

# 拡張 SMP 規準による変換応力と 種々の地盤材料の弾塑性モデルへの適用

孫 徳安<sup>1</sup>・松岡 元<sup>2</sup>・姚 仰平<sup>3</sup>・一村政弘<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 名古屋工業大学研究員 工学部社会開発工学科(〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町)

<sup>2</sup>フェロー会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科(〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町)

<sup>3</sup>工博 北京航空航天大学教授 土木工学科(中国北京市海淀区学院路 37 号)

<sup>4</sup>正会員 工修 新日本製鉄(株) 技術開発センター土木建築技術部(〒293-8511 千葉県富津市新富20-1)

本論文はすでに提案している SMP 規準に基づいた変換応力を拡張 SMP 規準に基づく変換応力に拡張し、これを種々の地盤材料の弾塑性モデルへ適用するものである。弾塑性モデルの3次元化によく用いられている  $g(\theta)$  法の問題点を指摘し、 $g(\theta)$  と関係づけた変換応力の方法で解決できることを示す。変換応力の第1次、第2次不変量を用いて、3次元応力下での地盤材料のダイレイタンスー特性を統一的に整理し、地盤材料の簡単で実用的な弾塑性モデルを提案する。モデルパラメータは数が少なく、その物理的意味が明確で決定しやすいものである。このモデルによって  $\phi$  材料である砂と粗粒材、 $c-\phi$  材料であるセメント混合砂および締固め粘土の3次元応力下の変形・強度特性を精度よく予測している。

*Key Words: elastoplastic model, geomaterial, general stress, yield criterion, transformed stress*

## 1. まえがき

Cam-clay モデル<sup>1), 2)</sup>は、広く知られている正規圧密粘土の弾塑性構成モデルである。実用目的で Cam-clay モデルを地盤材料(粘土, シルト, 砂, 粗粒材および  $c-\phi$  材料など)に適用するにあたっては、少なくとも次の3点を考慮しなければならない。①モデルの3次元化。すなわち、3次元応力下での地盤材料の変形・強度特性を表現する。②地盤材料の正負のダイレイタンスー特性を表現する。③地盤材料の変形・強度特性の拘束応力依存性を表現する。また、上記の力学特性を考慮したモデルのパラメータはできるだけ数が少なく、その物理的意味が明確で決定しやすいことが望ましい。

モデルの3次元化については、Cam-clay モデルには土の破壊(限界状態)規準とせん断降伏規準として、Extended Mises 規準( $q/p=\text{const.}$ )が用いられている。しかしながら、3次元応力下での正規圧密粘土のような摩擦性材料( $\phi$ 材料)の破壊は、Extended Mises 規準ではなく、Mohr-Coulomb 規準や SMP 規準<sup>3)</sup>や Lade の規準<sup>4)</sup>などによる方がより良く説明できるということはよく知られている。そこで Zienkiewicz and Pande(1977)<sup>5)</sup>は、いわゆる  $g(\theta)$  法でこれらの規準を弾塑性モデルに取り込む方法を提唱している。しかし本論文第3章で説明する

ように、この方法は地盤材料の誘導異方性を適切に考慮してない。著者らは土の弾塑性モデルに SMP 規準を取り入れるため、SMP 規準に基づく変換応力をすでに提案し、この変換応力を用いて Cam-clay モデルや関口・太田モデル<sup>6)</sup>を合理的な3次元弾塑性モデルに拡張している<sup>7), 8)</sup>。また、粘着成分を有する摩擦性材料( $c-\phi$ 材料)の3次元応力下の変形・強度特性を説明するために粘着成分を表すパラメータ  $\sigma_0 (=c \cdot \cot \phi)$ 、 $c$ : 粘着力、 $\phi$ : 内部摩擦角)を用いた拡張 SMP 規準を提案している<sup>9)</sup>。

地盤材料の正負のダイレイタンスー特性の表現については、いろいろな弾塑性モデルが提案されている。降伏面と硬化パラメータの数より次のように初期の研究を分類できる。1つの降伏面に塑性体積ひずみとせん断ひずみのある組み合わせ<sup>10)</sup>や塑性仕事<sup>4)</sup>を硬化パラメータとして採用する場合もあるし、1つの降伏面に2つの硬化パラメータおよび硬化則を定義する場合もある<sup>11), 12), 13)</sup>。それぞれの硬化則を持つ2つの降伏面の弾塑性モデルもある<sup>14), 15)</sup>。著者らは実用性や簡単さ、さらにすべてのモデルパラメータに物理的意味をはっきり持たせるために、修正 Cam-clay モデルと同じ硬化則で塑性体積ひずみの代わりに新たな硬化パラメータ  $H$  を提案している<sup>16)</sup>。

地盤材料の変形・強度特性の拘束応力依存性は次のようなものであると考えられる。強度特性の拘束応力依存

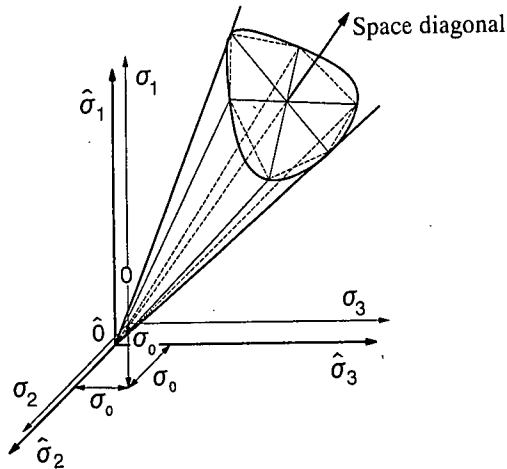


図-1 主応力空間における拡張 SMP 規準

性とは、三軸応力状態でのピーク時のせん断強度が  $\tau_f = \sigma \tan \phi$  ではなくて、 $\tau_f$  が  $\sigma$  の増加につれて上に凸なゆるいカーブ状に増加するが、ある応力範囲では近似的に  $\tau_f = c + \sigma \tan \phi$  と表せることである。3次元応力下での強度特性の拘束応力依存性を拡張 SMP 破壊規準で近似的に表現できる。変形特性の拘束応力依存性とは、せん断時の応力比~ひずみ関係が拘束応力が大きいほど下がってくることや、拘束応力が大きいほど正のダイレイタンスーが小さくなり負のダイレイタンスーが顕著になることである。

本論文で提案する構成式は上述の3点の地盤材料の変形・強度特性を簡単に説明できるものである。すなわち、①c-φ材料の弾塑性モデルに拡張 SMP 規準を取り入れるため、SMP 規準に基づいた変換応力を、拡張 SMP 規準に基づいた変換応力に拡張し、②すでに提案した硬化パラメータH<sup>⑥</sup>を拡張 SMP 規準に基づいた変換応力を用いて見かけの粘着成分をもつφ材料と真の粘着成分をもつc-φ材料に応じて修正し、③新たにベキ数型の硬化則を採用することによって、3次元応力下で地盤材料が示す変形・強度特性の拘束応力依存性やダイレイタンスー特性などを表現している。本モデルでは、砂や粗粒材などのφ材料については、見かけの粘着成分を破壊規準だけに導入し、セメント混合砂や不飽和粘土などのc-φ材料については、真の粘着成分を破壊規準と変形則の両方に導入している。

以上のことをふまえて、本論文は次のように構成される。まず拡張 SMP 規準を極座標で表し、そのπ面上の形状関数を与える。次に通常よく用いられている弾塑性モデルを3次元化する方法の問題点を指摘し、π面上の形状関数を用いて変換応力の式を提示し、この変換応力を用いることによって弾塑性モデルの合理的な3次元化の方法を説明する。さらに、変換応力テンソルの第1次、第

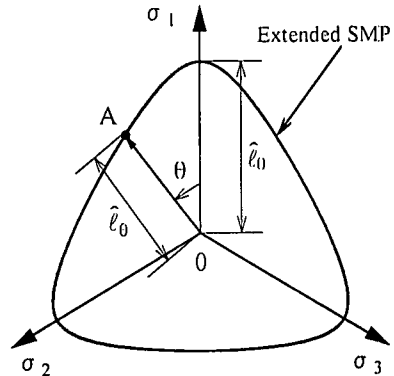


図-2 π面上での拡張 SMP 規準

2次不変量を用いて3次元応力下でのc-φ材料であるセメント混合砂のダイレイタンスー特性を統一的に整理する。最後に、拡張 SMP 規準に基づく変換応力を用いたc-φ材料の弾塑性モデルを提示し、地盤材料である砂、粗粒材、セメント混合砂および締固め粘土へのモデルの適用性を検討すると共に、これらの実測値<sup>17), 18), 19), 20)</sup>との比較により3次元応力下でのモデルの合理性を示す。

## 2. 拡張 SMP 規準の極座標表示

拡張 SMP 規準は次式で表される<sup>9)</sup>。

$$\frac{\hat{\tau}_{SMP}}{\hat{\sigma}_{SMP}} = \sqrt{\frac{\hat{I}_1 \hat{I}_2 - 9\hat{I}_3}{9\hat{I}_3}} = \text{const.} \quad \text{or} \quad \frac{\hat{I}_1 \hat{I}_2}{\hat{I}_3} = \text{const.} \quad (1)$$

ここに、 $\hat{\tau}_{SMP}, \hat{\sigma}_{SMP}$  は拡張 SMP 上のせん断応力および垂直応力である。 $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$  は次式で定義した換算応力テンソル $\hat{\sigma}_{ij}$ の1次、2次、3次不変量である。

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij} \quad (2)$$

ここに、 $\sigma_0 (= c \cdot \cot \phi)$ 、 $c$ :粘着力、 $\phi$ :内部摩擦角)は粘着成分を表すパラメータである。

図-1は、式(1)による拡張 SMP 規準の3次元応力空間における形状を示したものである。文献 21)の誘導方法に習ってこの規準を極座標で表せば、図-2に示すように、

$$\hat{l}_0 = \frac{3 \sin \phi_0}{\sqrt{2(2 + \sin^2 \phi_0)}} \hat{p} \quad (3)$$

ここに、

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left( \frac{\hat{\tau}_{SMP}}{\hat{\sigma}_{SMP}} \right) \quad \text{or} \quad \phi_0 = \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{9\hat{I}_3}{\hat{I}_1 \hat{I}_2}} \right) \quad (4)$$

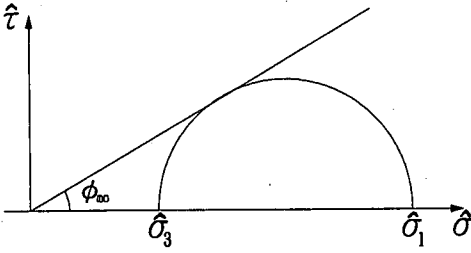


図-3  $\phi_{m0}$  の定義

$$\psi = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left\{ - \left( \frac{3}{2 + \sin^2 \phi_0} \right)^{\frac{3}{2}} \sin \phi_0 \cos 3\theta \right\} \quad \left( 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{3} \right) \quad (5)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left( \frac{3\sqrt{3} \hat{j}_3}{2 \hat{j}_3^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (6)$$

$\hat{p}$  は平均換算主応力 ( $=\hat{I}_1/3 = p + \sigma_0$ ) ,  $\hat{j}_2, \hat{j}_3$  は、偏差換算応力テンソル  $\hat{s}_{ij}$  ( $=\hat{\sigma}_{ij} - \hat{p}\delta_{ij}$ ) の 2 次, 3 次不変量である。三軸圧縮応力状態では、式(4)は次のようになる。

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \left( \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_3}} - \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_3}{\hat{\sigma}_1}} \right) \right) = \tan^{-1} \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \tan \phi_{m0} \right) \quad (7)$$

ここに、 $\phi_{m0}$  は三軸圧縮応力状態での動員角(図-3)であり、応力比を表すパラメータである。

式(3)~(7)を用いて、 $p$  と  $\sigma_0$  一定条件下で図-4に示すように $\pi$ 面上で拡張 SMP 規準を書くことができる。その形は  $\phi_{m0}$  の値がゼロから増加するにつれて点(円形)からオムスピ形に膨らんで最終的( $\phi_{m0}=90^\circ$ )に正三角形になる。これらの曲線は正規圧密粘土の $\pi$ 面上の体積ひずみのコントラインとよく似ている<sup>22), 23)</sup>。すなわち等方圧密応力状態からせん断すると、 $\pi$ 面上の降伏線は最初円形に近くて、破壊時にオムスピ形に近いものである。この変形特性は土の応力誘導異方性によるものと考えられる。したがって、SMP 規準は $\phi$ 材料の、拡張 SMP 規準は $c-\phi$ 材料の $\pi$ 面上の降伏線としてふさわしいものと思われる。三軸圧縮応力状態での拡張 SMP 規準の動径  $\hat{\ell}_0$  は  $\theta=0$  を式(3)に代入すれば、次のように表される。

$$\hat{\ell}_0 = \frac{2\sqrt{6} \sin \phi_0}{\sqrt{8 + \sin^2 \phi_0} - \sin \phi_0} \hat{p} \quad (8)$$

Zienkiewicz and Pande(1977)<sup>9)</sup> は図-2に示すような  $\hat{\ell}_0/\hat{\ell}_0$  を $\pi$ 面上の形状関数  $g(\theta)$  と定義したが、ここでは次式に示すようにこの形状関数  $g(\theta)$  が  $\theta$  だけではなく、 $\phi_{m0}$  の関数にもなるので、 $g(\theta, \phi_{m0})$  と書く。そして $\pi$ 面上の拡張 SMP 規準の形状関数  $g(\theta, \phi_{m0})$  は、式(3)、(8)より

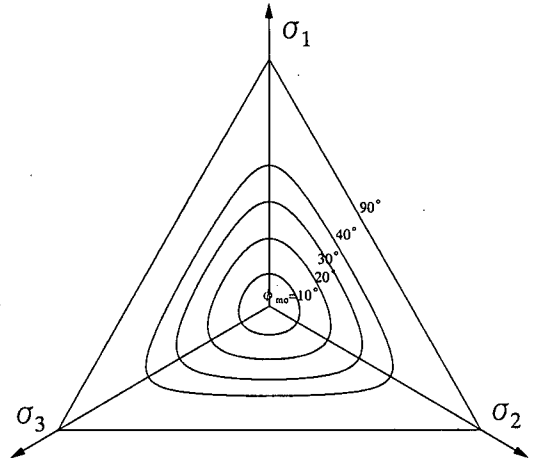


図-4  $\pi$ 面上の拡張 SMP 規準の変化

$$g(\theta, \phi_{m0}) = \frac{\hat{\ell}_\theta}{\hat{\ell}_0} = \frac{\sqrt{3} \left( \sqrt{8 + \sin^2 \phi_0} - \sin \phi_0 \right)}{4\sqrt{2 + \sin^2 \phi_0} \cos \psi} \quad (9)$$

上式より、 $\sigma_0 \rightarrow \infty$ あるいは $\phi_{m0}=0^\circ$ の時には $g(\theta, \phi_{m0})=1$ 。すなわち拡張 SMP 規準が Mises 規準( $\pi$ 面上で円形)となり、 $\phi_{m0}=90^\circ$ の時には、

$$g(\theta, 90^\circ) = \frac{1}{2 \cos \left( \frac{\pi}{3} - \theta \right)} \quad (10)$$

となる。すなわち拡張 SMP 規準の $\pi$ 面上の形状は正三角形になる。したがって、拡張 SMP 規準の形状関数  $g(\theta, \phi_{m0})$  は図-4に示すように三軸圧縮応力状態では1となり、ほかの応力状態では1より小さくて0.5以上になっている。

### 3. 拡張 SMP 規準に基づく弾塑性モデルの3次元化

大抵の土の弾塑性構成式(例えば Cam-clay モデル<sup>1), 2)</sup> は、三軸圧縮応力下で提案・検証されたものである。その降伏関数は次式で表される。

$$f(p, q, H, M) = 0 \quad (11)$$

ここに  $H$  は硬化パラメータであり、 $M$  は三軸圧縮応力下での  $p \sim q$  面上の限界状態線の傾きである。このような構成式は、せん断降伏と強度の規準として Extended Mises 規準を実質上採用している。これは明らかに地盤材料の変形・強度特性を表現するのにふさわしくないので、その改善策としていわゆる  $g(\theta)$  法<sup>9)</sup> が用いられている。この  $g(\theta)$  は本論文の記号で表せば、 $g(\theta, \phi)$  になる。すなわち降伏関数(式(11))は次のように改良される。

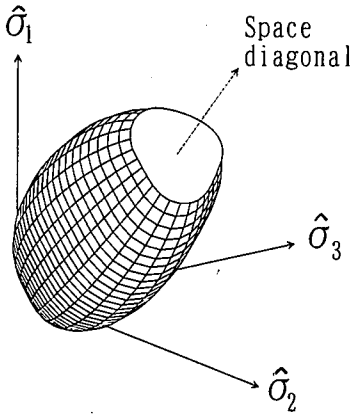


図-5 主換算応力空間での提案モデルの降伏曲面

$$f(p, q/g(\theta, \phi), H, M) = 0 \quad (12)$$

あるいは

$$f(p, q, H, g(\theta, \phi)M) = 0 \quad (12)'$$

式(12)'の方法は $\theta$ に応じて $M$ の値を変えるものである。西川ら<sup>24)</sup>がSMP破壊規準の $g(\theta, \phi)$ を誘導し、式(12)'の方法で中間主応力の影響を考慮した構成式を提案している。しかしながら、式(12)あるいは式(12)'には、 $\pi$ 面上のせん断降伏の形状関数 $g(\theta, \phi_{mo})$ と破壊時の形状関数 $g(\theta, \phi)$ が同じであるという仮定が含まれている。前述のように土の $\pi$ 面上の形状関数はせん断するにつれて円形からオムスピ形に変化することになっているので、式(12)あるいは式(12)'(いわゆる $g(\theta)$ 法)の降伏関数は地盤材料の変形特性を適切に反映するものではない。そこで式(12)を次式に改める。

$$f(p, q/g(\theta, \phi_{mo}), H, M) = 0 \quad (13)$$

この降伏関数は地盤材料の $\pi$ 面上の変形特性を忠実に考慮したものであると思われる。しかし、この降伏面の3次元化の方法を体積ひずみを硬化パラメータとし関連流れ側を採用しているCam-clayモデルのような限界状態モデルに適用すると、以下に説明するような不都合が生じる。例えば、粘着成分を考慮した修正Cam-clayモデルの降伏関数は式(13)に基づいて次式となる。

$$f = \left( \frac{\hat{q}}{g(\theta, \phi_{mo})} \right)^2 + M^2 \hat{p}^2 - M^2 \hat{p} \hat{p}_1 = 0 \quad (14)$$

ここに、 $\hat{p}_1$ は硬化パラメータであり、 $M$ は三軸圧縮応力条件下において $p \sim q$ 面上での限界状態線の傾きであり、 $\hat{p}, \hat{q}$ は次式で与えられる。

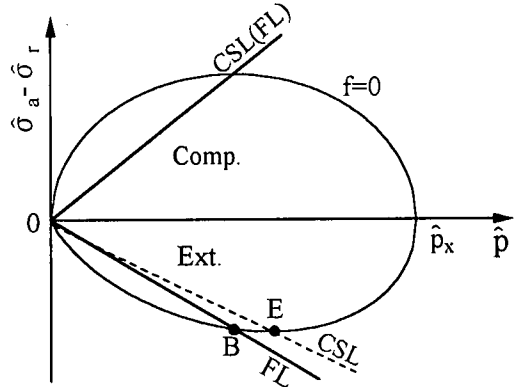


図-6 換算応力 $\hat{p} \sim \hat{q}$ 平面において拡張SMP規準に基づく修正Cam-clayモデルの降伏線

$$\left. \begin{aligned} \hat{p} &= \hat{\sigma}_{11}/3 \\ \hat{q} &= \sqrt{3(\hat{\sigma}_{11} - \hat{p}\hat{\delta}_{11})(\hat{\sigma}_{11} - \hat{p}\hat{\delta}_{11})}/2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(14)の $g(\theta, \phi_{mo})$ に式(9)を用いれば、式(14)は拡張SMP規準に基づく修正Cam-clayモデルの降伏関数を表している。すなわち、図-5に示すように、この降伏面の形は $\pi$ 面上では拡張SMP曲線を呈しながら三軸圧縮条件では修正Cam-clayモデルの降伏曲線と全く同じになっている。図-6は、三軸圧縮・三軸伸張応力条件において式(14)を $\hat{p} \sim (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_3)$ 関係で表したものである。同図より、同じ $\hat{p}$ において三軸伸張側の $\hat{q} (= \hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_3)$ は三軸圧縮側の $\hat{q} (= \hat{\sigma}_3 - \hat{\sigma}_1)$ より小さくなっているのが見られる。両者の比は式(7)と式(9)より次式で与えられる。

$$\frac{\hat{q}_{ext}}{\hat{q}_{comp}} = g(60^\circ, \phi_{mo}) = \frac{\sqrt{8 + \sin^2 \phi_0} - \sin \phi_0}{\sqrt{8 + \sin^2 \phi_0} + \sin \phi_0} = \frac{3 - \sin \phi_{mo}}{3 + \sin \phi_{mo}} \quad (16)$$

ここに、 $\hat{q}_{comp}, \hat{q}_{ext}$ は同じ $\hat{p}$ における三軸圧縮と三軸伸張条件下の同じ降伏面上の $\hat{q}$ の値であり、 $g(60^\circ, \phi_{mo})$ は式(9)の $g(\theta, \phi_{mo})$ に $\theta = 60^\circ$ を入れたものである。式(16)より $\phi_{mo}$ (応力比)がゼロから $90^\circ$ へ増加するにつれて $g(\theta, \phi_{mo})$ が1から1/2へ変化する。三軸伸張側の $\hat{q}$ の値が最大である点(E)は破壊線(FL)の左側にある。すなわち、三軸圧縮側で限界状態線(CSL)が破壊線(FL)と一致しても、三軸伸張側ではCSLがFLと一致しないことになる。応力空間で関連流れ側を採用すれば、BE範囲では塑性ひずみ増分ベクトルの方向が下左向きとなり、Cam-clayモデルのような塑性体積ひずみを硬化パラメータとする弾塑性モデルでは不都合が生じる。大槌(1980)はすでにこれと類似する問題を指摘している<sup>25)</sup>。これは、SMP規準あるいは拡張SMP規準を弾塑性モデルに持ち込む場合だけではなく、 $\pi$ 面上の形状関数がせん断応力比( $\phi_{mo}$ )につれて変わる他の規準(例えば、Ladeの規準<sup>4)</sup>)

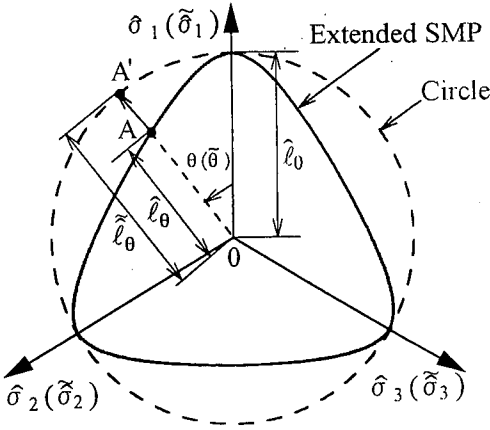


図-7  $\pi$  面と $\pi$  面上における拡張 SMP 規準

も同じ問題をかかえている。そこで、このような限界状態時の応力条件と破壊規準が一致しない問題点を解決する1つの方法として、次に変換応力 $\tilde{\sigma}$ のアプローチを導入する。

#### 4. 拡張 SMP 規準に基づいた変換応力

SMP 規準に基づいて Cam-clay モデルを修正するために、SMP 規準に基づいた変換応力の概念をすでに提案している<sup>7)</sup>。ここで拡張 SMP 規準を  $c-\phi$  材料の弾塑性モデルに適用させるために、上記の変換応力の考え方を拡張 SMP 規準を用いて拡張する。図-7 に示すように通常の換算応力 $(\hat{\sigma}_{ij})$ 空間の $\pi$ 面上での拡張 SMP 曲線(実線)を変換応力 $(\tilde{\sigma}_{ij})$ 空間の $\pi$ 面上( $\pi$ 面と呼ぶ)での円(点線)に変換するために、換算応力空間の点 A を $\hat{\sigma}_{ij}$ 、変換空間の点 A' を $\tilde{\sigma}_{ij}$ とし、以下の3式を立てる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p} &= \hat{p} \\ \tilde{\ell}_0 &= \hat{\ell}_0 \\ \tilde{\theta} &= \hat{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここに、 $\tilde{p}$  は変換応力テンソル $\tilde{\sigma}_{ij}$ の平均主応力で、 $\tilde{\theta}$  は図-7 に示しているように $\pi$ 面上での $\tilde{\sigma}_{ij}$ 方向と OA' の夾角である。式(17)より、点 A に対する点 A' の変換応力 $\tilde{\sigma}_{ij}$ は $\hat{\sigma}_{ij}$ と $\tilde{\sigma}_{ij}$ の主軸方向が一致する条件の下で次のように求められる。

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{p}\delta_{ij} + \tilde{s}_{ij} = \hat{p}\delta_{ij} + \frac{\hat{\ell}_0}{\ell_0}\hat{s}_{ij} = \hat{p}\delta_{ij} + \frac{\hat{s}_{ij}}{g(\theta, \phi_{mo})} \quad (18)$$

あるいは

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \hat{p}\delta_{ij} + \frac{\hat{\ell}_0}{\ell_0}\hat{s}_{ij} = \hat{p}\delta_{ij} + \frac{\hat{\ell}_0}{\sqrt{\hat{s}_{ij}\hat{s}_{ij}}}\hat{s}_{ij} \quad (18)'$$

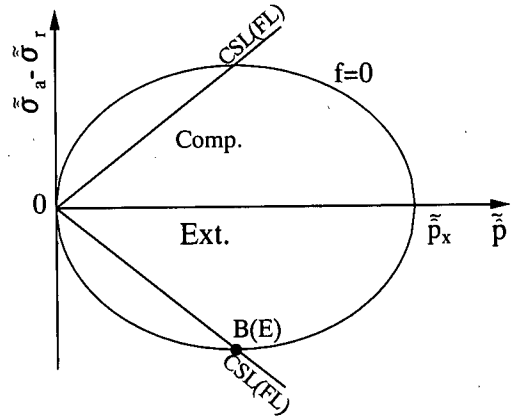


図-8 変換応力 $\tilde{p} \sim \tilde{q}$ 平面において拡張 SMP 規準に基づく修正 Cam-clay モデルの降伏線

ここに、 $\hat{\ell}_0, g(\theta, \phi_{mo})$ は式(8)、(9)より求められる。拡張 SMP 規準を式(18)に示すような変換応力 $(\tilde{\sigma}_{ij})$ 空間で表せば、座標原点を頂点とし空間対角線を軸とする円錐面の形となっている。周知のように Extended Mises 規準は主応力空間で空間対角線を軸とする円錐面の形になるので、この両者の相似性を利用して、 $c-\phi$ 材料の弾塑性モデルの3次元化を図る。また、変換応力を用いれば、式(14)は次のようになる。

$$f = \tilde{q}^2 + M^2\tilde{p}^2 - M^2\tilde{p}\tilde{p}_x = 0 \quad (19)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p} &= \tilde{\sigma}_{ij}/3 \\ \tilde{q} &= \sqrt{3(\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{p}\delta_{ij})(\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{p}\delta_{ij})/2} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

図-8 は三軸圧縮・三軸伸張応力条件において、式(19)を $\tilde{p} \sim (\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{p}\delta_{ij})$ 関係で表したものである。図-8 と図-6 では座標が違いますが、同じ降伏線( $f=0$ )と破壊線(FE)を表している。図-8 より、 $\tilde{p} \sim \tilde{q}$ 平面での降伏曲線の形は $p \sim q$ 平面での修正 Cam-clay モデルの降伏線の形と全く同じであり、三軸圧縮側と三軸伸張側で両方とも CSL が FL と一致していることがわかる。したがって、上述のように変換応力空間で関連流れ則を採用すれば、図-6 に示したような BE 範囲が存在しないことになり、前に指摘した不都合もなくなる。

#### 5. 変換応力を用いたセメント混合砂のストレス・ダイレイタンス関係

Cam-clay モデルでは、 $q/p \sim -de_v^p/de_v^p$  関係 ( $de_v^p = de_{ij}^p, de_v^p = \sqrt{(de_{ij}^p - de_{ij}^p/3)(de_{ij}^p - de_{ij}^p/3)}$ ) で正規圧密粘土のダイレイタンス特性を整理しているが、図-9 は平均有効主応力 $p$ 一定条件( $p=588\text{kPa}, 980\text{kPa}, 1960\text{kPa}$ )

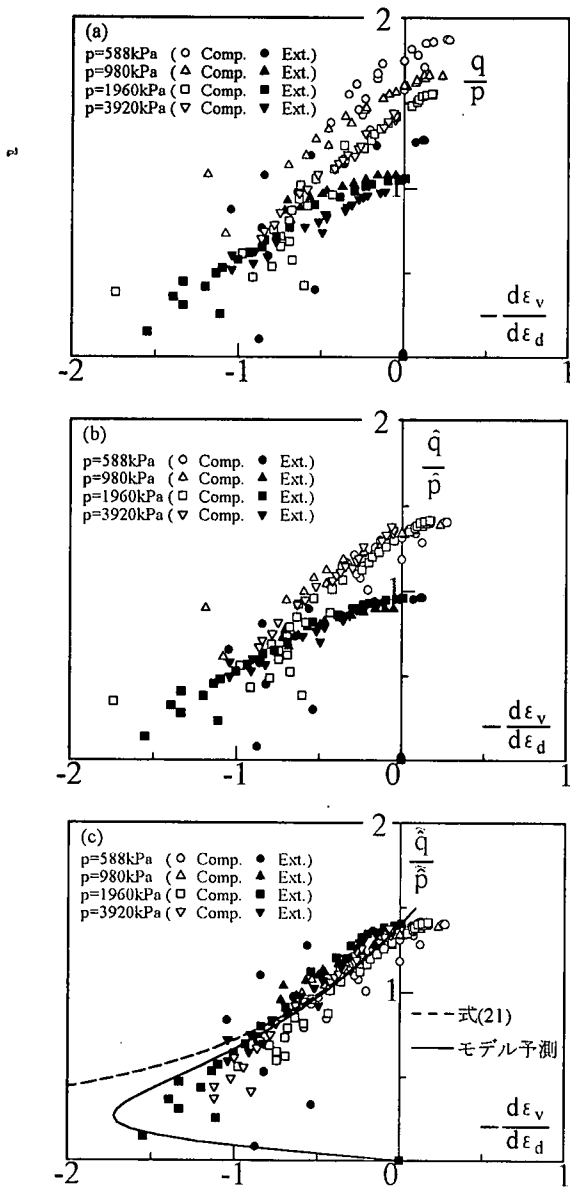


図-9 セメント混合砂 A-I のストレス・ダイレイタンスー関係

および 3920 kPa) 下で得られたセメント混合砂 A-I の三軸圧縮・三軸伸張試験結果<sup>9)</sup>を  $q/p \sim -d\epsilon_v/d\epsilon_d$ ,  $\tilde{q}/\tilde{p} \sim -d\epsilon_v/d\epsilon_d$  および  $\tilde{\tilde{q}}/\tilde{\tilde{p}} \sim -d\epsilon_v/d\epsilon_d$  関係で整理したものである。後述の図-10(a)に示すようにセメント混合砂 A-I の見かけの圧密降伏応力を決めるのは難しいが、一軸圧縮強度<sup>9)</sup>より推定すれば、その値は約 600 kPa である。したがって、図-9 に示してあるデータは見かけの圧密降伏応力を越えた応力範囲での三軸試験結果であると思われる。図-9(a)より、 $p$  あるいは応力経路 (三軸圧縮か三軸伸張か) の違いによりセメント混合砂の  $q/p \sim -d\epsilon_v/d\epsilon_d$  の関係が変わるの

が見られる。セメント混合砂は粘着成分があるので、換算応力を用いたほうがよいと考えられる。換算応力を用いたストレス・ダイレイタンスー関係が  $\tilde{q}/\tilde{p} \sim -d\epsilon_v/d\epsilon_d$  であるので、この関係で図-9(a)と同じデータを整理したのが図-9(b)である。同図より三軸圧縮あるいは三軸伸張応力条件に限れば、 $p$  が違ってもほぼ同じ  $\tilde{q}/\tilde{p} \sim -d\epsilon_v/d\epsilon_d$  関係が得られるが、三軸圧縮か三軸伸張かの応力経路の違いによって  $\tilde{q}/\tilde{p} \sim -d\epsilon_v/d\epsilon_d$  関係が違ってくる。そこで、拡張 SMP 規準に基づく変換応力を用いてセメント混合砂のダイレイタンスー特性を整理したのが図-9(c)である。すなわち、 $\tilde{\tilde{q}}/\tilde{\tilde{p}} \sim -d\epsilon_v/d\epsilon_d$  関係でセメント混合砂のせん断試験結果を整理した。図-9(c)より粘着性成分がある摩擦性材料であるセメント混合砂のダイレイタンスー特性を  $\tilde{\tilde{q}}/\tilde{\tilde{p}} \sim -d\epsilon_v/d\epsilon_d$  関係で整理すれば  $p$  が違っても、あるいは応力経路 (三軸圧縮か三軸伸張) が違っても唯一な関係が見られる。すなわち、拡張 SMP 規準に基づいた変換応力の第 1 次不変量 ( $\tilde{\tilde{p}}$ ) とその偏差成分の第 2 次不変量 ( $\tilde{\tilde{q}}$ ) を用いて、3 次元応力下でのセメント混合砂のダイレイタンスー特性を統一的に整理できた。この 3 次元応力条件下での唯一な関係を利用して c- $\phi$  材料の弾塑性モデルを構築する。

## 6. 拡張 SMP 規準に基づく変換応力を用いた c- $\phi$ 材料の弾塑性モデル

セメント混合砂のほぼ唯一な  $\tilde{\tilde{q}}/\tilde{\tilde{p}} \sim -d\epsilon_v/d\epsilon_d$  関係に基づいて、c- $\phi$  材料のダイレイタンスー特性を修正 Cam-clay モデルのストレス・ダイレイタンスー式<sup>2)</sup>を拡張して次式で与える。

$$\frac{d\epsilon_v^e}{d\epsilon_d^e} = \frac{M^2 - (\tilde{\tilde{q}}/\tilde{\tilde{p}})^2}{2\tilde{\tilde{q}}/\tilde{\tilde{p}}} \quad (21)$$

図-9(c)に破線で式(21)を示しているが、これは  $\tilde{\tilde{q}}/\tilde{\tilde{p}} \sim -d\epsilon_v^e/d\epsilon_d^e$  平面で描いたものである。弾性ひずみ成分を含めて描くと、本文の提案モデルによる三軸圧縮応力下の  $\tilde{\tilde{q}}/\tilde{\tilde{p}} \sim -d\epsilon_v/d\epsilon_d$  関係は図-9(c)の実線で示したものとなる。実測値をほぼ表現しているのが見られる。

式(21)と直交則を組み合わせれば、次式の塑性ポテンシャル関数  $\psi$  が得られる。

$$\psi = \tilde{\tilde{q}}^2 + M^2 \tilde{\tilde{p}}^2 - M^2 \tilde{\tilde{p}} \tilde{\tilde{q}} = 0 \quad (22)$$

上式は粘着成分を考慮した修正 Cam-clay モデルの塑性ポテンシャル関数である。関連流れ則を採用すれば、式(19)に示したような降伏関数が得られる。この降伏曲面は三軸圧縮応力条件では粘着成分  $\sigma_0$  を考慮した修正 Cam-clay モデルの降伏曲面と同じであるが、他の 3 次元

応力経路では、修正 Cam-clay モデルの降伏曲面と違って  
いる。すなわち  $\pi$  面上での降伏線の形は円形ではなくて  
拡張 SMP 曲線を呈している。ここで、後続降伏曲面を決め  
るため、硬化パラメータ  $H$  と硬化関数を決定しなければ  
ならない。硬化パラメータ  $H$  の増分を次式で与える。

$$dH = \frac{M_t'}{M_t'} \cdot \frac{M_t' - (\tilde{q}/\tilde{p})^4}{M_t' - (\tilde{q}/\tilde{p})^4} de_p^e \quad (23)$$

ここに、 $M_t$ ,  $M_t'$  はそれぞれ変相点 ( $de_p^e = 0$ ) および  $\epsilon_p^e \rightarrow \infty$   
時の  $\tilde{q}/\tilde{p}$  である。この硬化パラメータ  $H$  の増分は次のよ  
うな特徴を持っている。

- (1) 等方圧密時 ( $\tilde{q} = 0$ ),  $dH = de_p^e$
- (2)  $0 < \tilde{q}/\tilde{p} < M$  時,  $dH > 0, de_p^e > 0$
- (3)  $\tilde{q}/\tilde{p} = M$  時,  $dH > 0, de_p^e = 0$
- (4)  $M < \tilde{q}/\tilde{p} < M_t$  時,  $dH > 0, de_p^e < 0$
- (5)  $\tilde{q}/\tilde{p} = M_t$  時,  $dH = 0, de_p^e \rightarrow \infty$

また  $M = M_t$  の時,  $dH = de_p^e$ 。すなわち、硬化パラメータ  $H$   
が塑性体積ひずみ  $\epsilon_p^e$  になり、正規圧密粘土など負のダイ  
レイタンシー特性だけを示す材料に適することになる。  
 $dH$  の物理的意味については、式(21)を式(23)に代入すれ  
ば、 $dH$  は  $de_p^e$  と  $de_p^e$  のある組み合わせになっていること  
がわかる。式(23)の4乗になる意味については、参考文  
献 26) を参考されたい。硬化関数を求めるため、等方圧密  
時の応力~ひずみ関係がよく用いられている。等方圧密  
応力条件下での  $c$ - $\phi$  材料の変形特性をよく表現するため  
に、 $e \sim \log p$  の直線関係ではなくて、次式で表される  
ベキ関数を仮定する。

$$\epsilon_v = C_1 \left\{ \left( \frac{\hat{p}_x}{P_a} \right)^m - \left( \frac{\hat{p}_0}{P_a} \right)^m \right\} \quad (24)$$

ここに  $C_1$ ,  $m$  は等方圧縮変形特性を表す材料パラメータで  
ある。 $\hat{p}_0$  は初期換算平均主応力、 $P_a$  は大気圧である。こ  
のようなベキ数関係で砂などの粒状材料の等方圧密時の  
応力~ひずみ関係を表すのはすでに行われている<sup>27), 28)</sup>。  
等方圧密時に弾性体積ひずみ成分も換算平均主応力との  
関係をベキ関数と仮定すると、

$$\epsilon_v^e = \epsilon_v - \epsilon_v^e = (C_1 - C_c) \left\{ \left( \frac{\hat{p}_x}{P_a} \right)^m - \left( \frac{\hat{p}_0}{P_a} \right)^m \right\} \quad (25)$$

ここに、 $C_c$  は等方膨張変形特性を表す材料パラメータで  
ある。

式(25)を式(23)に代入して、等方圧密応力条件を考慮  
して式を整理すると、次式の硬化関数が得られる。

$$\hat{p}_x = \left( \frac{P_a^m H}{C_1 - C_c} + \hat{p}_0^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (26)$$

式(26)を式(19)に代入して

$$f = \tilde{q}^2 + M^2 \tilde{p}^2 - M^2 \tilde{p} \left( \frac{P_a^m H}{C_1 - C_c} + \tilde{p}_0^m \right)^{\frac{1}{m}} = 0 \quad (27)$$

これが提案する  $c$ - $\phi$  材料の弾塑性モデルの降伏関数であ  
る。

次に提案モデルの具体的な応力~ひずみ関係を誘導す  
る。全ひずみ増分  $d\epsilon_{ij}$  は、弾性ひずみ増分  $d\epsilon_{ij}^e$  と塑性ひず  
み増分  $d\epsilon_{ij}^p$  との和で表される。すなわち

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (28)$$

弾性成分に対しては、フックの法則に従うとする。

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{E} p d\delta_{ij} \quad (29)$$

ここに、 $\nu$  はポアソン比で、 $E$  はヤング係数であり、次式  
で表される。

$$E = \frac{3(1-2\nu)p_s^m}{mC_2 \hat{p}^{m-1}} \quad (30)$$

塑性変形過程において、変換応力 ( $\tilde{\sigma}_{ij}$ ) 空間で関連流動  
則を満たしているので、塑性ひずみ増分  $d\epsilon_{ij}^p$  は次式で表  
される。

$$d\epsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} \quad (31)$$

ここに、 $\Lambda$  は正のスカラーであり、適合条件から決定さ  
れる。すなわち、

$$df = \frac{\partial f}{\partial \tilde{p}} d\tilde{p} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} d\tilde{q} + \frac{\partial f}{\partial H} dH = 0 \quad (32)$$

式(31)を式(23)に代入して、さらに式(32)に代入すれば、

$$\Lambda = - \frac{M_t' M_t' - (\tilde{q}/\tilde{p})^4}{M_t' M_t' - (\tilde{q}/\tilde{p})^4} \left( \frac{\partial f}{\partial \tilde{p}} d\tilde{p} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} d\tilde{q} \right) / \frac{\partial f}{\partial H} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} \quad (33)$$

ここに、式(27)より

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{p}} = 2M^2 \tilde{p} - M^2 \left( \frac{P_a^m H}{C_1 - C_c} + \tilde{p}_0^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (34)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} = 2\tilde{q} \quad (35)$$

$$\frac{\partial f}{\partial H} = - \frac{M^2 \tilde{p} P_a^m}{m(C_1 - C_c)} \left( \frac{P_a^m H}{C_1 - C_c} + \tilde{p}_0^m \right)^{\frac{1-m}{m}} \quad (36)$$

式(20), (27)より

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{p}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (38)$$

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} = \frac{3}{2\tilde{q}} (\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{p} \delta_{ij}) \quad (39)$$

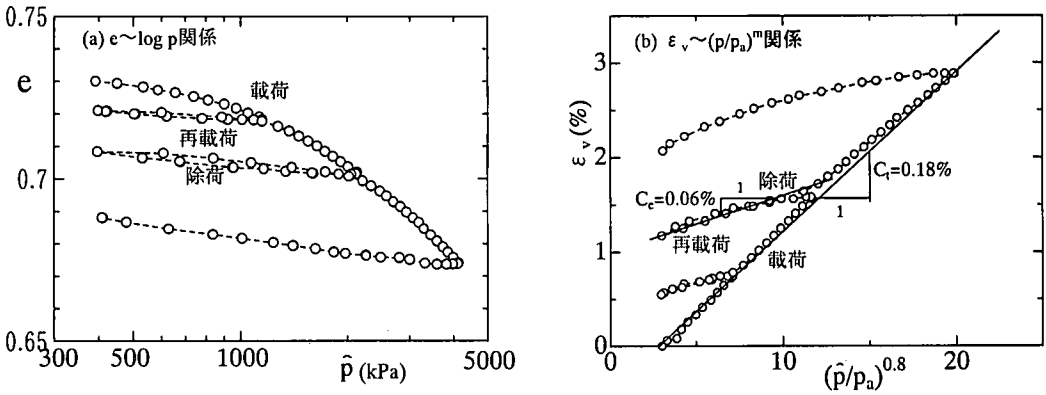


図-10 セメント混合砂 A-I の等方圧縮・膨張試験結果

表-1 地盤材料のモデルパラメータ

	M	$M_r$	$\sigma_0$ (kPa)	m	$C_c$ (%)	$C_e$ (%)
セメント混合砂 A-I	1.40	1.50	196	0.8	0.18	0.06
セメント混合砂 C-III	1.30	1.60	245	0.4	1.66	0.64
締固め粘土	1.30	1.30	39	0.7	3.00	1.00
豊浦砂	1.00	1.42	98	0.4	0.68	0.47
ロック材	1.68	1.72	84	0.8	0.34	0.20
コア材	1.45	1.47	42	0.5	2.14	1.28

## 7. 各種地盤材料へのモデルの適用

提案モデルの材料パラメータは  $C_c$ ,  $C_e$ ,  $m$ ,  $M$ ,  $M_r$ ,  $\sigma_0$ ,  $\nu$  である。 $C_c$ ,  $C_e$ ,  $m$  は  $c$ - $\phi$  材料の等方圧密試験の載荷および除荷時の体積ひずみが平均換算主応力  $\sigma_0$  のべき関数で表されることから決定される。 $M_r$ ,  $\sigma_0$  は破壊時のモールの応力円により得られる  $c$ ,  $\phi$  の値から  $M_r = 6 \sin \phi / (3 - \sin \phi)$ ,  $\sigma_0 = c \cdot \cot \phi$  を用いて決定される。実際問題の応力範囲では、一定の  $c$ ,  $\phi$  で地盤材料の強度を近似的に表せると考えられる。 $M$  の値については、排水三軸圧縮試験結果を  $\bar{q}/\bar{p} \sim -d\epsilon_v^p/d\epsilon_v^e$  関係で整理して切片の値は  $M$  であり、あるいは側圧一定の排水三軸圧縮試験 (CD 試験) による変相点 ( $d\epsilon_v = 0$ ) が非排水三軸圧縮試験 (CU 試験) による変相点 ( $dp=0$ ) の  $\bar{q}/\bar{p}$  の値を用いる。提案モデルは修正 Cam-clay 系のモデルと考えられるので、ポアソン比  $\nu$  は 0.3 と仮定する。したがってモデルのパラメータは等方圧密試験 (載荷, 除荷および再載荷) とこれに続く三軸圧縮せん断試験 (CD 試験か CU 試験) によって決定される。表-1 はモデルで予測を行う 6 種類の地盤材料のモデルパラメータの値を示している。

### (1) セメント混合砂への適用

表-1 には  $c$ - $\phi$  材料である 2 種類のセメント混合砂 A-I, C-III のモデルパラメータの値を示している。これらのパラメータの内、説明を要するのは  $\sigma_0$  の決め方であろう。セメント混合砂の  $\sigma_0$  は圧密あるいはせん断の進行につれてだんだん減少すると考えられるが、正確に評価するのはかなり難しいと思われるので、実用的な方法としてせん断ピーク強度まで一定と仮定し、ピーク強度時のモール応力円の接線から決定した。A-I の混合重量比については、豊浦砂 : セメント : 水 : 粘土粉末 = 11.7 : 1 : 4.8 : 1.5 であり、C-III の混合重量比については、豊浦砂 : セメント : 水 : 粘土粉末 = 30 : 1 : 6 : 1.5 である。A-I と C-III の変形・強度特性については、文献 (9), (19) を参照されたい。図-10 には、A-I の等方圧縮・膨張試験結果を (a)  $e \sim \log \bar{p}$  関係と (b)  $\bar{\epsilon}_v \sim \bar{p}^m$  関係で示している。同図より、 $e \sim \log \bar{p}$  関係で圧密試験結果を二直線で近似するのは精度があまりよくないのが見られるが、 $\bar{\epsilon}_v \sim \bar{p}^m$  関係で圧密試験結果を精度よく近似できるのが見られ、 $C_c=0.18\%$ ,  $C_e=0.06\%$ ,  $m=0.8$  と決定できる。図-11, 12 はそれぞれセメント混合砂 A-I の側圧 ( $\sigma_3$ ) 一定での三軸圧縮試験の実測値 (○プロット) と提案モデルによる予測値 (実線) の比較、平均主応力 ( $\bar{p}$ ) 一定での三軸圧縮・三軸伸張試験の実測値<sup>9)</sup> と予測値の比較を示したものである。図-11, 12 より、 $\sigma_3$  あるいは  $\bar{p}$  が違っても、または応力経路が違っても提案モデルが実測値をほぼ予測できるのが見られる。図-13 はセメント混合砂 C-III の  $\bar{p}$  一定での多軸試験の実測値<sup>19)</sup> (各種プロット) と予測値 (実線) の比較を表したものである (図中の  $\theta$  については図-2 参照)。同図より、相異なる 3 主応力条件下でも提案モデルがセメント混合砂のダイレイタンスー特性を含む変形・強度特性をほぼ説明しているのが見られる。



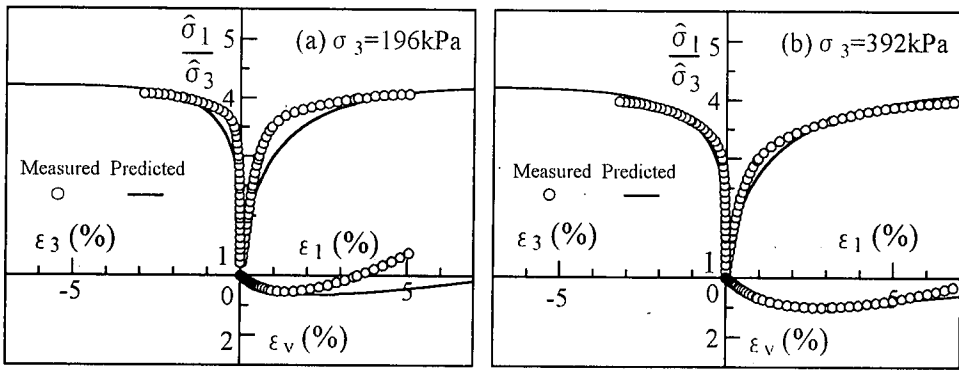


図-11 セメント混合砂 A-I の三軸圧縮試験結果とモデル予測 ( $\sigma_3$ 一定)

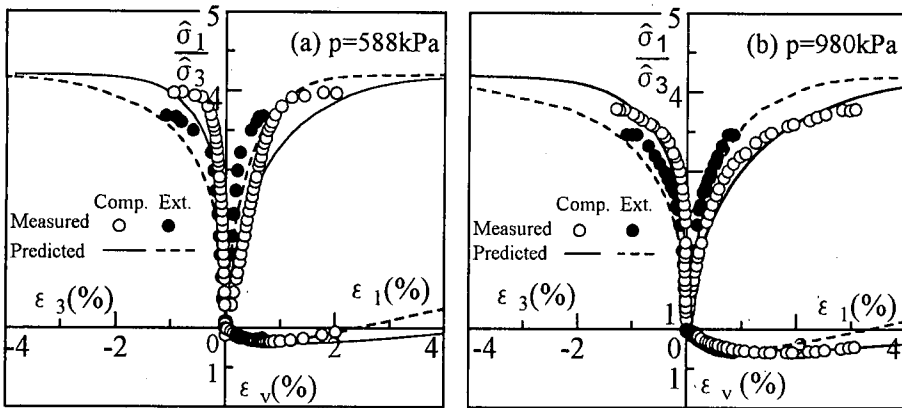


図-12 セメント混合砂 A-I の三軸圧縮・伸張試験結果とモデル予測 ( $p$ 一定)

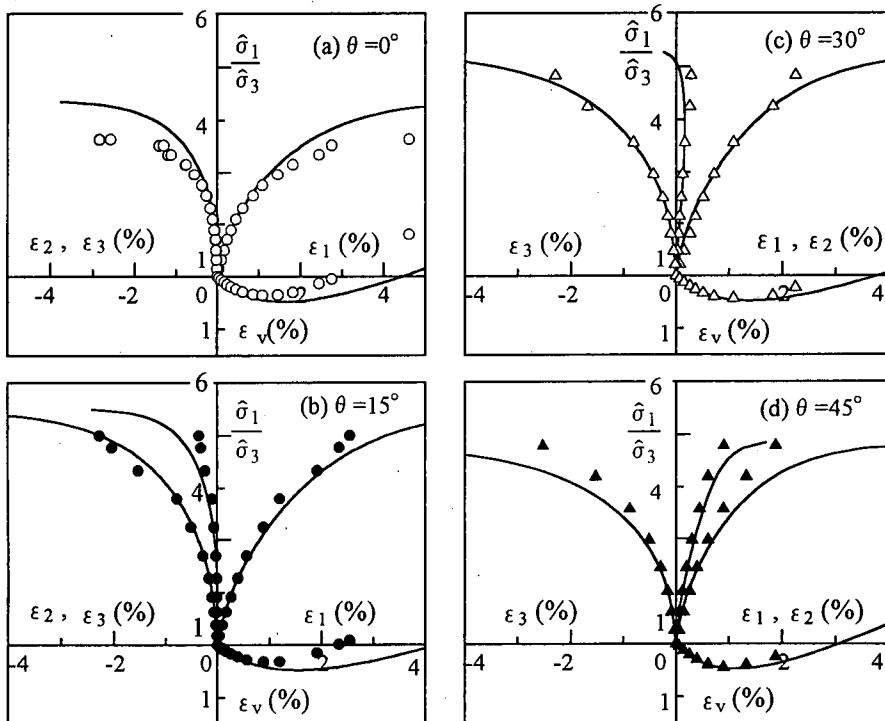


図-13 セメント混合砂 C-III の多軸試験結果とモデル予測 ( $p = 784 \text{ kPa}$ )

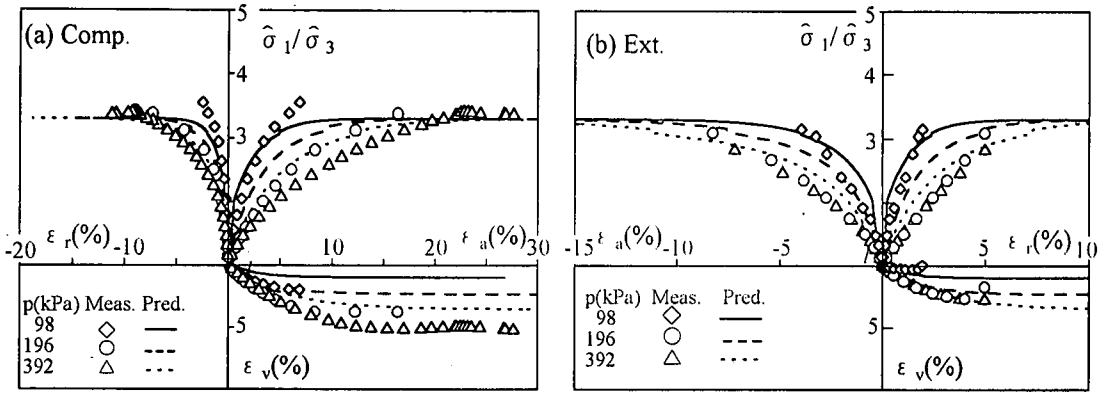


図-14 サクシオン一定の締固め粘土の三軸圧縮・伸張試験結果とモデル予測 ( $s=147\text{kPa}$ )

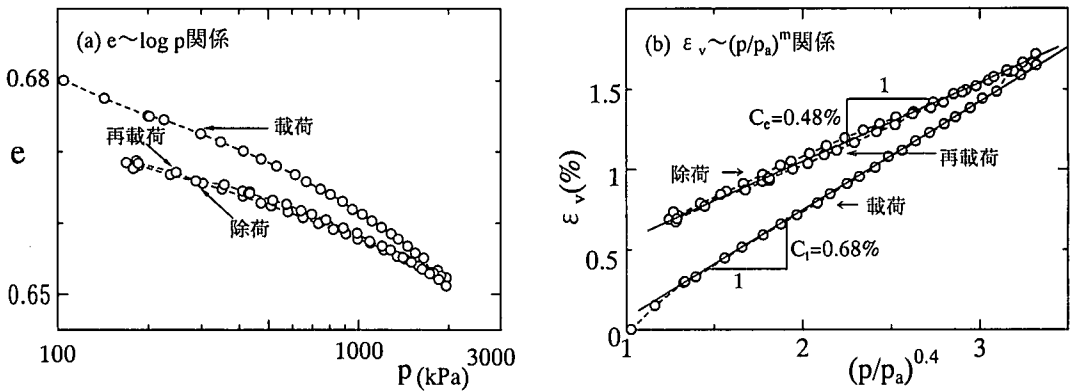


図-15 豊浦砂の等方圧縮・膨張試験結果

## (2) 締固め粘土への適用

盛土やロックフィルダムのコアに用いられている締固め粘土は不飽和状態で、サクシオンによる粘着力がある。浸水などにより含水比が大幅に変わる以外は、締固め粘土のサクシオンはそう変わらないと考えられる。そこで、サクシオン一定条件下で得られた不飽和カオリン粘土の三軸試験結果を用いて、モデルの適用性を検証する。図-14は、サクシオン  $s=147\text{kPa}$  と異なる拘束応力条件下での締固めカオリン粘土の三軸圧縮・三軸伸張試験結果<sup>20)</sup>と提案モデルによる予測結果を示している。用いたモデルパラメータの値は表-1に示す。同図より、モデルは3次元応力状態での締固め粘土の応力・ひずみ関係をほぼ予測できるだけでなく、その関係の拘束応力依存性も表現できる。この拘束応力依存性は直線的な  $e \sim \log p$  関係を硬化則とする弾塑性モデルでは表現できないものである。その理由については付録を参照されたい。

## (3) 砂や粗粒材への適用

以上のセメント混合砂と締固め粘土へのモデルの適用性の検討より、提案モデルは変形途中に  $\sigma_0$  があまり変化

しない地盤材料に適すると思われる。一方、砂や粗粒材の場合には粘着力がないので  $\sigma_0=0$  と考えられるが、拘束応力が高いほど正のダイレイタンスィが出にくいので、せん断ピーク強度時の応力比が拘束応力の増加につれて小さくなるのが見られる。広い応力範囲では上に凸なモールの応力円周の破壊包絡線を直線で近似すれば、見かけの粘着成分が少しあるのが知られている。すなわち、粒状材料の三軸圧縮応力下のピーク強度は  $\tau_f = \sigma \tan \phi$  ではなくて  $\tau_f = c + \sigma \tan \phi$  となり、3次元応力下のピーク強度は SMP 規準ではなくて拡張 SMP 規準となる。この破壊時だけの  $c$ - $\phi$  材料のような特性を表現するため、式(23)の硬化パラメータ  $H$  を次式のように修正する。

$$dH = \frac{M^4}{M_i^4} \cdot \frac{M_i^4 - (\tilde{q}/\tilde{p})^4}{M^4 - (\tilde{q}/\tilde{p})^4} d\epsilon^p \quad (40)$$

ここに、 $\tilde{q}, \tilde{p}$  は  $\sigma_0=0$  時の  $\tilde{q}, \tilde{p}$  である。すなわち、SMP 規準に基づく変換応力による  $q, p$  である<sup>7)</sup>。式(23)をこのように修正した理由は、 $dH$  の分子項がゼロになる時はピーク強度の式になるためである。ちなみに、 $dH$  の分母項がゼロになる時は変相応力条件の式であるので砂や粗粒

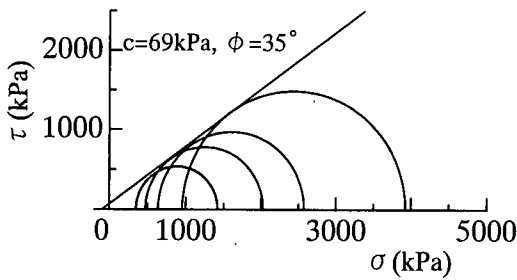


図-16 ピーク強度時の豊浦砂のモール応力円と包絡線

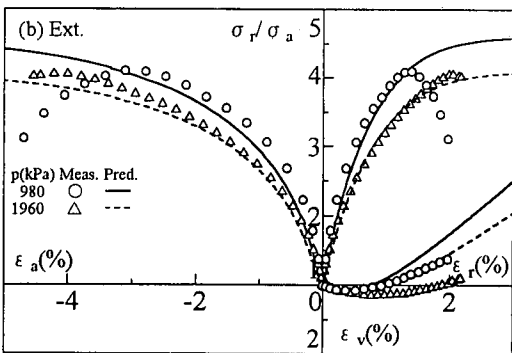
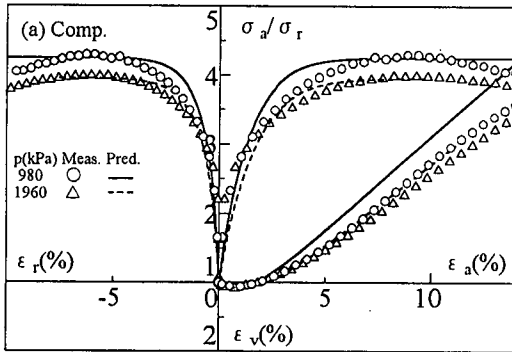


図-17 豊浦砂の三軸圧縮・伸張試験結果とモデル予測 (p一定)

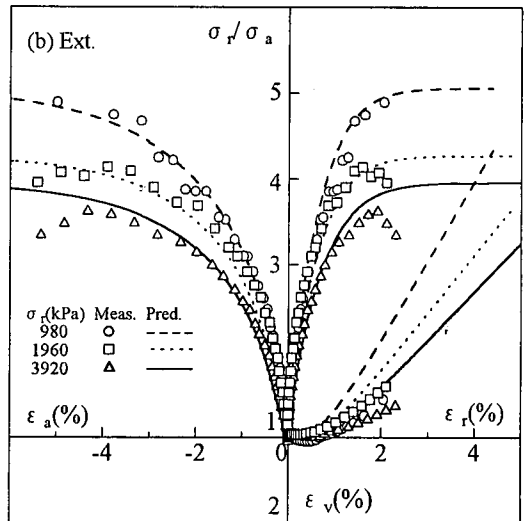
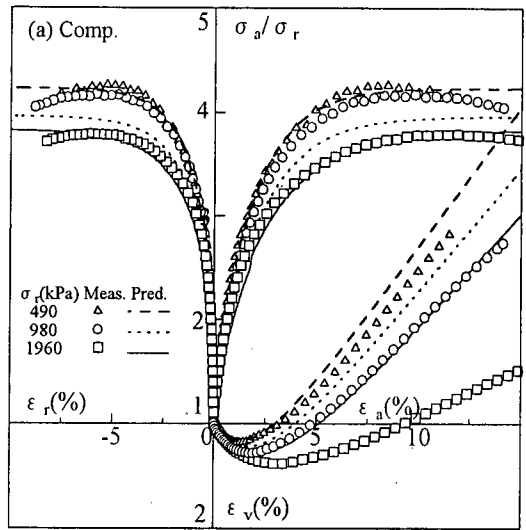


図-18 豊浦砂の三軸圧縮・伸張試験結果とモデル予測 (σ<sub>r</sub>一定)

材の場合には粘着成分を考慮する必要がないのである。

以下は、まず中圧三軸試験機を用いて豊浦砂に対して実施した排水三軸試験結果<sup>17)</sup>とモデルによる予測結果を示す。次に大型三軸試験機(供試体φ30×72cm)を用いて最大粒径 $D_{max}=50\text{mm}$ のロック材に対して実施した排水三軸圧縮試験結果および中型三軸試験機(供試体φ10×20cm)を用いて最大粒径 $D_{max}=20\text{mm}$ のコア材に対して実施した非排水三軸試験結果<sup>18)</sup>とモデルによる予測を示す。

図-15は、初期間隙比 $e_0=0.68$ の豊浦砂の等方応力載荷→除荷→再載荷時の試験結果を(a)  $e \sim \log p$  関係と(b)  $\epsilon_v \sim p^m$  関係で示している。同図より、セメント混合砂の場合と同じように、 $e \sim \log p$  関係で圧密試験結果を二直線で近似するのは精度があまりよくないのが見られ

るが、 $\epsilon_v \sim p^m$  関係で圧密試験結果を精度よく近似できるのが見られ、 $C_c=0.68\%$ 、 $C_e=0.47\%$ 、 $m=0.4$ と決定した。図-16は、初期間隙比 $e_0=0.68$ の豊浦砂の三軸圧縮・三軸伸張試験結果により得られたピーク強度時のモールの応力円とその包絡線を示している。同図の $c$ 、 $\phi$ より $M=1.42$ 、 $\sigma_0=98\text{kPa}$ と決定した。排水三軸圧縮試験結果より変相点の応力比( $q/p$ )の値 $M=1.0$ が求められる。図-17、18はそれぞれ平均主応力( $p$ )一定、側圧( $\sigma_r$ )一定の三軸圧縮・三軸伸張試験による実測値と予測値を示している。実測の応力比 $\sim$ ひずみ関係は拘束応力が高くなるほど下がっているのがみられ、また拘束応力が高いほどピーク時の応力比が小さくなる。図-17、18より、提案モデルは砂の変形・強度特性の拘束応力依存性の傾向をうま

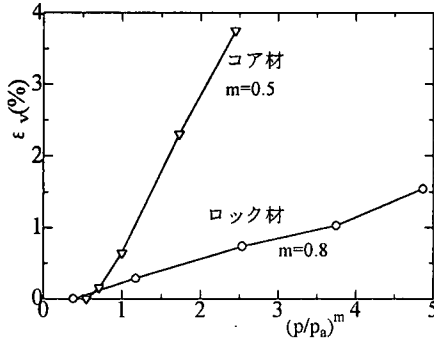


図-19 ロック材とコア材の等方圧縮変形特性

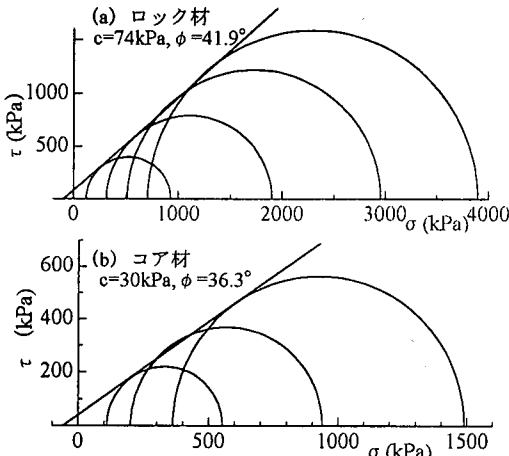


図-20 ロック材とコア材の破壊時のモールの応力円

く表現しているのがわかる。なお、図-17, 18 中の予測値よりわかるように本モデルは密な砂のような地盤材料が示すひずみ軟化特性を表現できない。また、図-14, 17, 18 に見られるように一部の実測値と予測値に差異が認められるので、今後モデルの予測精度を検討する必要がある。

図-19 は、コア材(最大粒径 20mm)とロック材(最大粒径 50mm)の等方応力載荷時の体積ひずみ～平均主応力の関係をベキ関数と仮定して整理したものである。同図より、 $\epsilon_v \sim (p/p_a)^m$  の関係はほぼ直線関係を示していることがわかる。図-20 は、ロック材の側圧一定の排水大型三軸圧縮試験とコア材の側圧一定の間隙水圧を測定した非排水中型三軸圧縮試験によって得られた破壊時のモールの応力円とその包絡線を示している。表-1 にはモデルの予測に必要な材料パラメータの値を示す。ここで、 $C_c, m$  は図-19 より直接決定できるが、 $C_c$  は豊浦砂の実測による  $C_c$  と  $C_c$  の関係 ( $C_c \approx 0.6C_c$ ) を参考して推定された。 $M_r, \sigma_c$  は図-20 による  $c, \phi$  の値より決定した。

図-21 はロック材の大型三軸圧縮試験結果とモデル予測による応力～ひずみ関係を示している。同図より、提

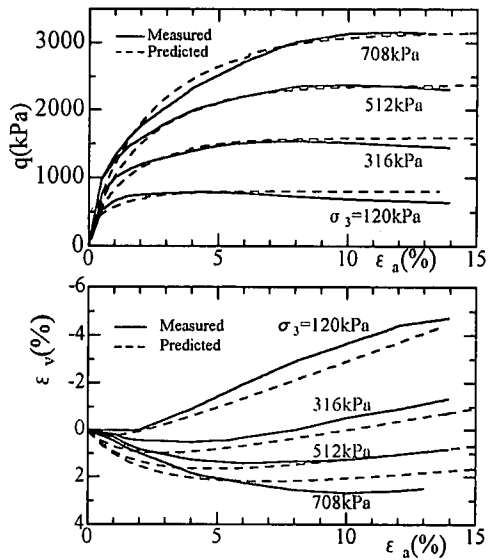


図-21 ロック材の三軸圧縮試験結果とモデル予測 ( $\sigma_3$ 一定)

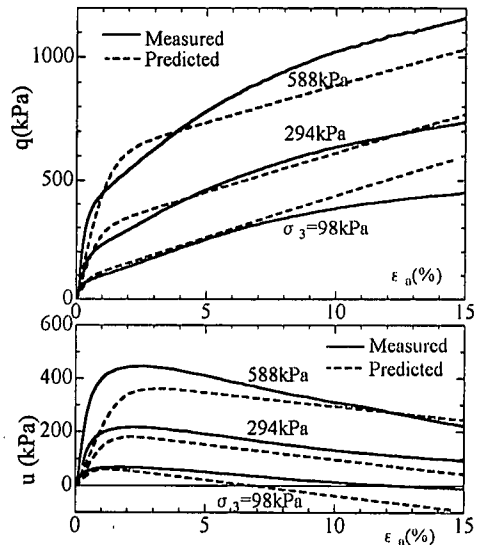


図-22 コア材の非排水三軸圧縮試験結果とモデル予測

案モデルはロック材のような粒状材料の正のダイレイタンシーが、拘束応力が大きいほど小さくなるという特性をよく表現しているのが見られる。図-22 は側圧一定のコア材の非排水中型三軸圧縮試験結果とモデル予測による応力～ひずみ～間隙水圧関係を示している。提案モデルが非排水せん断時の粗粒材の間隙水圧挙動を含む応力～ひずみ関係をよく説明しているのが見られる。

## 8. 結語

1) 円面上の拡張 SMP 規準の形状は応力比が増加するにつれて、円形(点)からオムズビ形に膨らんで最終的に正三角形になる(図-4 参照)。この特性は地盤材料の実測された降伏特性と合致するものである。

2) 弾塑性モデルの降伏関数を3次元化するために、破壊時の形状関数  $g(\theta)$  をせん断途中にも適用することがよく行われているが、この方法はせん断に伴う円面上の降伏線の形の変化を考慮していない。降伏規準による形状関数  $g(\theta, \phi_m)$  を用いた変換応力の式を提示し、この変換応力を通常の応力と置き換えることによって、弾塑性モデルを合理的に3次元化できる。

3) 拡張SMP規準に基づいた変換応力を用いて、3次元応力下の粒状材料やc- $\phi$ 材料に適する簡単で実用的な弾塑性モデルを提案・検討した。このモデルは以下の3点の地盤材料の変形・強度特性を表現できる特徴がある。  
①3次元応力下での変形・強度特性、②正負のダイレイタンシー特性、③変形・強度特性の拘束応力依存性。③の強度特性の拘束応力依存性とは、3次元応力下のせん断強度はSMP規準ではなくて、近似的に拡張SMP規準となることであり、変形特性の拘束応力依存性とは、せん断時の応力比 $\sim$ ひずみ関係は拘束応力が大きいほど下がってくることや、拘束応力が大きいほど正のダイレイタンシーが小さくなり負のダイレイタンシーが顕著になることである。提案モデルは、 $\phi$ 材料である砂や粗粒材と、変形途中に粘着成分があまり大きく変わらないc- $\phi$ 材料であるセメント混合砂および締め固め粘土への適用が可能であった。モデルパラメータは数が少なく、その物理的意味が明確でほぼCam-clayモデルと同程度に決定しやすいものである。

謝辞：本研究の一部の実験とモデル予測に協力していただいた名古屋工業大学大学院生本田秀樹氏ならびに石原孝恵氏に謝意を表します。またロック材とコア材の三軸試験データを提供して下さった(株)関西電力および(株)ニュージェックの関係諸氏に感謝致します。

### 付録 対数型とベキ数型の硬化則による拘束応力依存性の有無について

説明を簡単にするために、修正Cam-clayモデルだけを例として取り上げる。修正Cam-clayモデルの降伏関数(対数型硬化則を採用する)は次式で与えられる。

$$f_1 = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \left[ \ln \left( p + \frac{q^2}{M^2 p} \right) - \ln p_0 \right] - \epsilon_{v1}^p = 0 \quad (A-1)$$

一方、式(27)に $\sigma_0=0$ を代入し、変換応力を通常の応力に置き換え、ベキ数型の硬化則を採用した降伏関数( $H = \epsilon^p$ )は次式で与えられる。

$$f_2 = \frac{C_1 - C_c}{p_a^m} \left[ \left( p + \frac{q^2}{M^2 p} \right)^m - p_0^m \right] - \epsilon_{v2}^p = 0 \quad (A-2)$$

上の2式をそれぞれ微分すると、

$$d\epsilon_{v1}^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \frac{M^2 p}{q^2 + M^2 p^2} \left[ \left( 1 - \frac{q^2}{M^2 p^2} \right) dp + \frac{2q}{M^2 p} dq \right] \quad (A-3)$$

$$d\epsilon_{v2}^p = \frac{C_1 - C_c}{p_a^m} \left( p + \frac{q^2}{M^2 p} \right)^{m-1} \left[ \left( 1 - \frac{q^2}{M^2 p^2} \right) dp + \frac{2q}{M^2 p} dq \right] \quad (A-4)$$

一例として、 $p=p_0$ 一定のせん断経路を考えると( $\eta = q/p$ とする)、

$$d\epsilon_{v1}^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \frac{2\eta}{\eta^2 + M^2} d\eta \quad (A-5)$$

$$d\epsilon_{v2}^p = \frac{2(C_1 - C_c)\eta p^m}{M^2 p_a^m} \left( 1 + \frac{\eta^2}{M^2} \right)^{m-1} d\eta \quad (A-6)$$

式(21)のようなストレス・ダイレイタンシー式を式(A-5)と(A-6)に代入すれば、

$$d\epsilon_{d1}^p = \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} d\epsilon_{v1}^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \frac{4\eta^2}{M^4 - \eta^4} d\eta \quad (A-7)$$

$$d\epsilon_{d2}^p = \frac{4(C_1 - C_c)\eta^2 p^m}{M^2 p_a^m (M^2 - \eta^2)} \left( 1 + \frac{\eta^2}{M^2} \right)^{m-1} d\eta \quad (A-8)$$

式(A-5)、(A-7)より、 $d\eta/d\epsilon_{v1}^p$ 、 $d\eta/d\epsilon_{d1}^p$ は応力比 $\eta$ だけの関数であるが、式(A-6)、(A-8)より $d\eta/d\epsilon_{v2}^p$ 、 $d\eta/d\epsilon_{d2}^p$ は応力比 $\eta$ だけではなくて、平均主応力 $p$ の関数でもある。したがって、対数硬化型の応力比 $\sim$ せん断ひずみ $\sim$ 体積ひずみ関係は平均主応力(あるいは拘束応力)に関係しないが、ベキ数硬化型の応力比 $\sim$ せん断ひずみ $\sim$ 体積ひずみ関係は平均主応力に依存していることがわかる。

### 参考文献

- 1) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A.: Yielding of clay in states wetter than critical, *Geotechnique*, Vol.13, No.3, pp.211-240, 1963.
- 2) Roscoe, K. H. and Burland, J. B.: On the generalised stress-strain behaviour of 'wet' clay, *Engineering Plasticity*, Cambridge University Press, pp.535-609, 1968.
- 3) Matsuoka, H. and Nakai, T.: Stress-deformation and strength characteristics of soil under three difference principal stresses, *Proc. JSCE*, No.232, pp.59-70, 1974.
- 4) Lade, P. V. and Duncan, J. M.: Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil, *ASCE*, Vol.101, GT10, pp.1037-1053, 1975.
- 5) Zienkiewicz, O. C. and Pande, G. N.: Some useful forms of isotropic

- yield surface for soil and rock mechanics, *Finite Elements in Geomechanics* edited by Gudehus, G., John WILEY & SONS, pp.179-190, 1977.
- 6) Sekiguchi, H. and Ohta, H.: Induced anisotropy and time dependency in clays, *Proc. 9th ICSMFE, Specialty Session 9*, pp.229-238, 1977.
  - 7) Matsuoka, H., Yao, Y. P. and Sun, D. A.: The Cam-clay models revised by the SMP criterion, *Soils and Foundations*, Vol.39, No.1, pp.81-95, 1999.
  - 8) 孫 徳安, 松岡 元, 姚 仰平, 石井啓稔, 一村政弘: 初期異方性を考慮した粘土と砂の統一的な弾塑性構成式, 土木学会論文集, No.631/III-48, pp.437-448, 1999.
  - 9) 松岡 元, 孫 徳安: 粘着成分を有する摩擦性材料の変形・強度特性の統一的解釈, 土木学会論文集, No.463/III-22, pp.163-172, 1993.
  - 10) Huang, W. X., Pu, J. L. and Chen, Y. J.: Hardening rule and yield function for soils, *Proc. 10th ICSMFE*, Vol.1, pp.631-634, 1981.
  - 11) Wilde, P.: Two invariants-dependent models of granular media, *Archives of Mechanics*, Vol.26, No.6, pp.799-809.
  - 12) Hashiguchi, K. and Ueno, M.: Elastoplastic constitutive laws of granular materials, *Proc. 9th ICSMFE, Specialty Session 9*, pp.73-82, 1977.
  - 13) Nova, R. and Wood, D. M.: A constitutive model for sand in triaxial compression, *Int. J. Numer. Anal. Methods in Geomech.*, Vol.3, pp.255-278, 1979.
  - 14) Nishi, K. and Esashi, Y.: Stress-strain relationships of sand based on elasto-plasticity theory, *Proc. JSCE*, No.280, pp.111-122, 1978.
  - 15) Vermeer, P. A.: A double hardening model for sand, *Geotechnique*, Vol.28, No.4, pp.413-433, 1978.
  - 16) Matsuoka, H., Yao, Y. P. and Sun, D. A.: A unified elastoplastic model for clay and sand with the SMP criterion, 土木学会第53回年次学術講演会講演概要集, III-A, pp.30-31, 1998.
  - 17) 孫 徳安, 松岡 元, 本田秀樹: 拘束応力依存性を考慮した砂の弾塑性モデル, 第35回地盤工学研究発表会, pp.927-928, 2000.
  - 18) 孫 徳安, 松岡 元, 工藤アキヒコ, 竹澤諒一郎: ロックフィルダムの堤体材料の弾塑性モデルとその検証, 土木学会第55回年次講演概要集, B-III, pp.692-693, 2000.
  - 19) 松岡 元, 孫 徳安, 畠田孝宏: セメント混合砂の3主応力制御試験結果とその統一的な解釈, 土木学会論文集, No.475/III-24, pp.119-128, 1993.
  - 20) 孫 徳安, 松岡 元, 石原孝恵: 締固めた不飽和土の拘束応力依存性とそのモデリング, 第35回地盤工学研究発表会, pp.1287-1288, 2000.
  - 21) 佐武正雄: 連続体の力学序論, 彰国社, pp.68-69, 2000.
  - 22) Randolph, M. F.: Generalising the Cam-clay models, *Symp. on the Implementation of Critical State Soil Mechanics in F. E. Computations*, Cambridge University, 1982.
  - 23) Newson, T. A.: Validation of a non-associated constitutive relationship using centrifuge models, *Proc. 10th ARCSMFE*, Vol.1, pp.49-54, 1995.
  - 24) 西川明宏, 安福規之, 兵動正幸, 村田秀一, 中田幸男: 砂の拘束圧依存性と中間主応力の影響を考慮した構成式について, 第28回土質工学研究発表会, pp.495-496, 1993.
  - 25) Ohmaki, S.: A stress-strain relationship of normally consolidated cohesive soil under general stress condition, *Soils and Foundations*, Vol.20, No.1, pp.29-43, 1980.
  - 26) Yao, Y. P., Matsuoka, H. and Sun, D. A.: A unified elastoplastic model for clay and sand with the SMP criterion, *Proc. 8th Australia-New Zealand Conference on Geomechanics*, Hobart, Vol.2, pp.997-1002, 1999.
  - 27) Ruwaih, I. A.: On the plastic behaviour of granular materials *Proc. Int. Symposium on Numerical Models in Geomechanics*, Zurich, pp.270-279, 1982.
  - 28) Nakai, T.: An isotropic hardening elasto-plastic model for sand considering the stress path dependency in three-dimensional stress, *Soils and Foundations*, Vol.29, No.1, pp.119-137, 1989.

(2000. 6. 23 受付)

## A TRANSFORMED STRESS BASED ON EXTENDED SMP CRITERION AND ITS APPLICATION TO ELASTOPLASTIC MODEL FOR GEOMATERIALS

De'an SUN, Hajime MATSUOKA, Yang-Ping YAO and Masahiro ICHIMURA

For applying the Extended SMP criterion to elastoplastic models for cohesive-frictional materials, a transformed stress based on the criterion is proposed, which is determined by making the criterion become a cone having the axis as the space diagonal in the transformed principal stress space. Furthermore, an elastoplastic model for geomaterials is presented, which takes the following three characteristics of geomaterials into consideration. The first is strength and deformation characteristics in 3D stress; the second is dilatancy characteristics; the third is confining-pressure dependency of strength and deformation. The model is capable of predicting the stress : strain relations of cohesive-frictional materials and granular materials in 3D stress and a wide range of the confining pressure.