

非線形なバネで支持されたはりの近似解析法

鈴木 崇伸

正会員 博(工) 東洋大学助教授 工学部環境建設学科 (〒350-8585 川崎市鯨井 2100)

地盤変位を受ける地中構造物の耐震解析において、周辺地盤から受ける力をどのように扱うかは重要な課題であるが、最近では地盤反力と変位の関係をバイリニアに設定して、上限値をもったモデル設定がなされることが多い。相対変位により2段階に変化する地盤反力の影響を明確にするために、本研究では、完全弾塑性型非線形バネで支持されたはりに地盤変位が加わる問題を解析的に解いた結果を示している。さらにバネの比例限界に比べて地盤変位が大きい場合に、近似的に成り立つ境界条件について分析をしている。軸方向、軸直角方向に分けて結果を示しているが、提案する境界条件によれば、はりの変位と地盤変位との相対変位が大きい区間を取り出して、簡単に計算結果を得ることができる。

Key Words : beam supported by inelastic springs, enforced displacement, approximate calculation, boundary condition

1. はじめに

地盤の液状化等による永久変形やレベル2地震動が問題になって以降、応答変位法による地中構造物の応答解析がいろいろと研究されている。地盤変位が小さい場合には、地盤と構造物の相対変位に比例する地盤バネによる荷重が一般的に用いられるが、地盤変位が大きくなると、バネの非線形性による荷重の低減を見込む場合が多い。特に液状化による側方流動のような数mに及ぶ地盤変位に対しては適切な荷重の低減が必要である。これまでの解析方法の多くは非線形方程式を数値的に解いていく必要があり、結果が一般化しにくいという課題があった。FEMなどの数値解析技術の普及によって、計算結果は簡単に得られるものの、結果の真偽の判断が難しいのが現状ではなかろうか。

本研究では埋設管に代表される線状の地中構造物の変形に注目して、非線形なバネで支持された弾性はりに地盤変位が加わる問題を解析的に解き、その特性の分析から、バネの非線形性の影響を見込んだ簡易な解析法を提案している。バネの非線形特性はもっとも単純な完全弾塑性型を仮定しているが、はりの変形はバネが降伏する区間で大きくなり、この区間だけを取り出す簡単な境界条件が判明した。複雑に変化する地盤変位の条件には対応していないが、簡単な地盤変位の応答計算には適用可能であり、いくつか応用例を示している。なお、液状化変位を受けるガス導管の変形解析に関して、本手法を応用している¹⁾。

2. 地盤と構造物の相互作用のモデル

地盤変位による地中構造物の変形を計算する方法として、応答変位法が一般的に用いられている。応答変位法の荷重項は地盤変位と構造物変位の両方に関連しており、ここでは、応答変位法の荷重項のモデルを相互作用のモデルと呼ぶ。地盤と地中構造物の相互作用のモデルに関しては、実験結果などにもとづいて多くの研究がなされており、その用途によって、近似関数もさまざまである。多くの場合は地盤反力と相対変位の関係を2直線で近似したバイリニア特性で整理されている^{2),3),4)}。また安田⁵⁾によれば液状化による流動に対する地中構造物の設計法は土圧法と応答変位法に分けられるとしているが、バイリニア近似は両者の折衷案と考えられる。

非線形なバネで支持されたはりの解析モデルを作成するにあたり、地盤反力のモデルが必要となるが、ここでは完全弾塑性型を仮定し、構造物と地盤の相対変位が一定値を越すと一定の分布荷重を与える特性とする。相対変位が一定値をこえない場合にははりはバネ支持条件となり、一定値をこえる場合には、等分布荷重を受けるはりとなる。

図-1は単位面積あたりの地盤反力 σ と、相対変位 Δ の関係を示している。相対変位 Δ が Δ_0 よりも小さいときには、比例関係となり、 Δ_0 よりも大きい場合には、一定値となるモデルである。モデル化に使用する変数は単位面積あたりのバネ係数 k と比例限界 Δ_0 の2つ

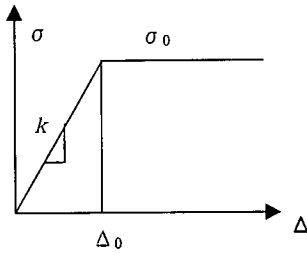


図-1 地盤反力と相対変位のモデル

である。はり解析においては、断面に関係する代表長さを乗じて、それぞれ単位長さあたりのバネ係数、単位長さあたりの分布荷重に変換する。本論文中では、軸方向の場合に添え字 1、軸直角方向の場合に添え字 2 をつけて区別することを基本とする。

3. 軸変形の場合

(1) 解析モデル

前述の非線形なバネで支持された無限長のはりを考える。地盤の変位を $f(x)$ とし、区間 (a, b) においてバネが降伏して一定の分布荷重 F を受けているとする。軸剛性を EA 、軸変位を u として微分方程式は

$$EAu'' = -F \quad (a \leq x \leq b) \quad (1)$$

境界条件は

$$u(a) = f(a) - \Delta_0, \quad u(b) = f(b) - \Delta_0 \quad (2)$$

となる。方程式を解くと

$$u = -\frac{F}{EA}(x-a)(x-b) + \frac{(b-x)f(b) + (x-a)f(a)}{b-a} - \Delta_0 \quad (3)$$

となり、等分布荷重 F と境界となる 2 点 $x = a, b$ における地盤変位により、はりの変形が計算できる。バネが降伏することにより、地盤変位の影響は等分布荷重とバネが降伏する位置における地盤の相対変位に置き換わる。この問題をより簡単な問題に置き換えて、バネが降伏する位置近傍における境界条件を明確にする。

一端が固定されている非線形なバネで支持されたはりにおいて、バネの支点が剛体的に δ だけ軸方向に移動する問題を考える。剛体的な地盤変位はバネが降伏する区間では地盤変位分布の影響を受けず、2 点間の地盤の相対変位が影響することを考慮して簡略化したものである。

バネ支点に与える地盤変位量が小さく降伏条件以下の場合には、はりは全区間でバネ支持される条件となり、軸剛性を EA 、単位長さあたりの軸方向バネを K_1 、

表-1 軸変形の計算結果

$\delta \leq \Delta_1$	$u(x) = \delta(1 - e^{-\lambda_1 x})$ $N(x) = EA\lambda_1 \delta e^{-\lambda_1 x}$ <p>ただし $\lambda_1 = \sqrt{K_1 / EA}$</p>
$\delta \geq \Delta_1$	$u(x) = \begin{cases} \frac{FL^2}{EA} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{L\lambda_1 + 1}{L\lambda_1} \left(\frac{x}{L}\right) \right] & (0 \leq x \leq L) \\ \delta - \Delta_1 \exp(-\lambda_1(x-L)) & (L \leq x) \end{cases}$ $N(x) = \begin{cases} FL \left[-\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{L\lambda_1 + 1}{L\lambda_1} \right] & (0 \leq x \leq L) \\ \frac{F}{\lambda_1} \exp(-\lambda_1(x-L)) & (L \leq x) \end{cases}$ <p>ただし $(L\lambda_1)^2 + 2L\lambda_1 + 2 = 2\frac{\delta}{\Delta_1}$, $F = K_1\Delta_1$</p>

軸方向の変位を $u(x)$ として、

$$EAu'' = -K_1(\delta - u) \quad (4)$$

の方程式であらわされる。境界条件は

$$u(0) = 0, \quad u(\infty) = \delta \quad (5)$$

となる。

バネ支点の変位量が大きくなると、固定されたはりの端部付近では相対変位が大きくなるために、バネが降伏して等分布荷重が作用する区間があらわれる。この長さを L とする。固定点から L 以上はなれると、はりの軸変位が大きくなってバネ支点変位に追随するようになり、相対変位に比例した力を受けるようになる。さらに離れるとはりの変位とバネ支点の変位は一致するようになる。このイメージ図を図-2 の上段に示す。等分布荷重が作用する区間とバネ支持となる区間に分けて微分方程式を表すと、

$$EAu'' = -F \quad (0 \leq x \leq L) \quad (6)$$

$$EAu'' = -K_1(\delta - u) \quad (L \leq x) \quad (7)$$

となる。ただし F は単位長さあたりの分布荷重であり、バネの比例限界の相対変位を Δ_1 として、 $F = K_1\Delta_1$ である。境界条件は

$$u(0) = 0$$

$$x = L \text{ で } u, u' \text{ が連続, } u(L) = \delta - \Delta_1 \quad (8)$$

$$u(\infty) = \delta$$

である。

(2) 方程式の分析

式(4)~(8)で示した微分方程式を解いた結果を表-1に示す。地盤変位量 δ が比例限界に達するまでは、指数関数が基本解となり、 x の増加にともなって、変位は δ に、軸力は 0 に漸近していく。またバネが硬いほど、軸剛性が小さいほど、地盤の動きに追随しやすく

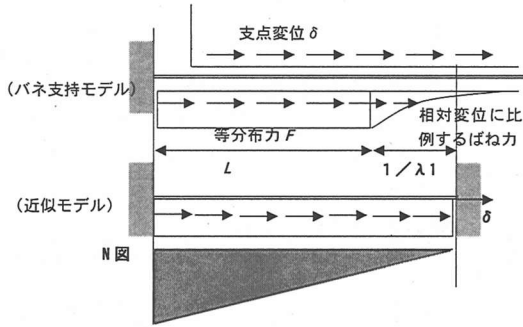


図-2 軸方向に地盤変位を受けるはりモデル

なる。最大軸力は固定点で生じ、バネ係数と軸剛性の積の平方根と地盤変位量に比例する。式で表せば、

$$N_{\max} = N(0) = \delta \sqrt{EAK_1} \quad (9)$$

である。

剛体的なバネ支点の変位が相対変位の比例限界を超えると、バネが降伏し一定の分布荷重となる区間が現れるが、この長さ L は地盤変位量によって変化する。表-1 中の 2 次方程式を解くと、

$$L = \frac{1}{\lambda_1} \left(-1 + \sqrt{\frac{2\delta}{\Delta_1} - 1} \right) \quad (10)$$

$$= \sqrt{\frac{EA}{F}} \left(-\Delta_1 + \sqrt{2\delta - \Delta_1} \right)$$

となり、およそ地盤変位量 δ の平方根と軸剛性 EA の平方根に比例し、等分布力 F の平方根に反比例する。図-3 に λ_1 を乗じて無次元化して L の変化の様子を示している。なお式(10)は $\delta = \Delta_1$ のとき $L = 0$ となる。

また最大軸力は固定点で生じ、その大きさは

$$N_{\max} = N(0) = F \left(L + \frac{1}{\lambda_1} \right) = \sqrt{EAF(2\delta - \Delta_1)} \quad (11)$$

で求められ、等分布力が作用する区間長さ L と同様に、地盤変位量 δ の平方根におよそ比例する。また式(9)で表した比例限界に達する前の最大軸力と $\delta = \Delta_1$ で連続的な変化となる。

(3) 近似モデル

以上は、非線形なバネで支持された方程式を厳密に解いた結果の分析であるが、バネで近似した地盤の強度ははりに対して小さいのが一般的である。はりを持つバネの比例限界に比べて、バネ支点の変位量 δ が十分大きい場合には、解析モデルの簡略化が可能である。式(11)において、比例限界 Δ_1 の項を無視した式を

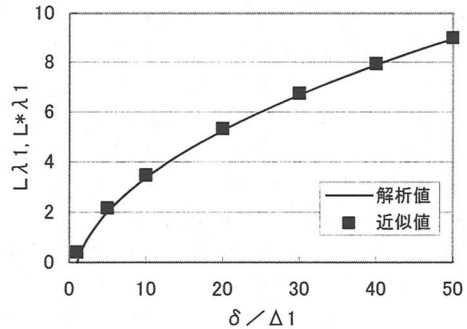


図-3 強制変位 δ と等分布力が作用する区間長さ L の関係

$$N_{\max}^* = \sqrt{2EAF\delta} \quad (12)$$

とおく。式(11)との比をとり、Taylor 展開すると、

$$\frac{N_{\max}^*}{N_{\max}} = \sqrt{\frac{2\delta}{2\delta - \Delta_1}} = 1 + \frac{\Delta_1}{4\delta} + O\left(\left(\frac{\Delta_1}{\delta}\right)^2\right) \quad (13)$$

となり、 $\delta / \Delta_1 > 25$ の条件では、誤差は 1% 以下となる。すなわち、 $\delta \gg \Delta_1$ の条件において Δ_1 の影響は無視できる。この比例限界分の変位を無視する計算は、式(10)に示した等分布力が作用する区間の長さの計算においても同様のことがいえる。式で表せば、近似値を L^* として、

$$L^* = \sqrt{\frac{2EAF\delta}{F}} - \frac{1}{\lambda_1} \quad (14)$$

となる。図-3 中に L^* を計算した結果をプロットしているが、よい一致を示している。

次に、バネで支持された区間の条件を調べてみる。固定端における最大軸力は、等分布力が長さ $(L + 1/\lambda_1)$ だけ加わったものとして近似的に計算できるが、実際には、区間 $(L, L + 1/\lambda_1)$ ではバネによる反力を受けている。その模式図を図-2 の上段に示すが、等分布荷重の場合と、バネ力の場合との外力の差を計算してみる。

$$\text{等分布力: } F / \lambda_1 \quad (15)$$

$$\text{バネ力: } \int_L^{L+1/\lambda_1} K\Delta_1 \exp(-\lambda_1(x-L)) dx = \frac{F}{\lambda_1} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \quad (16)$$

両者の差は

$$\frac{F}{\lambda_1 e} = N \left(L + \frac{1}{\lambda_1} \right) \quad (17)$$

となり、 $x = L + 1/\lambda_1$ における軸力に等しくなる。地盤変位量 δ が大きい場合には、バネ支持条件となる区間 $(L, L + 1/\lambda_1)$ の変形は、等分布荷重が作用する区間の変形に比べて相対的に小さい。よって、バネ支持条件

である区間の $(L, L + 1/\lambda_1)$ を等分布荷重に置き換え、 $x = L + 1/\lambda_1$ において地盤変位に追従して変位し、さらに軸力が0になる近似モデルを用いることにより、バネ支持区間の影響を近似的に表すことができる。

図-2 下段に模式図を示すが、半無限長さのはりを考える非線形なバネで支持されるモデルに対して、近似モデルでは、等分布荷重を受ける有限長さのはりの問題となり、バネ支持側の境界条件は、強制変位とひずみの条件となる。はりの長さは分布荷重とバネ支持側の境界条件の関数として決めることができる。地盤変位量に応じてはり長さを変化させる解法により、非線形なバネで支持されたはりの軸変形の問題を簡単に評価できる。

4. 軸直角変形の場合

(1) 解析モデル

軸変形の場合と同様に軸直角変形の場合も、地盤とはりの相対変位が大きい区間では等分布力と両端の境界条件の影響を受ける問題となる。軸変形の場合と同様に簡単な地盤変位を仮定して、地盤バネが降伏条件になる近傍の変形メカニズムを分析する。

図-4 に解析を行うはりモデルを示す。問題を単純化するために $x = 0$ の境界条件はヒンジとし、剛体的な地盤変位を仮定する。バネ支点に加わる地盤変位 δ が小さく、バネが降伏条件に達しないときは、等分布荷重が作用する区間は発生せず、 $w(x)$ を軸直角変位、 EI を曲げ剛性、 K_2 を単位長さあたりのバネ係数として、以下の支配方程式となる。

$$EIw^{(4)} + K_2(w - \delta) = 0 \quad (18)$$

境界条件は

$$w(0) = 0, \quad w''(0) = 0, \quad w(\infty) = \delta \quad (19)$$

となる。

地盤変位が大きくなると、バネが降伏して等分布荷重が作用する区間があらわれる。支配方程式は $(0, L)$ の区間と (L, ∞) の区間で異なり、前者では等分布荷重を受けるはり、後者では支点変位を受ける弾性床の上のはりとなる。ただし L は支点変位によって変動するパラメータである。式で表せば、

$$\begin{aligned} EIw^{(4)} - p &= 0 & 0 \leq x \leq L \\ EIw^{(4)} + K_2(w - \delta) &= 0 & L \leq x \end{aligned} \quad (20)$$

となる。ここに p は単位長さあたりの分布荷重であり $p = K_2\Delta_2$ の関係である。また Δ_2 は相対変位の比例限界である。境界条件は、バネの降伏条件も考えて、

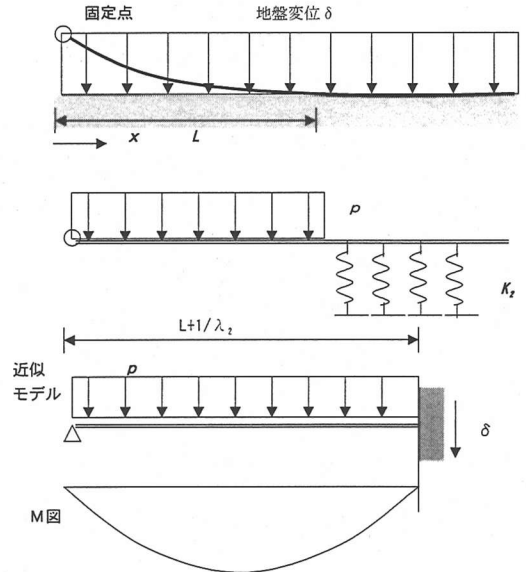


図-4 軸直角方向に地盤変位を受ける解析モデル
(地盤変位が大きい場合)

$$\begin{aligned} w(0) &= 0, \quad w''(0) = 0 \\ w, w', w'', w''' &\text{が } x = L \text{ で連続, } w(L) = \delta - \Delta_2 \\ w(\infty) &= \delta \end{aligned} \quad (21)$$

となる。

(2) 方程式の分析

表-2 に微分方程式を解いた結果をまとめている。地盤変位量 δ に対する変位分布と曲げモーメント分布を示している。ここで $\delta \geq \Delta_2$ の条件のときに L は $(L\lambda_2)$ に関する以下の4次方程式から求まるが、この方程式は $\delta = \Delta_2$ のとき $L = 0$ 、 $\delta > \Delta_2$ においてただ一つ実根をもつ。

$$(L\lambda_2)^4 + 4(L\lambda_2)^3 + 6(L\lambda_2)^2 + 6(L\lambda_2) + 6 = \frac{24EI\delta\lambda_2^4}{p} = 6\left(\frac{\delta}{\Delta_2}\right) \quad (22)$$

地盤変位 δ を変化させたときにはりの変形がどのようになるか分析する。 L に関する4次方程式の解析解は求まらないので数値解析により計算する。はりの変形状態としてバネが降伏して等分布荷重 p が作用する区間の長さ L 、曲げモーメントが最大となる位置と最大曲げモーメント、バネ支持区間において地盤変位との相対変位が0になる位置と曲げモーメントが0になる位置に注目する。表-3 にこれら4つの指標の計算結果をまとめているが、 δ の増加にともなって関数形が変化している。非線形なバネで支持されたはりの変形は、およそバネが降伏する区間で大きくなり、バネ支持区間では大きくならない。

表記を簡潔にするために位置を示す座標に関しては

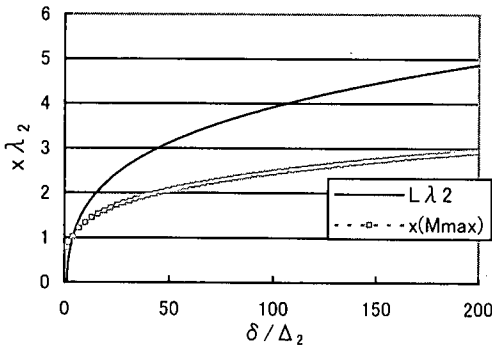


図-5 バネが降伏する長さ最大曲げモーメントの位置

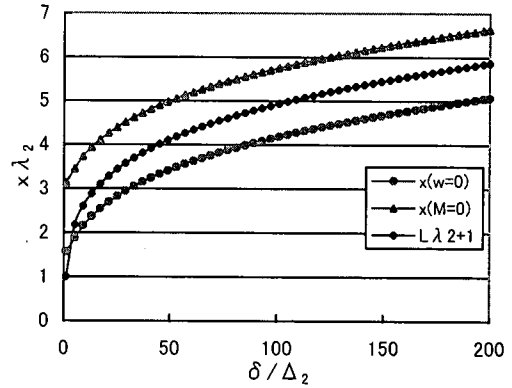


図-6 変位, 曲げモーメントが0になる位置

表-2 はりの軸直角変形の計算結果

$\delta \leq \Delta_2$	$w(x) = \delta(1 - e^{-\lambda_2 x} \cos \lambda_2 x)$ $M(x) = EI\lambda_2^2 \delta e^{-\lambda_2 x} \sin \lambda_2 x$ <p>ただし $\lambda = \sqrt[4]{K_2/4EI}$</p>
$\delta \geq \Delta_2$	$w(x) = \begin{cases} \frac{pL^4}{EI} \left[\frac{1}{24} \left(\frac{x}{L}\right)^4 - \frac{1+L\lambda_2}{12L\lambda_2} \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{(L\lambda_2)^3 + 3(L\lambda_2)^2 + 3L\lambda_2 + 3}{12(L\lambda_2)^3} \left(\frac{x}{L}\right) \right] & (0 \leq x \leq L) \\ \delta + \Delta_2 e^{-\lambda_2(x-L)} [L\lambda_2 \sin \lambda_2(x-L) - \cos \lambda_2(x-L)] & (L \leq x) \end{cases}$ $M(x) = \begin{cases} \frac{pL^2}{2} \left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{1+L\lambda_2}{L\lambda_2} \left(\frac{x}{L}\right) \right] & (0 \leq x \leq L) \\ \frac{p}{2\lambda_2^2} e^{-\lambda_2(x-L)} [\sin \lambda_2(x-L) + L\lambda_2 \cos \lambda_2(x-L)] & (L \leq x) \end{cases}$ <p>ただし $(L\lambda_2)^4 + 4(L\lambda_2)^3 + 6(L\lambda_2)^2 + 6(L\lambda_2) + 6 = \frac{24EI\delta\lambda_2^4}{p} = 6\left(\frac{\delta}{\Delta_2}\right)$</p>

表-3 注目する変形の特特性値

項目	$\delta \leq \Delta_2$	$\delta \geq \Delta_2$	
		$0 \leq L\lambda_2 \leq 1$	$1 \leq L\lambda_2$
最大曲げモーメントの発生位置	$x = \frac{\pi}{4\lambda_2}$	$x = L + \frac{1}{\lambda_2} \tan^{-1} \frac{1-L\lambda_2}{1+L\lambda_2}$	$x = \frac{1+L\lambda_2}{2\lambda_2}$
最大曲げモーメント	$M_{\max} = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}} EI\lambda_2^2 \delta$	$M_{\max} = \frac{p}{2\lambda_2^2} e^{-\tan^{-1} \left(\frac{1-L\lambda_2}{1+L\lambda_2} \right)} \sqrt{\frac{1+(L\lambda_2)^2}{2}}$	$M_{\max} = \frac{p}{8\lambda_2^2} (1+L\lambda_2)^2$
相対変位が0になる位置	$x = \frac{\pi}{2\lambda_2}$	$x = L + \frac{1}{\lambda_2} \tan^{-1} \frac{1}{L\lambda_2}$	$x = L + \frac{1}{\lambda_2} \tan^{-1} \frac{1}{L\lambda_2}$
$x > L$ で曲げモーメントが0になる位置	$x = \frac{\pi}{\lambda_2}$	$x = L + \frac{\pi - \tan^{-1} L\lambda_2}{\lambda_2}$	$x = L + \frac{\pi - \tan^{-1} L\lambda_2}{\lambda_2}$

λ_2 を乗じ, また地盤変位量に関しては比例限界 Δ_2 で割って無次元化してグラフ化する。まず $\delta < \Delta_2$ のときは最大曲げモーメントの発生位置は δ に関係なく, 曲げ剛性とバネの硬さから決まる。ところが $\delta > \Delta_2$ になるとバネが降伏する区間が発生し, δ の増大に連れてこの区間の長さ L は増大する。最大曲げモーメントが

発生する位置は δ の値により3とおりの関数で表されるが, およそ L の増大にともなって増加していく。図-5はバネが降伏する区間の長さ最大曲げモーメントが発生する位置の変化を無次元化して表している。

最大曲げモーメントは $\delta < \Delta_2$ の場合は地盤変位 δ に比例して増加するが, $\delta > \Delta_2$ の場合はバネが降伏す

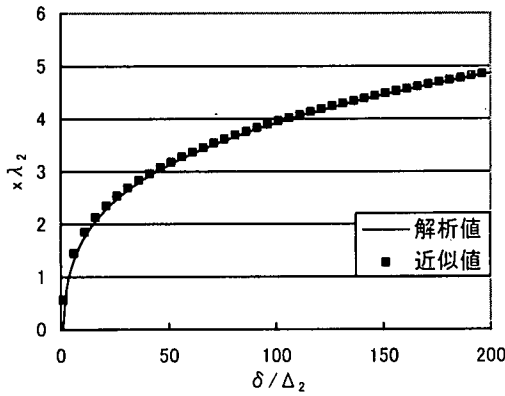


図-7 バネが降伏する長さの比較

る区間の長さがある程度大きくなり、 $L > 1/\lambda_2$ になると、 $(L + 1/\lambda_2)$ の 2 乗に比例して曲げモーメントが増大する。 $(L + 1/\lambda_2)$ は地盤変位量 δ の 1/4 乗におよそ比例するので、最大曲げモーメントは δ の平方根におよそ比例する。

次に $x > L + 1/\lambda_2$ の区間において相対変位が 0 になる位置と曲げモーメントが 0 になる位置を無次元化して計算した結果を図-6 に示している。およそ L の変化に対応して増加しているのがわかる。最大曲げモーメントに関する長さ $(L + 1/\lambda_2)$ も同図中に示しているが、相対変位が 0 になる位置と曲げモーメントが 0 になる位置のおよそ中間程度の長さとなっている。

(3) 解析モデルの近似

バネの非線形性の条件を考えると解は得られるものの関数は複雑な形となる。構造材料の塑性まで扱うにはさらに複雑な関数が必要となり、差分法や有限要素法などの数値計算法が有効な方法となる。しかしながら大変形時のはりの変形を簡易な計算で精度よく評価できれば、複雑な非線形現象を直感的にとらえることができ、設計作業を効率化することができる。そこで 3 章の軸解析の場合と同様に近似モデルについて検討する。

軸変形の計算手順は地盤変位 δ から地盤バネが降伏する区間長 L を求め、 L をもとに変形に関連する諸量を求めるものであった。ここでも同様に、地盤変位量 δ が地盤バネの降伏変位に比べて十分に大きな条件で近似モデルを考えていく。 $(L\lambda_2)$ に関する 4 次方程式を変形すると

$$(L\lambda_2 + 1)^4 + 2L\lambda_2 + 5 = \frac{24EI\delta\lambda_2^4}{p} \quad (23)$$

δ が十分に大きな条件で $(L\lambda_2)$ はある程度大きな値となり、4 次方程式中左辺の $(2L\lambda_2 + 5)$ は 4 乗項に比べて

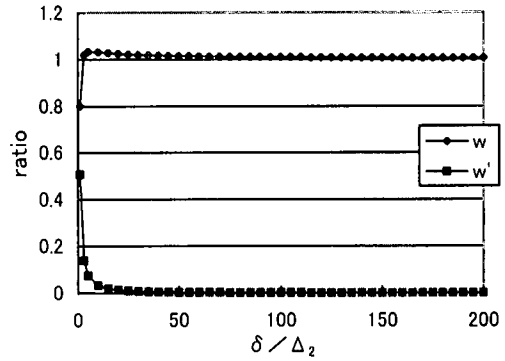


図-8 $x = L + 1/\lambda_2$ における変位と勾配

無視しうる。このとき

$$L + \frac{1}{\lambda_2} = \sqrt[4]{\frac{24EI\delta}{p}} \quad (24)$$

と近似でき、 δ と L の関係式が得られる。この長さは最大曲げモーメント位置の 2 倍の長さである。式 (24) からバネが降伏する長さ L について近似解を求められる。 λ_2 を乗じて無次元化すると

$$L\lambda_2 = \lambda_2 \sqrt[4]{\frac{24EI\delta}{p}} - 1 = \sqrt[4]{6\left(\frac{\delta}{\Delta_2}\right)} - 1 \quad (25)$$

となる。図-7 に微分方程式を解いた値と近似式から求めた値のプロット結果を示すが、 δ が小さな範囲では若干大き目になるものの、概ね一致している。

次にこの $x = L + 1/\lambda_2$ におけるはりの変形状態を調べる。変位、勾配、曲げモーメントを無次元化して計算すると

$$\frac{w(L + 1/\lambda_2)}{\delta} = 1 + \left(\frac{\Delta_2}{\delta}\right) \frac{L\lambda_2 \sin 1 - \cos 1}{e} \quad (26)$$

$$\frac{w'(L + 1/\lambda_2)}{\delta/L} = \left(\frac{\Delta_2}{\delta}\right) \frac{L\lambda_2 \{(1 - L\lambda_2) \sin 1 + (1 + L\lambda_2) \cos 1\}}{e} \quad (27)$$

となる。図-8 に δ を変化させたときの変位、勾配の変動を示すが、 δ がある程度大きい条件では

$$w(L + 1/\lambda_2) \rightarrow \delta \quad (28)$$

$$w'(L + 1/\lambda_2) \rightarrow 0 \quad (29)$$

が成立し、固定条件で近似が可能である。

また式 (24) に示した L に関する 4 次方程式を近似した式を変形すると

$$\frac{p}{8} \left(L + \frac{1}{\lambda_2}\right)^2 = \frac{3EI\delta}{(L + 1/\lambda_2)^2} \quad (30)$$

となる。このつりあい式は一端が固定、他端がヒンジ支点である長さ $(L + 1/\lambda_2)$ のはりで、等分布荷重により

固定端に発生する曲げモーメントと、両端が横方向に δ だけ相対変位したときに固定端に発生するモーメントが等しいことを示している。軸変形の場合と同様に、実際はバネ支持条件である区間に付加した分布荷重のモーメントが $x=L+1/\lambda_2$ における曲げモーメントに等しくなる。すなわち、区間 $(L, L+1/\lambda_2)$ をバネ支持条件から等分布荷重が作用する条件に変更すれば、境界 $x=L+1/\lambda_2$ において、地盤変位に追従する固定条件を設定できる。さらに、 $x=L+1/\lambda_2$ において曲げモーメントが0になる条件が成り立つことになる。

以上の分析より、ある相対変位で降伏するバネで支持された無限長さのはりの強制変位問題は、バネが降伏する区間としない区間に分けられ、降伏しない区間では構造物の変形は降伏する区間に比べて相対的に小さい。このとき、バネ支持側の境界条件を地盤変位に追従する固定端として有限長さの問題に置き換えることができる。このはりの長さは、地盤変位による曲げモーメントと等分布荷重による曲げモーメントがつりあって0になる条件から決めることができる。軸変形の場合と同様に、境界条件に応じてはり長さを変化させる解法により、非線形なバネで支持されたはりの問題を簡単に評価できる。

5. 応用例

(1) 軸方向解析

軸変形の解析例として、護岸に直交する方向に置かれた埋設管が液状化流動を受ける問題を考える。非線形なバネで支持された半無限のはりに、三角形分布の軸方向の地盤変位が加わるモデルとする。図-9 上段に解析モデルを示すが、はりの端部で変位 δ 、幅 W の直角三角形形状の地盤変位が加わる場合、地盤変位 δ が比例限界 Δ_1 よりも大きい場合には、等分布荷重が作用する区間があらわれる。この長さを L として方程式をたてる。はりの軸変位を $u(x)$ 、軸剛性を EA 、分布荷重を F とすると、つりあい式は

$$EAu'' = F \quad (0 \leq x \leq L) \quad (31)$$

境界条件は、 $x=L$ で地盤の変位とひずみに一致するとして、

$$u'(0) = 0, \quad u(L) = \frac{\delta(W-L)}{W}, \quad u'(L) = \frac{\delta}{W} \quad (32)$$

となる。2階の微分方程式を解くと、

$$u(x) = \frac{FL^2}{EA} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{3}{2} \right\} + \delta \quad (33)$$

$$N(x) = EAu' = Fx \quad (34)$$

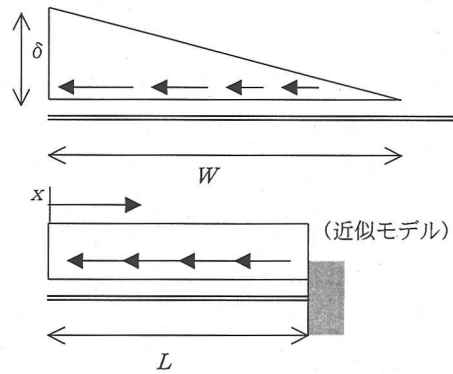


図-9 軸変形の解析例

$$L = \frac{EA\delta}{FW} \quad (35)$$

となる。ただし、 $W \geq L$ の条件から、

$$\delta \leq \frac{FW^2}{EA} = \delta_0 \quad (36)$$

のときに成り立つ。 $\delta \geq \delta_0$ の条件では、はりの変形は地盤変位とは無関係となり、

$$u(x) = \frac{FW^2}{EA} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{W} \right)^2 - \frac{1}{2} \right\} \quad (37)$$

となる。

バネ支持区間を固定境界でとりだすことにより、簡単に解析解を得ることができる。

(2) 軸直角方向解析

軸直角方向の解析例として液状化による地盤変位を受ける直線状の埋設管を考える。非線形なバネで支持された無限長さのはりの一部分に、軸直角方向に矩形分布の地盤変位が加わるモデルとする。図-10 の上段に解析モデルを示すが、変位量 δ 、幅 $2W$ の地盤変位が加わると、変位 δ が比例限界 Δ_2 よりも大きい場合には、逆向きの等分布荷重が作用する区間があらわれる。この長さを $2L$ として方程式をたてる。はりの軸直角変位を $w(x)$ 、曲げ剛性を EI 、分布荷重を p とすると、つりあい式は

$$\begin{aligned} EIw^{(4)} &= -p \quad (-L \leq x \leq 0) \\ EIw^{(4)} &= p \quad (0 \leq x \leq L) \end{aligned} \quad (38)$$

となる。対称性より、 $-L \leq x \leq 0$ について計算すれば、解は求まり、境界条件は、

$$\begin{aligned} w(-L) &= 0, \quad w'(-L) = 0, \quad w''(-L) = 0 \\ w(0) &= \frac{\delta}{2}, \quad w'(0) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

である。4階の微分方程式を解くと、問題に適合する

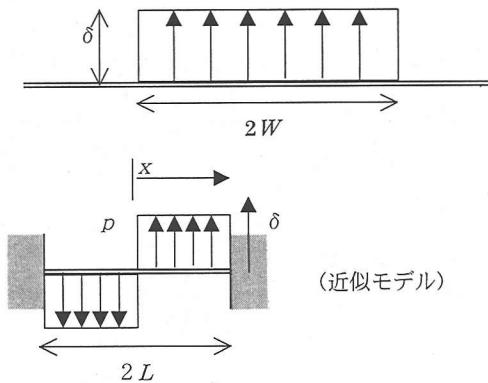


図-10 軸直角変形の解析例

解は、

$$w(x) = \frac{pL^4}{EI} \left\{ \frac{1}{24} \left(\frac{x}{L} \right)^4 - \frac{1}{12} \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{1}{12} \left(\frac{x}{L} \right) + \frac{1}{24} \right\} \quad (40)$$

$$L = \sqrt[4]{\frac{12EI\delta}{p}} \quad (41)$$

となる。ただし、 $W \geq L$ の条件から、

$$\delta \leq \frac{pW^4}{12EI} = \delta_0 \quad (42)$$

のときに成り立つ。 $\delta \geq \delta_0$ の条件では、軸変形の例題と同様にはりの変形は地盤変位とは無関係となり、

$$w(x) = \frac{pW^4}{EI} \left\{ \frac{1}{24} \left(\frac{x}{W} \right)^4 - \frac{1}{12} \left(\frac{x}{W} \right)^3 + \frac{1}{12} \left(\frac{x}{W} \right) + \frac{1}{24} \right\} \quad (43)$$

となる。

軸変形の場合と同様に、単純に地盤変位分布を仮定する場合には、バネ支持区間を固定境界で切り離すことにより、簡単に解析解を得ることができる。

6. おわりに

埋設管をはじめとする地中構造物の耐震設計に用い

られる応答変位法において荷重項の適切な評価は重要な課題であり、地震外力の増大にともない、上限値が設定されることが多い。この場合、地盤変位は直接影響せず、等分布荷重と2点間の相対変位の問題となる。従来はこの非線形計算を数値的に扱うことが多かったが、設計計算で一般に用いるならば、単純なバネスライダモデルの解析解は有用である。

本研究はこうした着眼から、完全弾塑性型のバネで支持された弾性条件のほりに、直線で表される地盤変位が加わる問題の解析解を導いた。さらにその解の分析結果から、変形の大きい区間を簡易に解析する手法を考案した。その方法は簡単であり、バネが降伏する区間の長さを未知数として、地盤変位に追従して移動する固定端の条件と、軸力あるいは曲げモーメントが0という条件を組み合わせる方程式を解けばよいことが明らかになった。本論文で提案する手法は、はり材料を弾塑性あるいは剛塑性とした場合にも適用可能であり、変形の大きい区間を、等分布荷重と地盤の相対変位を受ける有限長さのほりの問題に置き換えることにより、簡単に解析解を計算できる。この結果については別の論文⁶⁾で報告する予定である。

参考文献

- 1) 高田至郎, 鈴木崇伸, 小池武, 小川安雄, 細川直行, 北野哲司, 岡村一男, 桑嶋健: 液状化側方流動を受ける埋設管の非線形挙動解析, 構造工学論文集 Vol.46A, pp.947-956, 2000
- 2) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, 1996
- 3) 日本水道協会: 水道施設耐震工法指針・解説, 1997
- 4) 日本ガス協会: 高圧ガス導管耐震設計指針, 2000
- 5) 安田進: 液状化と流動に挑む, 土木学会誌 Vol.1.86-5, pp.31-34, 2001
- 6) 鈴木崇伸, 高田至郎, 小池武, 小川安雄, 松本真明: 液状化による側方流動を受ける埋設鋼管の塑性ヒンジ解析, 土木学会論文集第I部門投稿中

(2000.9.27 受付)

APPROXIMATE CALCULATION METHOD FOR BEAM MODEL SUPPORTED BY INELASTIC SPRINGS IN ENFORCED DISPLACEMENT

Takanobu SUZUKI

This report proposes a new approximate calculation method for beam model supported by inelastic springs in the condition of enforced displacement. Recently, using the various bi-linear type spring, numerical simulation such as FEM, has been applied to solve the equation. In this study, analytical solutions in the case of simple shape of enforced displacement are shown. Analyzing solutions, the simple boundary conditions are developed, which gives good solution to approximate analytical one. Some examples are shown in this report, using this method.