがって、式 (43) は、各 i ごとに独立に

$$M^{ii} \ddot{u}^i(t_{n+1}) + K^{ii} u^i(t_{n+1}) = f^i_+(t_{n+1}) \quad (47)$$

として解くことができる。ただし、この右辺は

$$f^i_+(t_{n+1}) = p^i(t_{n+1}) - \sum_{j \neq i} K^{ij} u^j(t_n) \quad (48)$$

である。これは、通常の有限要素法と同じ規模のマトリクスの計算となる。ここで、式 (33)–(35) を用いて、 $\ddot{u}^i(t_{n+1})$ 、 $\dot{u}^i(t_{n+1})$ 、 $u^i(t_{n+1})$ を求める。

次に、変位が更新されたことによる影響を考慮して、各 i について

$$\Delta f^i_u = - \sum_{j \neq i} K^{ij} \{ \tilde{u}^j(t_{n+1}) - u^j(t_n) \} \quad (49)$$

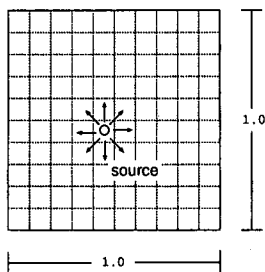


図-1 対象モデル

という外力が時刻 $t = t_{n+1}$ に作用した場合の応答を算出する。これは、式 (37)–(39) を用いて

$$\Delta u^i = 0 \quad (50)$$

$$\Delta \dot{u}^i = M^{ii-1} \Delta f_u^i \frac{\Delta t}{2} \quad (51)$$

$$\Delta \ddot{u}^i = M^{ii-1} \Delta f_u^i \quad (52)$$

と求められる。この計算も、通常の有限要素法と同じ規模のマトリクス計算となる。

以上のように求められた値を、式 (40)–(42) に代入することで、時刻レベル $t = t_{n+1}$ に対する値を求めることができる。

4. 計算例

NITI 法を適用した SSFEM による解析の例として、剛性がランダム場となっている地盤における波動伝播を考える。P-SV 波（面内変位）の二次元問題とする。

ここでは 1.0×1.0 の領域を考える。なお、この数値計算例では、特定の対象を想定しているわけではないので、その大きさなどに具体的な意味はない。

不確定性を有するパラメータはせん断剛性 G のみとする。せん断剛性の期待値は一様に \bar{G} であるとし、その自己相関関数は

$$C(x_1, y_1, x_2, y_2) = (\gamma \bar{G})^2 \exp \left\{ -\frac{(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)}{b} \right\} \quad (53)$$

と与える。ここで、 b は相関距離に相当するパラメータであり、ここでは $b = 1.0$ とした。 γ は、ばらつきの大きさを決めるパラメータであり、ここでは期待値 \bar{G} の 10% となるよう $\gamma = 0.1$ とした。波源としては、モデル中央付近におけるインパルスのな体積膨脹を想定した。対象とする問題を図-1 に示す。

比較のため、解析は、モンテカルロシミュレーション、SSFEM、NITI 法を適用した SSFEM の 3 手法で行った。以下にそれぞれの解析について述べる。

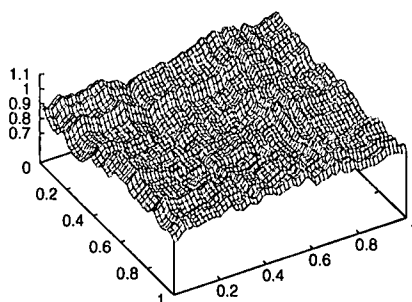


図-2 ランダム場の剛性の分布の例

(1) モンテカルロシミュレーション

解析結果の妥当性を確認するため、モンテカルロシミュレーションによる検討を行った。

モンテカルロシミュレーションでは、式 (53) を満たす分布を発生させ、それを剛性の分布として有するモデルについて、波動の伝播を有限要素法で解析した。なお、有限要素法による解析では、要素分割は、SSFEM の場合と条件をそろえるため、 10×10 としたが、剛性の分布のシミュレーションでは、細かい分布を作成するため、 60×60 に分割した。

剛性の分布は、相関マトリクスを Cholesky 分解し、その各ファクターに、別途発生させた乱数を乗じて和をとることにより作成した。作成した地盤モデルの剛性の期待値に対する比の分布の例を図-2 に示す。

シミュレーションは、2,500 回行った。2,000 回以上では、計算結果の平均値や分散はほとんど変化しなかったため、これで十分な回数が検討されていると判断される。

(2) 確率有限要素法 (SSFEM)

媒体の範囲を $(x, y) \in [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ とする。剛性の分布を Karhunen-Loève 展開する。この問題の場合、式 (3) に式 (53) を代入して得られる固有値 λ_i 、及び固有関数 $f_i(x)$ を用いて、式 (17) は解析的に求められる¹⁹⁾。例えば、1 次と 2 次の展開の基底関数は次式で与えられる。

$$G_1(x, y) = 0.849788609 \times \cos(1.30654237x) \cdot \sin(1.30654237y) \quad (54)$$

$$G_2(x, y) = 0.453987704 \times \{ \cos(1.30654237x) \cdot \sin(3.67319441y) + \sin(3.67319441x) \cdot \cos(1.30654237y) \} \quad (55)$$

これらの関数を用いて、確率有限要素法による波動伝播の解析を行った。展開次数の影響を検討するため、

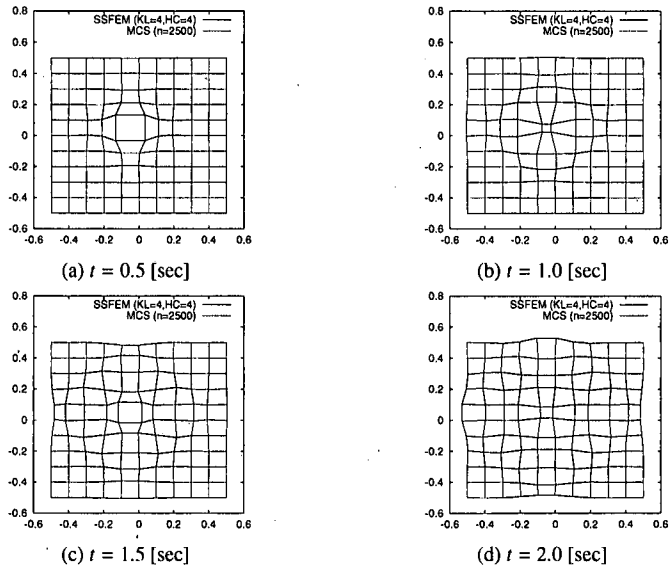


図-3 モンテカルロシミュレーションによる変位の平均値と確率有限要素法 (KL 展開 4 次, HC 展開 4 次) により得られた変位の期待値の比較.

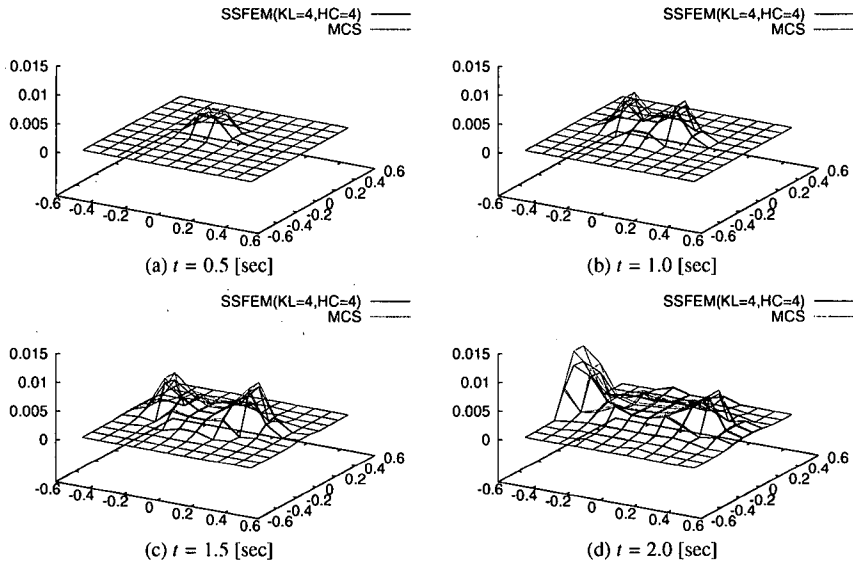


図-4 モンテカルロシミュレーションと確率有限要素法 (KL 展開 4 次, HC 展開 4 次) により得られた変位 (x 成分) の分散の比較.

Karhunen-Loève 展開及び Homogeneous Chaos 展開の次数として, $KL=2, HC=2, KL=4, HC=4$, 及び, $KL=6, HC=4$ という組合せを考慮した.

また, NITI 法を SSFEM に適用することの妥当性を検証するため, $KL=2, HC=2$ とした場合について, 同一の問題を NITI 法を用いた SSFEM により検討した.

(3) 解析結果

モンテカルロシミュレーション及び確率有限要素法 ($KL=4, HC=4$) による解析で得られた時刻 $t = 0.5, 1.0,$

$1.5, 2.0$ における変位の分布を図-3 に示す. 両者は良く一致する結果を与えている.

また, それぞれの時刻における x 成分の変位の分散の値についてプロットしたものを図-4 に示す. 確率有限要素法により算出した分散は, モンテカルロシミュレーションによる分散よりも若干小さな値を与えているが, いずれの時間においても概ね再現できていることが分かる. なお, 分散の分布の対称性が若干崩れているのは, メッシュの分割数との関係で, 入力を領域の中心に与えることができなかったことによるもの

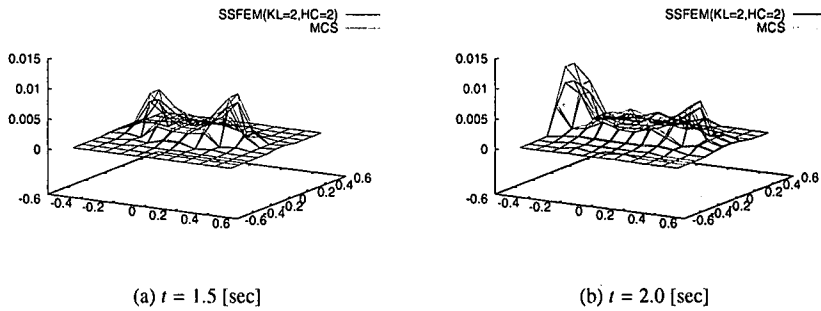


図-5 モンテカルロシミュレーションと確率有限要素法 (KL 展開 2 次, HC 展開 2 次) により得られた変位 (x 成分) の分散の比較.

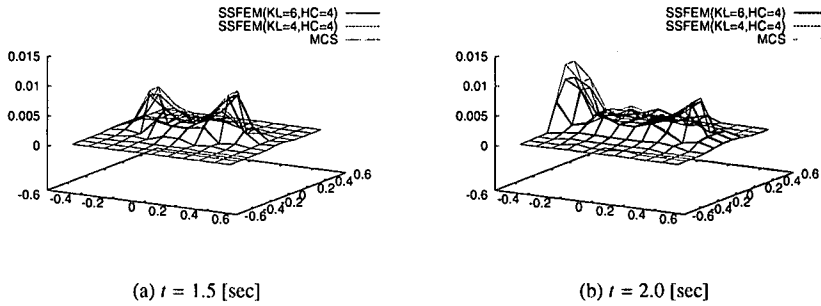


図-6 KL 展開 4 次, HC 展開 4 次とした確率有限要素法, KL 展開 6 次, HC 展開 4 次とした確率有限要素法, 及びモンテカルロシミュレーションによる変位 (x 成分) の分散の比較.

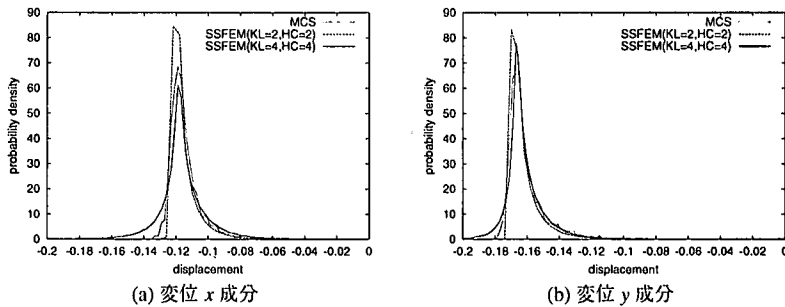


図-7 モンテカルロシミュレーションと確率有限要素法 (KL 展開 2 次, HC 展開 2 次), 同 (KL 展開 4 次, HC 展開 4 次) により得られた変位の確率密度関数の比較. 位置 $(x, y) = (-0.2, -0.2)$, 時刻 $t = 1.5$ における変位.

である.

Karhunen-Loève 展開次数や Homogeneous Chaos の次数の影響を見るために, KL=2, HC=2 とした場合の時刻 $t = 1.5, 2.0$ における変位 (x 成分) の分散をプロットしたものを図-5 に示す. 次数が下がっていることの影響により, 若干再現性が落ちているものの, この程度の展開次数でも, 分布の概要は十分再現されていることが分かる. なお, 変位の平均値については, ここでは図示しないが, この展開次数によっても十分な精度で計算されることを確認している.

次に, 展開次数を上げた場合の影響を検討するために行った KL=6, HC=4 という場合の計算結果を示す. 時刻 $t = 1.5, 2.0$ における変位の分散について, モンテカルロシミュレーションによる結果と SSFEM による結果の比較を図-6 に示す. 同図から, 展開次数を向上させても, 分散の再現性は劇的には向上しないことが分かる.

KL=6, HC=4 とした場合には $N_{PC} = 209$ であり, KL=4, HC=4 とした場合には $N_{PC} = 69$, また, KL=2, HC=2 とした場合には $N_{PC} = 5$ であり, 計算規模は N_{PC}

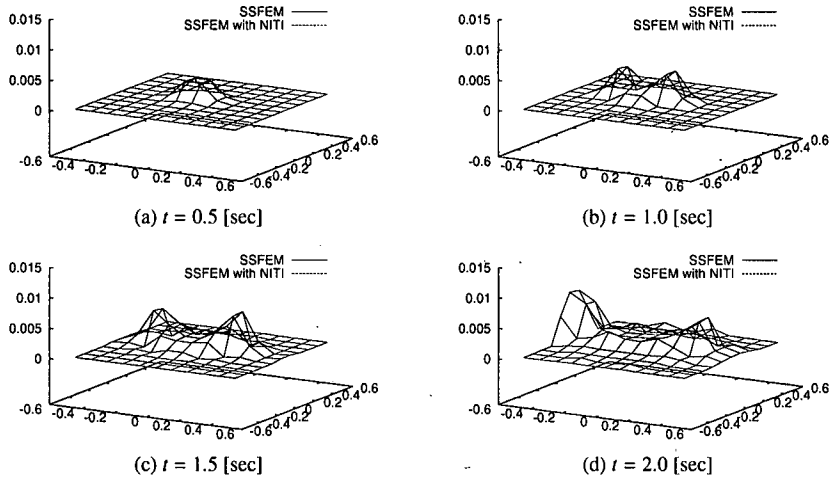


図-8 KL展開2次, HC展開2次とした確率有限要素法において, 時間積分法としてNewmark β 法を用いた場合と, NITI法を用いた場合の変位の分散の比較.

の二乗以上で大きくなることを考慮すると, 効率的な計算のためには, 展開次数を適切に設定することが重要であるといえる.

前述したように, スペクトル確率有限要素法では, 確率密度分布も評価することが可能である. KL=2, HC=2としたSSFEMと, KL=4, HC=4としたSSFEM, 及びモンテカルロシミュレーションにより得られる(-0.2, -0.2)における時刻 $t = 1.5$ における変位の確率密度分布を図-7に示した. SSFEMによる解析結果が, モンテカルロシミュレーションの結果をよく近似できていることが分かる.

2,500回の試行を行ったモンテカルロシミュレーションは, CPUとしてクロック数750MHzのAlphaチップを搭載した計算機により約6時間かかった. ランダム場を細かいメッシュ上に生成したこと等もあり, これは必要最低限の計算時間とは言えないが, 一つの指標といえる. 一方, スペクトル確率有限要素法では数分間程度の計算で上に示した程度の精度を有する結果を得ている. この結果より, スペクトル確率有限要素法による波動伝播解析が不確定な場における波動伝播解析を効率的に計算できる手法であることが分かる.

(4) NITI法の適用性

NITI法を適用することの妥当性について検証するため, 前述したKL=2, HC=2の場合について, 時間積分法としてNITI法を適用することによりマトリクスを対角ブロックとそれ以外に分割して計算した場合, 剛性マトリクスを通常のパンドマトリクスとして扱い, Newmarkの β 法で計算した場合を比較した.

まず, 計算精度について示す. 図-8に, 両者の解析

結果を重ねてプロットした. 同図には, 時刻 $t = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ の各時刻レベルにおける変位の分散の分布が示されている. いずれの時刻においても両者に差異は見られず, NITI法に基づく提案手法を用いることの妥当性を示す結果となっている.

次に, 計算効率について検討するため計算時間について比較する. 本計算を前述の計算機で実行するのにかかった計算時間は, マトリクスを分割せずNewmarkの β 法を用いた通常の方法で計算した場合にCPU時間で364秒であったのに対し, NITI法に基づく提案手法を適用した場合にはCPU時間で40秒であった. この結果は, 提案する手法を用いることにより計算時間を大幅に削減できたことを示している.

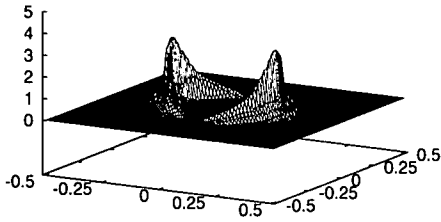
(5) 相関距離の影響の検討

物性値の相関関数の差異による波動場の違いについて検討した.

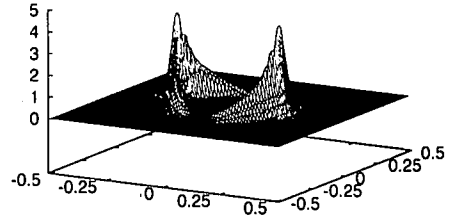
対象とするモデルは, 図-1と同様であるが, 詳細に検討するため, メッシュ分割を 100×100 要素とし, Karhunen-Loève展開2次, Homogeneous Chaos展開2次という条件でNITI法を適用したスペクトル確率有限要素法により解析した.

式(53)において, 相関距離 $b = 0.5$ とした場合と $b = 1.0$ について検討するものとし, これらの自己相関関数を有する媒体における波動伝播について解析した. 入力波としては, 周期0.4の正弦波一周期分を与えるものとした.

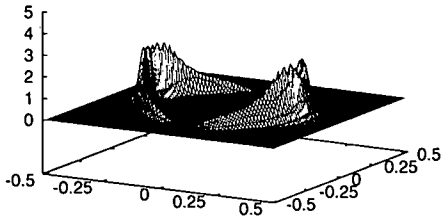
時刻 $t = 1.5$ 及び $t = 2.0$ における変位の x 成分の分散の分布を図-9に示す. 両者とも波頭付近において分散が大きくなっている. $t = 1.5$ においては, 両者の分



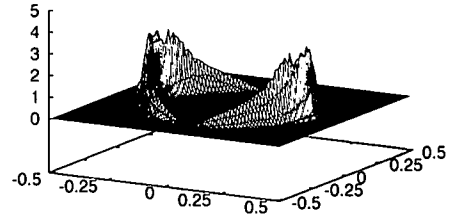
(a) 時刻 $t = 1.5$, 相関距離 $b = 0.5$



(b) 時刻 $t = 1.5$, 相関距離 $b = 1.0$



(c) 時刻 $t = 2.0$, 相関距離 $b = 0.5$



(d) 時刻 $t = 2.0$, 相関距離 $b = 1.0$

図-9 確率有限要素法 (KL 展開 2 次, HC 展開 2 次) により得られた変位 (x 成分) の分散の分布。

散の分布形に若干の差がみられているが、 $t = 2.0$ においては、その差は小さくなっているなど、ランダム媒質の相関距離が異なる場合に、波動の分散の大きさが異なってくることを示されている。

5. おわりに

本論文では、地震動の伝播など、ランダムな媒体における波動伝播現象の解析のための手法として、スペクトル確率有限要素法 (SSFEM) を適用することを提案した。そして、小規模なモデルを対象として数値計算を行い、モンテカルロシミュレーションによる結果と比較することで、SSFEM 法を波動伝播問題に適用することの妥当性を示した。

また、大きく疎なマトリクスを用いるスペクトル確率有限要素法を、効率的に解析するための数値計算手法として、酒井ら¹⁶⁾による時間積分法に基づく手法を提案した。この手法では、非対角ブロックの要素については逆行列を算出する必要がなく非零の要素を密に収納する配列があれば十分なため、必要なメモリ量が少なく計算時間も節約できる。提案する手法を用いた数値解析を行い、通常の計算手法により得られる解と

同一の解が得られること、また、計算時間も大幅に短縮されることを示し、その有効性を示した。

さらに、規模の大きいモデルを対象とした二次元内変位場 (P-SV 波動場) における波動伝播問題を解析した。媒体の剛性が確率分布で与えられる問題において、相関距離が異なる場合に変位の分散が変化することを示し、波動がランダム媒質の相関距離の影響により影響を受けることを示した。

ただし、媒体の特性が波動場に与える影響については、今後、より詳細な検討が必要であると考えられる。また、スペクトル確率有限要素法において確率密度関数等の精度を保証するためのメッシュサイズや展開次数等についての検討も必要である。

参考文献

- 1) Pitarka, A., Irikura, K. and Iwata, T.: Modeling of Ground Motion in Higashinada (Kobe) Area for an Aftershock of the January 17, 1995, Hyoto-ken Nanbu Earthquake, *Geophysical Journal International*, Vol. 131, pp.231-239, 1997.
- 2) 川瀬博, 佐藤智美, 松島信一, 入倉孝次郎: 余震観測記録に基づく兵庫県南部地震時の神戸市東灘区における本震地動の推定, 日本建築学会構造系論文集, 第 476 号, pp.103-112, 1995.

- 3) Ogura, H. : Theory of waves in a homogeneous random medium, *Physical Review*, Vol.11, No.3, 1975.
- 4) Ishimaru, A. : *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, Academic Press, 1978.
- 5) Wu, R.-S. and Jin, S. and Xie, X.-B. : Seismic Wave Propagation and Scattering in Heterogeneous Crustal Waveguides Using Screen Propagators, I SH Waves, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 90, 2, pp.401-413, 2000.
- 6) Hoshiya, M. : Large Fluctuation of Wave Amplitude Produced by Small Fluctuation of Velocity Structure, *Physics of Earth and Planetary Interiors*, Vol.120, No.3, pp.201-217, 2000.
- 7) Fehler, M., Sato, H. and Huang, L.-J. : Envelope Broadening of Outgoing Waves in 2D Random Media : A Comparison between the Markov Approximation and Numerical Simulations, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 90, 4, pp.914-928, 2000.
- 8) Yamazaki, F., Shinozuka, M. and Dasgupta, G. : Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.114, No.8, pp.1335-1354, 1988.
- 9) Vanmarcke, E. and Grigoriu, M. : Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.109, No.5, pp.1203-1214, 1983.
- 10) Ghanem, R. G. and Spanos, P. D. : *Stochastic Finite Elements - A Spectral Approach*, Springer-Verlag NY, 1991.
- 11) Ghanem, R. and Brzakala, W. : Stochastic Finite-Element Analysis of Soil Layers with Random Interface, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.122, No.4, 1996.
- 12) Anders, M. and Hori, M. : Stochastic Finite Element Method for Elast-Plastic Body, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46, pp.1897 - 1916, 1999.
- 13) Ghanem, R. : Stochastic Finite Elements with Multiple Random Non-Gaussian Properties, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.125, No.1, 1999.
- 14) Ghanem, R. G. and Kruger, R. M. : Numerical Solution of Spectral Stochastic Finite Element Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129, pp.289-303, 1996.
- 15) Anders, M. and Hori, M. : Three-Dimensional Stochastic Finite Element Method for Elast-Plastic Bodies, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51, pp.449 - 478, 2001.
- 16) 酒井久和, 澤田純男, 土岐憲三: 収束計算を伴わない動的非線形 FEM のための時間積分法, 土木学会論文集, No.507/I-30, 1995.
- 17) Sakai, H. and Sawada, S. : Non-Iterative Computation Scheme for Analysis of Nonlinear Dynamic System by Finite Element Method, *Proc. Eleventh World Conference on Earthquake Engineering*, Paper No.956, 1996.
- 18) 本田利器, 澤田純男: 非線形動的 FEM 解析の並列計算のための非反復時間積分法, 応用力学論文集, No.3, pp.629-636, 2000年9月.
- 19) Spanos, P. D. and Ghanem, R. : Stochastic Finite Element Expansion for Random Media, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.115, No.5, pp.1035-1053, 1989.

(2001. 2. 19 受付)

ANALYSIS OF WAVE PROPAGATION IN RANDOM MEDIA BY SPECTRAL STOCHASTIC FINITE ELEMENT METHOD

Riki HONDA

Ground is not a homogeneous medium and it is impossible to obtain complete information about its material property. Therefore, for the purpose of simulation of seismic wave or interpretation of observed ground motion, it is essential to consider uncertainty of material property. This paper proposes the application of Spectral Stochastic Finite Element Method (SSFEM) to the analysis of such problems. Computation of SSFEM uses huge and sparse matrices. This paper also proposes a computation scheme for SSFEM, which can treat sparse matrix efficiently. Computation results obtained by SSFEM are compared with results by Monte Carlo simulation. They show good agreement and the applicability of SSFEM and the proposed computation scheme is verified.