

# 地盤の側方変位を受けている 単杭の座屈荷重に関する基礎的研究

三浦房紀<sup>1</sup>・朱媛媛<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 山口大学大学院教授 理工学研究科環境共生工学専攻 (〒755-8611 宇部市常盤台 2-16-1)

<sup>2</sup>工修 山口大学大学院理工学研究科 博士後期課程 (〒755-8611 宇部市常盤台 2-16-1)

液状化により側方移動を生じた地盤内にある杭は、地盤による強制的な変位と地盤の軟化によって、その安定性が大きく低下することが予想される。この種の問題を解くには、地盤の材料非線形性のみならず、杭の大変位を扱う必要があり、幾何学的非線形性を考慮に入れた解析が必要となる。そこで本論文はその第一歩として、杭先端および杭頭の境界条件が両端ヒンジ、杭先端ヒンジ—杭頭固定の場合について非線形の微分方程式を導き、その座屈荷重に及ぼす地盤の側方変位量の影響、さらに液状化の影響を地盤バネの低下で表すことによってその影響も調べた。その結果、地盤の側方変位は座屈荷重にはほとんど影響を及ぼさないこと、逆に地盤バネの低下は極めて大きな影響を及ぼすことが明らかになった。

**Key Words :** pile, stability analysis, buckling, critical load, nonlinear system

## 1. はじめに

地震による杭の被害は様々なパターンを呈しているが、その原因は上部工の慣性力によるものと地盤の変形によるものと大別される<sup>1), 2)</sup>。後者の場合の液状化による地盤の側方流動などのように特に地盤の変形が大きくなる場合には、杭の挙動は極めて複雑になる。すなわち、杭の材料非線形性および地盤の材料非線形性に加えて、杭の大変形に伴ういわゆる  $P-\Delta$  効果も現れてくるからである。

現在構造物の設計は限界状態設計へと向っており、杭基礎もその例外ではない<sup>3), 4)</sup>。このような観点からは、この  $P-\Delta$  効果を考慮に入れて杭基礎の安定性を検討しておくことが必要である。その一つに地盤変位を受ける杭の座屈荷重を明らかにすることも重要な検討項目として考えられる。具体的には厚い軟弱地盤中には数十メートルという長尺の杭が打設される。一方、長さはそれほどでなくとも最近注目を集めている杭径 300mm 以下の小口径杭であるマイクロパイル<sup>5)</sup>は、その細長比はかなり大きくなり、これらの杭については座屈荷重に関して十分な検討を行うことが必要になるものと思われる。

そこで、本研究ではまず地盤の側方変位を受ける杭の座屈荷重を理論的に求める。座屈荷重に関しては弾性の梁に対するオイラーの式が著名である。このオイラーの式から出発して、Mandel, Bjerrum らはウィンクラーバ

ネでモデル化した地盤内の杭に対して異なった境界条件の下に座屈荷重を求めている<sup>6), 7)</sup>。また Gouvenot は細長比が 50 以上の極めて細い杭に対して座屈荷重を理論的に求め、実験でこれを検証している<sup>8)</sup>。さらに Fleming らは地盤中の杭の座屈長に対して理論的な解析を行っている<sup>9)</sup>。しかしながら、これらの研究は地盤の側方変位の影響、すなわち杭の軸直角方向の初期変位は考慮に入れられていない。

そこで、本研究ではまず杭軸直角方向の変位を考慮に入れて杭の座屈荷重を求める微分方程式を誘導する。その際、杭の幾何学的非線形性を考慮に入れる必要があるため、方程式は非線形の微分方程式となる。杭周辺の地盤の影響は分布バネでモデル化する。本来は地盤バネも材料非線形性を呈するが、本研究では問題を簡単にするために、第一段階として線形弾性体と仮定する。

また、杭の境界条件も問題を簡単にするために、杭先端、杭頭ともにヒンジの場合、および杭先端ヒンジ—杭頭固定の二通りの場合を想定する。

支配方程式を導いた後、実在する杭の諸元を用いて、杭の座屈荷重に与える地盤の側方変位の影響を検討する。さらに液状化による影響を地盤バネの低減で表し、地盤バネの低減の割合が座屈荷重に及ぼす影響も調べる。

## 2. 支配方程式

実際には地盤の側方変位は時間とともに変化するが、ここでは杭の初期変位として与え、解析中は一定であると仮定する。この様な仮定の下で、杭の初期変位は Fig. 1 に示すように  $x$  方向、 $y$  方向にそれぞれ  $u_0(s)$ 、 $w_0(s)$  で与えられるものとする。ここに  $s$  は杭軸に沿った曲線座標である。外力  $P$  による変形が生じる前の初期状態における杭の存在範囲は次式で表される。

$$\Gamma_0 : \{(x, y) | x = s + u_0(s), y = w_0(s), 0 \leq s \leq l\}$$

ここに、 $l$  は杭長である。また  $\theta_0(s)$  は点  $C$  における杭の接線と  $x$  軸のなす角度である。

ここで、杭の微小長さ、 $ds$ 、の変形（初期  $C_0$  点から  $C$  点への変形）を考えると、Fig. 2 より次の幾何学的な関係が得られる。

$$\begin{cases} \cos \theta_0(s) = \frac{ds + du_0(s)}{ds} = 1 + u_0'(s) \\ \sin \theta_0(s) = \frac{dw_0(s)}{ds} = w_0'(s) \end{cases} \quad (1)$$

ここに、 $( )'$  は  $s$  軸に関する微分を意味する。式(1)は左辺に非線形項  $\cos \theta_0(s)$ 、 $\sin \theta_0(s)$  を含むので非線形であることを注意を要する。すなわち線形問題では  $\cos \theta_0 = 1 = 1 + u_0'(s) \Rightarrow u_0'(s) = 0$ 、 $\sin \theta_0(s) = \theta_0(s) = w_0'(s)$  となる。以後、誤解を招く恐れがない限り、表記を簡単にするために  $u_0(s)$ 、 $w_0(s)$  など  $u_0$ 、 $w_0$  と表すことにする。

$q(s)$  を単位長さあたりの点  $s$  における地盤からの反力とし、 $s = l$ 、すなわち杭頭で外力  $P$  が  $x$  軸に平行に作用するものとする。この外力が作用することによって杭の任意の点  $C(s + u_0, w_0)$  は  $C'(s + u_0 + u, w_0 + w)$  へと移動する。このときの杭の変形後の存在範囲は次式で与えられる。

$$\Gamma : \{(x, y) | x = s + u_0 + u, y = w_0 + w, 0 \leq s \leq l\}$$

ここに、 $u$ 、 $w$  は外力  $P$  による  $x$ 、 $y$  方向の変位である。

### (1) 幾何学的関係

外力  $P$  による変形が生じた後の幾何学的な関係は、式(1)と同様に次の式(2)で与えられる。

$$\begin{cases} \cos \theta = 1 + u_0' + u' = \cos \theta_0 + u' \\ \sin \theta = w_0' + w' = \sin \theta_0 + w' \end{cases} \quad (2)$$

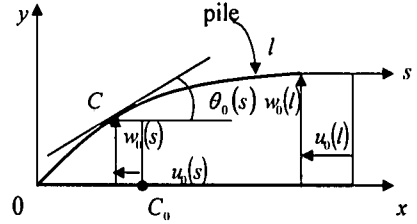


Fig. 1 Initial deformation of a pile and the coordinate systems

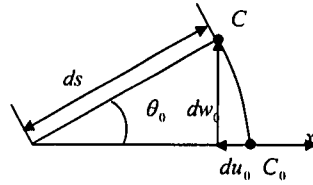


Fig. 2 Geometric relation of the infinitesimal pile length at the initial state

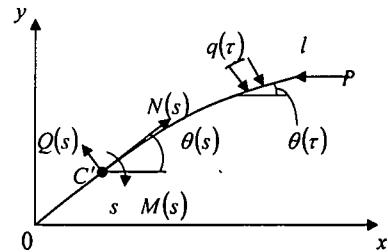


Fig. 3 Notations of pile after deformation due to axial external force  $P$

ここに、 $\theta(s)$  は  $s$  点における杭の接線と  $x$  軸のなす角である (Fig. 3 参照)。

### (2) つり合い方程式

地盤からの反力  $q(s)$  は一般に行われるように杭の変位に地盤バネを掛けて求められるものとする。また、 $q(s)$  は杭に対して直角に作用するものとする。ただし、ここでは地盤の変位は外力  $P$  の作用による変位、すなわち点  $C \rightarrow$  点  $C'$  への変位を対象とする。換言すれば地盤の初期変位、点  $C_0 \rightarrow$  点  $C$ 、による帯与はないものと仮定している。この様な仮定の下では地盤反力  $q(s)$  は次式で与えられる (Fig. 4 参照)。

$$q(s) = k \{u(s) \sin \theta(s) + w(s) \cos \theta(s)\} \quad (3)$$

ここに、地盤バネ  $k$  は水平方向地盤反力係数  $k_H$  に杭径

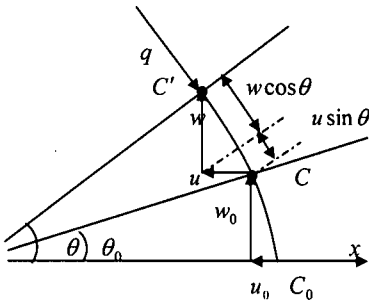


Fig. 4 The reaction of soil:  $q$

$D$  を掛けて求められる。

点  $C'$  における杭軸直角方向の力のつり合いは Fig. 3 から次のように与えられる。

$$Q(s) + P \sin \theta(s) - \int_x^l q(\tau) \cos(\theta(s) - \theta(\tau)) d\tau = 0 \quad (4)$$

ここに  $Q(s)$  は点  $C'$  におけるせん断力である。

これに式(3)で与えられる  $q(s)$  を代入するとつり合い方程式として次式が得られる。

$$Q(s) + P \sin \theta(s) - k \int_x^l (u(\tau) \sin \theta(\tau) + w(\tau) \cos \theta(\tau)) \cos(\theta(s) - \theta(\tau)) d\tau = 0 \quad (5)$$

### (3) 構成関係

杭のせん断力  $Q$  と回転角  $\theta$  の関係は、曲げ剛性  $EI$  を用いて次式で与えられる。

$$Q = EI\theta'' \quad (6)$$

### (4) 境界条件

まず最も簡単な場合を想定して、杭先端、杭頭いずれもヒンジの場合を考える（以下、Simple Support の意味で (S. S.) と表示する）。この場合の境界条件は、 $s=0, l$  で変位および曲げモーメントがゼロであるから、次式で与えられる。

$$\begin{cases} u(0) = w(0) = 0, \theta'(0) = \theta'_0(0) = 0 \\ w(l) = 0, \theta'(l) = \theta'_0(l) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

また、杭先端ヒンジ、杭頭固定の場合も検討する。この場合の境界条件は次式で与えられる。以下においてはこの場合の境界条件を Clamped-Simple support という意味で (C. S.) と表示する。

$$\begin{cases} u(0) = w(0) = 0, \theta'(0) = \theta'_0(0) = 0 \\ w(l) = 0, \theta(l) = \theta_0(l) = 0 \end{cases} \quad (7)'$$

式(2), (5), (6), (7), (7)' が解くべき非線形の境界値問題である。

構成方程式(6)をつり合い方程式(5)へ代入し、その式(5)を  $s$  について微分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & EI\theta''' + P \cos \theta \theta' + k [u \sin \theta + w \cos \theta] \\ & - k \int_x^l (u(\tau) \sin \theta(\tau) + w(\tau) \cos \theta(\tau)) \sin(\theta(\tau) - \theta(s)) d\tau \\ & \times \theta'(s) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、式(8)左辺第2項  $\cos \theta \theta'$  は、式(2)の第2式を  $s$  について微分することによって次のように求められる。

$$\cos \theta \theta' = w'' + w_0'' \quad (9)$$

つぎに、式(8)左辺の積分項について考える。いま、 $P$  による変形が小さいと仮定する、すなわち  $w(s)$ ,  $u(s)$ ,  $\theta(s) - \theta_0(s)$  は小さいものと考え、式(2)より  $u' = \cos \theta - \cos \theta_0 \rightarrow 0$ , また  $w' = \sin \theta - \sin \theta_0 \rightarrow \theta - \theta_0$ . さらに  $u(0) = 0$  および  $u' = 0$  より  $u = 0$  とおける。これらより、 $w(s) = o(\varepsilon)$ , さらに  $\theta(\tau) - \theta(s) = o(\varepsilon)$  より  $\sin(\theta(\tau) - \theta(s)) = o(\varepsilon)$  となり、結局積分項は次式で表される。

$$\begin{aligned} & k \int_x^l (u(\tau) \sin \theta(\tau) + w(\tau) \cos \theta(\tau)) \sin(\theta(\tau) - \theta(s)) d\tau \\ & = o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

これは、積分項は2次の微少項となり、他の項に比べて無視できることを表す。

式(9),  $w' = \theta - \theta_0$ , および  $u = 0$  を式(8)に代入することによって解くべき基礎方程式と (S. S.) の場合の境界条件を次式のように得る。

$$\begin{cases} EIw^{(4)} + Pw'' + k \cos \theta_0 w = -Pw_0'' - EI\theta_0'' \\ w(0) = w'(0) = w(l) = w'(l) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

(C. S.) の場合は、次式のように表わされる。

$$\begin{cases} EIw^{(4)} + Pw'' + k \cos \theta_0 w = -Pw_0'' - EI\theta_0'' \\ w(0) = w'(0) = w(l) = w'(l) = 0 \end{cases} \quad (10)'$$

ここで、次式で与えられる無次元量を式(10)と式(10)' に用いる。

$$\begin{cases} t = \frac{s}{l}, W = \frac{w}{l}, U = \frac{u}{l}, W_0 = \frac{w_0}{l} \\ \lambda = \frac{Pl^2}{EI}, \alpha = \frac{kl^4}{EI} \end{cases} \quad (11)$$

式(11)を式(10)と式(10)'に代入することによって、無次元表示の非線形境界値問題をj得る。すなわち、(S.S.)の場合には、

$$\begin{cases} W^{(4)} + \lambda W'' + \alpha \cos \theta_0 W = -\lambda W_0'' - \theta_0''' \\ W(0) = W''(0) = W(1) = W''(1) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

(C.S.)の場合には、

$$\begin{cases} W^{(4)} + \lambda W'' + \alpha \cos \theta_0 W = -\lambda W_0'' - \theta_0''' \\ W(0) = W''(0) = W(1) = W'(1) = 0 \end{cases} \quad (12)'$$

ここで、式(12)と(12)'はその誘導の過程で述べたように初期変位に比べて外力による変形が小さい場合について成立するものである。

### 3. 座屈荷重

#### (1) S.S.の場合

ここでは、式(12)で与えられるS.S.境界値問題を解くことによって得られる固有値、およびそれから求まる座屈荷重について考察を行う。ここで考察を行う座屈荷重は杭が初期変位を有しているという点で、他の研究者の扱ったものとは異なる点に注意を要する。

ここでは地盤の変位分布が三角形であることを仮定する。そうすると杭の初期角度 $\theta_0$ は場所によって変わらないので、 $\alpha_0 = \alpha \cos \theta_0$ を一定値とおくことができる。このとき、式(12)の微分方程式の一般解は、積分定数を $C_1, C_2, C_3, C_4$ とすると、次式で与えられる。

$$W(t) = C_1 \cos \sqrt{\xi_1} t + C_2 \cos \sqrt{\xi_2} t + C_3 \sin \sqrt{\xi_1} t + C_4 \sin \sqrt{\xi_2} t \quad (13)$$

ここに、

$$\xi_1 = \left( \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha_0} \right) / 2, \quad \xi_2 = \left( \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha_0} \right) / 2, \\ (\xi_1 > 0, \xi_2 > 0, \xi_1 \neq \xi_2) \text{である。また } \lambda^2 > 4\alpha_0 \text{である。}$$

式(13)を式(12)の境界条件に代入すれば、方程式 $[A]\{C\} = \{0\}$ が得られる。

$$\text{ここに、} \{C\} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}^T.$$

$\det |A| = 0$ から、次の関係が得られる。

$$\sin \sqrt{\xi_1} \cdot \sin \sqrt{\xi_2} = 0 \quad (14)$$

これを満足する解は、 $\xi_1, \xi_2 = m^2 \pi^2$ でなければなら

ない。

$\xi_1 = \left( \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha_0} \right) / 2, \xi_2 = \left( \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha_0} \right) / 2$ と式(14)から、S.S.の場合には、求まる固有値 $\lambda$ と固有関数 $W$ は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \lambda_m = m^2 \pi^2 + \frac{\alpha_0}{m^2 \pi^2}, \quad (m = 1, 2, \dots) \\ W_m = \sin m \pi t \end{cases} \quad (15)$$

ここに、 $m$ は次数であり、 $\lambda_m$ の右辺第2項が初期変位、地盤バネ、杭の曲げ剛性、杭長の影響を表す項である。ここで、

$$\lambda_{cr} = \min \{ \lambda_m \} = \lambda_{m^*} \quad (16)$$

すなわち、最小の $\lambda_m$ を $\lambda_{cr}$ とし、そのときの $m$ を $m^*$ とする。以下においては、この $\lambda_{cr}$ を無次元座屈荷重と呼ぶことにする。

式(11)および式(15)から座屈荷重 $P_{cr}$ およびそれに対応する固有関数 $w_{cr}$ は次式で与えられる。

$$\begin{cases} P_{cr} = \frac{EI}{l^2} \lambda_{cr} \\ w_{cr}(s) = \sin \frac{m^* \pi}{l} s \end{cases} \quad (17)$$

以上の議論より明らかなように、 $\lambda_{cr}$ は $m^*$ の関数である。また $m^*$ は $\alpha_0$ に依存する。したがって、以下においては、 $m^*$ と $\alpha_0$ の関係について検討を行い、どのように $\lambda_{cr}$ が定まるかについて考察する。

式(15)の上式を関数 $f$ を用いて、

$$f(x) = x + \frac{\alpha_0}{x}$$

とおき、 $f$ を最小にする点を求める。 $f$ を独立変数 $x$ について描くとFig.5のようになり、その最小値は $x = \sqrt{\alpha_0}$ のときとなる。ここでの目的は、 $f(m^2 \pi^2) = \lambda_m$ を最小にする整数値 $m^*$ を定めることである。しかしながら、 $\alpha_0$ は一定値であるから、一般的には、 $(m^* \pi)^2 = \sqrt{\alpha_0}$ を満足する整数値 $m^*$ は存在しない。したがって、 $\alpha_0$ の値によって以下のように場合分けを行い、その範囲で最小となる $m^*$ を決める必要がある。

a)  $0 \leq \sqrt{\alpha_0} \leq \pi^2$ のとき

Fig.5より明らかなようにこの式を満足するのは $m^* = 0$ あるいは $m^* = 1$ のときである。しかしながら、式(15)により $m^* \neq 0$ であるから、 $m^* = 1$ となる。

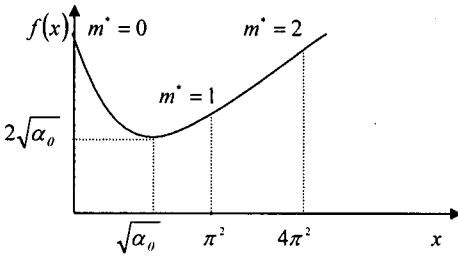


Fig. 5 Minimum value of  $f(x)$  and  $f(m^2\pi^2)$

b)  $\pi^2 \leq \sqrt{\alpha_0} \leq (2\pi)^2$  のとき

この式を満足する  $m^*$  は 1 あるいは 2 である。  $m^* = 1$  および  $m^* = 2$  のときの  $f$  はそれぞれ  $f(\pi^2) = \pi^2 + \frac{\alpha_0}{\pi^2}$ ,  $f(4\pi^2) = 4\pi^2 + \frac{\alpha_0}{4\pi^2}$  となる。

ここで  $f(\pi^2) \leq f(4\pi^2)$ , すなわち,  $m^* = 1$  のときの条件を求める。

$$f(4\pi^2) - f(\pi^2) = 4\pi^2 + \frac{\alpha_0}{4\pi^2} - \pi^2 - \frac{\alpha_0}{\pi^2} \geq 0$$

より,  $\sqrt{\alpha_0} \leq 2\pi^2$  を得る。すなわち

$$\pi^2 \leq (m^*\pi)^2 = \sqrt{\alpha_0} \leq (2\pi)^2$$

のとき,  $m^* = 1$  となる。

逆に,  $f(\pi^2) \geq f(4\pi^2)$  より,

$$2\pi^2 < (m^*\pi)^2 = \sqrt{\alpha_0} \leq 4\pi^2$$

のとき  $m^* = 2$  となる。

c)  $(2\pi)^2 \leq \sqrt{\alpha_0} \leq (3\pi)^2$  のとき

この式を満足する  $m^*$  は 2 あるいは 3 である。 b) の場合と同様に  $m^* = 2$  あるいは  $m^* = 3$  の条件を求めると次のようになる。

$$4\pi^2 \leq \sqrt{\alpha_0} \leq 6\pi^2 \text{ のとき, } m^* = 2$$

$$6\pi^2 \leq \sqrt{\alpha_0} \leq 9\pi^2 \text{ のとき, } m^* = 3$$

以下同様に一般的に次の関係が得られる。

$$\begin{cases} m(m-1)\pi^2 < \sqrt{\alpha_0} \leq m(m+1)\pi^2 \text{ のとき} \\ m^*(\alpha_0) = m \end{cases} \quad (18)$$

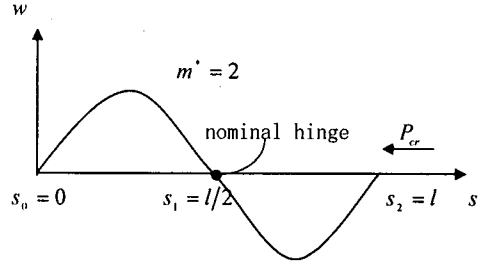
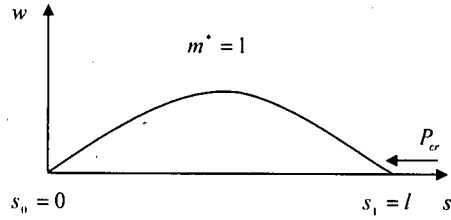


Fig. 6 The nominal hinge of a pile (S.S.)

ここで, 式(18)の上式に  $\alpha_0 = \frac{kl^4}{EI} \cos \theta_0$  を代入すると, 次の関係が得られる。

$$\begin{cases} m(m-1)\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{k \cos \theta_0}} < l^2 \leq m(m+1)\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{k \cos \theta_0}} \\ \text{のとき, } m^*(l) = m \end{cases} \quad (19)$$

上式において,  $k = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ , すなわち周辺地盤がなく, 初期変位もないときには,  $m^* = 1$ ,  $\lambda_{cr} = \pi^2$  となり, したがって  $P_{cr} = EI\pi^2/l^2$ , すなわち, オイラーの座屈荷重と一致する。そして, このときの固有関数は  $w_{cr}(s) = \sin \frac{\pi}{l}s$  で与えられ, Fig. 6 の上図のように唯一の最大値を持つ。

$k > 0$ ,  $\alpha_0 > 0$  のときには, 式(19)で与えられるように,  $m^*$  は  $l$  の長さによって異なった値をもつ。すなわち  $l$  が大きくなると  $m^*$  も大きくなり, 固有関数も  $m^*$  個の最大値と  $(m^* - 1)$  個の節 (nominal hinge) を持つようになる (Fig. 6 の下図は  $m^* = 2$  のとき)。節の座標は  $s_i = \frac{i}{m}l$ , ( $i = 0, 1, \dots, m^*$ ) で与えられる。

このときの  $P_{cr}(l)$  は杭長  $\frac{l}{m}$  に対する次の境界値問題の解と等しくなる。

$$\begin{cases} EIw^{(4)} + Pw'' + k \cos \theta_0 w = -Pw_0'' \\ w(0) = w''(0) = w(s_1) = w''(s_1) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

これは杭周辺地盤が杭の変形を拘束するために生じる現

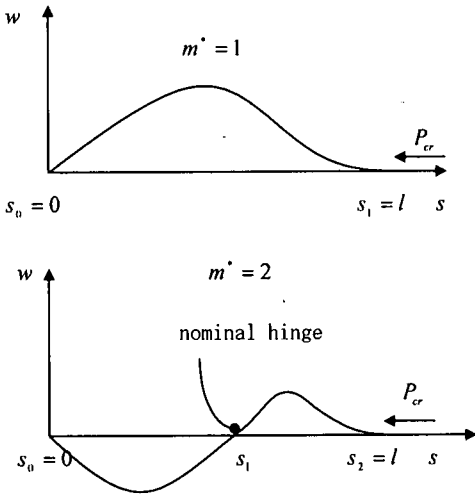


Fig. 7 The nominal hinge of a pile (C.S.)

象である。

等価な杭長  $\frac{l}{m^*}$  に関しては、式(19)上式より次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{1}{m^*}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{k \cos \theta_0}} \pi &\leq \frac{l}{m^*} \\ &\leq \sqrt{1 + \frac{1}{m^*}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{k \cos \theta_0}} \end{aligned} \quad (21)$$

$l \rightarrow \infty$  とき、 $m^* \rightarrow \infty$  となるので、式(21)より

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{l}{m^*(l)} = \sqrt{\frac{EI}{k \cos \theta_0}} \pi \quad (22)$$

なる関係が成り立つ。

一方、座屈荷重  $P_{cr}$  に関しては、

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} P_{cr}(l) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{EI}{l^2} \lambda_{cr} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{EI}{l^2} \left( m^{*2} \pi^2 + \frac{\alpha_\theta}{m^{*2} \pi^2} \right) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left( EI \pi^2 \frac{m^{*2}}{l^2} + \frac{k \cos \theta_0 l^2}{m^{*2} \pi^4} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

となり、これに式(22)の関係を代入すると次式を得る。

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P_{cr}(l) = 2\sqrt{Elk \cos \theta_0} \quad (24)$$

この式は  $l$  がある程度大きくなると、 $P_{cr}$  は一定値  $2\sqrt{Elk \cos \theta_0}$  に収束することを意味する。

この式において、周辺に地盤がない、すなわち  $k=0$  とすると、 $\lim_{l \rightarrow \infty} P_{cr}(l) = 0$  となる。

これらのことより、杭周辺地盤の存在が杭の座屈荷重に非常に大きな影響を及ぼすことがわかる。

## (2) C.S. の場合

ここでは、式(12)' で与えられる C.S. 境界値問題を解くことによって得られる座屈荷重を S.S. の場合と同様に考察する。

C.S. の場合、微分方程式の一般解は S.S. の場合と同様に式(13)で表わされるが、式(14)に対応する特性方程式は次式となる。

$$\sqrt{\xi_1} \tan \sqrt{\xi_2} = \sqrt{\xi_2} \tan \sqrt{\xi_1}$$

上式の解も無限個存在し、 $\xi_{i1} \leq \xi_{i2} \leq \xi_{i3} \leq \dots$ 、 $i=1, 2$  である。したがって、 $\lambda_{cr}$  は次式で表わされる。

$$\lambda_{cr} = \min \{ \lambda_m \} = \min \left\{ \xi_{im} + \frac{\alpha_\theta}{\xi_{im}} \right\} = \lambda_{m^*} \quad (m=1, 2, \dots) \quad (25)$$

S.S. の場合と同様に、 $\lambda_m = f(\xi_{im}) = \xi_{im} + \frac{\alpha_\theta}{\xi_{im}}$  を最

小にする整数値  $m^*$  を定めることを行くと、次の結果を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\xi_{i(m-1)} \xi_{im} EI}{k \cos \theta_0} \leq l^4 \leq \frac{\xi_{im} \xi_{i(m+1)} EI}{k \cos \theta_0} \\ \text{のとき、} \quad m^*(l) = m \end{aligned} \quad (26)$$

これより、

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{l^4}{\xi_{im^*}^2} = \frac{EI}{k \cos \theta_0} \quad (27)$$

さらに、

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P_{cr}(l) = 2\sqrt{Elk \cos \theta_0} \quad (28)$$

が得られる。この結果は S.S. の場合の結果と同様である。

ここで注意しなければならないことは、C.S. の場合にも、固有関数は  $m^*$  個の最大値と  $(m^*-1)$  個の節 (nominal hinge) を持つが (Fig. 7 参照)、節の座標は

$s_j = \frac{\pi j}{\sqrt{\xi_{im^*}}} l$ 、 $(j=0, 1, \dots, m^*)$  で与えられることである。

#### 4. 解析例

##### (1) 解析モデル

解析例として、ここでは小口径の2種類の杭、杭径400mmのPHC杭 (Prestressed High Strength Concrete Pile) と杭径177.8mmのマイクロパイルの物性値を用いて座屈荷重に関する検討を行った。杭の諸元を Table 1 にまとめて示す。

地盤バネ  $k$  は道路橋示方書<sup>3)</sup>に基づいて算出した。すなわち、

$$k = k_{11} D \quad (29)$$

$$k_{11} = k_{110} \left( \frac{B_{11}}{30} \right)^{\frac{3}{4}}$$

ここに、 $k_{110}$  は直径30cmの剛体円板による平板載荷試験の値に相当する水平方向地盤反力係数 (kgf/cm<sup>2</sup>) で、 $B_{11}$  は荷重作用方向に直交する基礎の換算載荷幅 (cm) である。

$$\begin{cases} B_{11} = \sqrt{D/\beta} \\ k_{110} = \frac{1}{30} E_D \end{cases} \quad (30)$$

ここに、 $\beta = \sqrt{\frac{k_{11} D}{4EI}}$  は基礎の特性値 (cm<sup>-1</sup>) で、 $E_D$  は地盤の動的変形係数 (kgf/cm<sup>2</sup>) である。また

$$\begin{cases} E_D = 2(1 + \nu_D) G_D \\ \nu_D = 0.5, G_D = \frac{\gamma_i}{10g} V_{SD}^2 \\ \gamma_i = 1.7, V_{SD} = c_i V_{Si} \\ c_i = 0.8, V_{Si} = 80 N_i^{1/3} \end{cases} \quad (31)$$

ここに、  
 $\nu_D$  : 地盤の動的ポアソン比  
 $G_D$  : 地盤の動的せん断変形係数 (kgf/cm<sup>2</sup>)  
 $\gamma_i$  : 地盤の単位体積重量 (tf/cm<sup>3</sup>)  
 $g$  : 重力加速度 (m/s<sup>2</sup>)  
 $V_{SD}$  : 地盤のせん断弾性波速度 (m/s)  
 $V_{Si}$  : 地盤バネの算出に用いる  $i$  番目の地層の平均せん断弾性波速度 (m/s)  
 $C_i$  : 地盤ひずみの大きさに基づく補正係数  
 $V_{Si}$  :  $i$  番目の地層の平均せん断弾性波速度 (m/s)  
 $N_i$  : 標準貫入試験による  $i$  番目の地層の平均  $N$  値

S.S. の場合の地盤の側方変位分布は 3. (1) で述べたように3角形分布と仮定した。すなわち、杭先端の位置で

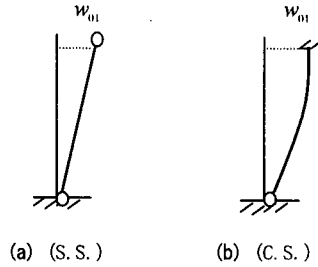


Fig. 8 The initial displacement

Table 1 Parameters of analyzed pile

External Diameter D(mm)	Internal Diameter d(mm)	Flexural Rigidity EI(tf.m <sup>2</sup> )
177.8	152.5	3983
400	270	473

0、杭頭の位置で  $w_{01}$ 、その間は直線的に変化するものと仮定した (Fig. 8 (a) 参照)。

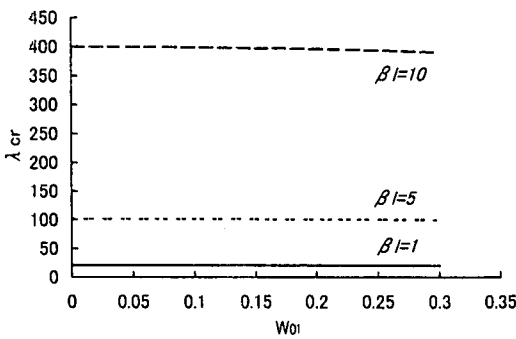
C.S. の場合の地盤の側方変位分布は梁先端の変位が  $w_0$  である片持ち梁の変位分布と仮定、すなわち、次式のように仮定した (Fig. 8 (b) 参照)。

$$w_0(s) = -\frac{w_{01}}{2l^3} s^3 + \frac{3w_{01}}{2l} s$$

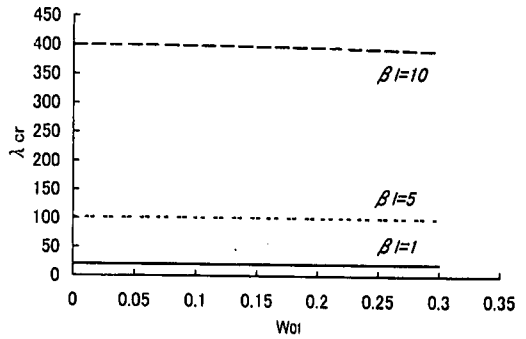
##### (2) 無次元パラメータでの検討

Fig. 9 に(S.S.), (C.S.) 両境界条件下における無次元座屈荷重  $\lambda_{cr}$  を無次元初期変位  $W_{01} = w_{01}/l$  の関数として示す。実在する杭の多くの無次元長さ  $\beta l$  の範囲は1~10程度である。従って、Fig. 9 においても  $\beta l$  をパラメータとして、 $\beta l = 1, 5, 10$  に対して結果を示した。

この図より、無次元座屈荷重  $\lambda_{cr}$  は  $\beta l$  に対しては大きく変化するが、無次元初期変位  $W_{01}$  に対してはあまり変化しない。すなわち、地盤の側方変位が大きいほど座屈荷重は小さくなるが、その影響は非常に小さい。式 (12) を見ると、初期変位は無次元座屈荷重  $\lambda_{cr}$  に影響を与える項は  $\cos \theta_0$  だけである。これにより  $\theta_0$  の変化範囲は小さければ、すなわち、地盤の側方変位  $W_{01}$  の変化範囲が小さければ (Fig. 8 参照)、 $\lambda_{cr}$  に及ぼす  $W_{01}$  の影響はあまり変化しないことがわかる。また式 (24) と式 (28) から明らかなように杭長  $l$  が大きくなると、 $P_{cr}$  は同じ式で表される。すなわち、 $P_{cr}$  に及ぼす境界条件の影響はなくなる。このことは無次元長さ  $\beta l$  と無次元座屈荷重  $\lambda_{cr}$  にも言え、境界条件の差は無次元長さ  $\beta l$  が小さいときにはわずかではあるが無次元座屈荷重

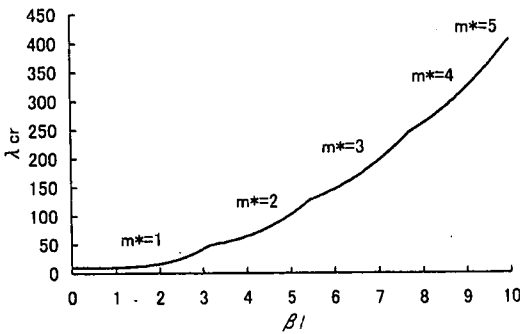


(a) S.S. boundary condition

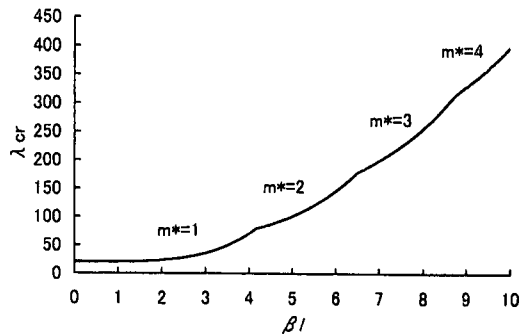


(b) C.S. boundary condition

Fig. 9 Critical load  $\lambda_{cr}$



(a) S.S. boundary condition



(b) C.S. boundary condition

Fig. 10 The relationship between  $\lambda_{cr}$  and  $\beta l$

$\lambda_{cr}$  の差に現れるが、 $\beta l$  が大きくなるとその差はほとんどなくなる。このことは Fig. 9 に示すとおりである。

そこで、Fig. 10 に  $\lambda_{cr}$  におよぼす  $\beta l$  の影響を示す。前章の議論から分かるように、座屈荷重は杭の長さ依存し、杭の長さ座屈時の杭の変形を規定する整数  $m^*$  との間には式 (19) の関係がある。従って  $\lambda_{cr}$  は整数  $m^*$  の関数となり、その形は  $m^*$  に依存して折れ曲がった曲線となる。 $\beta l$  が小さいときには  $m^* = 1$  であるが、 $\beta l$  が大きくなると  $m^*$  も大きくなる。

なお、地盤による拘束がなければ、 $m^*$  は常に 1 であるが、 $\beta l = 0$  である。したがって、無次元座屈荷重  $\lambda_{cr}$  は定数である。S.S. の場合には、 $\lambda_{cr} = \pi^2$  で、C.S. の場合には、 $\lambda_{cr} = 20.16$  である。これらとオイラーの座屈荷重は一致する。そしてこの時には杭長  $l$  が大きくなると、実際の座屈荷重は式 (17) によって急激に小さくなる。これに対して、地盤による拘束がある場合には、 $\beta l$  が大きくなると  $m^*$  も大きくなる、すなわち、杭長  $l$  が長くなると、地盤の影響も大きくなるから  $P_{cr}$  は小さくならず、式 (24) と式 (28) に示されるように、つ

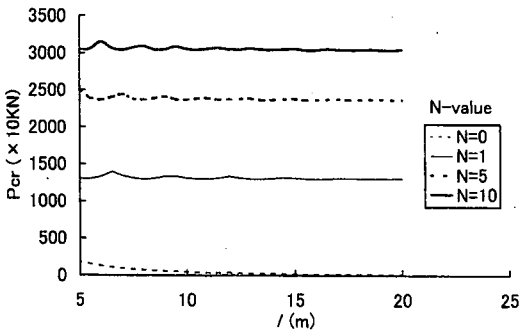
いには一定値に収束する。

### (3) 実在する杭での検討

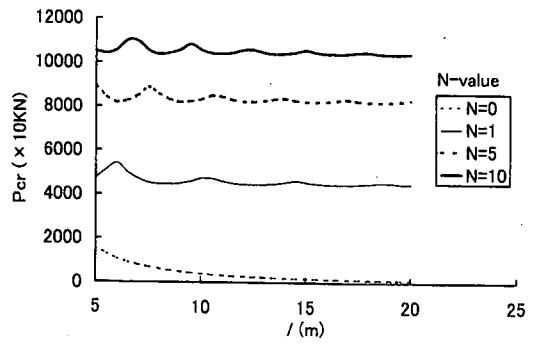
そこで Table 1 に示した実際の値を入れて座屈荷重  $P_{cr}$  を求め、N 値をパラメータにとり杭長の関数としてまとめた結果を Fig. 11 に示す。この図は無次元初期変位  $W_{0i} = 0.1$  に対する結果である。この結果より  $N=1$  でも座屈荷重はかなり大きくなるのが分かる。同じ  $m^*$  に対しては杭長  $l$  が長くなると  $P_{cr}$  は小さくなるが、杭長がある程度長くなると、 $P_{cr}$  を与える  $m^*$  が大きくなる。その結果として、 $P_{cr}$  と  $l$  の関係は異なる  $m^*$  に対する  $P_{cr}$  を連れた曲線となるので、波打った形状となる。また、式 (24)、(28) の意味するように杭の長さが 15m くらいまでは座屈荷重は杭長に対して変化しているが、15m 以上になるとほとんど変化しなくなることが分かる。すなわち座屈荷重は杭の長さではなく周辺の地盤の拘束で決まってしまうことをこの結果は意味する。

次に、座屈荷重  $P_{cr}$  に及ぼす初期地盤変位の影響を調べた結果を Fig. 12 に示す。この図より、 $P_{cr}$  は  $w_0$  にはほとんど影響されないことがわかる。

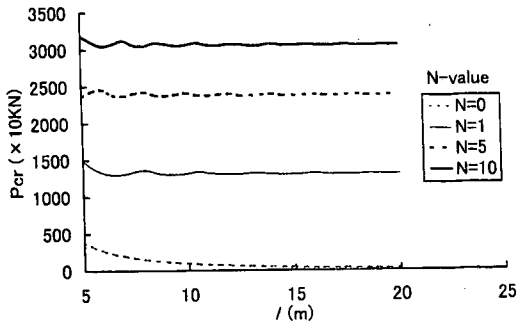




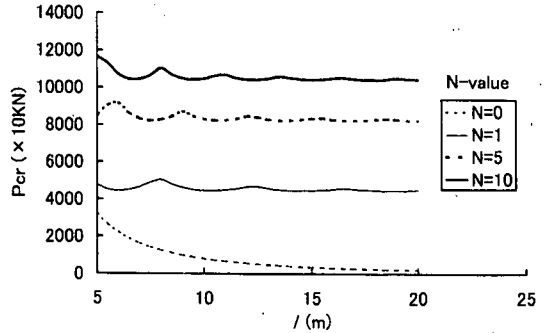
(a) S.S. boundary condition,  $D=177.8\text{mm}$



(b) S.S. boundary condition,  $D=400\text{mm}$



(c) C.S. boundary condition,  $D=177.8\text{mm}$



(d) C.S. boundary condition,  $D=400\text{mm}$

Fig. 11 The relationship between  $l$  and  $P_{cr}$

最後に、座屈荷重  $P_{cr}$  に及ぼす地盤バネの低下の影響を調べた。これは液状化による地盤の剛性低下の影響を擬似的に表わしたものである。液状化による地盤バネの低下による研究はこれまで多く行われており、数十分の1から数千分の1の範囲という結果が報告<sup>10)~12)</sup>されている。そこで、ここでは地盤バネを10分の1から1000分の1まで低下させて解析を行った。その結果をFig. 13に示す。この図から明らかなように、地盤バネの低下は座屈荷重を著しく低下させることが分かる。当然のことながら、地盤バネの低下が大きくなれば地盤のない場合、すなわちオイラーの座屈荷重に近づき、杭長の影響が現れてくる。なおこのことはFig. 11からも予想された結果である。

## 5. 結論

本研究は側方変位を有する地盤内の杭の座屈荷重を理論的に求めたものである。本論文はこの問題の第一ステップという位置づけで、問題を簡単にするために地盤を線形弾性体と仮定し、幾何学的な非線形性を考慮に入れた微分方程式をまず誘導した。次に杭長、地盤のN値、初期地盤変位等をパラメトリックに変化させて、これらが座屈荷重に及ぼす影響を調べたものである。その結果、

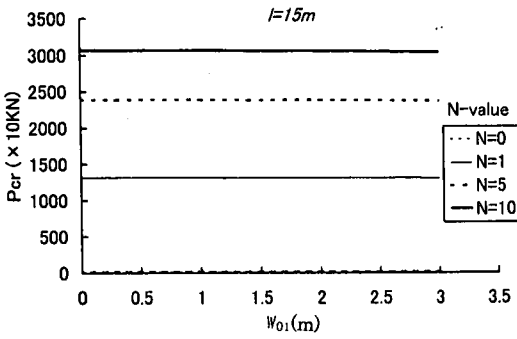
以下の知見が得られた。

- (1) 地盤の側方変位が大きいほど座屈荷重は小さくなるが、その影響は非常に小さい。
- (2) 地盤の拘束の影響により、杭が長くなると座屈荷重はある一定値に収束する。その値は次式で与えられる。

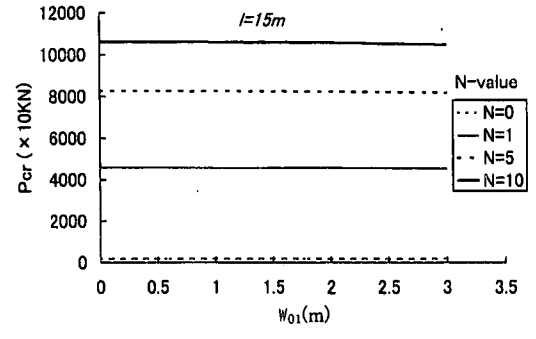
$$\lim_{l \rightarrow \infty} P_{cr}(l) = 2\sqrt{Elk \cos \theta_0}$$

- (3) 地盤の剛性の座屈荷重に及ぼす影響は非常に大きい。N値が小さくなると座屈荷重は小さくなる。特に液状化などによって地盤バネが低下すると座屈荷重は急激に低下する。

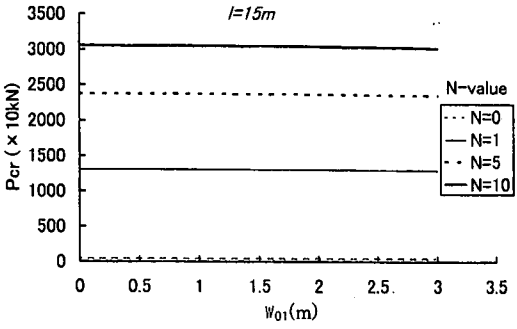
本論文は上述したように、液状化などによって地盤が側方に移動した場合の杭の安定性を検討することを目的に、まず地盤を線形弾性体と仮定して、地盤の側方変位を杭の初期変位として与えて、杭の座屈荷重を求めたものである。ここでは杭の幾何学的な非線形性は考慮に入れてあるが、杭や地盤の材料非線形性は考慮されていない。また、杭頭の境界条件はヒンジあるいは固定とし、軸直角方向の変位は増大しないという仮定(境界条件式(7)において  $w(l) = 0$  としていること)となっている。しかしながら実際には杭に初期変位があり、これに軸方向



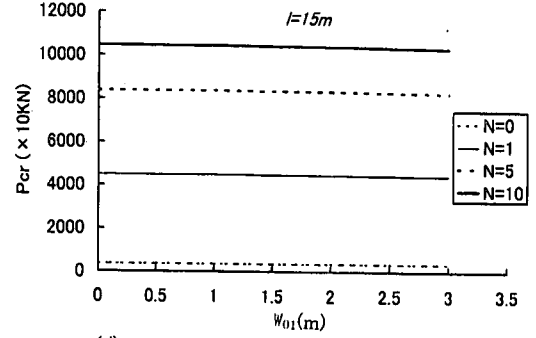
(a) S.S. boundary condition,  $D=177.8\text{mm}$



(b) S.S. boundary condition,  $D=400\text{mm}$

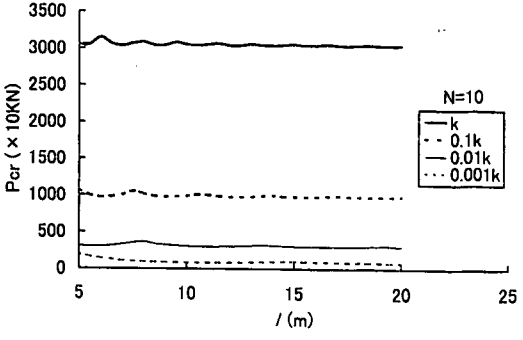


(c) C.S. boundary condition,  $D=177.8\text{mm}$

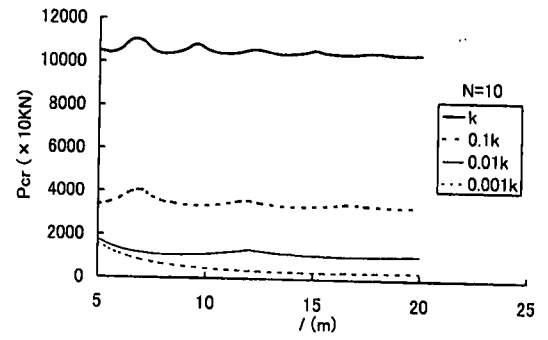


(d) C.S. boundary condition,  $D=400\text{mm}$

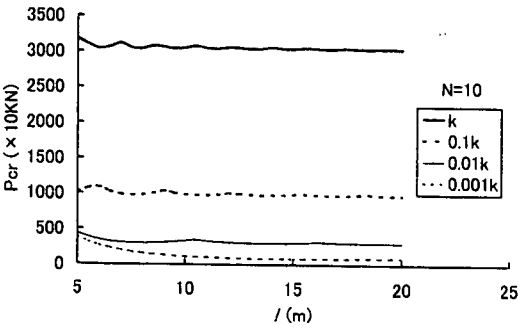
Fig. 12 The relationship between  $w_{01}$  and  $P_{cr}$



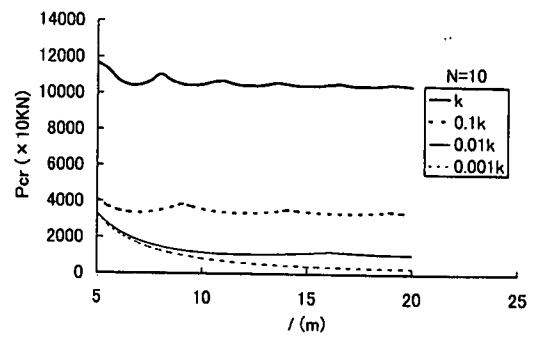
(a) S.S. boundary condition,  $D=177.8\text{mm}$



(b) S.S. boundary condition,  $D=400\text{mm}$



(c) C.S. boundary condition,  $D=177.8\text{mm}$



(d) C.S. boundary condition,  $D=400\text{mm}$

Fig. 13 The effect of liquefaction on  $P_{cr}$

荷重が作用した場合には、いわゆる  $P-\Delta$  効果によって杭頭変位は増大するはずである。  $P-\Delta$  によるモーメントは考慮しているが、それによる更なる変位増分は固定境界のために生じない。現在、地盤の材料非線形性、杭頭自由という境界条件を考慮に入れた場合の座屈荷重に関する検討を行っている。これらの結果については稿を改めて報告する予定である。

#### 参考文献

- 1) 宮坂享明: 高靱性能耐震ジョイント杭の開発とその液化化地盤の側方移動に対する応答特性に関する研究, 山口大学博士論文, 1997. 3.
- 2) 泉博允: 高靱性能耐震ジョイント杭基礎の地震時動的応答特性に関する研究, 山口大学博士論文, 1999. 3.
- 3) (社)日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, V耐震設計編, 1996. 12.
- 4) (財)鉄道総合技術研究所: 鉄道構造物等設計標準・同解説, 耐震設計(案), 1998. 11.
- 5) Miura, F.: State of the Art of Micropiles, *Proc. of the Second International Workshop on Micropiles*, pp. 3-11, 1999.
- 6) Mandel, J.: Flambement au Sein d' un Milieu Elastique, *Annales des Ponts et Chaussées*, pp. 295-335, 1936.
- 7) Bjerrum, L.: Norwegian Experiences with Steel Piles to Rock, *Geotechnique*, Vol. 7, No.2, pp. 73-96, 1957.
- 8) Gouvenot, D.: Essais de Chargement et de Flambement de Pieux Aiguilles, *Annales de l' Institut Technique du Batiment et des travaux Publics, Comite Francais de la Mecanique des Soils et des Fondations*, No. 334, 1975.
- 9) Fleming, W. G. K., Weltman, A. J., Randolph, M. F. and Elson, W.K.: *Piling Engineering. 2nd Edition*. New York Surrey University Press, John Wiley and Sons, 1992.
- 10) 安田進, 斎藤公正, 鈴木信久: 埋設管に対する液化化地盤の拘束力, 第 19 回地震工学研究発表会講演概要, pp. 189-192, 1987.
- 11) 北浦勝, 宮島昌克: 液化化地盤一埋設管系の復元力特性の評価, 第 19 回地震工学研究発表会講演概要, pp. 525-528, 1997.
- 12) 高田至郎: 側方流動中の液化化地盤のバネ係数, 文部省科学研究補助金研究成果報告書, No. 61302055, 1988.

(2000. 8. 4 受付)

## CRITICAL LOAD OF A SINGLE PILE WITH INITIAL HORIZONTAL DISPLACEMENT IN ELASTIC GROUND

Fusanori MIURA and Yuan-yuan ZHU

In this paper, we first set up a mathematical model of a single pile subjected to axial load with initial horizontal displacement in elastic soil, then obtained critical loads and expressed them in nondimensional parameters. Based on the results obtained from parametric study, we found that the critical load decreased with the increment of the initial displacement, and its effect of it was very small, but, the effect of the reduction of soil spring coefficient due to liquefaction on the decrease of the critical load was significant.