

complex envelope を用いた複素剛性の 非定常変動評価法の適用性

本田 利器¹・澤田 純男²

¹正会員 工修 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

²正会員 工博 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

神山, 吉田¹⁾は, complex envelope を用いて, 応力とひずみの時刻歴から, 剛性や減衰の時刻歴変化を算出する方法を提案し, 同手法を実観測記録に適用している。

本論文では, 神山らが提案している手法の妥当性や適用性について, 理論的, 数値解析的に考察した。その結果, 一般的には, 同手法により正確な複素剛性は算出されないことが分かった。ただし, 剛性が高周波成分を含まず, ひずみが低周波成分を含まないという条件が満たされる場合には, 同手法により正確な剛性が算出されること, また, この条件が近似的に満たされる場合には, 同手法により剛性の近似値が得られることが明らかになった。

Key Words : complex envelope, non-stationary analysis, complex stiffness

1. はじめに

神山, 吉田¹⁾は, complex envelope を用いて, 剛性及び減衰の時刻変化を評価する手法 (以下, 「神山の手法」) を提案している。そして, その手法を, 兵庫県南部地震におけるポートアイランドの記録に適用し, 剛性や減衰の時刻変化を評価している。同手法は, 複素剛性を想定するという制限はあるものの, 定量的な一意の解を与える利点がある。もし神山の手法が常に正しい剛性及び減衰を推定できるならば有用であると考えられる。

しかし, 同論文¹⁾では, 神山の手法に対する理論的検証が十分になされておらず, また, その適用性についての議論もなされていない。そこで本論文では, 神山の手法の妥当性について理論的に検証し, さらに近似解法としての適用性について調べた。

2. complex envelope を用いた複素剛性の非定常変動評価法

神山, 吉田の提案している, 剛性や減衰の時間変動を応力およびひずみ時刻歴波形から算出する手法 (以下, 「神山の手法」という) の概要について述べる。

神山の手法は, 石原²⁾が, 土の動的変形特性を表現する方法として紹介した線形粘弾性体の挙動を記述する関係式³⁾に基づき, 応力-ひずみ関係を表す基礎式と

して

$$\tau(t) = G(t)\{1 + i2h(t)\}\gamma(t) \quad (1)$$

を用いている。

神山, 吉田¹⁾では, 応力 τ やひずみ γ は実数として扱っているが, 式 (1) が提示されている段階ではひずみや応力の虚部についての言及はなく, このままでは式 (1) は成立しない。

同論文¹⁾では, 実数のひずみ時刻歴と応力時刻歴にそのヒルベルト変換を虚部として与えることにより, 複素応力 $T(t)$ および複素ひずみ $\Gamma(t)$ を次式

$$T(t) = \tau'(t) + i\tau''(t) = \tau'(t) + i\mathcal{H}\{\tau'(t)\} \quad (2)$$

$$\Gamma(t) = \gamma'(t) + i\gamma''(t) = \gamma'(t) + i\mathcal{H}\{\gamma'(t)\} \quad (3)$$

で定義している。ここに, 上付文字 $'$, $''$ はそれぞれ実部, 虚部を表し, \mathcal{H} はヒルベルト変換を表している。そして, これらの複素応力および複素ひずみの時刻歴を用いて, 式 (1) を書き換え

$$T(t) = G(t)\{1 + i2h(t)\}\Gamma(t) \quad (4)$$

としている。

神山の手法は, 式 (4) に基づき, 式 (2), (3) により算出される複素ひずみ $\Gamma(t)$, 複素応力 $T(t)$ をもちいることで複素剛性を

$$G(t)\{1 + i2h(t)\} = \frac{T(t)}{\Gamma(t)} \quad (5)$$

として求めるものである。

3. 神山の手法の妥当性の検討

(1) 問題設定

神山の手法の妥当性について理論的に検討するため、考慮すべき問題を設定する。

複素剛性を、2つの実関数 $G^r(t), G^i(t)$ を用いて

$$G(t)(1 + i2h(t)) = G^r(t) + iG^i(t) \quad (6)$$

とおき、これを用いて式(4)の右辺を書き下せば(時間の (t) は省く)、

$$G(t)(1 + i2h(t))\Gamma(t) = (G^r + iG^i)(\gamma^r + i\gamma^i) \quad (7)$$

$$= (G^r\gamma^r - G^i\gamma^i) + i(G^r\gamma^i + G^i\gamma^r) \quad (8)$$

となる。すなわち式(4)が成立するためには、式(8)の第1項で表される実部と第2項で表される虚部が、式(2)で示されるようにヒルベルト変換の関係をみたしていなければならない。つまり、

$$G^r\gamma^i + G^i\gamma^r = \mathcal{H}(G^r\gamma^r - G^i\gamma^i) \quad (9)$$

$$= \mathcal{H}(G^r\gamma^r) - \mathcal{H}(G^i\gamma^i) \quad (10)$$

とならなければならない。

一方、ヒルベルト変換の性質より

$$\mathcal{H}(\gamma^i) = \mathcal{H}(\mathcal{H}(\gamma^r)) = -\gamma^r \quad (11)$$

となることを用いると式(9)の左辺は

$$G^r\gamma^i + G^i\gamma^r = G^r\mathcal{H}(\gamma^r) - G^i\mathcal{H}(\gamma^i). \quad (12)$$

と書ける。

式(10),(12)より、任意の $G(t), h(t)$ について式(4)が成立するためには、任意の G^r, G^i について、

$$\mathcal{H}(G^r\gamma^r) = G^r\mathcal{H}(\gamma^r) \quad (13)$$

$$\mathcal{H}(G^i\gamma^i) = G^i\mathcal{H}(\gamma^i) \quad (14)$$

となる必要がある。

一方、任意の G^r, γ^r について式(13)が成立するならば、任意の G^i, γ^i について式(14)が成立し、また、式(4)も成立する。

よって、任意の G^r, γ^r について式(13)が成立することは、式(4)が成立するための必要十分条件である。したがって、以下では、式(13)について検討する。

(2) 理論的検討

$G^r(t), \gamma^r(t)$ は、一般性を失うことなく、

$$G^r(t) = \int_0^\infty \hat{G}^r(\Omega) \cos(\Omega t + \Phi(\Omega)) d\Omega \quad (15)$$

$$\gamma^r(t) = \int_0^\infty \hat{\gamma}^r(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega \quad (16)$$

とかける。ここで $\hat{G}^r(\Omega), \hat{\gamma}^r(\omega)$ は、フーリエ振幅を表す。また、 $\Phi(\Omega), \phi(\omega)$ は位相角をあらわし、これらは、以下では簡単に Φ, ϕ と記す。

γ の虚部をヒルベルト変換により求めると、付録Iに示す \cos 関数のヒルベルト変換を表す式(1.3)を用いて、

$$\mathcal{H}(\gamma^r) = \int_0^\infty \hat{\gamma}^r(\omega) \sin(\omega t + \phi) d\omega \quad (17)$$

と与えられる。また、

$$\begin{aligned} G^r(t)\gamma^r(t) &= \int_0^\infty \hat{G}^r(\Omega) \cos(\Omega t + \Phi) d\Omega \int_0^\infty \hat{\gamma}^r(\omega) \cos(\omega t + \phi) d\omega \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \hat{\gamma}^r(\omega) \hat{G}^r(\Omega) \cos(\Omega t + \Phi) \cos(\omega t + \phi) d\Omega d\omega \end{aligned} \quad (18)$$

となる。上式のヒルベルト変換は、その被積分関数が、式(1.8),(1.9)のように変換されることから、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(G^r(t)\gamma^r(t)) &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \hat{\gamma}^r(\omega) \hat{G}^r(\Omega) \cos(\Omega t + \Phi) \sin(\omega t + \phi) d\Omega \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \hat{\gamma}^r(\omega) \hat{G}^r(\Omega) \sin(\Omega t + \Phi) \cos(\omega t + \phi) d\Omega \right\} d\omega \end{aligned} \quad (19)$$

となる。

式(15),(17),(19)を考慮すると、式(13)が成立することは、

$$\begin{aligned} G^r\mathcal{H}(\gamma^r) - \mathcal{H}(G^r\gamma^r) &= \int_0^\infty \hat{\gamma}^r(\omega) \int_0^\infty \hat{G}^r(\Omega) \{ \cos(\Omega t + \Phi) \sin(\omega t + \phi) \\ &\quad - \sin(\Omega t + \Phi) \cos(\omega t + \phi) \} d\Omega d\omega \\ &= 2 \int_0^\infty \hat{\gamma}^r(\omega) \int_0^\infty \hat{G}^r(\Omega) \sin((\omega - \Omega)t + (\phi - \Phi)) d\Omega d\omega \\ &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

が成立することと同値であることが分かる。この式が、任意の $\hat{G}^r(\Omega), \Phi(\Omega)$ については成立しないことは明らかである。例えば、 $\omega_o, \Omega_o, \Phi_o$ (ただし、 $\omega_o < \Omega_o$) を定数とし、デルタ関数 $\delta(t)$ を用いて

$$\hat{\gamma}^r(\omega) = \delta(\omega - \omega_o) \quad (21)$$

$$\hat{G}^r(\omega) = \delta(\omega - \Omega_o) \quad (22)$$

$$\Phi(\Omega) = \phi(\omega) = \Phi_o \quad (23)$$

とすれば、

$$G^r\mathcal{H}(\gamma^r) - \mathcal{H}(G^r\gamma^r) = 2 \sin((\omega_o - \Omega_o)t) \neq 0 \quad (24)$$

となる。つまり、式(13)は、任意の $G'(t)$ については成立しない。したがって、一般には、式(5)では剛性や減衰定数を評価することはできないことがわかる。

以上より、剛性や減衰定数が時間変化する任意の問題に対して、神山の手法を用いることは必ずしも適切ではないことがわかる。

ただし、式(13)が成立する場合もある。例えば、ある ω_0 が存在し、

$$\hat{\gamma}^r(\omega) = 0 \quad \text{for } \omega \leq \omega_0 \quad (25)$$

$$\hat{G}^r(\Omega) = 0 \quad \text{for } \Omega \geq \omega_0 \quad (26)$$

となるとき、式(20)において、 ω の積分範囲を $[\omega_0, \infty)$ に変えてよく、また、この時 Ω の積分範囲 $[\omega, \infty)$ においては常に $\Omega \geq \omega_0$ となることに注意すると、

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(G^r \gamma^r) - G^r \mathcal{H}(\gamma^r) \\ &= 2 \int_{\omega_0}^{\infty} \hat{\gamma}^r(\omega) \int_{\omega > \omega_0}^{\infty} \hat{G}^r(\Omega) \sin((\omega - \Omega)t + (\phi - \Phi)) d\Omega d\omega \\ &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

が成立する。

すなわち、剛性等に含まれる最も低い周波数の値が、ひずみの時刻歴を構成する最も高い周波数の値よりも高い場合等には、神山の手法でその剛性等を評価できることがわかる。

しかし、一般には、 $\gamma(t)$ の周波数範囲は有界ではないので $\omega > \omega_0 > 0$ となる ω_0 は存在しない。式(13)つまり式(4)が成立するのは、 $\omega_0 = 0$ のときのみである。この時、 $\Omega = 0$ となり、 $G^r(t)$ は時間変化しない。つまり、神山の手法が厳密に適用できるのは、事実上、剛性や減衰が時間変化しない定数の場合のみであることになる。

神山、吉田¹⁾は、提案する手法の理論的妥当性を示すために、剛性が時間的変化を持たず、入力が単一の周波数成分のみを有する正弦波である場合についての結果を示している。この例は、上記の場合に相当するものである。したがって、そこに示されている例では真値が得られているが、それは神山の手法の一般的な妥当性を示すものではない。

(3) 問題点の具体例

式(25),(26)を満たす ω_0 が存在しない場合の神山の手法の問題点を、具体的な例を用いて示す。問題を簡単にするため特定の周波数成分 Ω と ω に着目し

$$G^r(t) = 2 \cos(\Omega t + \Phi) \quad (28)$$

$$\gamma^r(t) = \cos(\omega t + \phi) \quad (29)$$

として、

$$\begin{aligned} \tau^r(t) &= G^r(t) \gamma^r(t) \\ &= 2 \cos(\Omega t + \Phi) \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (30)$$

を考える。

付録 I に示す \cos 関数の積で与えられる関数のヒルベルト変換を表す式(1.8),(1.9)を用いると、式(30)のヒルベルト変換は、
 $\omega > \Omega$ のとき

$$\mathcal{H}(\tau^r(t)) = 2 \cos(\Omega t + \Phi) \sin(\omega t + \phi) \quad (31)$$

$\omega < \Omega$ のとき

$$\mathcal{H}(\tau^r(t)) = 2 \sin(\Omega t + \Phi) \cos(\omega t + \phi) \quad (32)$$

となる。

したがって、式(30)について、式(13)が成立するのは、 $\omega > \Omega$ のときのみである。

例として減衰が無い場合を考える。すなわち、

$$G^r(t) = 0 \quad (33)$$

とする。

まず、 $\omega \geq \Omega$ のときについて考える。ヒルベルト変換により求めた虚部も考慮することにより、

$$\begin{aligned} T(t) &= \exp i\{(\omega + \Omega)t + \phi + \Phi\} \\ &\quad + \exp i\{(\omega - \Omega)t + \phi - \Phi\} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\Gamma(t) = \exp i(\omega t + \phi) \quad (35)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{T(t)}{\Gamma(t)} &= \exp i(\Omega t + \Phi) + \exp[-i(\Omega t + \Phi)] \\ &= 2 \cos(\Omega t + \Phi) \end{aligned} \quad (36)$$

となり真値が得られる。

次に、 $\omega < \Omega$ のときについて考える。この時、ヒルベルト変換により求めた虚部も考慮することにより、

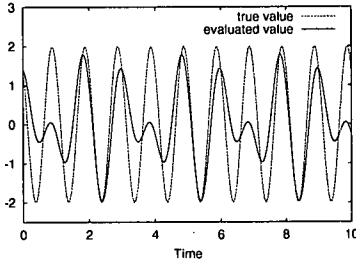
$$\begin{aligned} T(t) &= \exp i\{(\omega + \Omega)t + \phi + \Phi\} \\ &\quad + \exp i\{(\Omega - \omega)t + \Phi - \phi\} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\Gamma(t) = \exp i(\omega t + \phi) \quad (38)$$

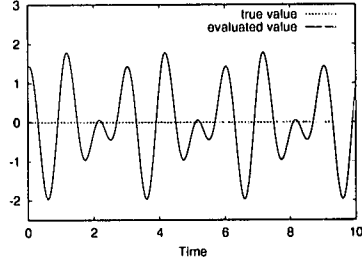
となる。よって、式(5)は真値 $G(t) = 2 \cos(\Omega t + \Phi)$ を与えず、

$$G(t) = \exp i(\Omega t + \Phi) + \exp i\{(\Omega - 2\omega)t + \Phi - 2\phi\} \quad (39)$$

なる誤った解を与える。すなわち、虚部を有するため、本来無かったはずの減衰の値を与えている。また、 ω, ϕ



(a) 実部



(b) 虚部

図-1 剛性の真値と評価値の時刻歴の比較

という入力波の特性を示すパラメタを含んでおり、剛性が入力波依存になっている。さらに、 $\Omega - 2\omega$ なる、真値には存在しない周波数成分も含んでいる。したがって、 $\omega < \Omega$ の場合 $G(t)$ の正確な評価はできない。

例として、 $\Omega = 2\pi, \Phi = \pi/4, \omega = 2\pi/1.2, \phi = 0$ とした場合の剛性の真値と、推定された値の時刻歴の比較を図-1に示す。同図から、両者は明らかに異なる値を示していることが分かる。

4. 近似評価手法としての適用性

(1) 理論的考察

前章において、神山の手法は、特定の条件を満たす場合以外には真値を厳密には評価できないことが示された。しかし、その条件を近似的に満たす場合、すなわち、ある ω_0 が存在し、

$$\hat{\gamma}^r(\omega) \approx 0 \quad \text{for } \omega \leq \omega_0 \quad (40)$$

$$\hat{G}^r(\Omega) \approx 0 \quad \text{for } \Omega \geq \omega_0 \quad (41)$$

となる場合には近似的に妥当な解を与えることも予想される。この条件は、剛性の時間変化が、応力やひずみの時間変化に比較して緩やかであることを意味する。実現象には、この条件を近似的に満たすものも多く、本手法がそのような現象に対して適用可能であるならば、その有用性は高いと考えられる。そこで、本章では、神山の手法が、上記条件を満たさない場合にどの程度の精度で剛性を評価することが可能なのか検討する。

式(15),(16)にくわえ、剛性の虚部を

$$G^i(t) = \int_0^\infty \hat{G}^i(\Omega) \cos(\Omega t + \eta(\Omega)) d\Omega \quad (42)$$

と仮定する。この時、応力の実部 $\tau^r(t)$ は、 \Re で実部を

表すとして

$$\begin{aligned} \tau^r(t) &= \Re \{ (G(t)\gamma(t)) \} \\ &= \Re \left\{ \int_0^\infty \hat{G}^r(\Omega) \cos(\Omega t + \Phi) + i\hat{G}^i(\Omega) \cos(\Omega t + \eta) d\Omega \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^\infty \hat{\gamma}^r(\omega) \exp(i\omega t + \phi) d\omega \right\} \\ &= \int_0^\infty \hat{\gamma}^r(\omega) \int_0^\infty \hat{G}^r(\Omega) \cos(\Omega t + \Phi) \cos(\omega t + \phi) \\ &\quad - \hat{G}^i(\Omega) \cos(\Omega t + \eta) \sin(\omega t + \phi) d\Omega d\omega \quad (43) \end{aligned}$$

と与えられる。ヒルベルト変換で虚部を算出してこれを加えると

$$\begin{aligned} T(t) &= \tau^r + i\mathcal{H}(\tau^r) \\ &= \int_0^\infty \hat{\gamma}^r(\omega) \left\{ \int_0^\omega \hat{G}^r(\Omega) \cos(\Omega t + \Phi) \exp(i\omega t + \phi) \right. \\ &\quad \left. + i\hat{G}^i(\Omega) \cos(\Omega t + \eta) \exp(i\omega t + \phi) d\Omega \right. \\ &\quad \left. + \int_\omega^\infty \hat{G}^r(\Omega) \exp(i\Omega t + \Phi) \cos(\omega t + \phi) \right. \\ &\quad \left. - \hat{G}^i(\Omega) \exp(i\Omega t + \eta) \sin(\omega t + \phi) d\Omega \right\} d\omega \\ &= \int_0^\infty \hat{\gamma}^r(\omega) \left\{ \int_0^\infty \hat{G}^r(\Omega) \cos(\Omega t + \Phi) \exp(i\omega t + \phi) \right. \\ &\quad \left. + i\hat{G}^i(\Omega) \cos(\Omega t + \eta) \exp(i\omega t + \phi) d\Omega \right\} d\omega \\ &\quad - \int_0^\infty \hat{\gamma}^r(\omega) \left\{ \int_\omega^\infty \hat{G}^r(\Omega) \cos(\Omega t + \Phi) \exp(i\omega t + \phi) \right. \\ &\quad \left. + i\hat{G}^i(\Omega) \cos(\Omega t + \eta) \exp(i\omega t + \phi) d\Omega \right\} d\omega \\ &\quad + \int_0^\infty \hat{\gamma}^r(\omega) \left\{ \int_\omega^\infty \hat{G}^r(\Omega) \exp(i\Omega t + \Phi) \cos(\omega t + \phi) \right. \\ &\quad \left. - \hat{G}^i(\Omega) \exp(i\Omega t + \eta) \sin(\omega t + \phi) d\Omega \right\} d\omega \\ &= \int_0^\infty \hat{\gamma}^r(\omega) \left\{ \int_0^\infty \hat{G}^r(\Omega) \cos(\Omega t + \Phi) \exp(i\omega t + \phi) \right. \\ &\quad \left. + i\hat{G}^i(\Omega) \cos(\Omega t + \eta) \exp(i\omega t + \phi) d\Omega \right\} d\omega \\ &\quad + i \int_0^\infty \hat{\gamma}^r(\omega) \left\{ \int_\omega^\infty \hat{G}^r(\Omega) \sin((\Omega - \omega)t + \Phi - \phi) \right. \\ &\quad \left. - \hat{G}^i(\Omega) \cos(\Omega - \omega)t + \eta - \phi) d\Omega d\omega \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \hat{G}^r(\Omega) \cos(\Omega t + \Phi) + i\hat{G}^i(\Omega) \cos(\Omega t + \eta) d\Omega \\
&\times \int_0^{\infty} \hat{\gamma}^r(\omega) \exp(i\omega t + \phi) d\omega \\
&+ i \int_0^{\infty} \hat{\gamma}^r(\omega) \int_{\omega}^{\infty} \hat{G}^r(\Omega) \sin[(\Omega - \omega)t + \Phi - \phi] \\
&- \hat{G}^i(\Omega) \cos[(\Omega - \omega)t + \eta - \phi] d\Omega d\omega \quad (44)
\end{aligned}$$

となる。式(44)の第1項は、

$$(G^r + iG^i)(\gamma + i\mathcal{H}(\gamma)) \quad (45)$$

の形になっている。したがって、式(5)により剛性を評価すると、第1項は真値を与え、第2項に起因するものが真値との差 $\varepsilon(t)$ となる。すなわち、

$$\varepsilon(t) = \frac{i \int_0^{\infty} \hat{\gamma}^r(\omega) \int_{\omega}^{\infty} E(t, \Omega, \omega) d\Omega d\omega}{\int_0^{\infty} \hat{\gamma}^r(\omega) \exp i(\omega t + \phi) d\omega} \quad (46)$$

ただし、

$$E(t, \Omega, \omega) = \hat{G}^r(\Omega) \sin \theta_1 - \hat{G}^i(\Omega) \cos \theta_2 \quad (47)$$

$$\theta_1 = (\Omega - \omega)t + \Phi - \phi \quad (48)$$

$$\theta_2 = (\Omega - \omega)t + \eta - \phi \quad (49)$$

となる。

ひずみの時刻歴が、ほぼ高周波数成分のみを有し、剛性がほぼ低周波成分のみから構成される場合を考える。ここでは、状況を簡単にするため、 ω_0, μ という定数を用いて、 $\omega < \omega_0$ においては $\hat{\gamma}^r(\omega)$ を μ 倍にし、 $\Omega > \omega_0$ においては $\hat{G}^r(\Omega), \hat{G}^i(\Omega)$ を μ 倍にすることを考える。 μ を小さく ($\mu \ll 1$) することにより、剛性やダンピングは ω_0 よりも高周波で μ 倍に、また、ひずみの時刻歴は、 ω_0 よりも低周波で μ 倍になる。この時、

{ $\varepsilon(t)$ の分子 }

$$\begin{aligned}
&= i \int_0^{\omega_0} \left\{ \mu \hat{\gamma}^r(\omega) \int_{\omega}^{\omega_0} E(t, \Omega, \omega) d\Omega \right. \\
&\quad \left. + \int_{\omega_0}^{\infty} \mu E(t, \Omega, \omega) d\Omega \right\} d\omega \\
&+ i \int_{\omega_0}^{\infty} \hat{\gamma}^r(\omega) \int_{\omega}^{\infty} \mu E(t, \Omega, \omega) d\Omega d\omega \quad (50)
\end{aligned}$$

{ $\varepsilon(t)$ の分母 }

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\omega_0} \mu \hat{\gamma}^r(\omega) \exp i(\omega t + \phi) d\omega \\
&\quad + \int_{\omega_0}^{\infty} \hat{\gamma}^r(\omega) \exp i(\omega t + \phi) d\omega \quad (51)
\end{aligned}$$

となる。分子はすべての項で μ が一次以上乗じられているが、分母の第2項には、 μ は乗じられていない。これより、 $\varepsilon(t) = O(\mu)$ であり、 μ が小さいとき、その影響は無視できるものになることが分かる。

(2) 数値計算例

前節で、神山の手法が近似解を評価する手法として用いる事を示した。本節では、具体的な評価の精度について、数値計算例を用いて検討する。以下に、検討したケースの概要及び検討結果について述べる。

a) 検討したケース

神山の手法の適用性について検討するため、表-1 に示す6ケースについて数値解析を行った。ケース1~3は、3.章で示した神山の手法が真値を与えるための条件(式(25),(26)を満たす ω_0 が存在すること)が近似的に満たされている場合の、神山の手法の適用性について検討するものである。また、ケース4~6は、実際的な状況も想定し、式(25),(26)を満たす ω_0 の値が未知の場合における神山の手法の適用性を調べるためのものである。以下に、各検討ケースについて簡潔に記す。なお、解析に用いた波形については後述する。

ケース1: 本ケースでは、ひずみは1Hz以上の短周期成分のみから成り、また、剛性は1Hz以下の長周期成分のみから成る。したがって、神山の方法が真値を与えるための条件は満たされている。

ケース2: ケース2では、ひずみは1Hz以下の長周期成分、剛性は1Hz以上の短周期成分をそれぞれ含むため、上記の条件は満たされていない。しかし、剛性の1Hz以上の成分はかなり小さくなっており、式(25),(26)は近似的に満たされていると考えられる。

ケース3: ケース3では、ケース2と同様にひずみは1Hz以下、剛性は1Hz以上の振動数成分を含み、上記の条件は満たされていない。また、剛性の1Hz以上の成分も小さい値ではないため、神山の手法の適用性が低いと考えられるケースである。

ケース4: ケース4は、より現実的な場合を想定したものである。実際に観測されるひずみや応力の長周期成分には少なからぬノイズが混入している。ここでは、そのような場合に剛性を推定する方法として、ひずみ及び応力から低周波成分を除去し、これに神山の手法を適用する。具体的な手順は以下の通りである。まず、上記のケース2で用いた応力の時刻歴から1Hz以下の成分を除去する。これを、1Hz以下の成分を除去したひずみで除すことにより複素剛性の時刻歴を算出する。この剛性をケース2で用いた剛性の時刻歴と比較することにより上記の手法の妥当性について調べることができる。

ケース5,6: ケース5及び6は、ケース4で示した方法を、剛性の主たる周波数帯が明らかでない場合に適用することを想定したものである。ケース4で用いる剛性は主に1Hz以下の成分から構成されるものであり、ひずみや応力にも1Hzを遮断周波数としたフィル

表-1 検討したケース

ケース	ひずみ		剛性		応力	
	短周期	長周期	短周期	長周期	短周期	長周期
1	○	—	—	○	○	○
2	○	○	△	○	○	○
3	○	○	○	○	○	○
4	○	$Q_L(1\text{ Hz})$	△	○	○	$Q_L(1\text{ Hz})$
5	○	$Q_L(2\text{ Hz})$	△	○	○	$Q_L(2\text{ Hz})$
6	○	$Q_L(0.5\text{ Hz})$	△	○	○	$Q_L(0.5\text{ Hz})$

○ : 元波形の成分.

△ : 元波形の成分の 0.1 倍.

— : 該当する周期帯成分を含まない.

$Q_L(n\text{ Hz})$: 応力を計算する段階では元波形の成分を有するが、剛性を推定する段階では $n\text{ Hz}$ 以上の成分を除去する.

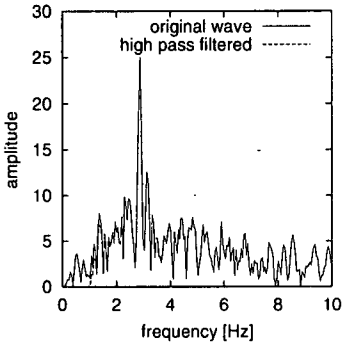


図-2 数値計算例で用いたひずみのフーリエ振幅スペクトル

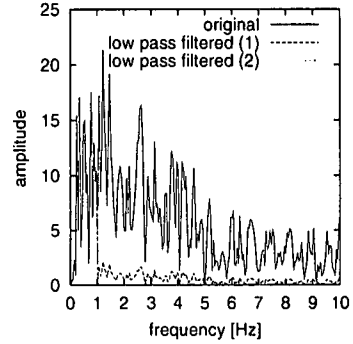
タを施している。しかし、実際にはこのような適切な遮断周波数を設定できないことも想定される。そこで、ケース 5 及び 6 では、それぞれ遮断周波数を 2Hz 及び 0.5Hz としたフィルタをひずみ及び応力に施し、これらを用いて剛性を推定し、それを真値と比較する。

最後に、本検討で用いた波形について述べる。

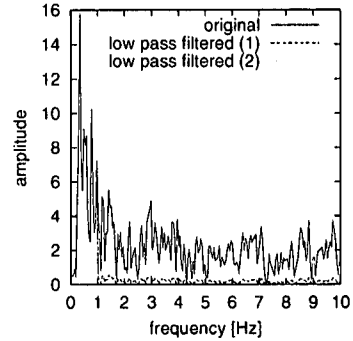
まず、ひずみの時刻歴の実部としては、兵庫県南部地震においてポートアイランド（地中 34m, NS 成分）で記録された地震波形を用いる。なお、虚部に実部のヒルベルト変換を与える計算は付録 II に示す方法で行う。また、この記録に、1Hz 以下の低振動数領域を除去するハイパスフィルタを作用させた時刻歴（「調整ひずみ」）も用いる。これらの記録のフーリエ振幅スペクトルを図-2 に示す。

複素剛性には図-3 に示される振幅特性を有する既知の時間変化を与える。また、1Hz 以上の振動数帯の値を 0.1 倍した複素剛性、及び同振動数帯の値を除去した複素剛性（それぞれ「調整剛性(1)」, 「調整剛性(2)」とする）も用いる。これらのフーリエ振幅スペクトルを図-3 に示す。

なお、これらのひずみや複素剛性は計算例のために



(a) 実部



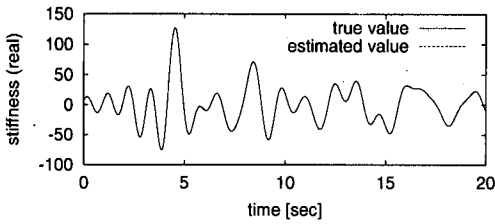
(b) 虚部

図-3 数値計算例で用いた複素剛性のフーリエ振幅スペクトル

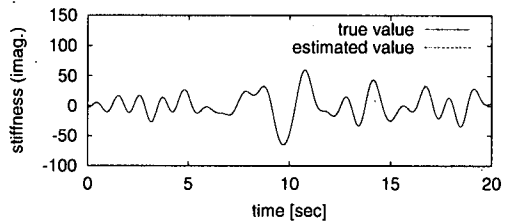
便宜的に用いるものであり、単位やその絶対的な値に物理的な意味はなく、対象としている系の周波数特性や因果性等についても具体的なものを想定したものではない。

b) 検討結果

ケース 1: 図-4 に、ケース 1 に対して神山の手法を適用して得られた複素剛性の時刻歴を示す。同図より、真値と評価値は完全に一致していることが分かる。この結果は、剛性の周波数成分と、ひずみの周波数成分



(a) 実部



(b) 虚部

図-4 複素剛性の真値と評価値の時刻歴の比較 (ケース1)

に重複が無い場合には、評価された複素剛性は真値と一致することを示しており、これは3.章で示された条件(式(25),(26)参照)が正しいことを示すものである。

ケース2: ケース2において得られた複素剛性の時刻歴を図-5に示す。同図においては、真値と評価値には若干の誤差が見られており、ただし、誤差は、パルスノイズのような形状を有する比較的小さいものとなっている。これは、剛性の周波数成分とひずみの周波数成分に重複がある場合には、評価された複素剛性に真値からの乖離が生じるが、重複の程度が小さい場合には誤差の程度も小さいという(1)節での結論を支持する結果である。

パルスノイズの影響を考慮するため、評価値からローパスフィルタにより1Hz以上を除去した剛性の時刻歴と真値との比較を図-6に示す。同図より、パルスノイズを除去することにより、複素剛性の真値をおおむね再現できる結果となっていることが分かる。

また、実際の問題では、複素剛性は式(1)における剛性 $G(t)$ 及び減衰定数 $h(t)$ で評価されることが多いので、これらの時刻歴について、真値と推定値の比較を行った。結果を図-7に示す。減衰定数 h については、変動範囲が $-\infty$ から ∞ と大きいため、ここでは値域を -1 から 1 に限り、 -1 以下の時は -1 、 1 以上の時は 1 としてプロットした。また、時刻5秒から10秒までの5秒間についてのみプロットした。本ケースにおいては、両者とも概ね評価できていることが分かる。なお、本論文で扱っている複素剛性は物理的根拠を設けずに設定したものであるため、減衰定数 h は負の値をとりうるものとなっている。

ケース3: ケース3において得られた複素剛性の時刻歴を図-8に示す。同ケースは、剛性の周波数成分とひずみの周波数成分に少なからぬ重複があるため、評価された複素剛性は、真値と大きく異なるものとなっている。

図-9に、複素剛性の評価値に1Hz以上を除去するローパスフィルタを施したものと真値との比較を示す。剛性の評価値は真値の傾向を捕らえているといえよう

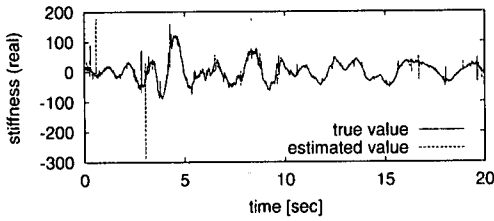
が、その精度はケース2に比較してかなり低い。ケース2と同様に式(1)における剛性 $G(t)$ 及び減衰定数 $h(t)$ の時刻歴の真値と推定値の比較結果を図-10に示す。推定値は1Hz以上を除去するローパスフィルタを施した値を示す。減衰定数 h は時刻5秒から10秒までの5秒間についてのみ示す。同図より、本ケースにおいては、ケース2に比較して誤差がはるかに大きいことが分かる。

ケース4: ケース4において算出された複素剛性には、パルスのようなノイズが多数含まれているため、ローパスフィルタにより1Hz以上のノイズを除去した。さらに、実際の検討に置いて重要となる剛性 $G(t)$ 及び減衰定数 $h(t)$ に換算した値の時刻歴を真値と比較した結果を図-11に示す。これより、神山の手法により真値を概ね評価できていることが分かる。

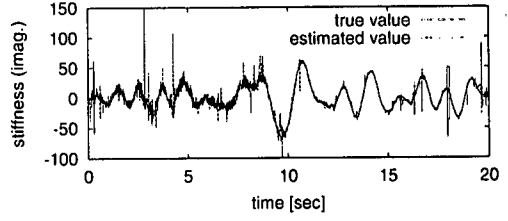
ケース5,6: ケース5及び6において算出された複素剛性にも、パルスのようなノイズが多数含まれている。したがって、それぞれ2Hz及び0.5Hzの遮断周波数を有するローパスフィルタによりノイズを除去した。これにより算出された複素剛性を剛性 $G(t)$ 及び減衰定数 $h(t)$ に換算した値の時刻歴を真値と比較した結果を図-12に示す。これらのケースにおいては、ケース4に比較して推定精度が低下している。特に、遮断周波数を低く0.5Hzに設定したケース6においては真値から大きく乖離した値を与えている。

以上より、神山の手法は式(25),(26)を近似的にみただす ω_0 が存在する場合には、真値を近似的に評価できる手法であること、及び、この条件を満たしていない場合には真値と大きく異なる値を与える可能性があることが分かる。

したがって、神山の手法により複素剛性の時間的変化を検討した場合には、観測記録や、求められた複素剛性の周波数特性を考慮して、式(25),(26)が近似的に満たされていることを確認することが重要であろう。

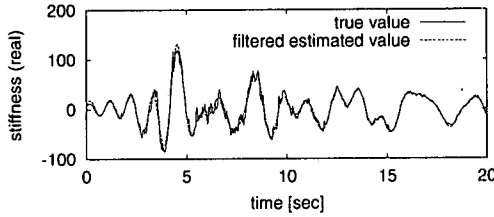


(a) 実部

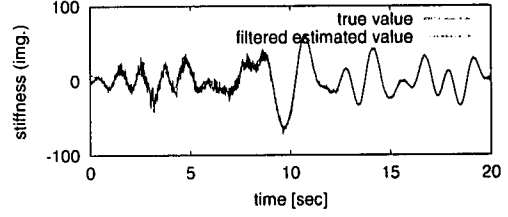


(b) 虚部

図-5 複素剛性の真値と評価値の時刻歴の比較 (ケース2)

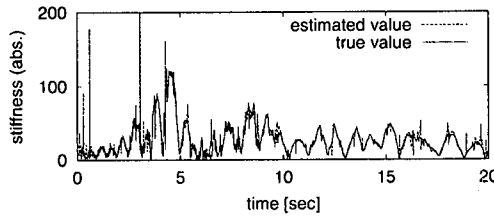


(a) 実部

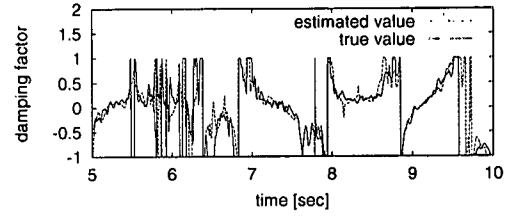


(b) 虚部

図-6 複素剛性の真値とローパスフィルタを作用させた評価値の時刻歴の比較 (ケース2, フィルタ有り)



(a) 剛性 $G(t)$



(b) 減衰定数 $h(t)$

図-7 剛性 G と減衰 h についての、真値とローパスフィルタを作用させた評価値の時刻歴の比較 (ケース2, フィルタ有り)

5. おわりに

神山らの提案しているひずみ及び応力の時刻歴の complex envelope を用いて複素剛性の時間的変化を評価する手法について、その妥当性、適用性の限界について理論的、数値解析的に検討した。その結果として以下の知見が得られた。

- 一般には、神山の手法により複素剛性の時刻歴の真値は得られない。
- 剛性 $G(t)$ とひずみ $\gamma(t)$ について、ある ω_0 が存在し、

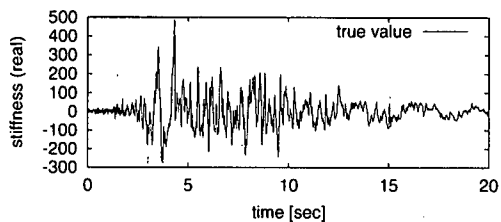
$$\hat{\gamma}(\omega) = 0 \quad \text{for } \omega \leq \omega_0$$

$$\hat{G}(\Omega) = 0 \quad \text{for } \Omega \geq \omega_0$$

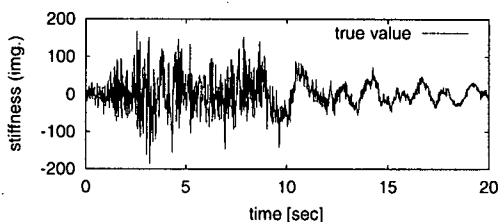
が成立する場合には、神山の手法により真値を得ることが可能である。(“ $\hat{\cdot}$ ”はフーリエ振幅を表す。)

- 神山の手法は、上記条件が近似的に満たされる場合には、複素剛性を近似的に評価できる。ただし、実際の観測記録に適用する場合には、上記の条件が近似的に満たされているかを検証する必要がある。

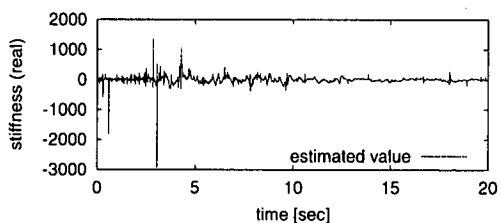
なお、本論文で、真値を与える条件が近似的のみに満たされている場合の神山の手法の適用性を示すために行った数値解析例は非常に限られたものである。したがって、近似評価手法としての適用性を詳細に議論するためには一層の検討が必要であり、これは今後の課題である。



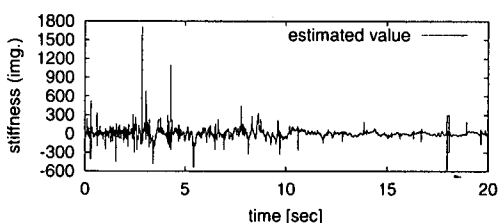
(a) 実部, 真値



(b) 虚部, 真値

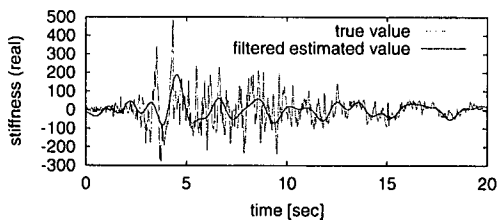


(c) 実部, 評価値

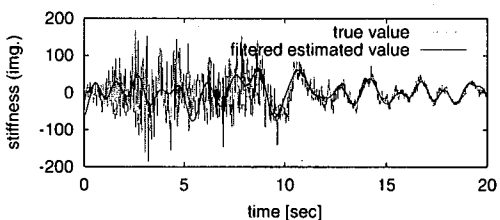


(d) 虚部, 評価値

図-8 複素剛性の真値と評価値の時刻歴の比較 (ケース 3)

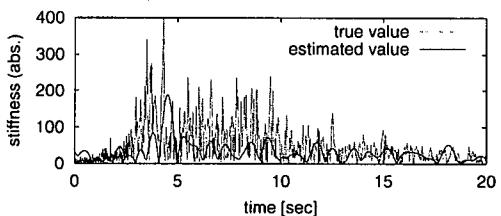


(a) 実部

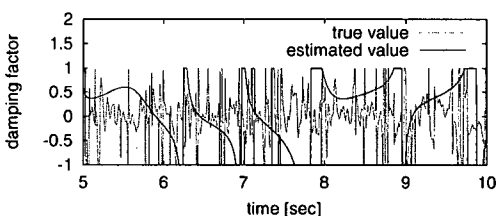


(b) 虚部

図-9 複素剛性の真値とローパスフィルタを作用させた評価値の時刻歴の比較 (ケース 3, フィルタ有り)



(a) 剛性 $G(t)$



(b) 減衰定数 h

図-10 剛性 G と減衰 h についての, 真値とローパスフィルタを作用させた評価値の時刻歴の比較 (ケース 3, フィルタ有り)

付録 I 三角関数のヒルベルト変換

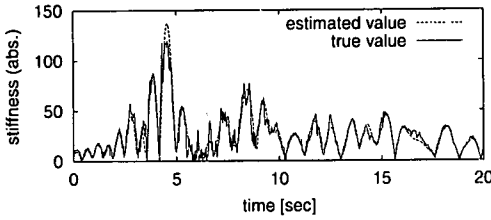
三角関数のヒルベルト変換は,

$$\mathcal{H}\{\cos(\omega t)\} = \sin(|\omega|t) \quad (I.1)$$

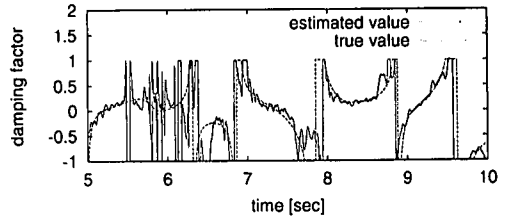
$$\mathcal{H}\{\sin(\omega t)\} = \mp \cos(|\omega|t) \quad (I.2)$$

三角関数及びその積のヒルベルト変換について簡単に整理する。ヒルベルト変換は, complex envelope の評価のほか, 時系列信号の因果性の考慮等^{5),6),7),8)}においても広く用いられている。

(\mp は, ω の正負に依る。すなわち $-\text{sgn}(\omega)$) で与えら

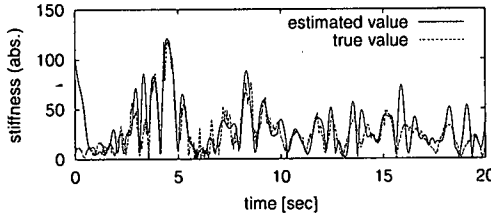


(a) 剛性 $G(t)$

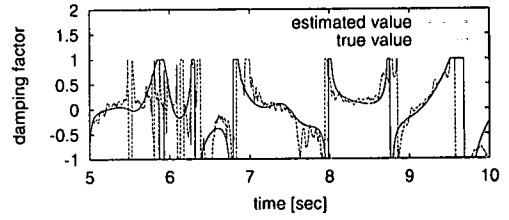


(b) 減衰定数 h

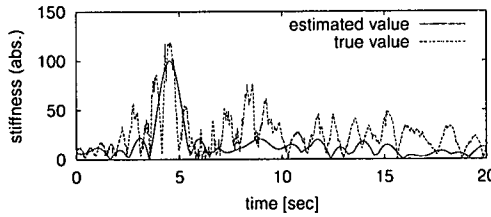
図-11 剛性 G と減衰 h についての、真値とローパスフィルタを作用させた評価値の時刻歴の比較 (ケース 4, フィルタ有り)



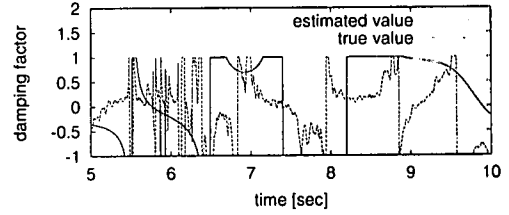
(a) 剛性 $G(t)$, ケース 5



(b) 減衰定数 $h(t)$, ケース 5



(c) 剛性 $G(t)$, ケース 6



(d) 減衰定数 $h(t)$, ケース 6

図-12 剛性 G と減衰 h についての、真値とローパスフィルタを作用させた評価値の時刻歴の比較 (ケース 5 及び 6, フィルタ有り)

れる。これより、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\{\cos(pt + q)\} &= \mathcal{H}\{\cos(pt)\cos(q) - \sin(pt)\sin(q)\} \\ &= \sin(|p|t)\cos(q) \pm \cos(|p|t)\sin(q) \\ &= \sin(|p|t \pm q) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\{\sin(pt + q)\} &= \mathcal{H}\{\sin(pt)\cos(q) + \cos(pt)\sin(q)\} \\ &= \mp \cos(|p|t)\cos(q) + \cos(|p|t)\sin(q) \\ &= \mp \cos(|p|t \pm q) \\ &= \mp \cos(pt + q) \end{aligned} \quad (1.4)$$

(\mp は p の正負に依る。すなわち $-\text{sgn}(p)$) であることが導かれる。

また、 \cos 関数の積については、以下のように求められる。今、関数 $f(t)$ を

$$f(t) = \cos(\Omega t + \Phi)\cos(\omega t + \phi) \quad (1.5)$$

とおくと、 $f(t)$ は、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \cos\{(\omega + \Omega)t + (\phi + \Phi)\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos\{(\omega - \Omega)t + (\phi - \Phi)\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

と変形できる。ここで、 \cos 関数のヒルベルト変換が、式(1.3)であることを用いて、式(1.6)のヒルベルト変換を求めると、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\{f(t)\} &= \frac{1}{2} \sin\{(\omega + \Omega)t + (\phi + \Phi)\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin\{(\omega - \Omega)t \pm (\phi - \Phi)\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

(\pm は $\omega - \Omega$ の正負に依る。すなわち $\text{sgn}(\omega - \Omega)$) となる。したがって、式(1.5)のヒルベルト変換は、 $\omega > \Omega$ のとき

$$\mathcal{H}\{f(t)\} = \cos(\Omega t + \Phi)\sin(\omega t + \phi) \quad (1.8)$$

$\omega < \Omega$ のとき

$$\mathcal{H}\{f(t)\} = \sin(\Omega t + \Phi)\cos(\omega t + \phi) \quad (1.9)$$

となる。

また、 \cos 関数と \sin 関数の積については以下のようになる。関数 $f(t)$ を

$$f(t) = \cos(\Omega t + \Phi) \sin(\omega t + \phi) \quad (I.10)$$

とおくと、上と同様にして、 \sin 関数のヒルベルト変換が、式 (I.4) であることを用いて、式 (I.10) のヒルベルト変換を求めると、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\{f(t)\} &= -\frac{1}{2} \cos\{(\omega + \Omega)t + (\phi + \Phi)\} \\ &\mp \frac{1}{2} \cos\{(\omega - \Omega)t + (\phi - \Phi)\} \end{aligned} \quad (I.11)$$

(\mp は $\omega - \Omega$ の正負に依る。すなわち $-\text{sgn}(\omega - \Omega)$) となる。したがって、式 (I.10) のヒルベルト変換は、 $\omega > \Omega$ のとき

$$\mathcal{H}\{f(t)\} = -\cos(\Omega t + \Phi) \cos(\omega t + \phi) \quad (I.12)$$

$\omega < \Omega$ のとき

$$\mathcal{H}\{f(t)\} = \sin(\Omega t + \Phi) \sin(\omega t + \phi) \quad (I.13)$$

となる。

付録 II 実信号のヒルベルト変換

対象とする実関数を $s(t)$ とする。 $s(t)$ のヒルベルト変換は

$$\mathcal{H}\{s(t)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau = -\frac{1}{\pi} s(t) * \frac{1}{t} \quad (II.1)$$

となる。ここで、

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t}\right\} = \frac{i}{2} \text{sgn}(\omega) = \begin{cases} \frac{i}{2}, & \omega > 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ -\frac{i}{2}, & \omega < 0 \end{cases} \quad (II.2)$$

(\mathcal{F} はフーリエ変換を表す) であることを用い、時間領域での畳み込み積分が周波数領域での乗算に 2π を乗じたものになることを考慮すると、 $s(\tau) + i\mathcal{H}\{s(t)\}$ のフーリエ変換は、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{s(t) + i\mathcal{H}\{s(t)\}\} &= \hat{s}(\omega) + i \left(\frac{-1}{\pi}\right) 2\pi \hat{s}(\omega) \mathcal{F}\left\{\frac{1}{t}\right\} \\ &= \hat{s}(\omega) + \text{sgn}(\omega) \hat{s}(\omega) \\ &= \begin{cases} 2\hat{s}(\omega), & \omega > 0 \\ \hat{s}(\omega), & \omega = 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (II.3)$$

と与えられる。したがって、実信号のヒルベルト変換を虚部に与えた信号は式 (II.3) を逆フーリエ変換することにより得られる。

次に、実際の数値計算において必要となる離散信号の場合の計算手順について記す。

対象とする信号を、 Δt ごとの時間間隔での値 N 個 (N は 2 の累乗) からなる

$$s_n = s(t_n), \quad t_n = n\Delta t \quad (n = 0, \dots, N-1) \quad (II.4)$$

とする。FFT 等の手法により得られた離散フーリエ変換を

$$\begin{aligned} \hat{s}_n &= \mathcal{F}\{s(\omega_n)\}, \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{N\Delta t} \\ &(n = -N/2 + 1, \dots, N/2) \end{aligned} \quad (II.5)$$

とする。このとき、実部のヒルベルト変換を虚部に与えられた信号のフーリエ変換 $\hat{s}_n^H = \mathcal{F}\{s(t) + i\mathcal{H}\{s(t)\}\}$ は

$$\hat{s}_n^H = \begin{cases} \hat{s}_n & n = 0, N/2 \\ 2\hat{s}_n & n = 1, \dots, N/2 - 1 \\ 0 & n = -N/2 + 1, \dots, -1 \end{cases} \quad (II.6)$$

で与えられる。したがって、 $s(t) + i\mathcal{H}\{s(t)\}$ は、式 (II.6) で与えられる \hat{s}_n^H をフーリエ逆変換することによりえられる。

なお、式 (II.6) において、 $n = 0, N/2$ の場合に 2 が乗じられていないのは、次の理由による。 $n = 0$ の時は、上述の $\omega = 0$ に相当するため 2 を乗じる必要はない。また、 $n = N/2$ の時、対応する負の周波数成分 ($\hat{s}_{-N/2}$) は存在せず、(例えば、大崎による文献⁹⁾参照) その成分からの寄与がないためである。

参考文献

- 1) 神山 眞, 吉田 勝: 鉛直アレー強震記録による地盤剛性ならびにダンピングの非定常変動の解析, 土木学会論文集 No.647/I-51, pp.379-394, 2000.
- 2) 石原 研而: 土質動力学の基礎, 鹿島出版会, 1976.
- 3) 例えば, Ferry, J. D.: Viscoelastic Properties of Polymers (2nd Edition), John Wiley & Sons, 1970.
- 4) 大崎 順彦: 新・地震動スペクトル解析入門, 鹿島出版会, 1994.
- 5) 例えば, パボリス, A.: 工学のための応用フーリエ積分, オーム社, 1967.
- 6) Tomlinson, G. R.: Developments in the use of Hilbert Transform for Detecting and Quantifying Non-Linearity Associated with Frequency Response Functions, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol.1, No.2, pp.151-171, 1987.
- 7) Katukura, H. and Hayashi, Y.: Causal FFT Transient Applicable to Singularity Functions, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 31, pp.53-66, 1991.
- 8) Aki K. and Richards, P. G.: Quantitative Seismology, W. H. Freeman and Company, 1980.

(2000.9.5 受付)

APPLICABILITY OF THE NON-STATIONARY COMPLEX STIFFNESS ESTIMATION METHOD USING COMPLEX ENVELOPE

Riki HONDA and Sumio SAWADA

Kamiyama and Yoshida proposed a method to estimate the nonstationary variation of the stiffness from the time histories of strain and stress by using the complex envelope. They applied the method to the strong motion records of the 1995 Hyogoken Nanbu Earthquake. In this paper, the method is theoretically and numerically investigated and it is shown that in general the method does not give a precise value of the stiffness. It is, however, shown that under a condition that the strain does not include low frequency component and the stiffness does not include high frequency component, the method evaluates a correct value. It is also shown that even if the condition is not rigorously satisfied the method can give a good approximation of the true value of the stiffness.