

常時微動計測に基づく非比例減衰系の構造同定と長大吊橋への適用例

阿部雅人¹・藤野陽三²・長山智則³・池田憲二⁴

¹正会員 Ph.D. 東京大学助教授 大学院工学系研究科社会基盤工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1)

²フェロー Ph.D. 東京大学教授 (同上)

³学生員 東京大学大学院修士課程 工学系研究科社会基盤工学専攻 (同上)

⁴正会員 独立行政法人北海道開発土木研究所 構造部構造研究室長 (〒062-8602 札幌市豊平区平岸1条3丁目)

構造物の健全性や外力・荷重評価を行うにあたって、使用状態でも計測可能な常時微動を利用することの利点は大きい。そこで、本研究は、常時微動を利用して、従来困難であると考えられてきた高精度かつ高次までのモード特性の同定法を提示するとともに、損傷劣化した構造物への適用を念頭に、非比例減衰系を取り扱える構造逆解析法の構築を行った。特に、構造逆解析法の構築にあたっては、モード空間のみでの解析から剛性・減衰の変化を逆解析する手法を構築し、構造モデルを使用しない同定・逆解析の枠組みを提示した。また、長大吊橋である白鳥大橋(北海道)における常時微動の実計測データに本方法を適用し、支承摩擦力、空気力の影響を等価剛性・等価減衰として逆解析を行い、その有効性を示した。

Key Words : ambient vibration, non-proportional damping, random decrement, structural identification, suspension bridge, time domain method

1. はじめに

膨大な社会基盤のストックを限られた資源投入で効率よく管理していくために、高い信頼性で構造物の健全性や荷重を評価する技術が必要とされている。しかし、実際の構造物や周囲の環境は極めて複雑な系であり、そのとり得る状態も多岐にわたるため、真の保有性能を部材・材料レベルの特性試験と解析のみから予測・評価することは極めて困難である。したがって、実構造物における計測や点検を行い、対象構造物に固有の“体質”を見極めた上で、性能や損傷状態を評価する必要がある。とりわけ、振動計測は、振動数や減衰などの動的特性が、構造物全体系の特性を反映していると考えられること、また、客観的・定量的計測データが得られることから、健全性や荷重を評価する上で有効な情報を与えるものと考えられる^{1),2)}。

そのため、これまでも実構造物における振動計測とその性能評価への応用については数多くの実施例があり、また実計測データに基づいた研究がなされてきた³⁾。なかでも、田中ら⁴⁾、山口ら^{5),6)}の研究では、動的特性の振幅依存性を具体的に伸縮装置や支承の摩擦として説明しており、吉田ら⁷⁾、貝戸ら⁸⁾、

Chaudhary ら⁹⁾は、さらにそれを発展させて免震橋の定量的性能評価に結び付けている。しかしながら、実構造物で計測された動的特性に基づいて、構造物の特性や荷重特性を定量的に同定・逆解析した例は希少である。その理由としては、①信頼性の高い逆解析には高次モードを高い精度で同定する必要があるが、それには高精度の計測器を高密度で配置する必要がある、②実構造物は、局所的な摩擦や損傷の影響で複素モード形を有する非比例減衰系となっている場合が多いが、既存の同定手法は実数のモード形を有する比例減衰系(例えば、Rayleigh 減衰など)を仮定している¹⁰⁾、③既存手法は近接モードの影響を取り込めない場合が多い、④モデル化の誤差のため、逆解析の前提となる構造物の初期状態を表す基準モデル自体に信頼性がない場合が多い、⑤土木構造物では供用中の加振実験が難しいため、不確定な環境・荷重条件の影響を受ける常時微動計測などのノイズの高いデータを扱わざるを得ない、などの技術的問題を挙げることが出来る。そのうち、①については、近年の計測・情報処理技術の進展によりハードウェア的解決法が開発されつつある^{11),12)}。そこで、ここでは、②～⑤の問題に対する系統的な解決法を構築・提案することを目的として研究を行った。

本論文の前半では、不規則な常時微動計測から高次に至るまでの振動モード特性を同定する手法を構築する。この部分は、主に、既往の手法の拡張と体系化によるものである。後半では、得られた振動特性に基づいて構造特性を逆解析する手法を提案する。この部分については、特に④の問題を念頭に、構造モデルに依存せずに、かつ非比例減衰系を扱うことの出来る手法を、新たに考案した。なお、本研究では、混乱を避けるため、計測データから振動モード特性を求める操作を同定、振動モード特性から剛性・減衰などの物理的な値を求める操作を逆解析と呼んでいる。

さらに、実測例として、比較的高密度の計測が行われた長大吊橋である白鳥大橋での常時微動計測データを用いて逆解析を試みた。長大吊橋は多くの近接したモードを有しており、また、支承部分の非線形性や空力減衰のため非比例減衰となる代表的構造物である。そのため、Golden Gate 橋の常時微動解析を行った研究^{13),14)}では、近接モードの分離に難があり、また、高次モードの同定は成功していない。

本研究では、常時微動を基に高次モードまでの同定を実現すると共に、提案手法を用いて実測記録を解析し、構造特性変化の主要因であると考えられる支承部分の剛性と減衰、ならびに空力剛性と空力減衰の変化を定量的に求めた。

2. 常時微動データに基づく振動モード特性の同定

ここでは、常時微動データから、各モードの固有振動数・減衰比を同定する手法を構築する。まず、(1)で、不規則な常時微動波形から自由振動波形を生成する方法を提示し、次いで、(2)で、生成された自由振動波形からモード特性を同定する手法を示す。

(1) 自由振動波形の生成

ここでは、常時微動記録に Random Decrement 法 (RD 法)¹⁵⁾を適用することで自由振動波形を生成する手法を適用する。RD 法の概念は、平均が 0 となる理想的なランダム外力を想定して、応答を時間軸上で多数重ね合わせ平均することで、ランダム応答成分を消去するというものである。したがって、ノイズレベルが高いデータに対しても、計測時間ならびに重ね合わせ数を十分に大きくすることで適用できる可能性を有する手法であると考えられる。建設系の分野においては、田村ら¹⁶⁾によって適用が試みられてきた。ただし、田村らの方法は、建築物など

近接モードを持たない構造物を対象に、バンドパスフィルターと併用して適用するものである。ここでは、多自由度系を前提とした手法を提示する。

簡単のため、まず、1 質点系を例にとりて RD 法の概略を解説する。応答時刻歴 $y(t)$ から、設定した閾値 a_0 より始まる時刻歴 $z_i(\tau)$ を多数サンプリングする。すなわち

$$z_i(\tau) = y(t_i + \tau) \quad (1)$$

ただし、

$$z_i(0) = y(t_i) = a_0 \quad (1a)$$

ここに、 $i=1,2,\dots,n$ である。ここに、 t_i は、 $y=a_0$ となる時刻、 n はサンプル数である。 $z_i(\tau)$ は①初期状態量 a_0 (変位、速度、加速度のいずれでも可) を有し、初期変化率が 0 の自由減衰応答 $z^{(1)}(\tau)$ 、②初期状態量が 0 で、初期変化率を持つ自由減衰応答 $z^{(2)}(\tau)$ 、③初期状態量、初期変化率ともに 0 で、ランダム外力をうける応答 $z^{(3)}(\tau)$ の 3 成分の線形和である。初期値 a_0 を満たす時刻歴を多数重ね合わせ平均化すると、 n が無限大に近づくにつれて、外力のランダム性から②③の項は相殺され、①項のみが残る。すなわち、

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i(\tau) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^{(1)}(\tau) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^{(2)}(\tau) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^{(3)}(\tau) \\ &\approx z^{(1)}(\tau) \end{aligned} \quad (2)$$

となり、初期状態量 a_0 、初期変化率 0 の自由減衰応答が得られる。

上述の方法を、多自由度系に拡張する。 N 個の計測点で測定された時系列ランダム応答ベクトルを $\{y(t)\}$ ($N \times 1$ ベクトル) とする。測定点 l の応答が設定初期値 a_0 より始まる時刻歴 $\{z_l(\tau)\}$ ($N \times 1$ ベクトル) を多数サンプリングする。式(1)と同様に

$$\{z_l(\tau)\} = \{y(t_i + \tau)\} \quad (3)$$

ただし、 $\{z_l(0)\}_l = \{y(t_i)\}_l = a_0$ となる。この多自由度系の自由減衰応答は式(2)と同様にして

$$\{x(\tau)\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{z_l(\tau)\} \quad (4)$$

によって得られる。

厳密には、式(2),(4)の重ね合わせで得られるのは状態量の応答そのものではなく、状態量の自己相関関数であることが証明されている¹⁷⁾。ただし、入力が定常ガウス白色雑音の場合には自己相関関数と自由振動応答が一致するため、本論文では単に自由振動応答として考えることとした。

(2) 振動モード特性の同定

ここでは、自由減衰応答をモード毎の自由減衰応答の線形和で表現し、固有値問題を解くことによってモード特性を同定する Ibrahim Time Domain 法 (ITD 法)¹⁸⁾に基づいた同定法を提示する。この方法は、直接モード特性を同定するため、自由度や構造モデルが不明な場合にも容易に適用可能である利点を有する実用的な手法である。また、振動数応答曲線を利用する振動数領域での同定方法では振動数が近接するモードの同定が一般に難しいが、本手法は、時間領域の波形を直接用いるため、近接モードが存在する場合であってもそのままの形で適用可能である。

線形 N 自由度系の自由振動時の運動方程式は、次のように書くことができる。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (5)$$

ただし、 $[M]$: 質量マトリックス、 $[C]$: 減衰マトリックス、 $[K]$: 剛性マトリックス、 $\{x\}$: 変位応答ベクトルを表す。 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ は $N \times N$ 行列、 $\{x\}$ は $N \times 1$ ベクトルである。

式 (5) の解は次の形に書くことができる。

$$\{x\} = \sum_{j=1}^{2N} \{p_j\} \exp(\lambda_j t) \quad (6)$$

ただし、

$$\lambda_j = -h_j \omega_j + \sqrt{1 - h_j^2} \omega_j i \quad (6a)$$

ここに、 $\{p_j\}$: j 次モード形、 h_j : j 次減衰比、 ω_j : j 次固有振動数である。式(5)(6)は、比例減衰の仮定を導入していない一般的な形式であるため、モード形は一般に複素数となり、 N 個の複素共役の組からなる $2N$ 個存在する¹⁹⁾。変位、速度などの状態量は、これらの複素振動モード $2N$ 個の重ね合わせとなる。

以下の式展開は、変位、速度、加速度のいずれについても最終的に同一の固有値問題に帰着されるが、実計測では加速度が計測されていることが一般的であるので加速度を例にとって導く。まず、簡単のため、自由度と計測点数がともに N で一致する場合について考える。 $2N$ 個の異なる時刻 t_1, t_2, \dots, t_{2N} における加速度応答ベクトルは次のように表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\ddot{x}_1\}, \{\ddot{x}_2\}, \dots, \{\ddot{x}_{2N}\} \\ \{p_1\}, \{p_2\}, \dots, \{p_{2N}\} \end{array} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \lambda_1^2 \exp(\lambda_1 t_1) & \lambda_1^2 \exp(\lambda_1 t_2) & \dots \\ \lambda_2^2 \exp(\lambda_2 t_1) & \lambda_2^2 \exp(\lambda_2 t_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \lambda_{2N}^2 \exp(\lambda_{2N} t_1) & \lambda_{2N}^2 \exp(\lambda_{2N} t_2) & \dots \end{array} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1^2 \exp(\lambda_1 t_{2N}) \\ \lambda_2^2 \exp(\lambda_2 t_{2N}) \\ \vdots \\ \lambda_{2N}^2 \exp(\lambda_{2N} t_{2N}) \end{array} \right\} \quad (7)$$

これを、便宜上次のように略記する。

$$[\Delta] = [P] [\Lambda] \quad (8)$$

$[\Lambda]$ は $2N \times 2N$ 行列、 $[X]$ 、 $[P]$ は $N \times 2N$ 行列である。

この Δt 秒後の加速度応答ベクトルを $\{\ddot{y}\}$ とすると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\ddot{y}_1\}, \{\ddot{y}_2\}, \dots, \{\ddot{y}_{2N}\} \\ \{p_1\}, \{p_2\}, \dots, \{p_{2N}\} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1^2 \exp(\lambda_1(t_1 + \Delta t)) & \lambda_1^2 \exp(\lambda_1(t_2 + \Delta t)) & \dots \\ \lambda_2^2 \exp(\lambda_2(t_1 + \Delta t)) & \lambda_2^2 \exp(\lambda_2(t_2 + \Delta t)) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \lambda_{2N}^2 \exp(\lambda_{2N}(t_1 + \Delta t)) & \lambda_{2N}^2 \exp(\lambda_{2N}(t_2 + \Delta t)) & \dots \\ \lambda_1^2 \exp(\lambda_1(t_{2N} + \Delta t)) & \lambda_2^2 \exp(\lambda_2(t_{2N} + \Delta t)) & \vdots \\ \lambda_2^2 \exp(\lambda_2(t_{2N} + \Delta t)) & \vdots & \vdots \\ \lambda_{2N}^2 \exp(\lambda_{2N}(t_{2N} + \Delta t)) & \vdots & \vdots \end{array} \right] \quad (9)$$

となる。ただし、

$$\{\ddot{y}_i\} = \{\ddot{x}(t_i + \Delta t)\} \quad (10)$$

である。ここで、

$$\{p_j\} = \{p_j\} \exp(\lambda_j \Delta t) \quad (11)$$

とおけば、

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\ddot{y}_1\}, \{\ddot{y}_2\}, \dots, \{\ddot{y}_{2N}\} \\ \{q_1\}, \{q_2\}, \dots, \{q_{2N}\} \end{array} \right\} = [\Lambda] \quad (12)$$

である。上式を、次のように略記する。

$$[Y] = [Q] [\Lambda] \quad (13)$$

さらに Δt 後の加速度応答ベクトルを考えると同様にして、

$$[Z] = [R] [\Lambda] \quad (14)$$

が得られる。ただし、

$$[Z] = \{\{\ddot{z}_1\}, \{\ddot{z}_2\}, \dots, \{\ddot{z}_{2N}\}\} \quad (14a)$$

$$\{\ddot{z}_i\} = \{\ddot{x}(t_i + 2\Delta t)\} \quad (14b)$$

$$[R] = \{\{r_1\}, \{r_2\}, \dots, \{r_{2N}\}\} \quad (14c)$$

$$\{r_j\} = \{q_j\} \exp(\lambda_j \Delta t) = \{p_j\} \exp(2\lambda_j \Delta t) \quad (14d)$$

である。なお、 ij ともに 1 から $2N$ の整数である。ここで、次の $2N \times 2N$ 行列を定義する。

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} [X] \\ [Y] \end{bmatrix}, \quad [\hat{\Phi}] = \begin{bmatrix} [Y] \\ [Z] \end{bmatrix}, \quad [\Psi] = \begin{bmatrix} [P] \\ [Q] \end{bmatrix}, \quad [\hat{\Psi}] = \begin{bmatrix} [Q] \\ [R] \end{bmatrix} \quad (15a, b, c, d)$$

これらの行列を使うと式(8), (13), (14)より次の関係が得られる。

$$[\Phi] = [\Psi][\Lambda] \quad (16)$$

$$[\hat{\Phi}] = [\hat{\Psi}][\Lambda] \quad (17)$$

付録に示すように $[\Phi], [\hat{\Phi}]$ は逆行列を持つ。また, $[\Psi], [\hat{\Psi}]$ は式(15c,d)から分かるように、それぞれの列成分がモード形から構成されている。モード形は互いに独立であるので $[\Psi], [\hat{\Psi}]$ は逆行列を持つ。よって式(16), (17)から $[\Lambda]$ を消去すると、

$$[\hat{\Phi}][\Phi]^{-1}[\Psi] = [\hat{\Psi}] \quad (18)$$

これより $[\Psi], [\hat{\Psi}]$ の列ベクトル $\{\psi_j\}, \{\hat{\psi}_j\}$ は、

$$[\hat{\Phi}][\Phi]^{-1}\{\psi_j\} = \{\hat{\psi}_j\} \quad (19)$$

の関係を満たす。一方、式(11)と(14d)より

$$\{\hat{\psi}_j\} = \exp(\lambda_j \Delta t) \{\psi_j\} \quad (20)$$

である。式(19),(20)より $\{\hat{\psi}_j\}$ を消去すると

$$[\hat{\Phi}][\Phi]^{-1}\{\psi_j\} = \alpha_j \{\psi_j\} \quad (21)$$

ただし、 $\alpha_j = \exp(\lambda_j \Delta t)$ (22)

となる。式(21)の固有値問題の解としてモード特性が得られる。ここで得られる固有値 α_j とモード減衰比 h_j 、固有振動数 ω_j とは次の関係にある。

$$\omega_j = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\text{Re}(\ln \alpha_j)^2 + \text{Im}(\ln \alpha_j)^2} \quad (23a)$$

$$h_j = \frac{-\text{Re}(\ln \alpha_j)}{\sqrt{\text{Re}(\ln \alpha_j)^2 + \text{Im}(\ln \alpha_j)^2}} \quad (23b)$$

なお、得られた固有ベクトル $\{\psi_j\}$ の上半分の $N \times 1$ ベクトルがモード形を表すベクトルとなる。

上述の方法では式(6)において、自由減衰応答が $2N$ 個の複素モード振動の重ね合わせで表せると仮定しており、式(21)の固有値問題を解くことで計測点数 N の2倍、 $2N$ 個の複素モードを得ている。実構造物の自由度が N よりも大きい場合は、少ないモードで実挙動を近似することになる。この問題を解決するために、擬似的な計測点を導入する¹⁸⁾。式(6)において、時刻 t を τ ずらすと、

$$\begin{Bmatrix} x_1(t+\tau) \\ x_2(t+\tau) \\ \vdots \\ x_N(t+\tau) \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{2N} \begin{Bmatrix} p_{1r} \\ p_{2r} \\ \vdots \\ p_{Nr} \end{Bmatrix} \exp((-h_r \omega_r + \sqrt{1-h_r^2} \omega_r)(t+\tau))$$

$$= \sum_{r=1}^{2N} \begin{Bmatrix} g_{1r} \\ g_{2r} \\ \vdots \\ g_{Nr} \end{Bmatrix} \exp((-h_r \omega_r + \sqrt{1-h_r^2} \omega_r)t) \quad (24)$$

ただし、 $g_{ir} = p_{ir} \exp((-h_r \omega_r + \sqrt{1-h_r^2} \omega_r)\tau)$ (24a)

が得られる。この関係を利用して、式(6)を次のように拡張することができる。

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \\ x_{N+1}(t) \\ x_{N+2}(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{2M} \begin{Bmatrix} p_{1r} \\ p_{2r} \\ \vdots \\ p_{Nr} \\ p_{(N+1)r} \\ p_{(N+2)r} \\ \vdots \\ p_{Mr} \end{Bmatrix} \exp((-h_r \omega_r + \sqrt{1-h_r^2} \omega_r)t) \quad (25)$$

ここで、 $x_i(t) = x_m(t + \tau_k)$ (25a)

$$p_{ir} = p_{mr} \exp((-h_r \omega_r + \sqrt{1-h_r^2} \omega_r)\tau_k) \quad (25b)$$

ただし、 $N < i \leq M$ 、 m は $1 \leq m \leq M$ を満たす任意の整数である。また、 $\tau_k \neq \Delta t$ であり、かつ $k \neq l$ の時 $\tau_k \neq \tau_l$ である。

式(25)により、見かけ上計測点数を増やすことができる。この拡張された時刻歴を用いてITD法を適用すると $2M$ 個の複素モードが得られる。この方法は、独立した振動モードにおいては、一般に固有振動数、減衰比が異なるため、ある時間後の状態を固有ベクトルとして含めることで、単一時間の振動状態からのみでは識別が不可能なモード形を検出するものである。この方法で擬似的な計測点数を増やしていくことで多くのモードを精度よく求めることができる。構造物は理論的には無限自由度と考えられるが、実際の計測では、必ずしもすべてのモードが励起されておらず、また、計測器の精度の限界もある。したがって、この方法で計測点数を増やしていくと、 M が計測データから抽出可能な自由度を超えた段階で行列 $[\Phi]$ が特異となる。現実には、 $[\Phi]$ の行列式の値が数値誤差・計測誤差のオーダーに達したところで計測点数を増やすことの実用的意義が無くなると考えられる。

3. 非比例減衰系の逆解析法

前節の方法は、一般的な複素モードを持つ非比例減衰系を前提とした手法であった。通常の構造同定では、非比例減衰の影響は小さいと考え Rayleigh 減衰などの比例減衰を仮定して、実数モードで近似することが多い³⁾。しかし、実構造物は、局所的な摩擦や損傷の影響で複素モード形を有する非比例減衰系となっている場合が多く、また、近接した固有振動数を有する場合にはその影響が無視できないことから²⁰⁾、ここでは非比例減衰を前提として複素モード形を取り扱える手法を構築する。具体的には、同一構造物において、例えば損傷前後、災害前後などに行われた前後2回の計測から、その計測間での減衰・剛性の変化を同定するものである。すなわち、減衰・剛性が変化する前の変位 $\{x\}$ が

$$\{x\} = \sum_r^N \{\psi_r\} \exp(s_r t) \quad (26)$$

減衰、剛性が変化した後は

$$\{x\} = \sum_r^N \{\psi'_r\} \exp(s'_r t) \quad (27)$$

と表せる場合に、モード形、振動数、減衰の変化より付加減衰、付加剛性を同定する理論を提案する。ただし $\{\psi_r\}$ 、 $\{\psi'_r\}$ は r 次モード形、 s_r は r 次の固有値であり、モード振動数 ω_r 、 r 次モード減衰比 h_r を使って次のように表される。

$$s_r = -h_r \omega_r + i\sqrt{1-h_r^2} \omega_r \quad (28)$$

本方法は、文献8)で提案されている構造モデルが明らかな場合の手法を改良し、モード空間のみの取り扱いとすることで、前後の計測によって同定されたモード特性のみから剛性・減衰の変化量を同定可能としたものである。

(1)初期の質量・減衰・剛性行列が既知の場合

非比例減衰の場合、式(5)の運動方程式を状態変数表示を用いて $2N$ 個の1階微分方程式で表した後に、一般化固有値問題を解いて、複素モード形を求める必要がある。状態変数表示は、

$$[A]\{\dot{u}\} + [B]\{u\} = \{0\} \quad (29)$$

となる。ここで

$$[A] = \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix}, \{u\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} \quad (29a,b,c)$$

である。式(5)の一つの解を

$$\{x\} = \{\psi_r\} \exp(s_r t) \quad (30)$$

と仮定する。式(29)を用いると

$$\{\dot{u}\} = \{\Psi_r\} \exp(s_r t) \quad (31)$$

ただし

$$\{\Psi_r\} = \begin{Bmatrix} \{\psi_r\} \\ \{\psi_r s_r\} \end{Bmatrix} \quad (31a)$$

と表せる。式(29)に代入すると、

$$[[A]\Psi_r + [B]]\{\Psi_r\} \exp(s_r t) = \{0\} \quad (32)$$

となる。非比例減衰系では、この一般化固有値問題の固有値、固有ベクトルとして $2N$ 個の複素共役なモード解が得られる。ここで式(32)の $2N$ 個の固有値 λ_r を、 $r=1 \sim N$ について $\lambda_r = s_r$ としたとき、複素共役のペアが $\lambda_{r+N} = s_r^*$ となるように並べ替える。すると、固有ベクトルは

$$\{\Psi_r\} = \begin{Bmatrix} \psi_r \\ \psi_r s_r \end{Bmatrix}, \{\Psi_{r+N}\} = \begin{Bmatrix} \psi_r^* \\ \psi_r^* s_r^* \end{Bmatrix} \quad (33a,b)$$

と表される。このとき $\{u\}$ はモード座標を用いると、

$$\{u\} = [\Psi]\{q\} \quad (34)$$

と表すことができる。ここで $\{q\}$ はモード変位を表す $2N \times 1$ ベクトルである。式(34)を式(29)に代入して左から $[\Psi]$ の転置行列を乗すると、

$$[\Psi]^T [A] [\Psi] \dot{q} + [\Psi]^T [B] [\Psi] q = 0 \quad (35)$$

となる。式中 $[\Psi]^T [A] [\Psi]$ 、 $[\Psi]^T [B] [\Psi]$ は対角行列となり、次式のように $2N$ 個のモードごとの非連成化した式として表すことができる。

$$[a]\{\dot{q}\} + [b]\{q\} = \{0\} \quad (36)$$

ここに、

$$[a] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & a_r & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}, [b] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & b_r & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad (36a,b)$$

である。次に、減衰行列の変化として付加減衰 $[C']$ 、剛性行列の変化として付加剛性 $[K']$ を加える。運動方程式は次のように書ける。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [[C] + [C']]\{\dot{x}\} + [[K] + [K']]\{x\} = 0 \quad (37)$$

$[C']$ 項、 $[K']$ 項を外力と考えて状態変数表示すると

$$[A]\{\dot{u}\} + [B]\{u\} = [C']\{\dot{u}\} + [K']\{u\} \quad (38)$$

ただし、

$$[C'] = \begin{bmatrix} [0] & -[C'] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}, [K'] = \begin{bmatrix} -[K'] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \quad (38a,b)$$

式(36)と同様に対角化すると、

$$[a]\{\dot{q}\} + [b]\{q\} = [g_1]\{\dot{q}\} + [g_2]\{q\} \quad (39)$$

ただし、

$$[g_1] = [\Psi]^T [C'] [\Psi], [g_2] = [\Psi]^T [K'] [\Psi] \quad (39a,b)$$

となる。式(39)を $\{q\}$, $\{\dot{q}\}$ について整理すると,

$$[[a] - [g_1]]\{\dot{q}\} + [[b] - [g_2]]\{q\} = \{0\} \quad (40)$$

ここで, 付加減衰・付加剛性が増えられた後の新しいモード変位ベクトル $\{z\}$ を使って $\{q\}$ を表すことを考える。すなわち,

$$\{q\} = [T]\{z\} \quad (41)$$

$$\{z\} = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & s'_r & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \{z\} = [s']\{z\} \quad (42)$$

である。ここで, $[T]$ はモード変換行列 ($2N \times 2N$ 行列) である。これらを式(40)に代入すると

$$[[a] - [g_1]]T[s'] + [[b] - [g_2]]T\{z\} = \{0\} \quad (43)$$

この式は一般化固有値問題の固有ベクトルとしてモード変換行列 $[T]$ が, 固有値 $[s']$ として変化後の新しいモード振動数, モード減衰比が得られることを示している。ここで物理座標 $\{u\}$ をモード座標 $\{z\}$ で表すと,

$$\{u\} = [\Psi][T]\{z\} \quad (44)$$

である。なお, 剛性・減衰付加後のモード形 $[\Psi'']$ は, $[\Psi][T]$ の上半分 ($N \times 2N$ 行列) である。

上述の, 付加減衰 $[C']$, 付加剛性 $[K']$ を変化させて得られたモード形 $[\Psi'']$ および固有振動数・減衰比が, 変化後に計測されたモード形 $[\Psi']$ および固有振動数・減衰比に等しくなるように, 例えば最小 2 乗法などによって $[C']$, $[K']$ を選べば, 付加減衰, 付加剛性を同定できる。

(2) 初期の質量・減衰・剛性行列が未知の場合

前節の方法は, 構造変化前の質量・剛性・減衰行列が既知である事を前提としている。しかし, 構造が変化する前においても, これらの行列が高い信頼性で精度良く求められていることは稀であるので, ここでは, 初期のモード特性のみから, 剛性・減衰の変化分を算定する方法を構築する。式展開の都合上, 式(35)において $[\Psi]$ に変えて下記の $[\Phi]$ を用いる。

$$\{\Phi_r\} = \frac{1}{\sqrt{a_r}} \{\Psi_r\} \quad (45)$$

この $[\Phi]$ を用いて式(39)と同様に $2N$ 個の非連成化した式に直すと

$$[I]\{\dot{q}\} - [s]\{q\} = [g_3]\{\dot{q}\} + [g_4]\{q\} \quad (46)$$

ただし,

$$[g_3] = [\Phi]^T [C''] [\Phi], [g_4] = [\Phi]^T [K''] [\Phi] \quad (46a,b)$$

$$[s] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & s_r & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad (46c)$$

$$s_r = -\frac{b_r}{a_r} = -h_r \omega_r + i\sqrt{1-h_r^2} \omega_r \quad (46d)$$

$r=1,2,\dots,2N$ である。式(43)と同様にして変化後のモード特性は, 次の一般化固有値問題の解として得られる。

$$[[I] - [g_3]]T[s'] - [[s_r] + [g_4]]T\{z\} = \{0\} \quad (47)$$

変化後のモード形 $[\Psi'']$ が得られるので, 減衰, 剛性が変化した後のモード形 Ψ' に等しくなる $[C']$, $[K']$ を選べば, 減衰, 剛性の変化を同定できる。

ただし, ここでは, 初期の質量, 減衰, 剛性のすべてが未知であるので, 式(45)において a_r は未知数である。そこで, a_r を使わない同定手法を考える。式(29), (33)より

$$[\Psi]^T [A] [\Psi] = \begin{bmatrix} [A_1] & [A_2] \\ [A_3] & [A_4] \end{bmatrix} = [a] \quad (48a)$$

$$[A_1] = [\psi]^T [C] [\psi] + [s_m] [\psi]^T [M] [\psi] + [\psi]^T [M] [\psi] [s_m] \quad (48b)$$

$$[A_2] = [\psi]^T [C] [\psi^*] + [s_m] [\psi]^T [M] [\psi^*] + [\psi]^T [M] [\psi^*] [s_m^*] \quad (48c)$$

$$[A_3] = [\psi^*]^T [C] [\psi] + [s_m^*] [\psi^*]^T [M] [\psi] + [\psi^*]^T [M] [\psi] [s_m] \quad (48d)$$

$$[A_4] = [\psi^*]^T [C] [\psi^*] + [s_m^*] [\psi^*]^T [M] [\psi^*] + [\psi^*]^T [M] [\psi^*] [s_m^*] \quad (48e)$$

$$[s_m] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & s_r & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad (48f)$$

ここに, $r=1,2,\dots,2N$ である。式(36), 式(48a)より a_r は, $[A_1], [A_4]$ の対角項である。一般に, 減衰の値のオーダーは小さいことから $[A_1], [A_4]$ の主要な項は質量行列 $[M]$ である。したがって, 質量分布が分かれば, 近似的に a_r が計算でき, 逆解析が可能となる。

例えば, 橋桁などに見られるように, $[M]$ が空間的にほぼ一様で, 近似的に単位行列 $[I]$ の定数倍と見なされる場合には, m を定数として,

$$a_r \approx 2ms_r [\psi_r]^T [\psi_r] \quad (49)$$

と表すのが妥当である。式(49)を用いれば, 式(46)は

$$[I]\{\dot{q}\} - [s]\{q\} \approx \frac{1}{2m} \left\{ \Psi^T [\sigma] [C^*] [\sigma] \Psi \{ \dot{q} \} + [\Psi]^T [\sigma] [K^*] [\sigma] \Psi \{ q \} \right\} \quad (50)$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \ddots & & & 0 \\ & 1 & & \\ & \sqrt{s_r} \{ \psi_r \}^T \{ \psi_r \} & & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (50a)$$

となる。式(50)を左辺にまとめて、式(40)と同様に一般化固有値問題を解くと、変化後のモード解が得られる。新しいモード解が得られるので、減衰、剛性が変化した後のモード解に等しくなる[C']、[K']を選べば、相対的な付加減衰[C']/(2m)、付加剛性[K']/(2m)の変化を同定できる。具体的には、本研究では、シンプレックス法により、下の評価関数Γを最小にする解を探索した。

$$\Gamma([C'], [K']) = \max(E_\omega, E_h, E_\phi) \quad (51)$$

$$E_\omega = \sqrt{\sum_{i=1}^{\gamma} \left(\frac{\omega_i^{(n)} - \omega_i^{(b)}}{\omega_i^{(c)} - \omega_i^{(b)}} \right)^2} \quad (51a)$$

$$E_h = \sqrt{\sum_{i=1}^{\gamma} \left(\frac{h_i^{(n)} - h_i^{(b)}}{h_i^{(c)} - h_i^{(b)}} \right)^2} \quad (51b)$$

$$E_\phi = \sqrt{\sum_{i=1}^{\gamma} \left\| \frac{\{ \phi_i^{(n)} \} - \{ \phi_i^{(b)} \}}{\{ \phi_i^{(c)} \} - \{ \phi_i^{(b)} \}} \right\|^2} \quad (51c)$$

ただし、 ω , h , Φ はそれぞれ、モード振動数、モード減衰比、モード形を表し、添字の(n)は、計算によって得られるモード、(b)は計測された再現の目的モード、(c)は基準となる初期のモード、 γ は最適化に用いるモード数である。初期のモードと計測されたモードの差によって正規化することで、変化率の大きいモードのみでなく変化率の小さいモードも含めて一様に適合するよう配慮した誤差関数とした。

具体例として図-1に示す、近接モードを有する非比例減衰2自由度系の例題の計算を行った。表-1に示した値を初期の基準モデル値として設定し、表-2に示した値を付加剛性・付加減衰として導入した。ここでは、振動モード特性が既に同定されているとして逆解析を行った。表-2に本方法によって得られた値を併せて示したが、高い精度で剛性・減衰の変化が逆解析出来ていることがわかる。

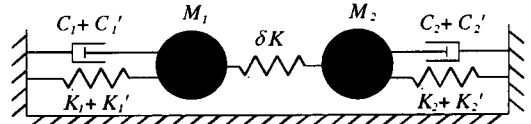


図-1 2自由度非比例減衰系モデル

表-1 基準モデルの質量、減衰、剛性

M_1	$M/2$
M_2	$M/2$
K_1/M	0.5
K_2/M	0.5
$\Delta K/M$	0.05
C_1/M	0.01
C_2/M	0.005

表-2 減衰・剛性の変化とモード特性

	設定値	同定値
C_1'/M	0.005	0.0046
C_2'/M	0.01	0.0099
K_1'/M	0.05	0.0500
K_2'/M	0.01	0.0101
ω_1	1.0260	1.0260
ω_2	1.1257	1.1257
h_1	0.0164	0.0164
h_2	0.0117	0.0117

4. 白鳥大橋における実橋計測データへの適用

(1) 計測の概要

前節までに導いた手法を、白鳥大橋における常時微動計測記録に適用する。白鳥大橋は、北海道室蘭市の湾口にかかる主径間 720[m]の鋼桁桁吊橋であり、1998年に供用を開始している²¹⁾。図-2に一般図を示す。供用に先立ち、加振器を用いた強制振動実験と、2週間にわたる常時微動試験が、鉛直たわみ、桁ねじれを主な対象として行われた。本研究では、この常時微動計測結果を利用し、鉛直たわみ振動を対象として解析を行った。この計測データの特徴は、①多点計測(計測点数 19)、②計測周波数が高い(100Hz)、③長時間連続計測(100時間以上)。また、スパン中央点での風向・風速も同時に計測されている。計測の詳細は、文献22)を参照されたい。本橋は湾口にあり、その地形と橋軸関係から橋軸直角方向に吹く風が多く、鉛直加速度振幅のRMS値と、橋軸直角方向の10分間平均風速には、図-4に示すような明瞭な対応が見られた。

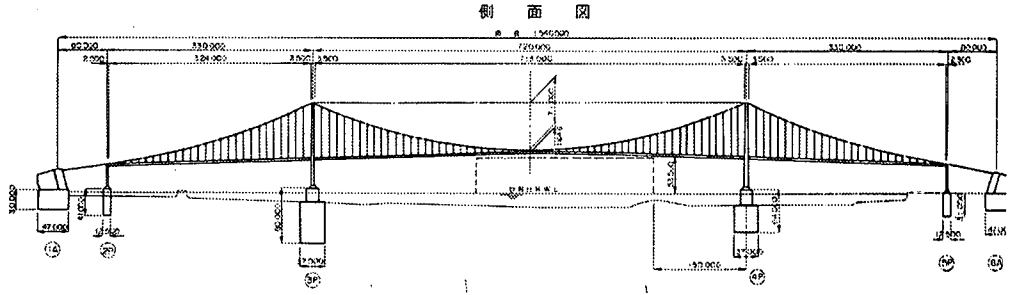


図-2 白鳥大橋一般図

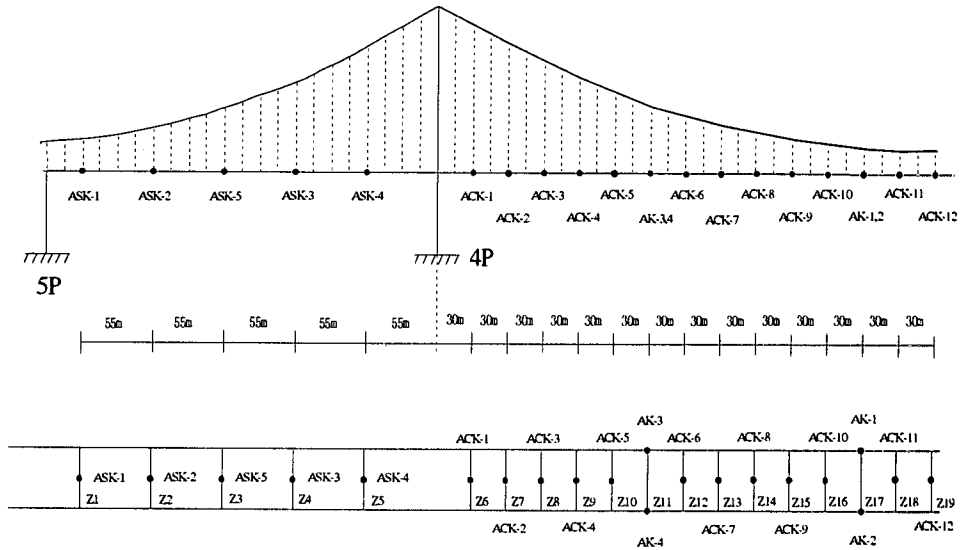


図-3 測点配置²²⁾

10 分間平均風速[m/sec]

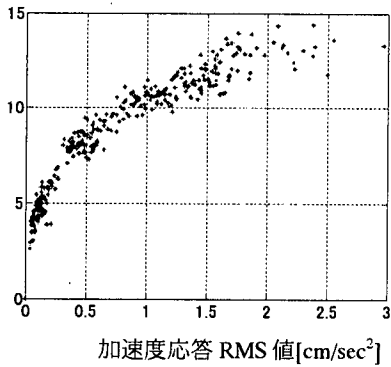


図-4 径間中央での桁鉛直加速度応答と風速

表-3 振幅別ランク区分一覧

Rank	加速度応答 RMS 値 [cm/sec ²]	15 分間平均風速 [m/sec]
rank1	0.0693	4.0792
rank2	0.1262	4.8998
rank3	0.2765	6.5967
rank4	0.4503	8.2156
rank5	0.6042	8.6838
rank6	0.8856	10.2514
rank7	1.1205	10.6994
rank8	1.3558	11.3556
rank9	1.5743	11.9051
rank10	2.0699	12.9688

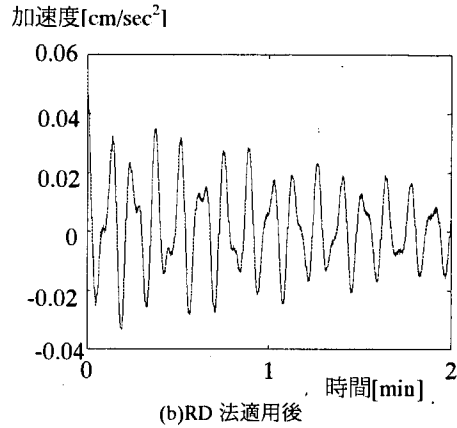
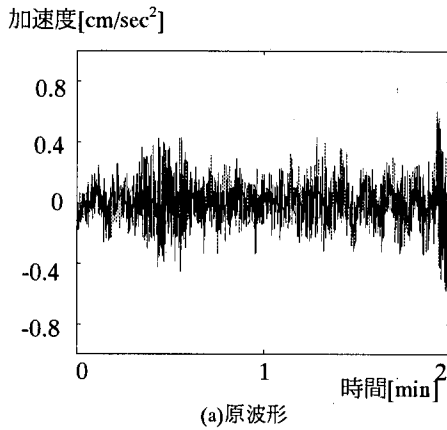


図-5 RD 法によって得られた自由振動波形

表-4 同定された鉛直たわみ固有振動数と減衰比
(ランク5)

モード次数	固有振動数 ω_d (Hz)	減衰比 h	ω_d 標準偏差 (Hz)	h 標準偏差
1	0.1297	0.0216	0.0002	0.0010
2	0.1519	0.0135	0.0002	0.0011
3	0.2213	0.0068	0.0001	0.0004
4	0.3262	0.0147	0.0007	0.0021
5	0.4418	0.0158	0.0014	0.0051
6	0.5775	0.0319	0.0028	0.0105
7	0.7336	0.0481	0.0037	0.0110
8	0.9137	0.0662	0.0037	0.0131
9	1.0977	0.1141	0.0061	0.0415
10	1.3358	0.0893	0.0100	0.0381
11	1.5463	0.0711	0.0095	0.0021
12	1.8027	0.0722	0.0107	0.0166
13	2.0459	0.0602	0.0099	0.0187
14	2.3050	0.0593	0.0123	0.0129
15	2.5727	0.0357	0.0085	0.0094
16	2.8300	0.0812	0.0161	0.0182
17	3.1573	0.0517	0.0154	0.0099
18	3.4962	0.0881	0.0147	0.0105
19	3.8238	0.1264	0.0378	0.0288

なお、計測中、風速が変化したが、吊橋の常時微動において、当然、風や振幅の影響が考えられる。そこで、同定・逆解析を行うにあたり、計測結果を振幅毎のデータに区分した。具体的には、表-3 に示すように加速度 RMS 値を基に、応答レベルを 10 のランクに区分した。

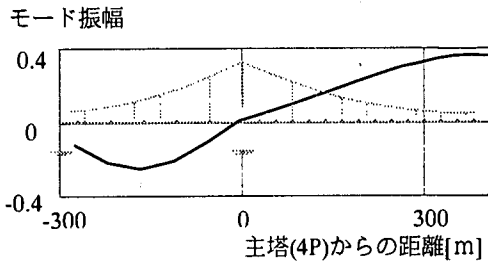
表-5 強制加振実験との比較

振動モード		固有振動数[Hz]	
		強制加振実験結果	本研究の方法
鉛直対称モード	1	0.129	0.130
	2	0.218	0.221
	3	0.435	0.442
	4	0.719	0.734
鉛直逆対称モード	1	0.149	0.152
	2	0.317	0.326
	3	0.568	0.578
	4	0.906	0.913

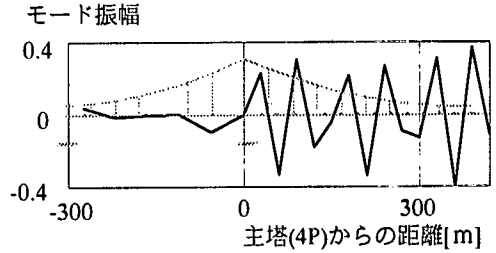
(2)振動モード特性の同定

前述の各ランク区分毎に、RD 法を用いて自由減衰応答を作り、時間領域における ITD 法によりモード特性を同定した。RD 法を適用するに当たっては、応答 RMS 値の 0.8 倍値を閾値 a_0 として設定し、各ランク区分毎に 5000 個のデータ重ね合わせを行った²³⁾。得られた自由振動波形の例を図-5 に示す。

次いで、ITD 法を適用してモード特性を同定した。それにあたって、実計測点 $N=19$ に対して、主径間部の見かけ上の計測点数 M を 3 倍に増やして計 61 点として、高精度のモード特性同定を可能にした。その結果、表-4 に示すとおり、鉛直たわみについて 19 次モードまでの同定が実現された。ここでは、一例としてランク 5 の振幅レベルについて同定した値を示した。また、表-5 に、強制加振実験で観測された固有モード振動数との比較を表に示すが、良好な対応が見られる。また、得られたモード形の例を図-6 に示した。

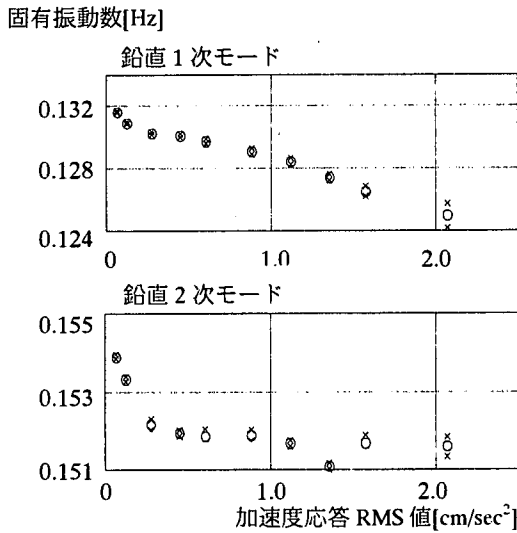


(a)鉛直1次モード

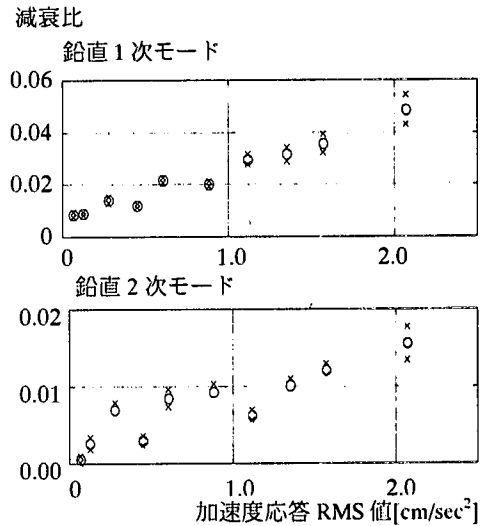


(b)鉛直19次モード

図-6 同定されたモード形の例



(a)固有振動数



(b)減衰比

図-7 モード振動特性の振幅依存性 (○: 平均値, ×: 1σ値)

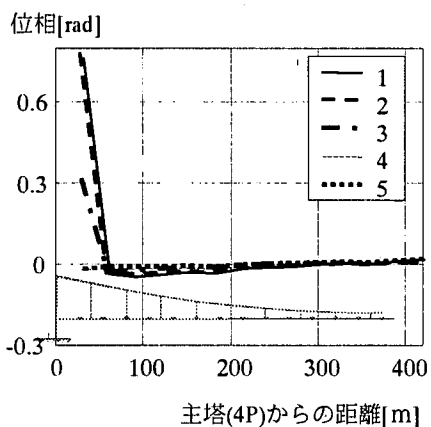
また、図-7に、1次モードと2次モードの固有振動数および減衰比の振幅依存性を示した。同定結果のばらつきを評価するために、同定にあたっては Bootstrap 法²⁴⁾を適用し、図中に、平均値を○で、標準偏差分のばらつき1σ値を×で示した。これより、振動数、減衰とも小さいばらつきで同定されていることがわかる。

また、振幅と振動数・減衰に明瞭な関係が見られることが見て取れる。別途行われた風洞実験²⁵⁾による鉛直振動に対する空力剛性・空力減衰の効果を考えて、振動数・減衰比ともに RMS 応答の増加に伴い増加することが期待されるが、実際には、剛性は単調減少の傾向にある。モード形についてはその絶対値はほとんど振幅に依存しなかったが、図-8に示すようにモード形の位相に特に顕著な変化が見られ、非比例減衰の影響が極めて大きいことが見て取

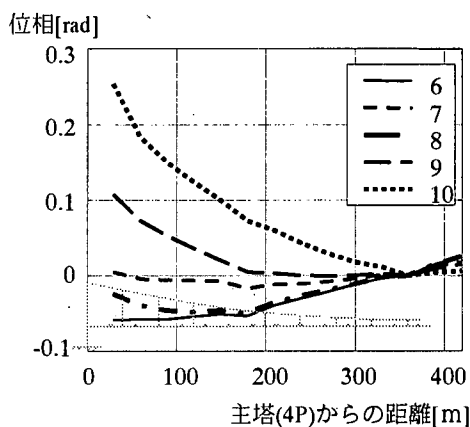
れる。ランク1から5では、振幅が大きくなるにつれて位相差が減少するが、ランク6から10では振幅の増加に伴い位相差が増加する傾向にある。振幅が小さいときは局部的に支承付近で際立って大きな影響が見られるが、振幅が大きくなるにつれて全体の挙動に影響を及ぼすことがわかる。

(3)構造特性の逆解析

モード形の位相より、小振幅時、大振幅時にそれぞれ位相差が大きく、非比例減衰系であることがわかった。この原因は、構造系を考えると、支承部分・伸縮装置部分の摩擦の影響と、橋桁の空力剛性・減衰の影響が主要なものであると推測される。そこで、主径間端部に支承・伸縮装置の影響を表す付加剛性・減衰を、また、桁に空力の影響を表す付加剛性・減衰を加えて3(2)の方法により逆解析を行った。



(a) 振幅ランク 1 から 5



(b) 振幅ランク 6 から 10

図-8 鉛直 1 次モードの位相の振幅依存性

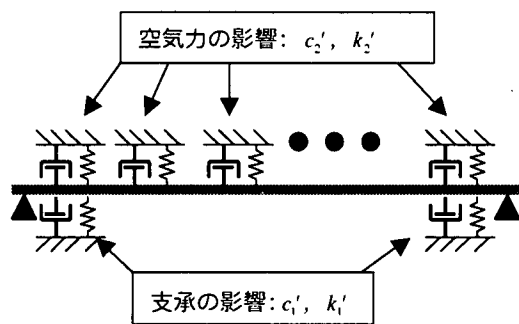


図-9 逆解析の概念モデル

ここでは、支承、伸縮装置の摩擦の特性を、等価剛性・等価減衰としてモデル化していることになる。図-9に、模式的にモデルを示した。図中の梁状の構造物が初期構造を模式的に表したものである。支点付近の集中バネ k_1' 、ダッシュポット c_1' が支承の、分布バネ k_2' 、ダッシュポット c_2' が空気力の、等価剛性・等価減衰を表している。なお、逆解析の基準となる初期モード特性としては、ランク5のものを用いた。橋桁の質量分布については、1次近似として、一様分布を仮定した。なお、ケーブルに作用する運動依存の空気剛性・空気減衰は橋桁に比べ1オーダー小さいことから、本逆解析から得られる空気剛性・減衰値は橋桁の値を代表するものと考えられる。

同定された空気剛性・減衰の変化を図-10に、支承剛性・減衰を図-11に示す。図-10には、風洞実験で得られた揚力から算定される空気剛性・減衰の値

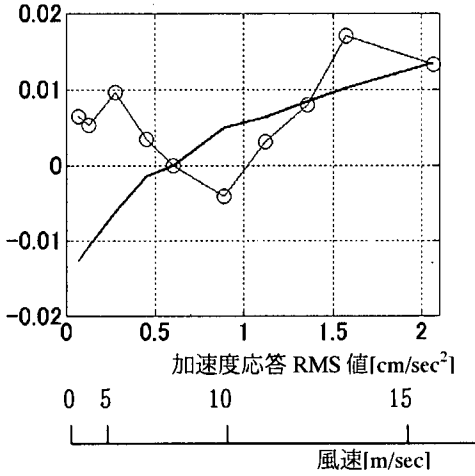
を併せて示している^{25),26)}。本方法で同定されるのは、モード質量で正規化された剛性の相対変化であるので、基準として採用したランク5の空気剛性・空気減衰を0とし、変化分を示した。全般的に類似の傾向を示しており、特に、空気減衰には良好な一致が見られる。

図-11には、同様に相対的な支承部分の剛性と減衰を示した。図中点線で示したのは、クーロン摩擦を仮定した場合に想定される各振幅における等価剛性と等価減衰の変化の様子である。振幅に伴い剛性・減衰とも低下するクーロン摩擦の傾向が現れている。

このように、空気寄与分と支承寄与分に分けて剛性と減衰を同定することに成功した。定量的な整合を確認するまでではないが、定性的に想定される変化と整合的な傾向が得られた。定量的には整合するにいたっていないが、その理由としては、支承、伸縮装置の特性が完全にはクーロン摩擦系ではないこと、風速が一点計測であること、風向が必ずしも厳密に橋軸直角方向で一定していないこと、図-10,11からわかるように、支承の剛性・減衰の値が相対的に大きいため、支承部分の同定精度の誤差が空気逆解析に大きく影響を及ぼすこと、などが考えられる。

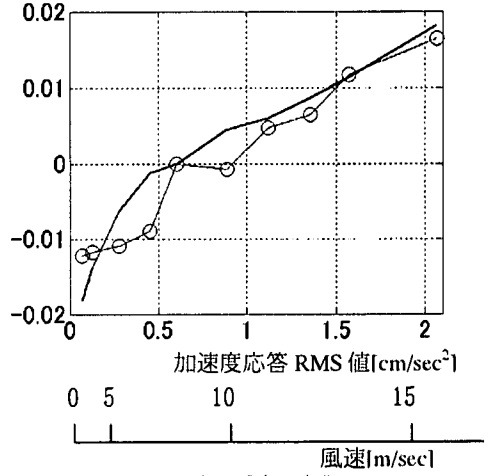
なお、大気温度の変化による動特性の変化も考えられるが、測定期間が2週間と限られており、気温の変化がさほど大きくなかったことから、今回の計測では、温度による有意な動特性の変化は認められなかった²⁷⁾。

相対空力剛性[N/kgm]



(a)空力剛性の変化

相対空力減衰[Ns/kgm]

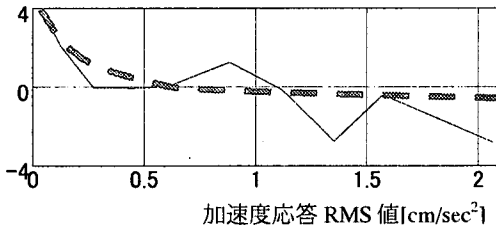


(b)空力減衰の変化

図-10 空力特性の変化

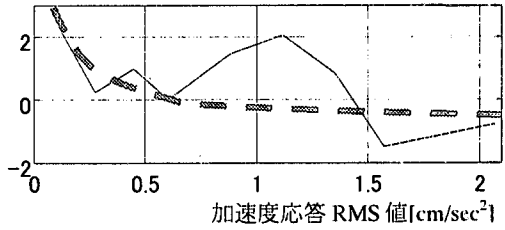
—：風洞実験，-○-：逆解析結果

相対支承剛性[N/kgm]



(a)支承等価剛性の変化

相対支承減衰[Ns/kgm]



(b)支承等価減衰の変化

図-11 支承構造特性の変化

--：クーロン摩擦モデル，—：逆解析結果

5. まとめ

構造物の性能評価を行うためには、高次モード特性を精度よく同定することが重要である。そこで高次モード特性を同定するために、RD法とITD法をもとに、高精度のモード特性同定手法を構築すると共に、非比例減衰を考慮して構造特性を逆解析する手法を構築した。また、それを、白鳥大橋で計測された常時微動記録に適用した。得られた主たる知見は以下のとおりである。

- 1) ITD法における見かけ上の計測点数を増やし、同定精度を高めることに成功した。この方法により、高次に至るまでのモード特性を同定することができた。
- 2) 非比例減衰を考慮した構造逆解析法を提案し、

簡単な2自由度系でその精度を確認した。本方法は、モード空間上でのモード特性の変化のみから剛性・減衰の変化を同定する方法であり、構造モデルに依存しない。したがって、基準となる初期の構造モデルが存在しない構造物であっても、実計測のみから剛性・減衰の変化をモニタリングできる手法となっている。

- 3) 上述した方法を、白鳥大橋で得られた常時微動記録に適用し、有効性を示した。その際、モード特性の振幅・風速レベル依存性を、空気力と支承によるものと考え、構造逆解析を行った。その結果、空気力については風洞実験と総合的であり、支承部についてはクーロン摩擦モデルでほぼ説明できることがわかった。

本研究では、実計測の解析においては、定量的な性能評価には至っていないが、常時微動を用いる際の枠組みを構築し、その有効性を示すことができたと考えている。今後、ヘルスマonitoring実用化に向けて、構造と周辺環境のより精緻な解析を行っていく必要があると考えている。

謝辞：本論文に用いた白鳥大橋の常時微動計測データは国土交通省北海道開発局が実施した同橋の振動実験の一環として得られたものである。著者の一人（藤野）は白鳥大橋設計検討委員会（委員長 能町純雄北海道大学名誉教授）の委員として参加し、振動実験計画の策定に関与した。多くの測点数、長期間計測という費用と時間のかかる計測が行えたのは、関係者の理解によるところが大きい。特に、相馬和則氏、西本聡氏、渋谷元氏（当時室蘭建設部）、佐藤昌志氏（当時 開発土木研究所構造研究室長）の尽力は大きい。なお、実際の測定にあたったケーブルJVの坂本良文氏（新日本製鉄）、タケル技術コンサルタントの努力により良質のデータが得られた。また、データの解析にあたっては、三田村浩氏（開発土木研究所構造研究室研究員）から多大の助言と便宜をいただいた。

上記に挙げた方々をはじめ関係者に心からお礼を申し上げたい。

モニタリングは、橋梁をはじめとする社会基盤施設の維持管理において重要な課題であり、世界的にも大きな関心を集めている。その発展・実用化のためには、継続的かつ高密度なデータ収集とそれに応える高度な逆解析技術の開発を両輪の輪として進展させる必要がある。今回、白鳥大橋で行われたような計測がより長時間にわたって、いろいろなところで実施されることを強く希望したい。

付録

式(16),(17)によれば $[\Phi]$ 、 $[\hat{\Phi}]$ は $[\Psi]$ 、 $[\hat{\Phi}]$ と $[\Lambda]$ の積である。 $[\Psi]$ 、 $[\hat{\Phi}]$ 、 $[\Lambda]$ が特異行列でなければ、 $[\Phi]$ と $[\hat{\Phi}]$ は逆行列を持つ。 $[\Psi]$ 、 $[\hat{\Phi}]$ の列ベクトルは、互いに独立なモードベクトルから構成されるため特異行列ではない。そこで $[\Lambda]$ の特異性を調べる。

$[\Lambda]$ は $2N \times 2N$ 行列でその成分は、

$$\lambda_{ij} = \exp(\lambda_i t_j) \quad (52)$$

である。 t_i を0とし、サンプル間の時間がどれも等しく δt であるとする

$$t_j = (j-1)\delta t \quad (53)$$

である。このとき $[\Lambda]$ は次の形に書ける。

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \exp(\lambda_1 \delta t) & \exp(2\lambda_1 \delta t) & \cdots & \exp((2N-1)\lambda_1 \delta t) \\ 1 & \exp(\lambda_2 \delta t) & \exp(2\lambda_2 \delta t) & \cdots & \exp((2N-1)\lambda_2 \delta t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \exp(\lambda_{2N} \delta t) & \exp(2\lambda_{2N} \delta t) & \cdots & \exp((2N-1)\lambda_{2N} \delta t) \end{bmatrix} \quad (54)$$

この行列の行列式は

$$|\Lambda| = \prod_{1 \leq i \leq j \leq 2N} (\exp(\lambda_i \delta t) - \exp(\lambda_j \delta t)) \quad (55)$$

となる。式(55)は、等しい λ が存在するときのみ $[\Lambda]$ が特異であることを示している。一般には、 λ が異なると考えてよいので、 $[\Lambda]$ は特異でない。したがって、 $[\Phi]$ 、 $[\hat{\Phi}]$ は逆行列を持つ。

参考文献

- 1) 岩本正巳, 阿部雅人: 損傷・構造同定, 橋梁振動コロキウム'97 論文集, pp.45-54, 1997.10
- 2) Abé, M.: Structural monitoring using vibration measurement - current practice and future -, in *Artificial Intelligence in Structural Engineering*, Ian Smith, ed., Lecture Notes in Artificial Intelligence 1454, pp.1-18, Springer, 1998.
- 3) 土木学会構造工学委員会橋梁振動モニタリング研究小委員会: 橋梁振動モニタリングのガイドライン, 構造工学シリーズ10, 土木学会, 2000.
- 4) 田中淳之, 淵田政信, 岩屋勝司: 大鳴門橋振動実験の報告, 本四技報, No.36, pp.30-37, 1985.12
- 5) 山口宏樹, 高野春夫, 小笠原政文, 下里哲弘, 加藤真志, 岡田淳: 鶴見つばさ橋の振動試験による動的特性の同定, 土木学会論文集, No.543/I-36, pp.247-258, 1996.
- 6) 山口宏樹, 高野春夫, 小笠原政文, 下里哲弘, 加藤真志, 加藤久人: 斜張橋振動減衰のエネルギー的評価法と鶴見つばさ橋への適用, 土木学会論文集, No.543/I-36, pp.217-227, 1996.
- 7) 吉田純司, 阿部雅人, 藤野陽三: 1995年兵庫県南部地震における阪神高速湾岸線松の浜免震橋の地震時挙動と免震効果の検証, 土木学会論文集, No.626, pp.37-50, 1999.
- 8) 貝戸清之, 阿部雅人, 藤野陽三: 不確定性を考慮した非比例減衰系の同定と建造物の性能評価への応用, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.45A, pp.701-712, 1999.
- 9) Chaudhary, M. T. A., Abé, M., Fujino, Y. and Yoshida, J.: System identification of two base-isolated bridges using seismic records, *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol.126, pp.1187-1195, 2000.

- 10) 長松昭男：モード解析，培風館，1985.
- 11) 貝戸清之，阿部雅人，藤野陽三，依田秀則：レーザー常時微動計測手法の構築と構造物の損傷検出への応用，土木学会論文集，No.689/I-57, pp.183-199, 2001.
- 12) 岡林隆敏，山森和博，田丸康広，吉村徹：可搬型振動計測システムによる構造物の振動特性推定，土木学会論文集，No.591/I-43, pp.327-337, 1998.
- 13) Abdel-Ghaffar, A.M. and Housner, G. W.: Ambient Vibration Test of Suspension Bridge, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, pp.983-999, 1978.
- 14) Abdel-Ghaffar, A.M. and Scanlan, R.H.: Ambient Vibration Studies of Golden Gate Bridge, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, pp.463-499, 1985.
- 15) Cole, H.A.: On-line Failure Detection and Damping Measurement of Aerospace Structures by Random Decrement Signatures, NASA CR-2205, 1973.
- 16) 田村幸雄，佐々木淳，佐藤民夫，高坂隆一：RD法による強風時の構造物の減衰評価，第12回風工学シンポジウム論文集，pp.303-308, 1992.
- 17) Vandiver, J. K., Dunwoody, A. B., Campbell, R. B. and Cook, M. F.: A Mathematical Basis for the Random Decrement Vibration Signature Analysis Technique, *Journal of Mechanical Design*, pp.303-308, 1982.
- 18) Ibrahim, S. R. and Mikulcik, E. C.: A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters From the Free Response, *Shock and Vibration Bulletin* 47, 1977.
- 19) 山口宏樹：構造振動・制御，共立出版，1996.
- 20) Der Kiureghian, A.: A response spectrum method for random vibration analysis of MDF systems, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.9, pp.419-435, 1981.
- 21) 西本聡，前川務，山地健次，東康弘：白鳥大橋補剛桁の設計・製作，橋梁と基礎，pp.23-32, 1996.
- 22) 新山惇，佐藤昌志，池田憲二，菅原登志也，佐藤浩一：白鳥大橋の固有振動数評価に関する常時微動観測法の適用性，構造工学論文集，土木学会，Vol.47A, pp.469-478, 2001.
- 23) 長山智則：非比例減衰を考慮した長大吊橋の構造同定，東京大学卒業論文，2000.
- 24) 貝戸清之，阿部雅人，藤野陽三：不確実性に起因する振動特性変化の定量化とその有意性検定手法の提案，土木学会論文集，No.682/I-56, pp.399-414, 2001.7
- 25) 北海道開発局室蘭開発建設部：白鳥大橋上部工耐風検討業務報告書，1986.
- 26) 岡内功，伊藤学，宮田利雄：耐風構造，1977.
- 27) 梶村徹：長径間吊橋の常時微動試験に基づく構造モニタリング手法の確立，東京大学卒業論文，1999.

(2001. 2. 8 受付)

IDENTIFICATION OF NON-PROPORTIONALLY DAMPED SYSTEM USING AMBIENT VIBRATION MEASUREMENT AND ITS APPLICATION TO A SUSPENSION BRIDGE

Masato ABE, Yozo FUJINO, Tomonori NAGAYAMA and Kenji IKEDA

Ambient vibration measurement is a convenient tool to evaluate structural integrity in service. In this paper, modal identification method based on ambient vibration data is presented, and an inversion method to obtain structural stiffness and damping based on this identified modal information is constructed. The inversion method is constructed in modal domain, which does not require construction of physical structural model. The method is applied to ambient vibration measurement conducted at a long span suspension bridge. The results indicate that modal information up to higher vibration modes can be identified from ambient vibration measurement, and the change of stiffness and damping due to bearing friction and aerodynamic force can be evaluated by the proposed inversion method.