

弾塑性複合材料のミクロ構造を反映した 巨視的な降伏曲面の評価

松井和己¹・寺田賢二郎²・京谷孝史³・岩熊哲夫⁴

¹学生員 修(工) 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

²正会員 Ph.D. 東北大学大学院助教授 情報科学研究科人間社会情報科学専攻

³正会員 工博 東北大学大学院助教授 工学研究科土木工学専攻

⁴正会員 Ph.D. 東北大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻

弾塑性複合材料の微視的な領域で観察されるミクロ構造の解析を通して、その巨視的な降伏曲面の同定を試みる。均質化法に基づくマルチスケールモデリングにおいて、ミクロ構造がマクロ構造に対してある種の構成関係を与える役割を果たしているというマルチスケール構造に着目し、巨視的な降伏曲面とその進展を評価するためのミクロ構造に対する数値実験アルゴリズムを提案する。数値解析では、代表的な弾塑性複合材料について巨視的な初期降伏曲面、およびその進展を例示する。一般化収束論に基づくマルチスケール境界値問題のミクロ自己つり合い問題を基礎式とする本手法は、弾塑性複合材料の巨視的な材料挙動の本質を評価することを可能とするものであり、信頼性のある構成モデル構築につながるものと期待できる。

Key Words : multi-scale modeling, homogenization method, computational plasticity, yield surface

1. はじめに

内部に複雑なミクロ構造を有する複合材料は、高性能・高機能な材料として近年さまざまな分野において数多く用いられている。土木工学の分野においても、コンクリートなどの人工的な複合材料をはじめとして、岩盤・地盤などの自然材料も内部に亀裂・空隙などのミクロ構造を有している。このように複雑なミクロ構造を有する材料からなる全体構造の構造解析に際して、その複雑さをそのままモデル化することは数値解析上非常に困難であるため、一般に「等価な均質材料」が定義される^{1),2)}。

この「等価な」材料の構成関係についての研究では、供試体に対する材料試験の結果を用いた現象論的なモデル化がほとんどであるが、実は実験で観察される挙動自身が境界値問題の解である。したがってここから得られる結果は境界の影響を含んだものであり、材料固有の特性と直接関連づけるのは容易ではない。またマイクロメカニクスに基づく解析的手法は、そのほとんどが理想化されたミクロ構造を対象としており、複雑な問題への適用には困難を伴う。高精度で汎用的な構造解析あるいは材料設計を実現するためには、複合材料の物性の本質を決定している微視領域での力学挙動を正確にモデル化し評価することによって、巨視的に「等価な」材料特性を決定することが望ましい。

このような非均質材料の力学挙動に対する Global-Local なモデル化手法として工学分野で紹介された数学

的均質化法^{3),4)}は、構造物の巨視的な挙動と非均質性が定義される微視領域での力学現象とを数学的に関連づけることを可能とするため、これまでに多くの応用が図られてきた⁵⁾⁻¹⁰⁾。しかしながら、その多くは線形問題の枠内でミクロ・マクロの2つの空間変数表記による漸近展開法に基づく定式化、およびその非線形問題への直接的な拡張にすぎず、非線形均質化理論およびその数理的なマルチスケール構造の正しい認識・活用までには至っていない¹¹⁾⁻¹⁴⁾。

近年、寺田・菊池¹⁵⁾によって非均質弾塑性体のマルチスケール構造解析について、一般化収束論に基づく非線形均質化理論による新しい定式化が示された。これによって非線形挙動に関してもミクロ応力の自己つり合い状態が正確に表現され、さまざまな非均質材料の非線形力学挙動が正確に評価できるようになっただけでなく^{16),17)}、ミクロ問題がマクロ構造の各物質点に対して応力・ひずみ関係を与えているというマルチスケールモデリングの数値構造が明らかになった。

このような方法論によれば、多結晶体や弾塑性複合材料の微視領域で観察される力学現象に起因した巨視的な弾塑性変形特性を、ある程度正確に評価することが可能となる。つまり、マルチスケール解析においてミクロ構造解析を通して得られる巨視的な材料特性は、非均質材料の本質である微視領域における力学挙動を純粋に評価したものになる。したがって、非線形均質化理論に基づいたマルチスケールモデリングによって、信頼性のある構成モデル構築の可能性が期待される。

本研究では、弾塑性材料からなる非均質体に上述のマルチスケールモデリングを適用し、マイクロ構造によって決定される巨視的な力学挙動を評価するための手法を提示するとともに、その巨視的な降伏曲面に着目して数値的な評価を行う。まず一般化収束論に基づく弾塑性マルチスケール問題の定式化を行い、そのアルゴリズムと数理構造について概説する。次にそのマイクロ問題に注目し、弾塑性複合材料の巨視的な弾塑性材料挙動を評価するための数値実験アルゴリズムを確立する。最後にその数値解析例として、代表的なマイクロ構造をもった弾塑性複合材料の巨視的な初期降伏曲面およびその進展の様子を例示する。

2. 弾塑性非均質体に対するマルチスケールモデリング

複数の弾塑性体からなる非均質体に対して、一般化収束論を用いた非線形均質化理論を適用して弾塑性マルチスケール境界値問題を設定する¹⁵⁾。各構成材料の弾塑性挙動は一般的な塑性理論における線形の等方硬化を仮定した J_2 流れ則に従うものとし、マイクロ・マクロ 2つの空間変数表記による支配方程式を誘導する。

(1) 支配方程式

図-1 に示すような複数の弾塑性体を構成材料とする非均質体を考え、実数空間を \mathcal{R} 、構造全体の n_{dim} 次元領域を $\Omega^\epsilon \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$ で表す。またこの領域 Ω^ϵ における非均質性は、代表長さ ϵ を有する基本周期構造領域（以下ユニットセルと呼ぶ）内における幾何形状および材料物性によって定義されており、全体構造は微小なユニットセルをくり返し配置することによって覆うことができるものとする。したがって、この非均質体の巨視的な力学挙動はユニットセル内で定義される現象だけでなく、その大きさ ϵ にも依存する。以下の定式化においては、全体領域 Ω^ϵ に座標系 $x \in \Omega^\epsilon$ を導入し、このユニットセルの大きさへの依存性を明らかにするために添字 ϵ を用いて変位、応力、ひずみなどの各関数をそれぞれ $u^\epsilon(x)$ 、 $\sigma^\epsilon(x)$ 、 $\epsilon^\epsilon(x)$ のように表記する。

この非均質弾塑性体に対して、静的なつり合い状態は次の平衡方程式で与えられる。

$$\text{div } \sigma^\epsilon + \rho^\epsilon f = 0, \quad \sigma^{\epsilon T} = \sigma^\epsilon \quad (1)$$

ここで、 $\rho^\epsilon f$ は物体力で、 ρ^ϵ は密度である。また、この物体の占める領域 Ω^ϵ の境界 $\partial\Omega^\epsilon$ 上では、 $\Gamma_u \subset \partial\Omega^\epsilon$ に変位 g が、 $\Gamma_\sigma \subset \partial\Omega^\epsilon$ ($\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$) には表面力 T がそれぞれ次のように与えられているものとする。

$$\begin{cases} u^\epsilon = g & \text{on } \Gamma_u \\ \hat{n} \sigma^\epsilon = T & \text{on } \Gamma_\sigma \end{cases} \quad (2)$$

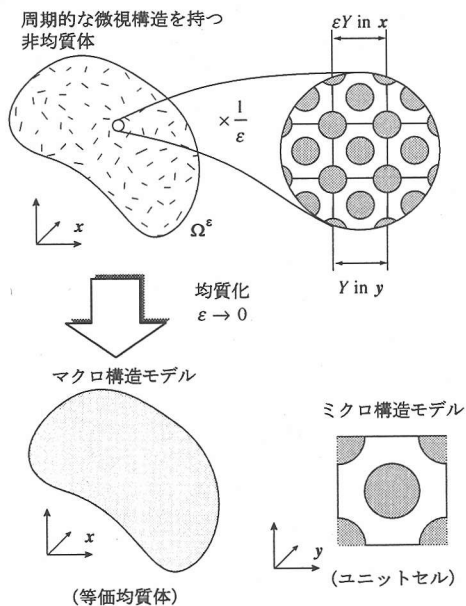


図-1 均質化法に基づくマルチスケールモデリング

これに変位・ひずみ関係式、

$$\epsilon^\epsilon = \text{sym}(\nabla u^\epsilon) := \frac{1}{2} (\nabla u^\epsilon + (\nabla u^\epsilon)^T) \quad (3)$$

および以下で与える弾性変形についての構成式、塑性変形についての流れ則、硬化則、載荷・除荷条件を用いることによって弾塑性変形を記述することができる。

非均質体を構成する材料が J_2 流れ理論に従うものと仮定すると、塑性変形に関する自由エネルギー関数 Ψ^ϵ は、弾性エネルギー \mathcal{W}^ϵ とひずみ硬化によるポテンシャルエネルギー \mathcal{H}^ϵ を用いて次のように定義できる¹⁸⁾。

$$\Psi^\epsilon(\epsilon^\epsilon, \epsilon^{p\epsilon}, \alpha^\epsilon) := \mathcal{W}^\epsilon(\epsilon^\epsilon - \epsilon^{p\epsilon}) + \mathcal{H}^\epsilon(\alpha^\epsilon) \quad (4)$$

ここで、 $\epsilon^{p\epsilon}$ は塑性ひずみ、 α^ϵ は等方硬化に関する内部変数であり、ここでは相当塑性ひずみと同一視し、

$$\alpha^\epsilon = \bar{\epsilon}^{p\epsilon} = \int_0^{\epsilon^{p\epsilon}} \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\epsilon}^{p\epsilon}(\tau)\| d\tau \quad (5)$$

で与えられるものとする。ここで、 $\|\dot{\epsilon}^{p\epsilon}\| := (\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p)^{1/2}$ とした。このとき、応力 σ^ϵ とひずみ ϵ^ϵ の関係は

$$\sigma^\epsilon = \frac{\partial \Psi^\epsilon(\epsilon^\epsilon, \alpha^\epsilon)}{\partial \epsilon^\epsilon} = \frac{\partial \mathcal{W}^\epsilon(\epsilon^\epsilon, \alpha^\epsilon)}{\partial \epsilon^\epsilon} \quad (6)$$

で与えられ、内部変数 α^ϵ と Legendre 変換を介して共役な硬化パラメータ q^ϵ が次のように表される。

$$q^\epsilon = -\frac{\partial \mathcal{H}^\epsilon(\alpha^\epsilon)}{\partial \alpha^\epsilon} := -\nabla \mathcal{H}^\epsilon(\alpha^\epsilon) \quad (7)$$

$$\dot{q}^\epsilon = -\nabla^2 \mathcal{H}^\epsilon(\alpha^\epsilon) \dot{\alpha}^\epsilon \quad (8)$$

また最大塑性仕事の原理から、塑性 consistency パラメータ γ^ϵ を用いて

$$\dot{\epsilon}^{pe} = \gamma^\epsilon \frac{\partial f^\epsilon(\sigma^\epsilon, q^\epsilon)}{\partial \sigma^\epsilon} \quad (9)$$

$$\dot{\alpha}^\epsilon = \gamma^\epsilon \frac{\partial f^\epsilon(\sigma^\epsilon, q^\epsilon)}{\partial q^\epsilon} \quad (10)$$

のように流れ則及び硬化則の関連性が保証される。ここで、 f^ϵ は von Mises の降伏関数であり、一軸状態での初期降伏応力を σ_Y 、Cauchy 応力の偏差成分を $\text{dev}(\sigma^\epsilon)$ として次のように与えられる。

$$f^\epsilon(\sigma^\epsilon, q^\epsilon) := \|\text{dev}(\sigma^\epsilon)\| + q^\epsilon - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y \quad (11)$$

この降伏関数は式 (7) によって $f^\epsilon(\sigma^\epsilon, \alpha^\epsilon)$ とすることができ、塑性硬化ポテンシャル \mathcal{H}^ϵ を内部変数 α^ϵ の 2 次形式 $\mathcal{H}^\epsilon(\alpha^\epsilon) = \frac{1}{2}H\alpha^{\epsilon 2}$ であると仮定すると次のような降伏条件となる。

$$f^\epsilon(\sigma^\epsilon, \alpha^\epsilon) := \|\text{dev}(\sigma^\epsilon)\| - \left(H\alpha^\epsilon + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y \right) \leq 0 \quad (12)$$

ここで H は等方硬化係数である。またこの場合、式 (8) において $\nabla^2 \mathcal{H}^\epsilon(\alpha^\epsilon) = H$ であるので、式 (10) の硬化則は次のようになる。

$$\dot{q}^\epsilon = -\gamma^\epsilon H \frac{\partial f^\epsilon(\sigma^\epsilon, q^\epsilon)}{\partial q^\epsilon} \quad (13)$$

さらに最大塑性仕事の原理を仮定しているため、この降伏条件式の凸性、および載荷・除荷条件が Kuhn-Tucker 形式

$$f^\epsilon \leq 0, \quad \gamma^\epsilon \geq 0, \quad \gamma^\epsilon f^\epsilon = 0 \quad (14)$$

で与えられる。

(2) 時間について離散化した変分方程式

時刻 t_n までの状態変数の値がすべて既知であるとすると、現時刻 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ における状態変数、

$$\chi_{n+1}^\epsilon := \{u_{n+1}^\epsilon, \epsilon_{n+1}^\epsilon, \sigma_{n+1}^\epsilon, \epsilon_{n+1}^{pe}, q_{n+1}^\epsilon, \Delta \gamma^\epsilon\} \quad (15)$$

は次のような時間 t について離散化された変分方程式に支配される¹⁸⁾。以下、下添字の $n, n+1$ は参照時刻の違いを表す。

$$\int_{\Omega^\epsilon} \nabla \eta^\epsilon : \sigma_{n+1}^\epsilon dv = \int_{\Omega^\epsilon} \rho^\epsilon f_{n+1} \cdot \eta^\epsilon dv + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{T}_{n+1} \cdot \eta^\epsilon ds \quad \forall \eta^\epsilon \in \mathcal{V}^\epsilon. \quad (16)$$

$$\int_{\Omega^\epsilon} \tau^\epsilon : (\text{sym}(\nabla u_{n+1}^\epsilon) - \epsilon_{n+1}^\epsilon) dv = 0 \quad \forall \tau^\epsilon \in \mathcal{S}^\epsilon \quad (17)$$

$$\int_{\Omega^\epsilon} \gamma^\epsilon : \left[\left(\frac{\partial \mathcal{W}_{n+1}^\epsilon}{\partial \epsilon^\epsilon} - \sigma_{n+1}^\epsilon \right) + a_{n+1}^\epsilon : (\epsilon_{n+1}^{pe} - \epsilon_n^{pe} - \Delta \gamma^\epsilon \frac{\partial f_{n+1}^\epsilon}{\partial \sigma^\epsilon}) \right] dv = 0 \quad \forall \gamma^\epsilon \in \mathcal{S}^\epsilon \quad (18)$$

$$\int_{\Omega^\epsilon} \left[\gamma^\epsilon : a_{n+1}^\epsilon : (\epsilon_{n+1}^{pe} - \epsilon_n^{pe} - \Delta \gamma^\epsilon \frac{\partial f_{n+1}^\epsilon}{\partial \sigma^\epsilon}) \right] dv = 0 \quad \forall \gamma^\epsilon \in \mathcal{S}^\epsilon \quad (19)$$

$$\int_{\Omega^\epsilon} \left[p^\epsilon \left[(H^\epsilon)^{-1} (q_{n+1}^\epsilon - q_n^\epsilon) + \Delta \gamma^\epsilon \frac{\partial f_{n+1}^\epsilon}{\partial q^\epsilon} \right] \right] dv = 0 \quad \forall p^\epsilon \in \mathcal{V}_q^\epsilon \quad (20)$$

$$\int_{\Omega^\epsilon} \lambda^\epsilon f_{n+1}^\epsilon dv = 0 \quad \forall \lambda^\epsilon \in \mathcal{K}_p^\epsilon \quad (21)$$

ここで、各状態変数に対する許容関数の集合をそれぞれ次のように定義した。

$$\mathcal{U}^\epsilon := \{v^\epsilon(x) \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \mid v_i^\epsilon \in H^1(\Omega^\epsilon), v^\epsilon = g \text{ on } \Gamma_u\}$$

$$\mathcal{V}^\epsilon := \{\eta^\epsilon(x) \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \mid \eta_i^\epsilon \in H^1(\Omega^\epsilon), \eta^\epsilon = 0 \text{ on } \Gamma_u\}$$

$$\mathcal{S}^\epsilon := \{\tau^\epsilon(x) \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \times \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \mid \tau_{ij}^\epsilon \in L^2(\Omega^\epsilon)\}$$

$$\mathcal{V}_q^\epsilon := \{q^\epsilon(x) \in \mathcal{R} \mid q^\epsilon \in L^2(\Omega^\epsilon)\}$$

$$\mathcal{K}_p^\epsilon := \{\gamma^\epsilon \in \mathcal{R} \mid \gamma^\epsilon \in L^2(\Omega^\epsilon); \gamma^\epsilon \geq 0\}$$

ここで、 L^2 は 2 乗可積分空間、 H^1 は一階の Sobolev 空間である。

(3) ミクロ・マクロスケールの導入とマルチスケール境界値問題

一般的な均質化理論の表記に従って、微視的な非均質性が観察できないマクロスケール $x \in \Omega$ と、非均質性が定義されるミクロ構造を測る尺度であるミクロスケール $y \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$ を導入する。この 2 つのスケールはミクロ構造の大きさを表すパラメータ ϵ によって、 $y = x/\epsilon$ のように関連づけられている。つまり、マクロスケール x はミクロ構造に依存しない全体領域 Ω を図るための尺度であり、微視領域内 $\epsilon \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$ で分布する場の変数を観察するためにはミクロスケール y を用いることになる。

ユニットセルの占める領域を Y で表すと、このミクロ構造は領域 $\epsilon \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$ に無限な広がりを持ち、周期的に配置することによって全体領域 Ω^ϵ を表現できるものと仮定される。つまり、非均質材料の占める全体領域 Ω^ϵ はマクロ領域 Ω と微視領域 $\epsilon \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$ との積空間 $\Omega \times \epsilon \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$ と見なすことができ、この領域は便宜的に

$$\Omega^\epsilon := \left\{ y \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \mid y = \frac{x}{\epsilon} \right\} := \Omega \times \epsilon Y \quad (22)$$

と表すことができる。このような設定のもとで変位・応力・ひずみなどの場の関数は 2 つのスケールを用いて

それぞれ $u(x, y)$, $\sigma(x, y)$, $\varepsilon(x, y)$ のように表現され、ミクロスケール y について「Y-周期的」であると仮定する^{3),4)}。

以上のようにマクロ、ミクロそれぞれに異なる2つのスケールを導入し、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとることによって非均質体のマクロ挙動を支配する方程式を導く数学的な手続きは均質化と呼ばれている¹⁹⁾。均質化法の数学理論によると、ミクロおよびマクロ変数についての境界値問題を個別に設定することができ、有限要素法などの解析手法を用いてミクロとマクロの解析を同時に行うマルチスケール解析が実現される。この境界値問題については、寺田・菊池¹⁵⁾がAllaireのTwo-scale収束理論²⁰⁾を用いた定式化を行っている。その誘導の詳細と一般的な議論は文献²¹⁾に譲り、ここでは結果として得られる弾塑性マルチスケール境界値問題のみを示す。

微視領域において満たすべき支配方程式は次のようになる。

$$\int_Y \nabla_y \eta^1 : \sigma_{n+1}(x, y) dy = 0, \quad \forall \eta^1 \in W_{\text{per}} \quad (23)$$

where $W_{\text{per}} := \{w \mid w_i \in H^1(Y); Y\text{-periodic}\}$

$$\int_Y \gamma : \left(\frac{\partial W_{n+1}}{\partial \varepsilon} - \sigma_{n+1} \right) dy = 0, \quad \forall \gamma \in S \quad \text{a.e. in } \Omega \quad (24)$$

where $S := \{\gamma(x, y) \mid \gamma_{ij} \in L^2(\Omega \times \varepsilon Y)\}$

$$\int_Y \tau : \left(\text{sym}(\nabla_x u_{n+1}^0) + \text{sym}(\nabla_y u_{n+1}^1) - \varepsilon_{n+1} \right) dy = 0, \quad \forall \tau \in S \quad \text{a.e. in } \Omega \quad (25)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta \gamma \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \sigma}, \quad \text{a.e. in } Y \quad (26)$$

$$q_{n+1} = q_n - \Delta \gamma H \frac{\partial f_{n+1}}{\partial q}, \quad \text{a.e. in } Y \quad (27)$$

$$f_{n+1} \leq 0, \Delta \gamma \geq 0, f_{n+1} \Delta \gamma = 0, \quad \text{a.e. in } Y \quad (28)$$

ここで、上添字の0と1はそれぞれマクロ変数とミクロ変数を表す。また、ユニットセル内の変位 w はマクロひずみ E とミクロ変位 u^1 を用いて次式で与えられる。

$$w_{n+1}(x, y) = E_{n+1}(x) \cdot y + u_{n+1}^1(x, y) \quad (29)$$

マクロスケールに関しては、平均密度およびマクロ応力、マクロひずみがそれぞれミクロ変数の体積平均として

$$\rho^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho dy, \quad (30)$$

$$\Sigma_{n+1}(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma_{n+1}(x, y) dy, \quad (31)$$

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \varepsilon_{n+1}(x, y) dy \quad (32)$$

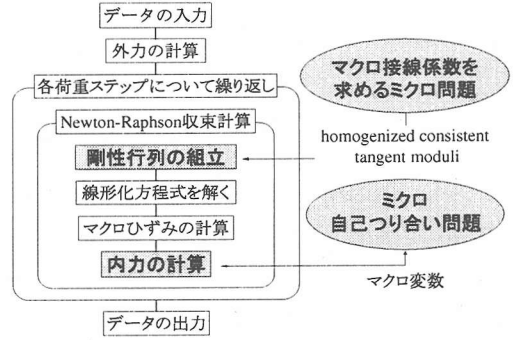


図-2 マルチスケール解析のフローチャート

であることに注意する。このとき、マクロ領域でのつり合い式は

$$\int_{\Omega} \nabla_x \eta^0 : \Sigma_{n+1}(x) dx = \int_{\Omega} \rho^H f_{n+1} \cdot \eta^0 dx + \int_{\Gamma_s} T_{n+1} \cdot \eta^0 ds, \quad \forall \eta^0 \in \mathcal{V} \quad (33)$$

where $\mathcal{V} := \{\eta^0(x) \mid \eta_i^0 \in H^1(\Omega), \eta^0 = 0 \text{ on } \Gamma_u\}$

のように与えられ、弾塑性複合材料に対するマルチスケール問題は、式(23)～式(28)を満足するようなミクロ状態変数

$$\chi^0 := \{u^1, \varepsilon, \sigma, \varepsilon^p, q, \Delta \gamma\} \quad (34)$$

を求め、これらのユニットセル内平均量を含むマクロ状態変数

$$\chi^1 := \{u^0, \Sigma, E\} \quad (35)$$

が式(30)～式(33)を満たすような解を求めるという、ミクロおよびマクロスケールが連成した境界値問題となる。

(4) マルチスケール構造

マルチスケール有限要素解析は、これまでに示したようなミクロとマクロが連成した境界値問題を有限要素法によって解くものであり、その解析のフローチャートを図-2に示す。この図からわかるように、マクロ構造解析において接線剛性および応力分布を求める際にそれぞれ、「homogenized consistent tangent moduli を求めるミクロ問題」、「ミクロ自己つり合い問題」といったミクロ問題を参照しているという点以外は、通常の有限要素解析と同様である。

このうち homogenized consistent tangent moduli はマクロ応力のマクロひずみによる微分によって与えられるものであるが、ここでの“consistent”とは、このマクロ応力が自己つり合い状態にあるミクロ応力から算出

されることを意味している。また巨視的な内力を求めるときには、マクロ構造の各点で非線形の構成関係を陽な形で与えるかわりに、ミクロ構造解析と式 (31)、(32) から得られる平均的なマクロ応力・ひずみ関係を参照していることになる。ここで参照されるミクロ構造解析とは、ユニットセルに対してマクロひずみ $E(x)$ を外力として与え、周期境界条件の下でミクロ応力 $\sigma(x, y)$ が自己つり合い状態となるような Y-周期的なミクロ変位 $u^1(x, y)$ を求める弾塑性自己つり合い問題である²²⁾。

以上のようにマルチスケール解析では、微視領域で定義される弾塑性挙動に起因したミクロ構造の非線形応答が、マクロ構造各点における材料挙動を規定していることになり、微視領域で定義された「構造」としての挙動がマクロスケールでは「材料」の挙動として認識されることになる。つまり、マルチスケール解析におけるミクロ問題は、マクロ構造に対して一種の構成関係を与える役割を果たしているものと解釈することができる。このようなミクロ構造によって定義される代表的な巨視的な構成関係として、線形弾性体からなる複合材料の巨視的な応力・ひずみ関係を与える「均質化弾性テンソル」がよく知られている⁵⁾が、上述の数理構造はこれに対してより一般的な解釈を与えているものである^{15), 16), 21)}。

本研究は、以上のようなマルチスケール構造に対する認識のもと、前小節で提示した弾塑性ミクロ問題を通してそのミクロ構造が巨視的に呈する構成関係、特に巨視的な降伏曲面を評価するものである。

3. マルチスケールモデリングによるマクロ初期降伏曲面の評価

前節で示したマルチスケールモデリングの数理構造に基づいて弾塑性複合材料の巨視的な降伏曲面を評価するために、まずマクロ初期降伏曲面に注目する。ここでは線形解析で評価できるマクロ初期降伏曲面の評価法²³⁾についてその手続きを示し、次節においてこれを微視領域の弾塑性挙動を考慮したマクロ後続降伏曲面へと拡張する。

まず、本論に先立って巨視的な初期降伏状態を次のように定義する。

定義: ミクロ構造に作用する荷重を増加させたとき、ある 1 点でもミクロ応力がその構成材料によって規定された初期降伏応力に達する状態を「マクロ初期降伏状態」とし、このときのマクロ応力を「マクロ初期降伏応力」と呼ぶ。

この定義に対してマルチスケールモデリングの視点から解釈を与えると、「全体構造に対して荷重を増加させるとき、全体構造のある点 x 近傍に存在するミクロ構

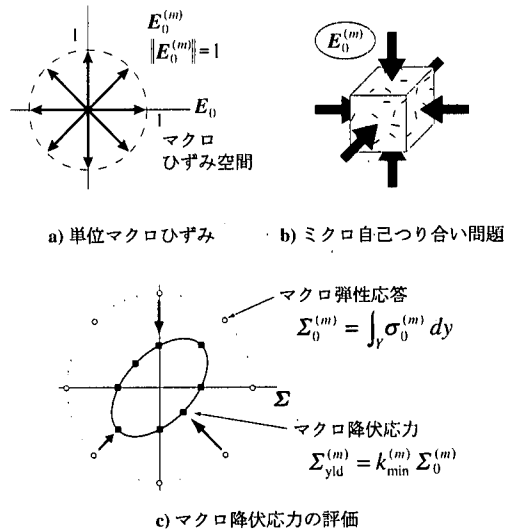


図-3 マクロ初期降伏曲面の評価

造内部において構成材料が非弾性状態となる点 y があれば、巨視的にはその点 x において降伏が始まったように観察される。」となり、物理的にも正当な定義であるといえよう。

(1) マクロ初期降伏応力の評価

ミクロ構造に対する数値実験に先立って、まず n_{dim} 次元問題における $(n_{\text{dim}}(n_{\text{dim}} + 1)/2)$ 次元工学ひずみ空間における単位球を考え、この球面上に均等に分布する十分な数 (M) の単位マクロひずみパターン $E_0^{(m)}$ ($m = 1, \dots, M$) の集合を用意する (図-3-a)。

a) ミクロ自己つり合い問題

用意した単位マクロひずみ $E_0^{(m)}$ を外力として、式 (23) ~ (28) で表されるマルチスケール解析におけるミクロ自己つり合い問題を解き、ユニットセル内に分布するミクロ応力分布 $\sigma_0^{(m)}(y)$ を求める (図-3-b)。この解析を各構成材料についての塑性挙動を無視した線形弾性解析に限定することで、外力であるマクロひずみ $E_0^{(m)}$ とその応答として得られるミクロ応力分布 $\sigma_0^{(m)}(y)$ の間の線形性が保証される。

b) マクロ初期降伏応力の評価

ユニットセル内の全ての応力評価点について、上で得た応力分布 $\sigma_0^{(m)}(y)$ を用いて、それぞれの構成材料で規定された von Mises の降伏条件を満たすような倍率係数 $k^{(m)}(y)$ を次式から求める。

$$f = \left\| \text{dev} \left(k^{(m)}(y) \sigma_0^{(m)}(y) \right) \right\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y = 0$$

$$k^{(m)}(\mathbf{y}) = \frac{\left\| \text{dev} \left(\sigma_0^{(m)}(\mathbf{y}) \right) \right\|}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y} \quad (36)$$

さらに、これらの倍率係数のうちユニットセル内の最小値 $k_{\min}^{(m)}$ を求める。

$$k_{\min}^{(m)} = \min \left\{ k^{(m)} \mid f \left(k^{(m)} \sigma_0^{(m)} \right) = 0, \forall \mathbf{y} \in Y \right\} \quad (37)$$

この倍率係数の最小値 $k_{\min}^{(m)}$ を用い、さらに先に保証した線形性を利用して巨視的な降伏状態のときのマクロひずみ $\mathbf{E}_{\text{yld}}^{(m)}$ 、ミクロ応力分布 $\sigma_{\text{yld}}^{(m)}(\mathbf{y})$ およびマクロ初期降伏応力 $\Sigma_{\text{yld}}^{(m)}$ はそれぞれ次のように求められる(図-3-c)。

$$\mathbf{E}_{\text{yld}}^{(m)} = k_{\min}^{(m)} \mathbf{E}_0^{(m)} \quad (38)$$

$$\sigma_{\text{yld}}^{(m)}(\mathbf{y}) = k_{\min}^{(m)} \sigma_0^{(m)}(\mathbf{y}) \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{yld}}^{(m)} &= \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma_{\text{yld}}^{(m)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= k_{\min}^{(m)} \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma_0^{(m)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (40)$$

以上の操作をあらかじめ準備した全ての単位マクロひずみ ($\mathbf{E}_0^{(m)}$, $m = 1, \dots, M$) に対して行うことによって、得られたマクロ初期降伏応力はマクロ応力空間上に分布し、マクロ初期降伏曲面を離散的に表す。さらに応用面からは、この種の構成関係は何らかの関数で与えられることが望ましいため、次小節ではこの離散的なマクロ降伏曲面を2次曲面で近似する。

(2) マクロ初期降伏曲面の2次曲面近似

マクロ初期降伏曲面の近似関数としてマクロ応力の2次形式、つまり $(n_{\text{dim}}(n_{\text{dim}} + 1)/2)$ 次元マクロ応力空間における2次曲面を用いることにする。これは等方性材料に対する von Mises の降伏条件をはじめ、Hill の異方性材料の降伏条件などの一般的な「材料」に対する降伏条件からの類推によるものであり、次のように最も一般的な正規化された2次形式を仮定する。

$$F(\mathbf{S}) = \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S} + \mathbf{b}^T \mathbf{S} - 1 = 0 \quad (41)$$

ここで、 \mathbf{A} は 6×6 、 \mathbf{b} は 6×1 の係数行列であり、

$$\mathbf{S}^T = \{ \Sigma_{11} \ \Sigma_{22} \ \Sigma_{33} \ \Sigma_{23} \ \Sigma_{31} \ \Sigma_{12} \}$$

とおいた。また2次元問題においては独立なマクロ応力3成分を用いて次のようになる。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ \text{sym} & & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{Bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

前節の数値実験から得られた離散的なマクロ初期降伏応力の集合 ($\Sigma_{\text{yld}}^{(m)}$, $m = 1, \dots, M$) を用いて、この係数マトリクス \mathbf{A} 、ベクトル \mathbf{b} を最小二乗法によって決定し、マクロ応力空間におけるマクロ初期降伏曲面とする。

なお、式(41)において定数項を1とする正規化を行ったが、これは応力が作用しない状態 ($\Sigma = \mathbf{0}$) で降伏することはあり得ないということを考えれば正当化される。つまり、マクロ初期降伏曲面が応力空間で原点を通ることはなく、原点はこの曲面の内部領域に含まれるため、定数項を1と正規化した式(41)であっても一般性を失わない。

4. マクロ後続降伏曲面を評価するための数値的手法

本研究では、弾塑性ミクロ構造の巨視的な硬化を表現するため、マクロ降伏曲面の進展に注目する。ここでは、ある一定の方向にマクロひずみが増加していくときの降伏曲面の進展に限定して議論を進め、この進展を観察するための数値実験の手順を紹介する。

a) 巨視的な塑性変形の進行

前節で示した数値実験によって初期降伏状態におけるミクロ構造の自己つり合い状態が求められているので、このときのマクロひずみ $\mathbf{E}_0^{(m)}$ と同方向にさらにマクロひずみ増分 $\delta \mathbf{E}^{(m)}$ を与え塑性変形が進行した状態を考える。このときのマクロひずみは

$$\mathbf{E}^{(m)} = \mathbf{E}_{\text{yld}}^{(m)} + \delta \mathbf{E}^{(m)} \quad (42)$$

となり、このようなマクロひずみを外力として式(23)~(28)の弾塑性ミクロ自己つり合い問題を解く。このとき、巨視的な塑性履歴を表すパラメータは次式で与えられるマクロ塑性ひずみとする。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^p{}^{(m)} &= \mathbf{E}^{(m)} - \mathbf{E}^e{}^{(m)} \\ &= \mathbf{E}^{(m)} - \left(\mathbf{A}^H \right)^{-1} : \Sigma^{(m)} \end{aligned} \quad (43)$$

ここで \mathbf{A}^H は均質化弾性テンソルであり、マクロ塑性ひずみ $\mathbf{E}^p{}^{(m)}$ はミクロ塑性ひずみ $\varepsilon^p{}^{(m)}(\mathbf{y})$ の体積平均ではないことに注意する¹⁹⁾。

このマクロ塑性ひずみ $\mathbf{E}^p{}^{(m)}$ を巨視的な塑性履歴に関するパラメータとして用いる。この状態から、ミクロ領域において新たな降伏を生じないように注意しながら弾性除荷を行い、マクロ応力が $\Sigma \approx \mathbf{0}$ になった状態を基準状態として、他の方向へマクロひずみを与え

る度にユニットセル内で新たな降伏が生じる点を「マクロ後続降伏点」とする。

b) マクロ後続降伏点の評価

あるマクロ塑性ひずみ $E^p(m)$ およびマイクロ残留応力を持った基準状態に対して、初期降伏曲面を求めたときと同様に様々な方向のマクロひずみ増分 $\delta E^{(n)}$ を与えたマイクロ自己つり合い問題を解くが、ここで与えるマクロひずみ増分は微小なものとし、ユニットセル内部で新たな降伏が生じないようにする。これによって与えたマクロひずみ増分 $\delta E^{(n)}$ と得られたマイクロ応力増分 $\delta \sigma^{(n)}$ は線形関係となり、マクロひずみ増分を $m\delta E^{(n)}$ としたときのユニットセル内部のマイクロ応力分布は、基準状態におけるマイクロ応力分布を $\sigma_1^{(m)}(y)$ として次のように表すことができる。

$$\sigma^{(n)}(y) = m\delta\sigma^{(n)}(y) + \sigma_1^{(m)}(y) \quad (44)$$

このようなマイクロ応力について初期降伏応力を評価したときと同様に、ユニットセル内の各応力評価点で構成材料の降伏条件を満たすような倍率係数 $k^{(n)}$ を求め、その最小値 $k_{\min}^{(n)}$ を求める。

$$\begin{aligned} f(\sigma^{(n)}, \alpha) &= \left\| \text{dev} \left(\sigma^{(n)} \right) \right\| - \left(H\alpha + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y \right) \\ &= \left\| \text{dev} \left(k^{(n)}\delta\sigma^{(n)} + \sigma_1^{(m)} \right) \right\| \\ &\quad - \left(H\alpha + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y \right) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} k_{\min}^{(n)} &= \min \left\{ k^{(n)} > 0 \mid \right. \\ &\quad \left. f(k^{(n)}\delta\sigma^{(n)} + \sigma_1^{(m)}, \alpha) = 0, \forall y \in Y \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

この倍率係数の最小値を用いて、マクロ塑性ひずみが $E^p(m)$ であるときの、マクロ後続降伏点でのマイクロおよびマクロ応力はそれぞれ次のように求められる。

$$\sigma^{(m,n)}(y) = k_{\min}^{(n)}\delta\sigma^{(n)}(y) + \sigma_1^{(m)}(y) \quad (47)$$

$$\Sigma^{(m,n)} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma^{(m,n)}(y) dy \quad (48)$$

こうして求めたマクロ後続降伏応力の集合はマクロ応力空間に離散的に分布し、ある共通のマクロ塑性ひずみ $E^p(m)$ に対応したマクロ後続降伏曲面を表すことになる。例えば、 M 個の $E_0^{(m)}$ それぞれに対して M 個の $\delta E^{(n)}$ を与えて次の後続降伏点を求めれば、マクロ全応力空間において $M \times M$ 個の降伏点求められることになる。

このような応力空間上における点の集合をマクロ塑性ひずみについて整理し、何らかの関数によって近似することで、マクロ降伏曲面のひずみ硬化による進展が表現できる。

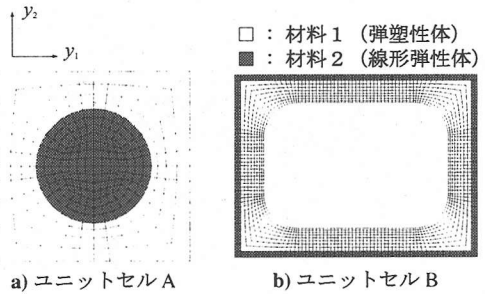


図-4 ミクロ構造の有限要素モデル

表-1 構成材料の材料定数⁸⁾

	材料 1	材料 2
ヤング率 E (GPa)	68.9	379.2
ポアソン比 ν	0.30	0.21
初期降伏応力 σ_Y (MPa)	24.0	—
線形硬化係数 H (GPa)	10.0	—

5. 数値解析例

前節で示した手順に従ってミクロ構造に対して数値実験を行い、その巨視的な降伏曲面を評価する。以下の解析はすべて平面ひずみ状態を仮定しており、図-4に示すような2種類の構成材料からなるミクロ構造を対象とした。また、構成材料の弾塑性挙動は線形等方硬化のみを仮定した J_2 塑性理論に従うものとし、材料2は塑性変形を生じない線形弾性体と仮定する。用いた材料定数を表-1に示す。

(1) マクロ初期降伏曲面

マクロひずみ空間における単位球面上に均等に分布する $M = 62$ 種類のマクロひずみパターンそれぞれについて数値解析を行い、これらの結果からマクロ初期降伏曲面を式(41)で与えられるマクロ応力空間における2次曲面で近似した。また、この2次曲面による近似の精度を評価するために、次に示すような誤差ノルムの平均値となるような誤差評価式を考える。

$$r = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\| F \left(S^{(m)} \right) \right\| \quad (49)$$

それぞれのユニットセルに対して求めた初期降伏曲面を表す式(41)中の係数マトリクス A とベクトル b および式(49)で定義した誤差評価式の値を以下に示す。

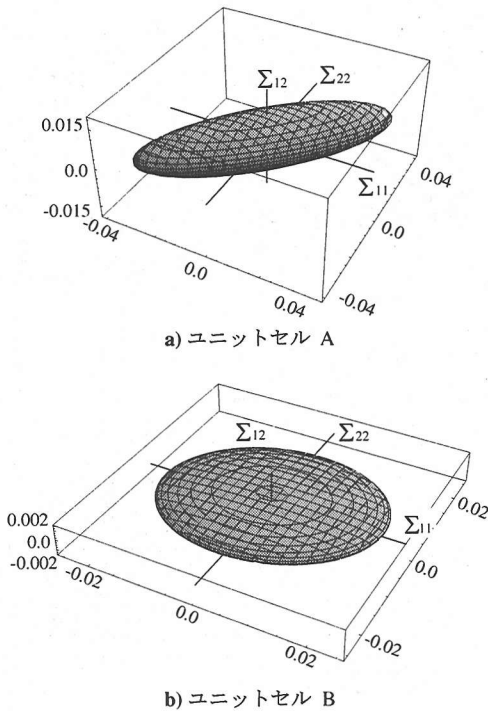


図-5 マクロ初期降伏曲面 (単位: GPa)

● ユニットセル A

$$A = \begin{bmatrix} 2.142 & -1.852 & 0 \\ & 2.142 & 0 \\ \text{sym} & & 6.628 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$b^T = \{0 \ 0 \ 0\}$$

$$r = 7.229 \times 10^{-8}$$

● ユニットセル B

$$A = \begin{bmatrix} 2.322 & -0.188 & 0.002 \\ & 3.664 & 0.001 \\ \text{sym} & & 302.06 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$b^T = \{0 \ 0 \ 0\}$$

$$r = 1.023 \times 10^{-6}$$

ここで近似誤差の値が非常に小さいことから、マクロ初期降伏曲面を全応力空間における2次曲面と仮定したことの妥当性を正当化できよう。また、この降伏曲面の3次元マクロ応力空間における曲面形状を図-5に、マクロ主応力平面上での降伏曲面形状を図-6に示す。ここで、図-6中の破線はそれぞれの楕円の主軸を表しており、また参考のためにマイクロ構造を構成する材料1の降伏曲面も示した。

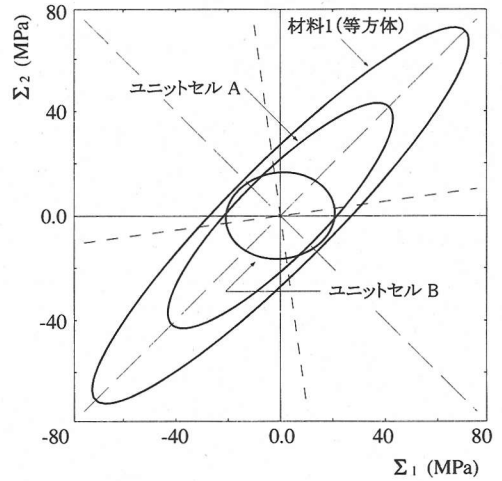


図-6 マクロ主応力空間における降伏曲面の比較

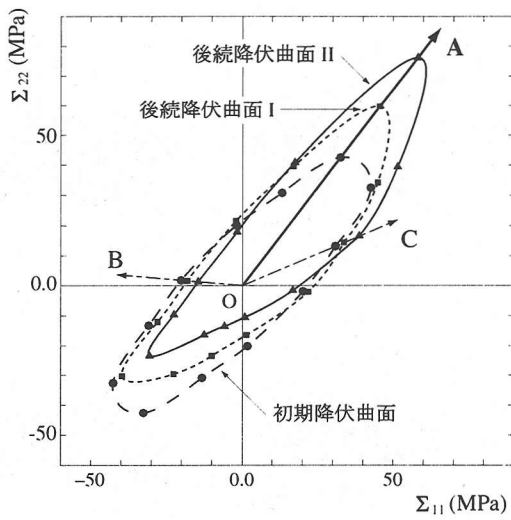
これらの関数形や図を見てわかるように、それぞれのユニットセルについてその微視構造の違いによって、全く異なった形状のマクロ降伏曲面が得られている。特にマイクロ構造内部に空隙が存在するようなユニットセル B では、ユニットセル A と比較して降伏曲面が全体的に小さくなっているだけでなく、せん断応力に対して特に弱くなっていることを示す結果が得られている。

さらに主応力平面上で比較すると、直交異方性となる各ユニットセルの降伏曲面は、等方性を仮定した材料1の降伏曲面と比較して楕円の長径と短径それぞれを変化させたものであり、ユニットセル B の降伏曲面はさらに楕円の主軸を回転させたものとなっている。この主軸の回転はユニットセル B のマイクロ構造が y_1 方向と y_2 方向で異なるために生じるものであり、両方向に同様の構造を持つユニットセル A の降伏曲面では観察されないことから、本手法が微視領域における「構造」の影響を忠実に評価していることがわかる。

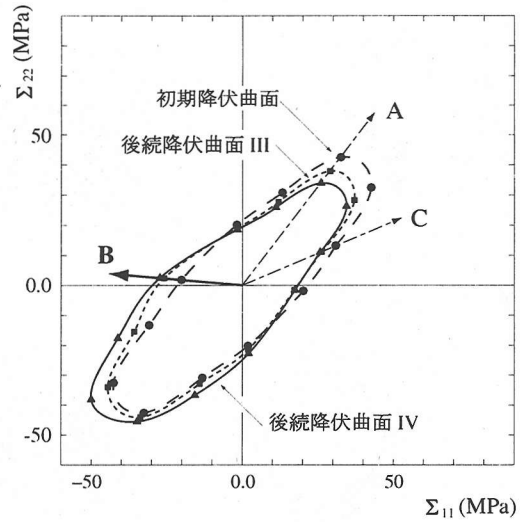
このような降伏曲面は Hill の直交異方性体に対する降伏条件²⁴⁾などの異方性体の降伏条件として多く用いられる形であり²⁵⁾、これらの降伏条件に用いられる異方性パラメータは、そのほとんどが一様引張りなどの材料試験から決定されてきた。これに対して本手法は、これらの異方性パラメータを微視的な領域で観察される力学挙動を正確に評価し数値的に決定するという新しい視点を与えるものである。

(2) マクロ後続降伏曲面

ここでは微視構造に対称性が比較的あるユニットセル A を対象として第4節で示した手法に沿った数値実験を行い、巨視的な後続降伏曲面の挙動を考察する。



a) $E_0^{(A)}$ を与えた場合の後続降伏曲面



b) $E_0^{(B)}$ を与えた場合の後続降伏曲面

図-7 マクロ後続降伏曲面の進展の様子

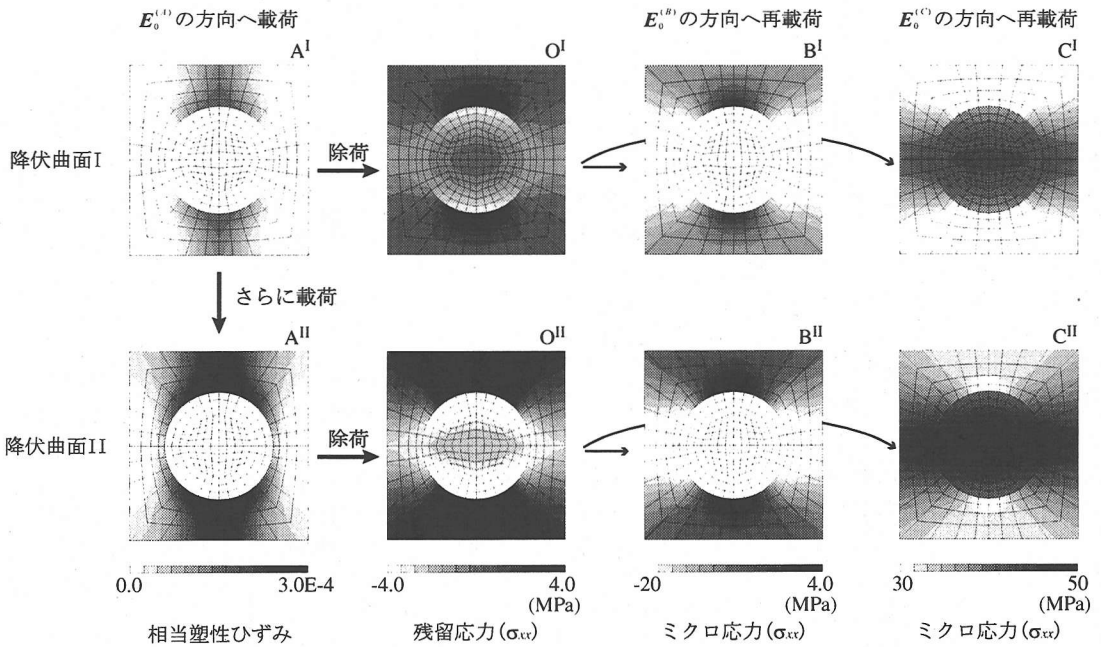


図-8 $E_0^{(A)}$ を与えた場合の微視領域における応力分布

$M = 62$ 種類のマクロひずみパターン $E_0^{(m)}$ から、

$$E_0^{(A)} = \begin{bmatrix} 0.477 & 0 \\ 0 & 0.894 \end{bmatrix}$$

$$E_0^{(B)} = \begin{bmatrix} -0.894 & 0 \\ 0 & 0.477 \end{bmatrix}$$

という2つのパターンを与えて降伏させ、前節で示した手順に従って求めたマクロ降伏曲面進展の様子を図-7に示す。図中の各点はそれぞれ数値解析によって得られたマクロ後続降伏点であり、これらのマクロ塑性ひずみが等しい点を参考のために適当な曲線で結んだものであるが、降伏曲面の凸性に関する考慮は加えていない。

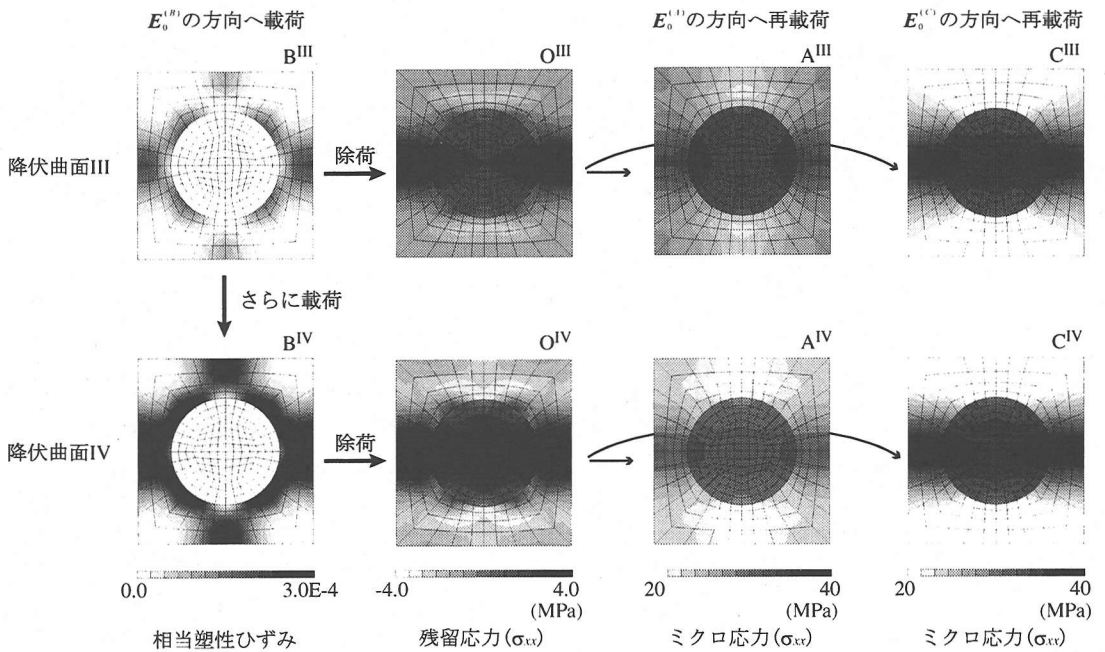


図-9 $E_0^{(B)}$ を与えた場合の微視領域における応力分布

ミクロ構造を構成する材料の構成関係として等方硬化則のみを仮定しているにもかかわらず、塑性変形が進むにつれてマクロ降伏曲面は中心の移動・曲面形状の変化、つまり巨視的な移動硬化・異方硬化といったように複雑な挙動を示している。またその進展の傾向もあらかじめ降伏させたマクロひずみパターンによって異なるという非常に複雑な進展挙動となっている。

このような多軸载荷における降伏曲面の複雑な進展挙動は、金属材料や複合材料に対する材料試験からも報告されており²⁶⁾、発展則を同定するための研究が行われている²⁷⁾。降伏曲面の進展に関して、このような既往の研究と定性的に同様の結果が得られたことから、本研究で提案した解析手法および解析結果は妥当であると判断できる。以下ではこの複雑な進展挙動に対して、微視的な視点からの考察を与える。図-8, 9には図-7に示した降伏曲面上の代表的な点での、微視領域で観察される塑性ひずみおよび応力分布の様子を示す。以下の考察ではマイクロ応力の符号、つまり内部に分布する応力が引張または圧縮のどちらなのかという点が重要になるため、これらの図には最も顕著な差異が観察された σ_{xx} 成分のみを示した。

図-8の左側2列の図に示したように、 $E^{(A)}$ の方向に降伏させたのちマクロ応力が $\Sigma = 0$ となる状態まで除荷しても、ユニットセル内部では残留応力が分布している。この残留応力とその後の载荷方向との関係によって、後続降伏曲面の進展が決定づけられている。例え

ば除荷後 $E^{(B)}$ の方向に载荷した際には残留応力 (O^I) と同様の分布形状 (B^I) となり、初期降伏応力よりも小さなマクロ応力で降伏が生じることになる。塑性変形の進行に伴って残留応力はより大きなものとなるため、結果としてマクロ降伏曲面は原点に向かって進展する。これに対して、

$$E_0^{(C)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の方向に载荷したときの応力は、残留応力分布と符号が逆の分布形状 (C^I) となる。つまり降伏させるためには初期降伏応力よりも大きなマクロ応力が必要となり、原点から離れる方向に進展することになる。

同様の傾向は図-9に示した $E_0^{(B)}$ の方向に降伏させたときの後続降伏曲面の進展においても観察できる。以上のことから、弾塑性複合材料の巨視的な降伏曲面の進展は、微視領域での残留応力や塑性ひずみの分布によって支配されていることが確認できる。

ここで得られた複雑な進展挙動を前節のマクロ初期降伏曲面と同様に近似的に表現するためには、2次曲面では不十分であり、近似関数の選定やその発展則の同定などは今後の検討課題である。

6. おわりに

本研究では、一般化収束論を用いた非線形マルチスケールモデリングに基づいて、非均質弾塑性体のミク

口構造を反映した巨視的な弾塑性挙動を評価する手法を提案した。これによって微視領域における構造とその構成材料の物性値から、巨視的な降伏曲面を評価することが可能となり、その解析例として2種類のミクロ構造についてそのマクロ初期降伏曲面を2次曲面で近似し、さらにその進展の様子を例示した。

これまでに弾塑性体の降伏条件や構成則として数多くのモデルが提案されてきたが、これらのほとんどが供試体に対する材料試験から得られた現象をもとに組み立てられてきた。これに対して、ここで提示した手法は材料特性の本質を決定づけるミクロ構造に注目し、ミクロ構造に対する数値解析によって巨視的な構成関係を評価するといった点で新たな視点を提供するものである。ミクロ構造を忠実にモデル化し、さらに材料試験などから得られる巨視的な実現象とのキャリブレーションを行うことによって、本手法が非均質弾塑性体や多結晶体などの複雑な微視構造を有する材料のより正確な力学挙動の評価に役立つものと期待する。

参考文献

- 1) Iwakuma, T. and Nemat-Nasser, S.: Finite elastic-plastic deformation of polycrystalline metals, *Proc. R. Soc. Lond.*, A 394, pp.87-119, 1984.
- 2) 岩熊哲夫, 堀宗朗, 木谷朋之, 村外志夫: 内部に微視構造を有する材料の平均弾塑性関係の一評価, 構造工学論文集, Vol.39A, pp.375-380, 1993.
- 3) Bensoussan, A., Lions, J.L. and Papanicolau, G.: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- 4) Lions, J.L.: *Asymptotic calculus of variations, Singular Perturbations and Asymptotics*, Academic Press, New York, pp.277-296, 1980.
- 5) Guedes, J.M. and Kikuchi, N.: Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg.*, Vol.83, pp.143-198, 1990.
- 6) 寺田賢二郎, 弓削康平, 菊池昇: 均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析 (第1報, 定式化), 日本機械学会論文集, A編, Vol.61, No.509, pp.2199-2205, 1995.
- 7) 寺田賢二郎, 弓削康平, 菊池昇: 均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析 (第2報, 数値解析), 日本機械学会論文集, A編, Vol.62, No.601, pp.2072-2079, 1996.
- 8) Fish, J., Shek, K., Pandheeradi, M. and Shephard, M.: Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization: Theory and practice, *Comput. Methods. Appl. Mech. and Engrg.*, Vol.148, pp.53-73, 1997.
- 9) Swan, C.C. and Cakmak, A.S.: A hardening orthotropic plasticity model for non-frictional composites: rate formulation and integration algorithm, *Int. J. Numer. Meths. Engrg.*, Vol.37, pp.839-860, 1994.
- 10) Ghosh, S., Lee, K. and Moorthy, S.: Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and Voronoi cell finite element model, *Comput. Methods. Appl. Mech. and Engrg.*, Vol.132, pp.63-116, 1996.
- 11) van Rens, B.J.E., Brekelmans, W.A.M. and Baaijens, F.P.T.: Homogenization of the elastoplastic behavior of perforated plates, *Computers and Structures*, Vol.69, pp.537-545, 1998.
- 12) Pellegrino, C., Galvanetto, U. and Schrefler, B.A.: Numerical homogenization of periodic composite materials with non-linear material components, *Int. J. Numer. Meths. Engrg.*, Vol.46, pp.1609-1637, 1999.
- 13) Ganser, H.-P., Fischer, F.D. and Werner, E.A.: An iterative method for coupling of deformation and failure mechanisms on different length scale, *Int. J. Numer. Meths. Engrg.*, Vol.48, pp.595-611, 2000.
- 14) Wiecekowi, Z.: Dual finite element methods in homogenization for elastic-plastic fibrous composite material, *Int. J. of Plasticity*, Vol.16, pp.199-221, 2000.
- 15) 寺田賢二郎, 菊池昇: 非均質弾塑性体のマルチスケール解析のための一般化アルゴリズム, 土木学会論文集, No.633/I-49, pp.217-299, 1999.
- 16) 寺田賢二郎, 松井和己, 真野篤志: 均質化理論に基づく非線形力学挙動のミクロ・マクロ連成モデリング, 日本機械学会論文集, A編, Vol.66, No.643, pp.516-523, 2000.
- 17) Terada, K., Saiki, I. and Matsui, K.: Kinematically correct formulation for two-scale finite deformation problems, *Transactions of JSCES*, Vol.2, pp.53-62, 2000.
- 18) Simo, J.C.: Numerical Analysis and Simulation of Plasticity, *Handbook of Numerical Analysis Vol. VI*, Elsevier Science, 1998.
- 19) Suquet, P.: Elements of homogenization for inelastic solid mechanics, *Homogenization Techniques for Composite Media, Vol.272 of Lecture Notes in Physics*, (eds. Sanchez-Palencia, E. and Zaoui, A), Springer Verlag, pp.193-278, 1987.
- 20) Allaire, G.: Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol.23, pp.1482-1518, 1992.
- 21) Terada, K. and Kikuchi, N.: A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media, *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg.* (to appear).
- 22) Michel, J.C., Moulieneç, H. and Suquet, P.: Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach, *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg.*, Vol.172, pp.109-143, 1999.
- 23) 京谷孝史, 寺田賢二郎, 歐陽立珠: 岩石の力学特性と不連続面画像情報による岩盤の変形強度特性評価, 土木学会論文集, No.631/III-48, pp.131-150, 1999.
- 24) Hill, R.: *Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, 1950.
- 25) Nahas, M.N.: Survey of failure and post-failure theories of laminated fiber-reinforced composites, *Journal of Composites Technology and Research*, Vol.8, No.4, pp.138-153, 1986.
- 26) Nigam, H., Dvorak, G.J. and Bahei-El-Din, Y.A.: An experimental investigation of elastic-plastic behavior of a fibrous boron-aluminum composite: I Matrix-dominated mode, *Int. J. of Plasticity*, Vol.10, pp.23-48, 1994.
- 27) Kowalsky, U., Ahrens, H. and Dinkler, D.: Distorted yield surface - modeling by higher order anisotropic hardening tensors, *Computational Materials Science*, Vol.16, pp.81-88, 1999.

(2000.10.12 受付)

ESTIMATE OF THE MACROSCOPIC YIELD SURFACE FOR THE ELASTIC-PLASTIC COMPOSITE MATERIALS

Kazumi MATSUI, Kenjiro TERADA, Takashi KYOYA and Tetsuo IWAKUMA

A method to a priori estimate the equivalent material behavior of the elastic-plastic heterogeneous bodies is developed within the frame work of the multi-scale modeling based on the mathematical homogenization theory. To estimate the macroscopic elastic-plastic properties, such as the macroscopic yield surface, we carry out a series of numerical experiments for the periodic microstructures called unit cells. Through its quantitative evaluation, the macroscopic initial yield surface is approximated by a quadratic function in the macroscopic stress space, and the evolution of the yield surface with anisotropic hardening is numerically investigated.