

非線形均質化理論に基づく 粒状体マルチスケール解析法の開発とその応用

金子賢治¹・寺田賢二郎²・京谷孝史³・岸野佑次⁴

¹学生会員 工修 東北大学 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

²正会員 Ph.D. 東北大学 助教授 大学院情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (同上)

³正会員 工博 東北大学 助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (同上)

⁴正会員 工博 東北大学 教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (同上)

本研究では、粒状体の巨視的な境界値問題を解析するための均質化理論に基づくマルチスケール解析法を開発する。まず、数学的均質化理論に基づく接触・摩擦材料に対する定式化を示し、巨視スケールの仮想仕事式と微視スケールの変分不等式を導出する。導出された支配方程式に基づき、巨視スケールの解法には通常の有限要素法を、微視問題の解法には粒状要素法を用いる粒状体マルチスケール解析のアルゴリズムを提示する。完全な微視-巨視連成解析に先立ち、微視スケールに用いる粒状要素法が与える解の特性について、適切な粒子数および微視構造に与える材料パラメータについて議論する。また、開発した粒状体マルチスケール解析法を2軸圧縮試験シミュレーションに適用し、その有用性を検討する。

Key Words : granular materials, multiscale analysis, homogenization theory, granular element method

1. 序 論

砂や土等の非均質土質材料の微視的内部構造は、離散的な粒子の集合体で構成されているのが特徴である。全体構造の力学挙動は粒子レベルでの接触・摩擦による微視的変形機構に支配される。ここでいう「微視的内部構造」とは、砂や土を用いて構成される巨視的な全体構造物に対する粒子レベルといった意味での相対的な寸法概念である。このような土質材料の静的な力学問題に関しては従来から様々な研究が行われている。それらは三軸試験等の室内要素試験から得られる巨視的な応答を連続体力学の枠組みで評価することによって普遍的な法則を見出そうとする現象論的アプローチ¹⁾と、土質材料を離散的な粒子の集合体として捉え、接触・摩擦といった粒子レベルでの微視的力学特性に着目し巨視的現象と結びつけようとする離散的アプローチ²⁾とに大別される。前者を巨視的アプローチ、後者を微視的アプローチと言い換えることもできる。

土質材料の力学的性質には粒子レベルの離散性から説明できる部分も多く、巨視的アプローチのように微視的な離散性を無視して純粋に土質材料を連続体として扱うことには多少ためらいが残る。一方、微視的アプローチに関しては、微視的変形機構の考

察や巨視的な構成則レベルの種々の議論に対しては非常に有用である反面、一つ一つの粒子は構造全体に比して小さすぎるため、地盤構造物全体を粒子でモデル化することは非現実的である。したがって、微視的研究の成果が工学的に生かされるためには、それらが連続体として理想化された構成則として表現されることが不可欠である。しかしながら、微視的な変形機構を巨視的挙動に十分に反映させるのは極めて困難な作業であり、合理的な構成則は著者らの知る限り未だ見いだされていない。いずれのアプローチにおいても、構成材料と全体構造とのスケールの差が非常に大きいことが問題であり、巨視・微視両スケールを合理的に結びつけることは土質力学において重要な課題の一つであるといえよう。

一方、均質化理論³⁾⁻⁵⁾は微視的周期構造を有する材料に対して、代表体積要素としての微視的基本単位構造(ユニットセル)の解析を通して全体構造物の平均物性を評価するための有効な平均化手法の一つであり、非均質材料の非線形力学応答に対する微視-巨視連成挙動解析を可能にするものである。寺田・京谷^{6), 7)}は、このような均質化理論に基づき微視構造を有する物体の力学挙動の解析を「マルチスケール応力変形解析」と命名し、弾性体内部に微視的不連続面を含む材料について定式化および数値解析ア

て全体構造の巨視的変形挙動と材料内部の微視的変形機構について考察し、提案する手法の有用性について検討する。

2. 均質化理論に基づく粒状体マルチスケール解析法

均質化理論³⁾⁵⁾の特徴は、微視構造を有する材料に対して、材料全体が置かれる力学系を記述する巨視スケールと、材料内部の微視構造を記述する微視スケールの2つの空間変数(測度)を導入して問題を扱うことにある。ここで示す粒状体マルチスケール解析法は、この均質化理論の基本的な特徴に立脚し、微視的内部構造が離散的な粒状体で形成される材料の微視-巨視連成挙動を扱うための解析手法である。

(1) 摩擦性材料に対する接触における力のつり合い問題の変分法による定式化

a) 問題の設定

図-1(a)に示すような力のつり合いの問題を考える。今、この構造体は図-1(b)に示すように、円形の粒子がランダムに分布している基本単位構造(ユニットセル)を周期的に含んでいるものとする。全体構造に対するユニットセルの相対的な寸法は十分に小さいとし、それを εY で表す。この構造体の全体領域 Ω^E が粒子と空隙との2つの部分で構成され、粒子と粒子の間には接触面が存在すると考えれば、全体領域 Ω^E は、粒子と空隙が占める領域 Ω_G^E とその内部に分布する微小な線素の集合である接触領域 C^E 等に分けられる。そしてこの問題は、領域 Ω_G^E における力のつり合い問題と接触領域 C^E における接触・摩擦条件により記述される。

まず、図-1(a)の領域 Ω_G^E の力のつり合いは領域内部において、

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^E(x)}{\partial x_j} + f_i^E(x) = 0 \quad \text{in } \Omega_G^E, \quad (1)$$

$$\sigma_{ji}^E = \sigma_{ij}^E$$

その境界 $\partial\Omega_G^E$ において、

$$\begin{cases} u_i^E = 0 & \text{on } \partial_u \Omega_G^E \\ \sigma_{ij}^E n_j = t_i & \text{on } \partial_t \Omega_G^E \end{cases} \quad (2)$$

が成立することが必要である。ここで、境界 $\partial\Omega_G^E$ は十分に滑らかであるとし、 n_j は $\partial\Omega_G^E$ に立てた外向き単位法線ベクトルを表すものとする。上記の各変数の肩につけた添え字 ε は、それらが微視構造に依

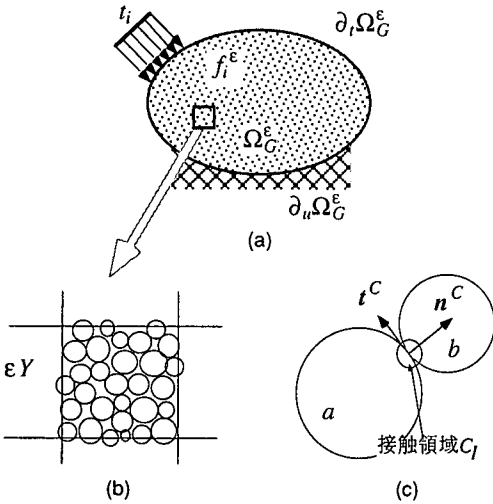


図-1 微視的周期構造を含む材料：(a)力のつり合い問題；(b)線形弾性体の円形粒子からなる基本単位構造(ユニットセル)；(c)接触領域の設定

ルゴリズムを確立すると共に、いくつかの解析例を示した。また、寺田・菊池⁸⁾による一般化収束論を用いた定式化は、手法としての一般性を与えており、その方法論は接触・摩擦といった比較的非線形性の強い微視的変形機構を有する粒状体に対しても適用可能なものである。このようなアプローチによれば、前述した従来法の問題点を克服しうるものと期待される。

そこで本研究では、粒状体の微視-巨視連成挙動の解析を行うことを目的に、非線形均質化理論に基づく粒状体マルチスケール解析法を開発する。まず、粒状体を連続体とみなした変分不等式による定式を出発点として、巨視および微視スケールの支配方程式を導出する。この結果、微視スケールの支配方程式は、選択されたユニットセル内の粒子運動を反映した変分不等式で記述される。そこで、その変分不等式と巨視スケールの仮想仕事式を連成させて同時に解く解析アルゴリズムを提示するが、巨視的全体構造の解析には通常有限要素法を、微視構造の解析には粒状要素法⁹⁾¹²⁾を用いる。また、実際の土質材料に適用することを念頭において、微視スケールの粒状要素解析においてユニットセル内の粒子数の変形挙動に与える影響および粒子間接触点の構成式に用いる微視的定数と全体挙動の巨視的材料定数との関係について考察する。さらに、この微視解析の特性を踏まえて、開発した粒状体マルチスケール解析法を砂のような非粘着性地盤材料の2軸圧縮試験シミュレーションに適用する。その解析結果につい

存する量であることを表している。

さらに、微小ひずみ理論の枠内において、変位ひずみ関係式

$$e_{ij}^\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon(x)}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

と、構成式が Ω_G^ε 内のほとんど至る所で、個々の粒子および空隙の特性として与えられる対称かつ正値な弾性係数テンソル D_{ijkl}^ε (空隙では 0) を用いて

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(x) = D_{ijkl}^\varepsilon(x) e_{kl}^\varepsilon(x) \quad (4)$$

と与えられる。ここで、境界 $\partial_r \Omega_G^\varepsilon$ 上で与えられる表面力ベクトル t_i は、外的条件として与えられるものであり、微視的周期構造には依存しないことから添え字 ε が付かないことに注意する。

次に、接触領域 C^ε における接触および摩擦条件を考える。ユニットセル内には、 N^C 個の接触領域 C_I が存在するとし、 C^ε はその総体として $C^\varepsilon = \bigcap_{I=1}^{N^C} C_I$ と表す。図-1(c)に2つの粒子 a, b から形成される I 番目の接触領域 C_I における接触の様子を示す。ここで、粒子 a に着目して接触条件および摩擦則を導入する。 n^C は接触領域 C_I において粒子 a の重心から粒子 b の重心に向く単位法線ベクトルを表す。また、 (n^C, t^C) が局所右手系座標となるように単位接線ベクトル t^C を定めることにする。

このように設定した接触領域 C_I においては、 (n^C, t^C) を基底ベクトルとして、変位ベクトル u^ε が

$$u^\varepsilon = \{u_n^\varepsilon, u_t^\varepsilon\}^t \quad (u_n^\varepsilon = u^\varepsilon \cdot n^C, u_t^\varepsilon = u^\varepsilon \cdot t^C),$$

応力ベクトル T^ε が

$$T^\varepsilon = \{T_n^\varepsilon, T_t^\varepsilon\}^t \quad (T_n^\varepsilon = T^\varepsilon \cdot n^C, T_t^\varepsilon = T^\varepsilon \cdot t^C)$$

のように分解され、接触条件は

$$\llbracket u_n^\varepsilon \rrbracket \geq 0, \quad -T_n^\varepsilon \geq 0, \quad -T_n^\varepsilon \llbracket u_n^\varepsilon \rrbracket = 0 \quad \text{on } C_I \quad (5)$$

と表される。ここで $\llbracket \cdot \rrbracket$ は、粒子 a と b との接触領域 C_I における b の a に対する相対変位を表している。

さらに、接触領域 C_I は微小であり応力ベクトル T^ε は C_I 内の至る所で一定値と見なしても良いので、次のCoulombの摩擦条件に従うと仮定する。

$$-\mu T_n^\varepsilon + c \leq |T_t^\varepsilon| \quad \text{on } C_I \quad (6)$$

ここに、 c は接触領域 C_I における粒子間の粘着力、 μ は摩擦係数である。

以上のように、微視的内部構造が離散的な粒状体で構成される全体構造のつり合い問題は、式(1)から(4)で表される領域 Ω_G^ε のつり合い問題と、式(5)、(6)で示される接触領域 C^ε における接触・摩擦による制約条件とにより記述される。

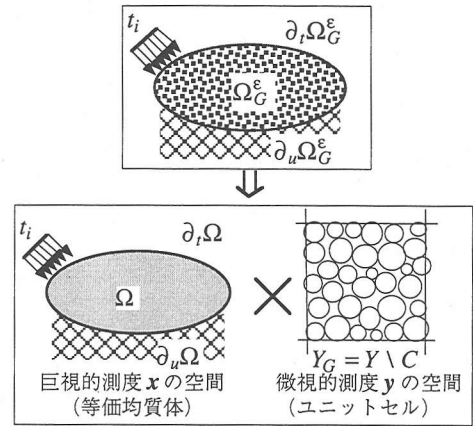


図-2 2つの異なるスケールの空間への分解

b) 変分形式による定式化¹³⁾

上の方程式(1)から(6)によって記述される問題の解 u^ε は、変位に関する許容関数空間を、領域 Ω_G^ε 上の1階のSobolev空間 $H^1(\Omega_G^\varepsilon)$ の部分空間である

$$V^\varepsilon(\Omega_G^\varepsilon) = \left\{ u^\varepsilon \mid u^\varepsilon \in \{H^1(\Omega_G^\varepsilon)\}^3; u_i^\varepsilon = 0 \text{ on } \partial_u \Omega_G^\varepsilon \right\} \quad (7)$$

の閉凸錐部分集合

$$K^\varepsilon(\Omega_G^\varepsilon) = \left\{ u^\varepsilon \mid u^\varepsilon \in V(\Omega_G^\varepsilon); \llbracket u_n^\varepsilon \rrbracket \geq 0 \text{ on } C^\varepsilon \right\} \quad (8)$$

として、以下の変分不等式の解 $u^\varepsilon \in K^\varepsilon$ として与えられる¹³⁾。

$$a(u^\varepsilon, v^\varepsilon - u^\varepsilon) + j(u^\varepsilon, v^\varepsilon) - j(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \geq l(v^\varepsilon - u^\varepsilon), \quad \forall v^\varepsilon \in K^\varepsilon \quad (9)$$

$$a(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{\Omega_G^\varepsilon} D_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_j} dx \quad (10)$$

$$l(v^\varepsilon) = \int_{\partial_r \Omega_G^\varepsilon} t_i v_i^\varepsilon dx + \int_{\Omega_G^\varepsilon} f_i v_i^\varepsilon dx \quad (11)$$

$$j(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{C^\varepsilon} \mu |T_n^\varepsilon(u^\varepsilon)| \llbracket v_t^\varepsilon \rrbracket ds \quad (12)$$

ここに、任意関数 v^ε は閉凸錐部分空間 K^ε に属し、一般に試験関数と呼ばれる。また、式(12)の汎関数 j は接触領域内の摩擦力が成す仮想仕事を表している。

(2) 微視・巨視、二つのスケール変数の導入と空間の分離

均質化理論の卓抜したアイデアは、全体構造に対する空間の測度を x とし、 x で指定される1点の近傍に存在する微視構造を表現するために相対寸法パラメータ ε を用いた新たな空間測度 $y = x/\varepsilon$ を導入することである。測度 x を巨視スケール変数、 y を微視スケール変数と呼ぶ。2つのスケール変数の導

入により、粒子と空隙によって構成される周期的微視構造を備えた領域 Ω_G^E は、巨視スケール変数 x を測度とする全体領域 Ω と、微視スケール変数 y を測度とする基本単位構造 $Y_G = Y \setminus C$ とに分解され、積空間として

$$\Omega_G^E = \Omega \times Y_G$$

$$= \left\{ (x, y) \mid x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, y = \frac{x}{\varepsilon} \in Y_G \subset \mathbb{R}^3 \right\} \quad (13)$$

と表される(図-2)。ここで、 Y を微視領域、 C を接触領域とした。

この空間の分解に伴って添え字 ε がついた諸量は、 $\Omega \times Y_G$ を定義域とする2つのスケール変数 (x, y) の関数として

$$u_i^\varepsilon(x) = u_i(x, y), \quad f_i^\varepsilon(x) = f_i(x, y)$$

$$e_{ij}^\varepsilon(x) = e_{ij}(x, y), \quad \sigma_{ij}^\varepsilon(x) = \sigma_{ij}(x, y) \quad (14)$$

$$D_{ijkl}^\varepsilon(x) = D_{ijkl}(x, y)$$

のように再定義される。そして、それらは微視構造の周期性を反映して次のような y に関する Y -周期性を持つとされる。

$$\Psi(x, y + Y) = \Psi(x, y) \quad (15)$$

これに伴い、式(7)、(8)なども2変数関数空間と解釈される¹⁴⁾。

こうした準備の下で、式(9)の変分不等式に対して、文献8)と同様に一般化収束の結論¹⁴⁾を拡張して適用すると次式を得る。

$$\int_{\Omega} [D_{ijkl}]_{Y_G}^- \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial (v_i^0 - u_i^0)}{\partial x_j} dx$$

$$+ \int_{\Omega} \left[D_{ijkl} \frac{\partial (v_i^1 - u_i^1)}{\partial y_j} \right]_{Y_G}^- \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} dx$$

$$+ \int_{\Omega} \left[D_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right]_{Y_G}^- \frac{\partial (v_i^0 - u_i^0)}{\partial x_j} dx$$

$$+ \int_{\Omega} \left[D_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \frac{\partial (v_i^1 - u_i^1)}{\partial y_j} \right]_{Y_G}^- dx \quad (16)$$

$$+ \int_C \mu [T_n(u^1)] \llbracket \llbracket v_i^1 \rrbracket \rrbracket ds - \int_C \mu [T_n(u^1)] \llbracket \llbracket u_i^1 \rrbracket \rrbracket ds$$

$$- \int_{\Omega} [f_i]_{Y_G}^- (v_i^0 - u_i^0) dx - \int_{\partial, \Omega} t_i (v_i^0 - u_i^0) dx$$

$$\geq 0, \quad \forall v^0 \in V, \quad \forall v^1 \in K_{Y_G}$$

ここに、

$$[\Psi(x, y)]_{Y_G}^- = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_G} \Psi(x, y) dy$$

である。上式において $u_i^0(x)$ と $v_i^0(x)$ は、微視変数 y に依存しない関数であり、微視構造とは無関係な

巨視変数 x を測度とする Ω 上の許容関数空間

$$V = \left\{ v^0(x) \mid v^0 \in \{H^1(\Omega)\}^3; v^0 = 0 \text{ on } \partial_u \Omega \right\}$$

から選ぶことができる。また、微視構造に依存する関数 $u_i^1(x, y)$ と $v_i^1(x, y)$ は y に関して Y -周期性を有し、その許容関数空間は線形空間

$$V_{Y_G} = \left\{ v^1(x, y) \mid v^1 \in \{H^1(\Omega \times Y_G)\}^3; Y\text{-periodic} \right\}$$

の部分集合である閉凸錐

$$K_{Y_G} = \left\{ v^1(x, y) \mid v^1 \in V_{Y_G}; \llbracket v^1 \rrbracket \geq 0 \text{ on } C \right\}$$

となる。

(3) 巨視および微視スケールの支配方程式の導出

a) 巨視的挙動(平均変位)の仮想仕事式

式(16)において、試験関数 v_i^1 については $v_i^1 = u_i^1$ と選ぶことができる。一方、 v_i^0 については V が線形空間なので、 α を任意の実数、 w_i^0 を V に属する任意の関数として、 $v_i^0 = u_i^0 + \alpha w_i^0$ と選ぶことができるので、結局、不等式(16)は次のような等式に置き換えられる。

$$\int_{\Omega} \left[D_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \right]_{Y_G}^- \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx \quad (17)$$

$$= \int_{\Omega} [f_i]_{Y_G}^- w_i^0 dx + \int_{\partial, \Omega} t_i w_i^0 dx, \quad \forall w^0 \in V$$

この式は、微視構造を含む構造体の平均変位 u_i^0 が従うべき仮想仕事式であり、微視構造の影響は左辺の未知関数 u_i^1 の y に関する偏導関数を介して反映される。

仮想仕事式(17)が次の巨視的な境界値問題と等価であることは容易に示すことができる³⁾。

$$\partial \Sigma_{ij} / \partial x_j + F_i = 0 \text{ in } \Omega \quad (18)$$

$$\begin{cases} u_i^0 = 0 & \text{on } \partial_u \Omega \\ \Sigma_{ij} n_j = t_i & \text{on } \partial_t \Omega \end{cases} \quad (19)$$

ここに、 Σ_{ij} と F_i は平均挙動を支配する巨視応力と物体力で、それぞれユニットセル領域 Y_G における微視的応力 σ_{ij}^0 と物体力 f_i の平均値

$$\Sigma_{ij}(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_G} \sigma_{ij}^0(x, y) dy \quad (20)$$

$$F_i(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_G} f_i(x, y) dy$$

で与えられる。さらに、 σ_{ij}^0 は微視構造内部に分布する微視応力と解釈され、

$$\sigma_{ij}^0(x, y) = D_{ijkl}(x, y) \left(\frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^1(x, y)}{\partial y_l} \right) \quad (21)$$

と与えられる。

周期的微視構造を含む構造体が占める領域を巨視・微視2つのスケールの空間領域に分解したことにより、材料内部の微視構造は微視スケール y で扱うことになり、平均挙動は巨視スケール x を測度として微視構造の存在を意識せずに考えればよくなる。したがって、平均変位 u_i^0 に対する上記の方程式群は、微視問題が解を持つ限り常に成立することになる。

b) 微視問題の支配方程式

式(16)中の試験関数について、まず v_i^0 については $v_i^0 = u_i^0$ と選ぶ。一方、 v_i^1 についてはそれが属する K_{Y_G} が閉凸錐であることから、 $\forall w^1 \in K_{Y_G}$ および $\forall \alpha \geq 0$ として $v_i^1 = u_i^1 + \alpha w_i^1$ と選ぶと (K_{Y_G} は錐なので $\alpha < 0$ は選ぶことができない) 次式を得る。

$$\int_{\Omega} \left[D_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial w_j^1}{\partial y_j} \right] dx + \int_C \mu |T_n(u^1)| \left| \left[\Pi w_i^1 \right] \right| ds - \int_C \mu |T_n(u^1)| \left| \left[\Pi u_i^1 \right] \right| ds \geq 0, \quad \forall w^1 \in K_{Y_G} \quad (22)$$

そして、この式が成立するための十分条件として、 $u_i^1(x, y)$ に関する次のような基本単位構造 Y_G における変分不等式が得られる。

$$\int_{Y_G} D_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \frac{\partial w_j^1}{\partial y_j} dy + \int_C \mu |T_n(u^1)| \left| \left[\Pi w_i^1 \right] \right| ds - \int_C \mu |T_n(u^1)| \left| \left[\Pi u_i^1 \right] \right| ds \geq - \left(\int_{Y_G} D_{ijkl} \frac{\partial w_j^1}{\partial y_j} dy \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l}, \quad \forall w^1 \in K_{Y_G} \quad (23)$$

ここに、 $\partial u_k^0 / \partial x_l$ は巨視挙動の影響を表す定数係数の役割を果たしている。変分不等式(23)は、 y に関する定数項 (x の任意関数) 分だけの不定性があるが、 K_{Y_G} に u_i^1 の平均値がゼロとなるように制約を加えた部分凸錐

$$\tilde{K}_{Y_G} = \{ v^1(x, y) | v^1 \in K_{Y_G}; [v^1]_{Y_G} = 0 \} \quad (24)$$

の上で考えれば唯一解が得られる³⁾。

(4) 粒状体マルチスケール解析法

ユニットセルが粒状体から構成される場合、材料内部の接触領域において接触・摩擦による制約条件が加えられて、微視変位ベクトル $u_i^1(x, y)$ は変分不等式の解として定められることになる。そのため、

巨視問題の仮想仕事式

$$\int_{\Omega} \left[D_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^1}{\partial y_l} \right) \right]_{Y_G} \frac{\partial w^0}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} [f_i]_{Y_G} w_i^0 dx + \int_{\partial, \Omega} t_i w_i^0 dx, \quad \forall w^0 \in V \quad (17) \text{再掲}$$

と微視問題の変分不等式

$$\int_{Y_G} D_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \frac{\partial w_j^1}{\partial y_j} dy + \int_C \mu |T_n(u^1)| \left| \left[\Pi w_i^1 \right] \right| ds - \int_C \mu |T_n(u^1)| \left| \left[\Pi u_i^1 \right] \right| ds \geq - \left(\int_{Y_G} D_{ijkl} \frac{\partial w_j^1}{\partial y_j} dy \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l}, \quad \forall w^1 \in K_{Y_G} \quad (23) \text{再掲}$$

を連立させて同時に解く作業が必要となる。

寺田・京谷は、均質化理論に基づいて導出される巨視問題の仮想仕事式と微視問題の変分不等式の2つの式を同時に解いて微視構造を有する物体の力学挙動を解析することを「マルチスケール応力変形解析」と命名し、その定式化および数値解析アルゴリズムを確立し、弾性体内部に微視的不連続面を含む材料に対する解析例を示した^{6), 7)}。この「マルチスケール応力変形解析」の基本的なアルゴリズムは、以下の手順で構成される。

「微視変位ベクトル $u_i^1(x, y)$ に初期解として適当な関数を与え、

- i) $u_i^1(x, y)$ を用いて全体構造に対する巨視的境界値問題(17)を解き巨視変位ベクトル $u_i^0(x)$ を求める
- ii) 得られた巨視変位ベクトル $u_i^0(x)$ から、

$$E_{ij} = (\partial u_i^0 / \partial x_j + \partial u_j^0 / \partial x_i) / 2 \quad (25)$$

を外的に強制された巨視ひずみ E_{ij} として、点 x にある微視構造での問題(23)に一樣に与えて $u_i^1(x, y)$ を求める

構造体のすべての点 x において $u_i^1(x, y)$ を求めた後、それを再び i) の境界値問題に返し、上記2式がすべての点において満足されるまで i), ii) のステップを繰り返す。」

しかしながら、接触・摩擦が到るところで発生し粒子の移動・回転により接触領域も逐次変化するような高次の非線形性を有する粒状体に対して、式(23)で示される微視問題の変分不等式を連続的に解くことは容易ではない。したがって本研究では、微視問題(23)を連続体として解くことはせずに、剛体とバネ等の接触要素からなる等価な物理モデルに置き換えて解析することを提案する。本研究では、既存の離散体解析手法である粒状要素法⁹⁾⁻¹²⁾を用いることとし、次節でその定式化を概説する。

3. 粒状要素法による微視問題の解法

微視問題(23)の解法として用いる粒状要素法について説明する. 微視問題(23)に対応する速度形の強形式は, 領域 Y_G における自己つり合い問題と接触領域 C における制約条件とにより次式のように書くことができる.

$$\dot{\sigma}_{ij,j}^0 = 0 \quad \text{in } Y_G \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \llbracket u_n^1 \rrbracket \geq 0, \quad -T_n \geq 0, \quad -T_n \llbracket u_n^1 \rrbracket = 0 \\ -\mu T_n + c \leq |T_t| \quad \text{on } C_I \end{aligned} \quad (27)$$

ここで示す粒状要素法は, 式(26), (27)に従う粒子の挙動を解析するためのモデルである.

粒状体マルチスケール解析法における微視問題においては, 周期条件

$$u_i^1(x, y+Y) = u_i^1(x, y) \quad (28)$$

の下でユニットセルの静的な自己つり合い問題(26)を正確に解くことが要求される. 粒状体の離散解析法として広く用いられている個別要素法⁵⁾は, 残差分を次ステップの加速度項として扱う動的解法であり, 各載荷ステップにおいて静的つり合い条件を厳密には満足していない. それに対して粒状要素法⁹⁾⁻¹²⁾は, 粒状体の静的な微視的変形特性を解明するために開発され, 離散的な静的つり合い式を剛性マトリックスに基き直接的に解く解析手法であり, 粒状体マルチスケール解析の微視問題の解法として適した手法である. 粒状要素法は, 接触領域 C を接触点と置き換え, また粒子の弾性挙動を剛体粒子と仮想バネ要素で簡便に表していること以外は, 式(23)を解くことと同様の解析法と見なすことができる. ただし, 以下の定式化ではペナルティ法によって不等式を等式に変換し, 等価な増分つり合い問題をマトリックスで表記する. この粒状要素法では, 粒子間に設定する簡単な構成式にも関わらず, 粒状体の連続体としての非線形な平均挙動を表すことが可能になる.

(1) 粒状体の静的つり合い条件

まず, 個々の粒子の静的つり合い条件を誘導する. 粒子は円形剛体粒子とし, 図-3(a)のような接触状態にある粒子 a , b の半径をそれぞれ r^a , r^b とする. 粒子 a と b との接触点における単位法線ベクトル, 単位接線ベクトルを前節と同様に図-3(a)の方向を正として n^C , t^C と表す. 粒子 a , b 重心の位置ベクトルをそれぞれ y^a , y^b とすれば単位法線ベクトルは,

$$n^C = (y^b - y^a) / |y^b - y^a|$$

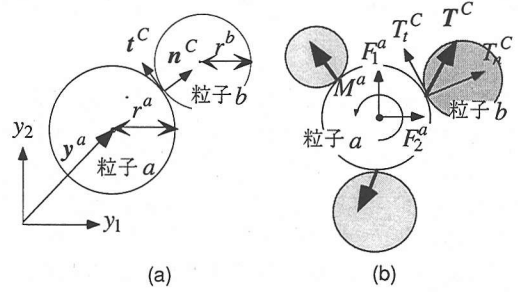


図-3 座標系の設定と粒子に作用する力: (a) 全体座標系と局所座標系; (b) 粒子に作用する接触力とその合力およびモーメント

であり, 単位接線ベクトルは $t_1^C = -n_2^C$, $t_2^C = n_1^C$ となる. 接触点における接触力や2粒子間の相対変位は, 接触点毎に (n^C, t^C) を基底ベクトルとして定義される局所的な直交座標系で表され, 各粒子に作用する力の合力や粒子の変位ベクトル等は全体座標系で定義されることに注意する.

図-3(b)に示す方向を正として粒子 a と b との接触点における接触力ベクトル

$$\{T^C\} = \begin{Bmatrix} T_n^C \\ T_t^C \end{Bmatrix}$$

を定義する. 前節で連続体として定義した接触領域における応力ベクトル T_i^e が「接触面」に分布するのに対して, ここで離散的に定義された接触力ベクトル $\{T^C\}$ は「接触点」に作用する.

隣接粒子から粒子 a に作用する接触力の合力は,

$$\{F^a\} = \sum_C \left(T_n^C \{n^C\} + T_t^C \{t^C\} \right) \quad (29)$$

となる. ここで, Σ_C は粒子 a の全接触点の総和を意味する. また, 粒子 a に作用する接触力によるモーメント M^a を反時計回りを正として定義する.

$$M^a = r^a \sum_C T_t^C \quad (30)$$

式(29), (30)をまとめると粒子 a の静的なつり合い条件は次式で表される.

$$\{f^a\} = \sum_C \left([N^C]^t \{T^C\} \right) = \{0\} \quad (31)$$

ここで, $\{f^a\} = \{F_1^a, F_2^a, M^a / r^a\}$ であり,

$$[N^C] = \begin{bmatrix} n_1^C & n_2^C & 0 \\ -n_2^C & n_1^C & 1 \end{bmatrix}$$

は, 接触点における局所座標と全体座標との座標変換マトリックスで主座標変換マトリックスと呼ぶ.

粒状体全体の静的つり合い条件式は、式(31)を全粒子について重ね合わせた次式により与えられる。

$$\{f\} = [N]\{T\} = \{0\} \quad (32)$$

ここに、 $\{f\}$ は全粒子の重心に作用する力とモーメントを並べたベクトル、 $[N]$ は各接触点の座標変換マトリックスから構成される全体座標変換マトリックスである。

全体座標変換マトリックス $[N]$ は粒子の移動に伴い時々刻々変化し、つり合い式(32)は非線形方程式となる。したがって、以下、速度形で定式化を進めることとし、式(32)を次式のように書き直しておく。

$$\{\dot{f}\} = [N]\{\dot{T}\} = \{0\} \quad (33)$$

(2) 粒子間接触点における構成式

ここでは、粒状要素法で用いる粒子間接触点の構成式を示す。接触力ベクトル $\{T^C\}$ に対応する運動学的変数は相対変位ベクトル

$$\{\llbracket u^C \rrbracket\} = \begin{Bmatrix} \llbracket u_n^C \rrbracket \\ \llbracket u_t^C \rrbracket \end{Bmatrix}$$

であり、接触力ベクトル $\{T^C\}$ と同様に接触点における局所座標系で定義される。接触力ベクトルと同様に、前節では「接触面」で定義した相対変位ベクトルがここでの離散的な定式化においては「接触点」で定義される。一方、全体座標系で定義される粒子 a の変位・回転ベクトルを回転量 ω^a として

$$\{u^a\} = \begin{Bmatrix} u_1^a \\ u_2^a \\ r^a \omega^a \end{Bmatrix}$$

と定義する。前節で定義した変位ベクトル u_i は剛体粒子内部では一定値となるので、これを粒子重心の変位ベクトル $\{u^a\}$ で表す。

相対速度ベクトル $\{\llbracket \dot{u}^C \rrbracket\}$ と粒子 a, b の速度ベクトル $\{\dot{u}^a\}, \{\dot{u}^b\}$ とは次式により関係づけられる。

$$\{\llbracket \dot{u}^C \rrbracket\} = [N^C]\{\dot{u}^a\} - [N^C]\{\dot{u}^b\} \quad (34)$$

ここで、

$$[N^C] = \begin{bmatrix} n_1^C & n_2^C & 0 \\ -n_2^C & n_1^C & -1 \end{bmatrix}$$

を従座標変換マトリックスと呼ぶ。

図-4に粒子間接触点の構成式を模式的に表す。粒状体を構成している粒子の弾性的な性質を、粒子間接触点において法線および接線方向に仮想バネ要素を設けることにより考慮することとし、粒子自身は剛体的であるとする。接触力速度と相対速度の関係は厳密には非線形性を考慮して定めるべきである¹⁶⁾

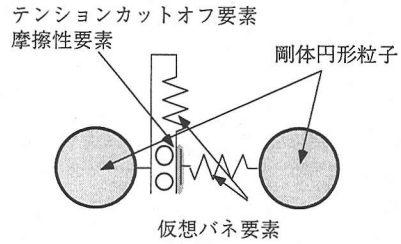


図-4 粒子および接触点のモデル化

が、剛体粒子がすべりを生じるまでの相対変位は微小と考えても良く、ここでは接触点における速度形の構成式はすべりが発生しない限り以下の線形関係を用いる。

$$\{\dot{T}^C\} = [S]\{\llbracket \dot{u}^C \rrbracket\} \quad (35)$$

ここで、

$$[S] = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix}$$

は、仮想バネ剛性マトリックスである。

接触点の接線方向には仮想バネ要素に加えて摩擦性要素とテンションカットオフ要素を仮定する。テンションカットオフ要素は粒子間粘着力を想定したもので、ある程度の引張り力にも抵抗する。粒子間粘着条件は次式のように表される。

$$\begin{cases} \sqrt{T_n^C{}^2 + T_t^C{}^2} \leq c \\ |T_t^C| \leq -T_n^C \tan \phi + c \end{cases} \quad (36)$$

ここに、 c は粒子間粘着力、 ϕ は粒子間摩擦角である。変形の途中で粒子間粘着条件が満たされなくなった場合には、粒子間接触点に粘着力が作用しないものとして $c=0$ とする。ここで想定したテンションカットオフ要素は圧縮力により粒子同士が固着したような力学的性質を考慮しているが、粘着力のモデル化を工夫すれば種々の地盤材料に適用できると考えられる。また、砂のように粒子間の粘性がほとんど無いような非粘着性地盤材料を扱う場合には $c=0$ とおけば良い。

摩擦性要素は、粒子間のすべりを想定したもので、接触力の接線方向成分がMohr-Coulmbの摩擦則で表される条件

$$|T_t^C| \geq -T_n^C \tan \phi + c \quad (37)$$

を満たす場合には次式のように強制的にこの限界値に戻す修正を行う。

$$T_i^{C'} = \frac{T_i^C}{|T_i^C|} (-T_n^C \tan \phi + c) \quad (38)$$

粒子同士の接触条件は法線方向相対変位を用いて

$$\llbracket u_n^C \rrbracket < 0 \quad (39)$$

と表される。接触条件を満たさない場合には接触力は法線方向、接線方向ともに強制的に0とおく。

以上のように、粒子自身は弾性体と想定しているが、粒子間接触点における接触・摩擦により粒子の運動が制約され、巨視的には非線形な材料応答として現れる。

(3) 全体剛性マトリックスの構成

各粒子のつり合い式(31)を速度-相対速度関係式(34)と線形構成式(35)を用いて次式のように書き直すことができる。

$$[K^{aa}]\{\dot{u}^a\} - \sum_c ([K^{ab}]\{\dot{u}^b\}) = \{0\} \quad (40)$$

ここで

$$[K^{aa}] = \sum_c [N^c]^T [S] [N^c]$$

を主要素剛性マトリックス、

$$[K^{ab}] = [N^c]^T [S] [N^c]$$

を従要素剛性マトリックスと呼ぶ¹¹⁾。主要素剛性マトリックスは着目している粒子自身の変位に対応する剛性マトリックスであり、従要素剛性マトリックスは接触粒子の変位に対応する剛性マトリックスである。

式(40)を全粒子に対して重ね合わせると粒状体全体の速度形のつり合い式は次式のように書き換えられる。

$$[K(u)]\{\dot{u}\} = \{0\} \quad (41)$$

ここで、 $[K(u)]$ は各粒子の主要素剛性マトリックスと従要素剛性マトリックスを並べた全体剛性マトリックスである。全体剛性マトリックスの各成分のうち、接触粒子との関係は相対的な位置関係から定まり、非接触粒子との関係は0が入ることになる。各粒子の移動に伴い全体剛性マトリックス $[K(u)]$ が時々刻々変化することにより、粒子レベルの構成関係には材料非線形性が入り込まないにも関わらず、粒状体の平均化された巨視的変形挙動は材料非線形の形で現れることになる。

つり合い式(41)は、均質化法に基づいて導出された微視問題(23)の強形式の自己つり合い式(26)と等価であると見なすことができる。また、摩擦条件(37)と接触条件(39)が接触領域における制約条件(27)

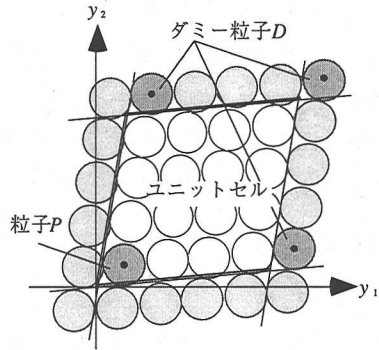


図-5 周期境界の概念図

に相当する。したがって、つり合い式(41)を周期境界条件の下で解くことにより、粒状体マルチスケール解析の微視問題の解法として用いることが可能である。

(4) 周期境界条件の導入¹⁰⁾

ここでは、前節で示した均質化理論に基づく粒状体マルチスケール解析における微視スケール解析で必要とされる周期境界条件を導入する。まず、前章で示した均質化理論による定式化において、変位ベクトル $u_i(x, y)$ はユニットセルの平均変位を表す巨視変位ベクトル $u_i^0(x) (= E_{ij}y_j)$ と非均質な微視構造に依存する微視変位ベクトル $u_i^1(x, y)$ とで表される。

$$u_i(x, y) = u_i^0(x) + u_i^1(x, y) \quad (42)$$

周期境界条件式(28)は、微視変位ベクトル $u_i^1(x, y)$ の Y -周期性を意味している。

図-5に示すように、粒子 P に相当する隣接領域の粒子を粒子 P のダミー粒子 D と呼ぶこととする。微視測度 y の空間 Y_G において粒子 P の位置ベクトルを y とすればとダミー粒子 D の位置ベクトルは $y + Y$ と表される。粒子 P およびダミー粒子 D の変位増分ベクトルを式(42)に習って次式のように表す。

$$\begin{aligned} \{\Delta u^P\} &= \{\Delta u^{P0}\} + \{\Delta u^{P1}\} = [\Delta E]\{y^P\} + \{\Delta u^{P1}\} \\ \{\Delta u^D\} &= \{\Delta u^{D0}\} + \{\Delta u^{D1}\} = [\Delta E]\{y^D\} + \{\Delta u^{D1}\} \end{aligned} \quad (43)$$

ここで、 $\{\Delta u^{P1}\}$ 、 $\{\Delta u^{D1}\}$ は粒子 P およびダミー粒子 D の微視変位増分ベクトルであり、周期境界条件は式(28)に基づいて次式で与えられる。

$$\{\Delta u^{P1}\} = \{\Delta u^{D1}\} \quad (44)$$

また、式(40)の個々の粒子のつり合い式をダミー粒子が含まれている場合も考慮して書き直すこと

$$\begin{aligned} & [K^{aa}]\{\Delta u^a\} - \sum_{CI}([K^{ab}]\{\Delta u^b\}) \\ & - \sum_{CD}([K^{aD}]\{\Delta u^D\}) = \{0\} \end{aligned} \quad (45)$$

となる。第2項が接触内部粒子、第3項が接触ダミー粒子に関する項であり、 Σ_{CI} は内部粒子との接触点についての総和を、 Σ_{CD} は粒子 a とダミー粒子との接触点についての総和を意味する。式(45)に式(43)と周期境界条件式(44)を用いるとダミー粒子の変位増分ベクトルが消去されて、

$$\{\Delta H^a(\Delta E)\} = [K^{aI}]\{\Delta u^a\} - \sum_C([K^{ab}]\{\Delta u^b\}) \quad (46)$$

と書くことができる。ここで、

$$\{\Delta H^a(\Delta E)\} = [\Delta E] \sum_{CD}([K^{aD}]\{y^D\} - \{y^b\}) \quad (47)$$

は、ユニットセル全体に平均的に与えられる平均ひずみ増分 ΔE によって生じる外力項と見なされる。

式(47)を全粒子に対して重ね合わせると、周期境界条件を考慮した解くべき増分形つり合い式が次式のように導出される。

$$\{\Delta H(\Delta E)\} = [K]\{\Delta u\} \quad (48)$$

ここで、 $\{\Delta H(\Delta E)\}$ は $\{\Delta H^a(\Delta E)\}$ を並べたベクトルである。

結局、平均ひずみ増分 ΔE により定まる $\{\Delta H\}$ が荷重増分項に相当し、周期境界条件の下で各粒子の変位増分ベクトル $\{\Delta u\}$ を求める問題に帰着する。

(5) 応力の定義と解析アルゴリズム

粒状要素法において粒状集合体の平均応力は、仮想仕事の原理に従って与えられる^{9), 11), 12)}。同様の考え方で、周期境界制御粒状要素法におけるユニットセルに与えられる巨視ひずみ E_{ij} に対応する平均応力を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij} &= \frac{1}{|V|} \int_{V_C} \sigma_{ij}^0 dy \\ &\approx \frac{1}{V} \sum_{CD} f_i^D y_j \end{aligned} \quad (49)$$

ここに、 f_i^D はダミー粒子からユニットセル内部の粒子に作用する接触力、 y_j はユニットセル内部の粒子とダミー粒子との接触点の位置ベクトル、 V はユニットセルの体積である。また、 Σ_{CD} はユニットセル内部の粒子とダミー粒子とのすべての接触点についての総和を意味する。粒状要素法においては、粒子個々のモーメントのつり合い条件を満たすため、式(49)で与えられる平均応力は対称となる。

最後に、微視スケール解析に粒状要素法を導入した粒状体マルチスケール解析法のアルゴリズムについて概説する。まず、巨視問題の仮想仕事式(17)を式

(20), (21)を用いて、次式のように書き直しておく。

$$\int_{\Omega} \Sigma_{ij} \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx \quad (50)$$

$$= \int_{\Omega} [f_i]_Y w_i^0 dx + \int_{\partial_{\Omega}} t_j w_j^0 dx, \forall w^0 \in V$$

ここでの Σ_{ij} を式(49)から算定することが本手法の最大の特徴である。

前章(4)で示した「マルチスケール応力変形解析」のアルゴリズム ii) の部分を粒状要素法に置き換えて解き、次のような手順により等価な解析を行うことになる。

- 「巨視応力 Σ_{ij} に初期解として適当な関数を与え、
- i) Σ_{ij} を用いて全体構造に対する巨視的境界値問題(50)を解いて平均変位増分ベクトル $\Delta u_i^0(x)$ を求める。
 - ii) 得られた平均変位増分ベクトル $\Delta u_i^0(x)$ から、外的に強制された平均ひずみ増分 $[\Delta E]$ を点 x にある粒状体に一様に与える。 $\{\Delta H(\Delta E)\}$ を式(47)に従って算出し、これを荷重増分項と見なし周期境界条件を考慮した粒状体つり合い式(46)を解いて、変位増分ベクトル $\{\Delta u\}$ を求める。
 - iii) 算出された変位増分ベクトル $\{\Delta u\}$ に従って各粒子間の接触力増分を算出し接触力を更新する。
 - iv) 結合条件(36)、摩擦条件(37)、接触条件(39)の判定を行い接触力を修正する。算出された接触力 $\{T\}$ を用いてつり合い条件(32)を計算し、つり合い条件を満たさない場合には、ii)に戻り残差力を $\{\Delta H(\Delta E)\}$ の代わりに用いてii)–iv)を繰り返す。
 - v) つり合い条件(32)を満たす場合には、式(49)を用いてユニットセル全体にわたって平均化された巨視応力 Σ_{ij} を算出する。

構造体のすべての積分点 x において巨視応力 Σ_{ij} を求めた後、それを再びi)の巨視的境界値問題に返し、巨視的つり合い式(50)および全ての積分点における粒状要素法による微視的自己つり合い問題(32)が同時に満足されるまでi)–v)の作業を繰り返す。」

微視構造が粒状体で形成される物体の巨視的力学挙動は、連続体近似した構成式を用いなくとも、微視問題の解法に粒状要素法を用いて以上のような微視–巨視連成アルゴリズムにより解析が可能となる。粒状体マルチスケール解析法のアルゴリズムにおいては、通常の有限要素法の弾塑性構成式の代わりに各積分点において粒状要素法により微視問題を解き、ユニットセルの応答として平均応力と平均ひずみの関係が与えられる。したがって、全体構造のスケールがいかなるオーダーであっても、マルチスケール解析は可能であり、計算時間は有限要素分割数とユニットセル内の粒子数のみに依存することになる。

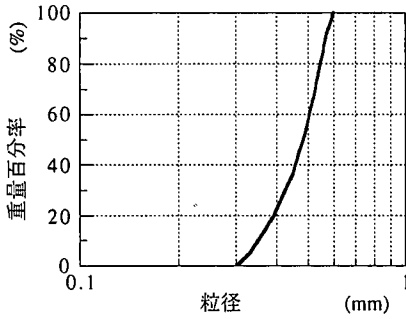


図-6 粒度分布 (ユニットセル1600-1)

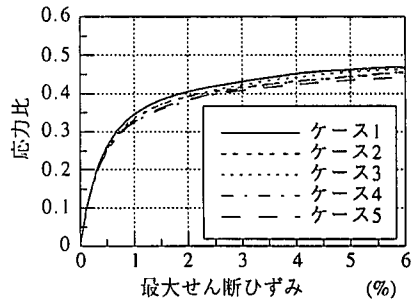


図-8 応力ひずみ関係 (粒子数1600個)

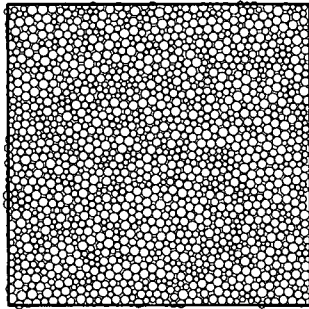


図-7 粒子配置図 (ユニットセル1600-1)

4. ユニットセルの設定

均質化法に基づく粒状体マルチスケール解析では、解析対象となる全体構造の巨視的変形特性は、粒子で構成されるユニットセルの構造特性と粒子間に設定した力学特性に依存したものになる。ただし、微視スケールの解析に用いるユニットセルは巨視的構成関係を与える内部構造であるため、代表体積要素としての条件を満たしていなければならない。すなわち、ある粒度分布を有する粒子から構成されるユニットセル内には、粒径の異なる粒子の均一な分布が要求されるし、それ以上増やしても巨視的変形特性を変えない程度の十分な粒子数を有していなければならない。したがって、実際の土質材料に適用することを考えれば、ユニットセルモデルの生成に際して適切な条件設定が求められる。

本節では、材料の内部構造として適切なユニットセルモデルの生成を目的に、初期状態のユニットセルの構造特性および分布性状、ならびに粒子間に設定する力学特性についての各種考察を行う。まず、ユニットセルの初期状態と設定する各種条件を与え、幾何学的観点からその等方性を検討する。次に、ユ

ニットセル単体についての解析を行い、粒子数と巨視的材料特性の関係を考察する。さらに、粒子間構成式で用いられる仮想バネ剛性と巨視的なみかけの初期弾性係数との関係について検討する。マルチスケール解析の微視スケールにおいては、ユニットセルが無限小であると見なされて絶対的な大きさの単位は定義されないが、ここでは、粒子数および仮想バネ剛性に関する検討が目的でありユニットセルのみを解析するため、有限の領域を定義して便宜的に大きさの単位を用いて表すこととする。

(1) 粒子数の設定

a) 初期状態のモデル生成とその等方性

本節では、ユニットセルが粒子を50, 100, 200, 400, 800, 1600個含むものをそれぞれ5つつ考え、すべてが異なる粒子配置になるようにモデルを生成した。ユニットセルの体積が粒子数に比例するように、粒径は0.3~0.6mmに統一した。また、粒子はランダムに配置し、全ユニットセルにおける粒径の大小の分布がほぼ均一になるように調整した。例として粒子数1600個のあるユニットセルの粒度分布と粒子配置を図-6, 7にそれぞれ示す。以下の計算では、すべてのユニットセルに仮想バネ剛性法線方向成分 $k_n=5.0 \times 10^4 \text{ N/m}$ 、接線方向成分 $k_t=3.5 \times 10^4 \text{ N/m}$ 、粒子間摩擦角 $\phi=25^\circ$ 、粒子間粘着力 $c=0$ を用いた。各ユニットセルの初期状態は、等方応力0.2 MPaの初期パッキングを行うことで生成した。各ユニットセルモデルの初期状態における粒子配置の幾何学的情報を得るために、間隙比、配位数⁷⁾およびファブリックテンソル¹⁸⁾の主値比といった構造指標を調べた。すべてのモデルについて、間隙比約0.17、配位数約4.2のほぼ等しい値が得られた。また、ファブリックテンソルの主値比についてもすべてのモデルで約1.0が得られたことから、生成したユニットセルの初期状態はほぼ等方的な粒子配置を有するといえる。

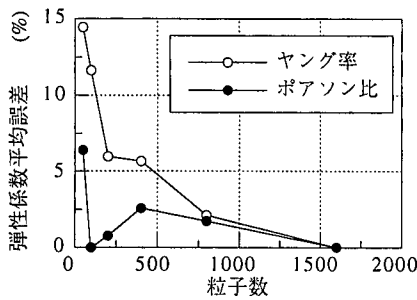


図-9 弾性係数平均誤差

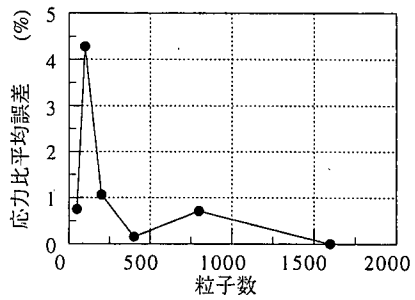


図-11 応力比平均誤差 (最大せん断ひずみ2.0%)

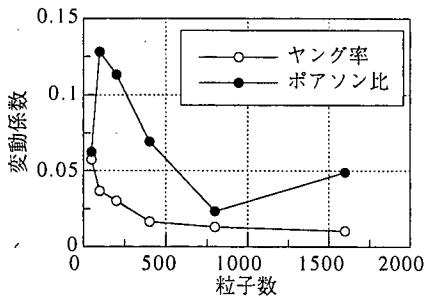


図-10 弾性係数変動係数

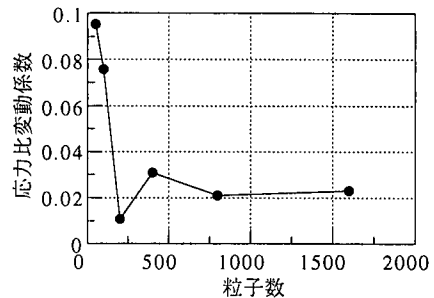


図-12 応力比変動係数 (最大せん断ひずみ2.0%)

b) ユニットセル内の粒子数に関する検討

a)で準備した等しい初期状態の各ユニットセルのせん断過程での粒子数による巨視的変形特性の違いやそのばらつきの程度を把握するために、ひずみ制御により2軸圧縮試験シミュレーションを行った。

図-8に粒子数1600個の場合の応力ひずみ関係を示す。粒子数が1600個の場合には、5つのユニットセルがほぼ等しい変形挙動を示していることがわかる。特に、応力のピーク値付近でも大きくずれることがないことは注目し値する。

このことから、粒子数が1600個の場合には、粒度分布、構造指標および各定数を一定にして解析を行えば、粒子をランダムに発生させたユニットセルがほぼ一定の挙動を示すと考えられ、巨視的な局所化を伴わない変形レベルのマルチスケール解析においては、十分な粒子数であるといえる。

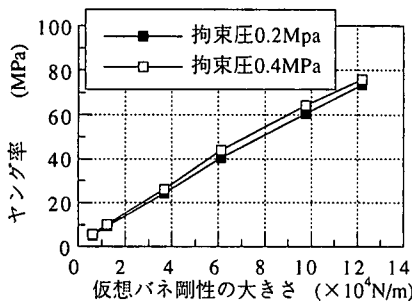
以下では、このセルサイズを基準にして、粒子数が50~800個の各ユニットセルから得られる応答がどの程度のずれを示すのかについて、巨視的変形特性を表す幾つかの指標を用いて調べてみる。

まず、載荷初期の応力ひずみ関係の傾きに注目する。載荷初期段階においては、粒子間の摩擦が小さいことおよび初期状態がほぼ等方的であることから、等方線形弾性体を仮定して巨視的なみかけのヤング率およびポアソン比を算出した。

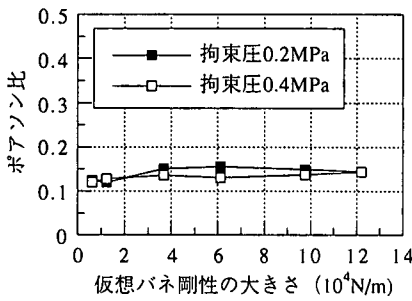
図-9に各粒子数ごとの平均弾性係数の1600個の平均値からの誤差を示し、図-10には、粒子数による変動係数の違いを示した。変動係数は、分散を平均値で正規化したものであり、ばらつきの程度を示している。例えば、変動係数が0.1というのは、平均値の10%の範囲で値がばらつくことを表す。ヤング率については、粒子数が増えるに従い平均誤差が減少し、粒子数50個で15%程度、200個以上では10%以下になることがわかる。変動係数は粒子数50個でも5%程度であり、粒子数が増加するに伴い減少する。したがって、数値のばらつきを考慮しても、粒子数200個以上になればヤング率の誤差は10%以下になるものと期待される。ポアソン比に関してはどの粒子数でも誤差10%以下になるが、変動係数はヤング率の場合よりも大きい。粒子数200個以下で15%程度、400個以上で10%程度の誤差が生じることを認識しておく必要がある。

次に、ピーク直前である最大せん断ひずみ2.0%の時の応力比の値を比較する。弾性係数の場合と同じようにして平均誤差および変動係数を求め、粒子数について整理したものを図-11, 12に示す。

最大せん断ひずみ2.0%の場合の応力比平均誤差は、粒子数100個の場合を除いて1.0%以下になることがわかる。また、変動係数の値は、粒子数が増加するに従い減少し、粒子数200個以上であれば5.0%以下

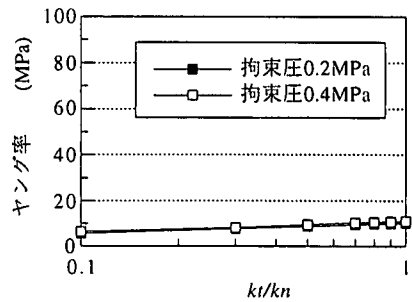


(a)

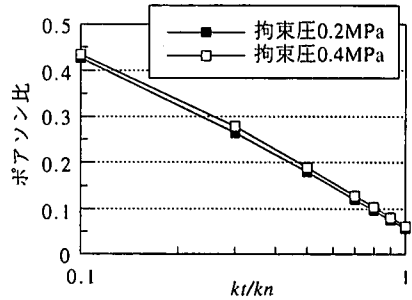


(b)

図-13 粒子間仮想バネ剛性と弾性係数の関係：(a)ヤング率の変化；(b)ポアソン比の変化



(a)



(b)

図-14 粒子間仮想バネ剛性の比と弾性係数の関係：(a)ヤング率の変化；(b)ポアソン比の変化

のばらつきになる。また、他の載荷点においてもほぼ同様の結果が得られており、応力ひずみ関係の誤差はばらつきを考慮しても粒子数200個以上であれば、10%以下になると期待される。

ここでの検討結果は、用いる粒子数に対する精度を認識した上で解析を行う必要性を示唆している。ただし、最大粒径と最小粒径の差が大きくなれば、同粒子数のユニットセルにおいても精度が若干悪くなると予想される。粒子数が2倍になれば、計算時間は2倍以上になるので、ユニットセルに含まれる粒子数をどの程度にするかは、要求される計算精度および計算時間を考慮して定める必要があろう。

(2) 粒子間仮想バネ剛性の設定

3. で示したように、粒状体マルチスケール解析法の微視スケールの解析に用いる粒状要素法は、法線および接線方向仮想バネ剛性と粒子間摩擦角、粒子間粘着力の4つの微視的定数を用いる。仮想バネ剛性は弾性変形と関係づけられ、摩擦角および粘着力は塑性的な巨視スケールの変形に影響する。ここでは、微視的定数のうち全体構造のある点を抽出したユニットセル解析で巨視的定数と関連づけられる仮想バネ剛性と巨視的なみかけの弾性係数との関係に

ついて考察する。バネ剛性の検討に関しては、弾性接触問題としての理論的な研究^{19), 20)}も行われているが、実験で簡単に得られる巨視的パラメータと直接結びつけるために、ここでは数値実験的に検討する。

(1)で用いた200個の粒子の一つのユニットセルに対して、粒子間バネ剛性を変化させ(1)と同様に弾性係数を求めた。図-13には、仮想バネ剛性の法線方向成分と接線方向成分の比 k_t/k_n を0.7としてその大きさ $(k_n^2 + k_t^2)^{1/2}$ を変化させ、それに伴う弾性係数の変化の様子を示した。ヤング率に関しては、バネ剛性の大きさに比例して増加すること、拘束圧を変化させてもその傾向が変わらないことがわかる。また、ポアソン比は拘束圧が増加すると全体的に小さくなるが、バネ剛性の大きさにはほとんど依存しないといえる。図-14には、法線方向の仮想バネ剛性を一定値とし、接線方向の仮想バネ剛性のみを変化させた場合の弾性係数の傾向を示した。ヤング率は、仮想バネ剛性の比にはほとんど依存性がないことがわかる。ポアソン比は、バネ剛性の比の常用対数にほぼ比例して減少する傾向が伺える。

以上の結果から、微視的定数である粒子間仮想バネ剛性の2成分は、その大きさと比がそれぞれほぼ独立に巨視的なみかけの弾性係数の2成分と対応さ

せることができ、ヤング率は仮想バネ剛性の大きさに比例して増加し、ポアソン比はバネ剛性の比の対数に比例して減少すると結論づけられる。したがって、ヤング率を大きくしたい場合には比を一定にしてバネ剛性を増加させ、ポアソン比を小さくしたい場合には、接線方向バネ剛性のみを大きくすれば良いことになる。

5. 粒状体マルチスケール解析法の2軸圧縮試験シミュレーションへの適用

対象材料として砂のような粒子間粘着力が0である土質材料を想定して、その排水2軸圧縮試験シミュレーションに開発した粒状体マルチスケール解析法を適用する。得られた巨視的および微視的挙動について考察し、それらの解析結果を通して本解析法の有用性について議論する。

(1) 2軸圧縮試験シミュレーションの概要

解析対象の全体構造は、図-15(a)に示す高さ10cm×幅5cmの有限要素モデルとした。境界条件は、図-15(a)に示すように、2軸圧縮試験において上下端面が摩擦により拘束されていることを想定し、端面拘束を施した。このように設定した有限要素モデルに対して、等方圧を与えた初期状態から、変位制御により圧縮載荷する。初期拘束圧は0.2MPa、0.3MPa、0.4MPaと変化させた。

また、微視解析のユニットセルとして用いる粒状要素モデルを図-15(b)に示す。ユニットセルに対する相対粒径を0.05~0.1とし粒度分布の形状は図-6とほぼ同様である。図-15(b)に示すユニットセル内には、200個の粒子が存在するが、4.(1)の結果から、初期ヤング率で10%程度、せん断途中の変形挙動で5%程度の誤差が生じる可能性があることを認識しておく。また、微視スケール解析に用いる定数は、法線方向粒子間バネ剛性 $k_n=5.0 \times 10^4 \text{ N/m}$ 、接線方向 $k_t=3.5 \times 10^4 \text{ N/m}$ に相当するユニットセルに対する相対的な値を用い、粒子間摩擦角は、 $\phi=25^\circ$ とした。供試体全体の巨視的変形挙動は微視スケール解析に与えたこれらの定数に依存する。

供試体モデル全体の巨視的な軸ひずみ ϵ_y は、次式のようにして求める。

$$\epsilon_y = (\Delta H / H_0) \times 100 \quad (\%)$$

ここで、 ΔH は供試体上端の節点変位の平均値、 H_0 は供試体の初期高さである。また、軸応力 σ_y は

$$\sigma_y = P/L$$

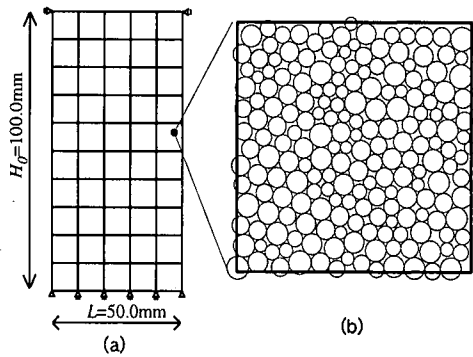


図-15 解析モデル：(a)全体構造有限要素モデル；(b)微視構造粒状要素モデル（ユニットセル）

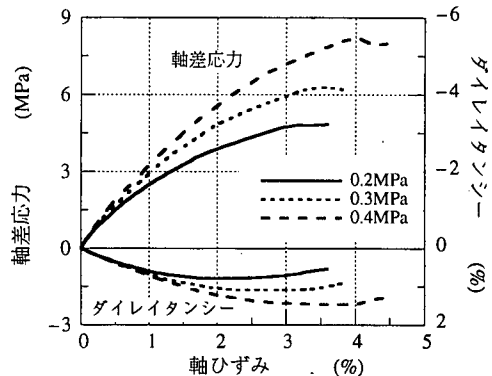


図-16 全体構造の載荷曲線

として求める。ここに、 P は供試体上端の軸方向接点反力の和、 L は供試体の幅である。全体構造の体積 V を全要素の体積の和として求め、ダイレイタンスを

$$\epsilon_v = 1 - V/V_0$$

により求める。

(2) 解析結果とその考察

a) 巨視的変形挙動

解析の結果得られた全体構造の巨視的な軸ひずみ-軸差応力および軸ひずみ-ダイレイタンス関係を図-16に示す。図-16より、載荷初期段階において線形な応答を示し、その後徐々に塑性的な非線形挙動を示す。また、載荷が進むと載荷初期には圧縮傾向にあったダイレイタンスが膨張に転じ、その後、

応力のピークに至っている。さらに、土質材料特有の性質である拘束圧依存性も良くシミュレートされている。これは、微視スケール解析に粒状要素法を用いたことにより、粒子レベルでの微視的挙動が直接的に反映された結果であるといえる。

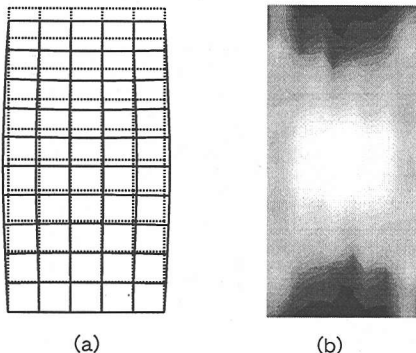


図-17 解析最終段階の全体構造：(a)変形図；(b)最大せん断ひずみ分布

図-17に、初期拘束圧0.2MPaの場合の解析最終段階における全体構造の変形図および最大せん断ひずみ分布を示す。図-17(b)は、白色で示された部分がより最大せん断ひずみが大きいことを示している。(a)より、上下端面の横方向の変位を拘束しているために予想される樽型の変形がみられ、中心付近が大きく膨らみ供試体全体としての体積膨張が顕著になる。また、(b)より、この時全体構造の中心部分にひずみが集中して現れていて、両側斜め約45°方向にひずみが大きくなる部分が成長するような変形パターンが見られる。このように、ここでの解析においては微小ひずみ理論の枠内であるがひずみが局所化する傾向が観察される。さらなる载荷によってひずみが発達することで巨視的なすべり面形成および全体構造の破壊に至るものと考えられるが、この種の問題の詳細な検討は、有限変形理論への拡張といわゆる非局所効果 (non-local effect) に対する理論的対応を待たねばならない。

図-18に、各初期拘束圧による解析の結果得られたピーク時のモールの応力円を示す。この図から実験と同様にして供試体に対する巨視的な粘着力 c' および内部摩擦角 ϕ' を算出し、微視スケール解析に与えた微視的定数である粒子間粘着力 c および粒子間摩擦角 ϕ との関連性について検討する。

砂のような非粘着性材料を想定し粒子間粘着力 c を0としたことで、巨視的な粘着力 c' は0.0486MPaとなり一般的な実験結果と同様ほぼ0となった。また、微視スケール解析において粒子間摩擦角 $\phi = 25^\circ$ を与えたマルチスケール解析の結果、実験で観察され得るものと等価な巨視的な内部摩擦角 $\phi' = 32.3^\circ$ を得た。

Caquotは微視的な粒子間摩擦角 ϕ と巨視的な内部摩擦角 ϕ' との関係について粒子論的に考察し $\tan \phi' / \tan \phi = \pi / 2$ となることを示し、砂やレキで

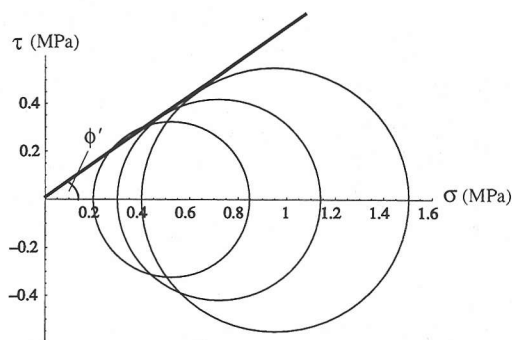


図-18 応力ピーク時のモールの応力円と摩擦角

$\tan \phi' / \tan \phi$ が1.4~1.6となり $\pi / 2$ に近い値になることを実測した²¹⁾。上の解析では、 $\tan \phi' / \tan \phi$ は約1.35となりCaquotの結果とほぼ一致している。しかし、粒子間摩擦角 $\phi = 15^\circ$ として同様の解析を行ったところ、内部摩擦角 $\phi' = 27.2^\circ$ 、 $\tan \phi' / \tan \phi$ が約1.9となり、粒子間摩擦角のみを変化させて解析を行ったにも関わらず、やや異なる結果を得た。 ϕ と ϕ' の関係については、ここで行った解析のみでは確固たる結論を導くことはできないが、粒子間摩擦角 ϕ を変化させた同様の解析を数ケース行うことで、巨視的な内部摩擦角と微視的な粒子間摩擦角との定性的な関係を導き出すことができると考えられる。

以上より、本研究で開発した粒状体マルチスケール解析法は、複雑な連続体構成式を用いることなく、粒子レベルでの接触・摩擦に起因して生じる、供試体全体の巨視的なダイレイタンス現象や拘束圧依存性などの土質材料特有の現象を含んだ変形挙動を良くシミュレートでき、土質材料の変形予測に非常に有効な手法となりうるということがわかる。

b) 微視的変形挙動

本研究で開発した粒状体マルチスケール解析法においては、a)で示したような構造全体の巨視的な変形挙動を解析することが可能だけでなく、同時に各種分点における粒子レベルの微視的変形機構を解析目的に応じて観察可能であることが特徴の一つである。ここでは、図-17(b)における最大せん断ひずみの大きい中心付近のある点を観察点 (以下、A点と呼ぶ) としてせん断中の微視的変形を観察する。

図-19にA点における粒子配置と接触力法線方向成分の分布を示す。図中、粒子中心を結んだ直線の太さで接触力の強さを表している。(a)の初期状態においては、ほぼ等方的な接触力分布が見られるのに対して、(b)の解析最終状態においては、接触力は異方的に分布している。縦方向に大きな接触力が生

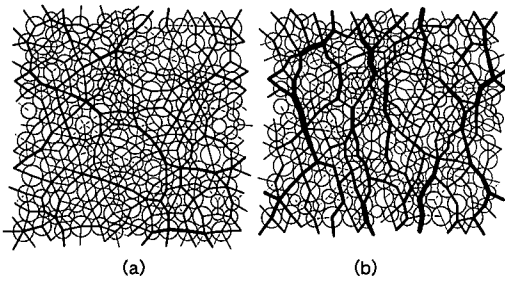


図-19 A点の粒子間接触力：(a)初期状態；(b)最終状態

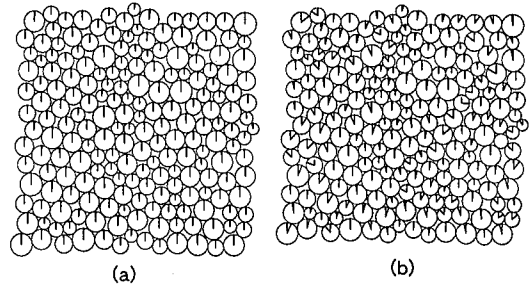


図-21 A点の角速度：(a)載荷初期段階；(b)ピーク付近

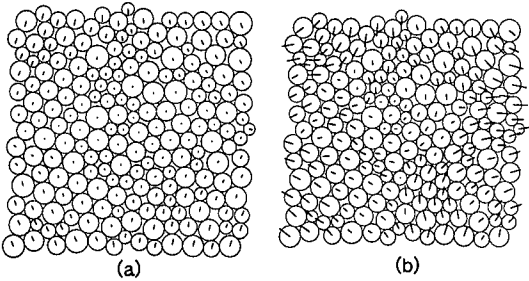


図-20 A点の速度ベクトル：(a)載荷初期段階；(b)ピーク付近

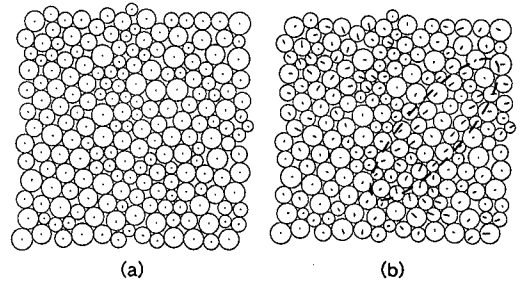


図-22 A点の微視速度ベクトル：(a)載荷初期段階；(b)ピーク付近

じ、横方向の接触力は小さくなっていることが観察され、最大主応力方向に接触力が卓越することを示している。そして、最大主応力方向に平行な接触面においては、せん断抵抗が小さくすべりが非常に発生しやすい不安定な状態であるといえる。このような接触面で大きくすべりが生じ、粒子同士が乗り越えることで横方向に大きく変形し巨視的に体積が膨張するものと考えられる。

図-20, 21には、載荷初期段階および全体構造のピーク付近でのA点における粒子の速度ベクトル、角速度（回転）を示す。与えられた巨視的ひずみ速度が等しいにも関わらず、ピーク付近になると変形が局所的に大きくなるA点のような積分点においては載荷初期段階に比べて、ともに大きくなることわかる。

図-22には、粒子の微視速度ベクトルを示した。微視速度ベクトルは、粒子の速度ベクトルからユニットセル全体の巨視（平均）速度ベクトルを除いたもので、載荷初期段階においてはほとんど見られない。このことは、載荷初期段階のA点近傍において粒子は平均的に運動していて、ユニットセル内部での局所的な粒子運動がほとんどないことを示している。ピーク付近においては、このような局所的な粒子運動が生じていて、特に図中の楕円で囲んだ部分は、微視速度ベクトルが全く逆の方向を向くような面が

生じていることがわかる。このような部分においては、粒子間で大きなすべりが生じていて、摩擦による大きなエネルギー散逸が起こっている。

以上のように、開発した粒状体マルチスケール解析法では、ある全体構造の要素内の積分点に置かれたユニットセル内の粒子の運動等を追跡し、微視的変形メカニズムを考察することも可能である。本方法は、構造全体の巨視的な変形挙動と同時に粒子レベルの微視的な変形の観察をも可能にする新規の解析法といえる。

6. 結 論

本論文では、微視構造が非均質な粒子集合によって構成される粒状体の微視および巨視的挙動の連成問題を扱うための非線形均質化理論に基づく粒状体マルチスケール解析法を提示し、その有用性に関する考察を行った。

均質化理論によれば、粒状体から構成される全体構造は、構造全体の巨視スケールと粒子レベルの微視スケールとに分解されて、微視スケールの挙動は粒子運動を反映した変分不等式で記述される。そのような材料の内部構造を含む構造全体の挙動を知るために、その変分不等式と巨視的挙動の仮想仕事式

を連成させて解くアルゴリズムを提示した。

また、微視スケール解析に粒状要素法を用いた粒状体マルチスケール解析法を2軸圧縮試験シミュレーションに適用することにより、微視構造が粒子集合で構成される構造の境界値問題を扱うことを可能とすることを示した。特に、複雑な構成式を用いることなく、土質材料特有の巨視的なダイレイタンス現象や拘束圧依存性を良く再現できること、それと同時に、全体構造の変形過程における材料内部の粒子の移動・回転や接触力分布等の様々な微視的力学応答を抽出することが可能であることを強調しておく。したがって、本研究で開発した粒状体マルチスケール解析法は、土質力学が対象とする土や砂等の粒子集合体の工学的な境界値問題の解法として非常に有用であると結論づけられる。また、本研究では2軸圧縮試験シミュレーションのみの解析例を示しているが、ここで開発した粒状体マルチスケール解析法は、通常弾塑性有限要素法により行われているほぼ全ての土質材料の工学問題に適用可能である。さらに、本研究で提案した粒状体マルチスケール解析法は、土質材料に対して提案されている種々の巨視的な構成モデルの検証にも適用可能であり、それらを一般化する上でも有効であろう。

ここで開発した解析手法を実材料に適用する場合、対象材料、解析精度、計算時間といった各視点から、ユニットセルのモデル化が非常に重要な問題となる。ユニットセルの設定に関して本研究において以下のような知見を得た。

- i) ここで用いた粒度分布の材料の変形挙動においては、ユニットセルに含まれる粒子数に応じて、図-9~12で示した程度の解析誤差が生じる。
- ii) 微視的変数である粒子間接触点における仮想バネ剛性は、その大きさと各成分の比がそれぞれほぼ独立に巨視的なみかけのヤング率とポアソン比とに対応させることができ、ヤング率はバネ剛性の大きさに比例して増加し、ポアソン比はその成分の比の常用対数に比例して減少する。
- iii) 微視的な粒子間摩擦角 ϕ と巨視的な内部摩擦角 ϕ' との関係については、 ϕ が 15° の解析では ϕ' は 27.2° 、 ϕ が 25° の場合 ϕ' は 32.3° となり定性的に明確な結論を得ることができず、さらなる検討が必要である。
- iv) 粒子間接触点におけるモデル化は、砂等の非粘着性の材料に対しては、本研究で用いた微視スケールモデルにおける仮想バネ剛性と粒子間摩擦角によるモデル化でその変形特性を十分再現できる。

最後に、土質材料の強度・破壊と密接に関係する

変形の局所化から巨視的なすべり面形成、構造全体の破壊に至る一連の破壊メカニズムを解明するためには有限変形理論への拡張等が課題として挙げられる。また、より実材料に近づけるためには解析の3次元化が必要であろう。実際の土質材料の室内実験等との定量的な比較も課題の一つであるが、本研究で得られたユニットセルの設定に関する知見によりその方向性が示唆されるものと考えられる。さらに、粒子間接触点における粘着力のモデル化を工夫することで粘着性の材料にも適用でき、微視スケール解析に水の影響を考慮することで、水との連成問題も粒状体マルチスケール解析法の対象となり得るものと考えている。

参考文献

- 1) Wu, W. and Niemunis, A.: Beyond Failure in Granular Materials, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 21, pp. 153-174, 1997.
- 2) Kuhn, M. R.: Structured Deformation in Granular Materials, *Mechanics of Materials*, Vol. 31, pp. 407-429, 1999.
- 3) Sanchez-Palencia, E.: *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- 4) Lions, J. L.: *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and their Control*, Science Press, Beijing, China, 1981.
- 5) Benssousan, A., Lions, J. L. and Papanicolaou, G.: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- 6) 寺田賢二郎, 京谷孝史: 無数の亀裂を有する物体のマルチスケール応力変形解析法, 土木学会論文集, No. 619/I-47, pp. 23-34, 1999.
- 7) 京谷孝史, 寺田賢二郎: マルチスケール応力変形解析法とその分布亀裂を含む材料の強度特性評価への適用, 土木学会論文集, No. 680/III-55, pp. 49-64, 2001.
- 8) 寺田賢二郎, 菊池昇: 非均質弾塑性体のマルチスケール解析のための一般化アルゴリズム, 土木学会論文集, No. 633/I-49, pp. 217-229, 1999.
- 9) 岸野佑次: 新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析, 土木学会論文集, No. 406/III-11, pp. 97-116, 1989.
- 10) 金子賢治, 岸野佑次, 林直宏, 京谷孝史: 粒状要素解析による地盤材料損傷モデルの定式化, 応用力学論文集, JSCE, Vol. 2, pp. 427-438, 1999.
- 11) 武建熙, 岸野佑次, 京谷孝史: 2次元モデルブローブ試験による弾塑性挙動の考察, 構造工学論文集, Vol. 44A, pp. 399-408, 1998.
- 12) 岸野佑次, 武建熙: Hillの安定条件の粒状体への適用性について, 土木学会論文集, No. 631/III-48, pp. 83-95, 1999.
- 13) Kikuchi, N. and Oden, J. T.: *Contact Problem in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, Philadelphia, SIAM, 1988.

- 14) Allaire, G.: Homogenization and Two-Scale Convergence, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 23, pp. 1482-1518, 1992.
- 15) Cundall, P. A. and Strack, O. D. L.: A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies, *Geotechnique*, Vol. 29, No. 1, pp. 47-65, 1979.
- 16) 木山英郎, 藤村 尚: カンドルの離散剛要素法を用いた岩質粒状体の重力流動の解析, 土木学会論文報告集, Vol. 333, pp. 137-146, 1983.
- 17) Oda, M.: Co-ordination Number and its Relation to Shear Strength of Granular Materials, *Soils and Foundations*, Vol. 17, No. 2, pp. 29-42, 1977.
- 18) 佐竹正雄: 地盤と土の異方性, 土と基礎, Vol. 32, No. 9, pp. 5-12, 1984.
- 19) Johnson, K. L.: *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- 20) Mindlin, R. D.: Compliance of Elastic Bodies in Contact: *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 16, pp. 259-269, 1949.
- 21) 山口伯樹: 土質力学, 技報堂出版, 1976.

(2000. 6.12 受付)

DEVELOPMENT OF A MULTISCALE ANALYSIS METHOD FOR GRANULAR MATERIALS BASED ON HOMOGENIZATION THEORY

Kenji KANEKO, Kenjiro TERADA, Takashi KYOYA and Yuji KISHINO

A computational approach for analyzing boundary value problem with granular materials is developed based on the two-scale homogenization method. While the microscopic problem leads to the variational inequality which reflects microscopic friction-contact responses, the homogenized structure reveals the nonlinear response stemming directly from the averaged microscopic behaviors. Although the macroscopic problem is analyzed by the continuum-based FEM, the microscopic one is remodelled by rigid grains with spring and friction devices. In addition to the investigation of the effects of grains' configurations in a unit cell, the applicability of this two-scale modeling is discussed via representative numerical examples. In particular, the bi-axial compression tests on a plane specimen is simulated to illustrate the feasibility of the proposed method.