

マルチスケール応力変形解析法とその分布亀裂を含む材料の強度特性評価への適用

京谷孝史¹・寺田賢二郎²

¹ 正会員 工博 東北大学 助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

² 正会員 Ph.D. 東北大学 助教授 大学院情報科学研究科人間社会情報科学専攻 (同 上)

土木工学が対象とするような不均質材料の力学的取り扱いにおいて、均質化理論に基づくマルチスケール応力変形解析法は一般的で合理的な手段を提供する。本論文では、著者らが既に提案している岩盤の均質化手法¹⁾を念頭において、マルチスケール応力変形解析法の一般的な枠組みを与える。さらに、その一つの応用として、微視構造における変分不等式に基づいて分布亀裂を含んだ材料の破壊強度特性を評価する方法を提案し、亀裂を配置した石膏供試体の一面せん断試験との比較を通してその適用性を検証する。

Key Words : multiscale stress analysis, homogenization theory, strength of fissured media

1. 序 論

土木工学が対象とする材料は、コンクリートや岩盤をはじめとして、その内部に微視構造を有する不均質材料がほとんどである。ここでいう「材料内部の微視構造」とは、その材料を用いて構築される構造物の寸法と比べた時の相対的な概念である。例えば、コンクリートにおいては骨材とセメントの混ざり具合、岩盤では分布不連続面や種類の異なる岩石の配置状況などのことで、各単体の特性とそれらが形成する空間的構造が、コンクリートや岩盤の巨視的な力学特性を支配していることは確かであるが、構造物を設計する際の力学の中では、コンクリートや岩盤の「材料特性」という言葉の中に押し込められているもののことである。

土質材料のように、微視構造の寸法が真に小さくしてそれを十分に含んだ材料供試体の試験が可能ならば、室内試験を通して得られる特性を「材料特性」として考えることができる。その際、内部構造は意識されず、文字通りその影響は試験結果の中に埋め込まれていると理解される。そのような材料を我々はしばしば「均質である」と言ったりもする。

また、コンクリートの場合には、微視構造の絶対寸法は決して小さくはないけれども、人工材料であるが故の豊富な試験実績を持ち、その裏付けのもとに構造設計に直結した「材料試験法」が確立されているために、内部構造の影響やその取り扱いとはほとんど問題とされないようである。

しかし、岩盤が工学の対象となる場合には状況は異なる。岩盤における異種岩石の混ざり具合や分布不連続面などの内部構造は、対象とする岩盤ごとに特徴のある一期一会のものとして我々の眼前に現れる。そして、その内部構造は我々が試験可能な寸法に比べてはるかに大きく、それを十分に含んだ数多くの供試体の作成などは望むべくもない。岩盤に対しては土質材料やコンクリートとは本質的に異なるアプローチが必要なのである。

岩盤について我々が手にすることのできる客観的な情報は、その内部構造を構成する岩石コアの材料特性と不連続面分布だけと考えて良い。場合によっては、これに加えて岩盤の一部が特殊な境界条件のもとで示す応答を調べた現位置試験の情報が与えられる程度である。したがって、岩盤の工学材料としての力学特性を精度良く把握するためには、これらの限られた内部構造の情報を元に、複雑な構造体である岩盤の巨視的な力学特性を合理的に評価し得る手法が必要である。

著者らはこうした考えに基づいて、均質化理論が有する2段階スケールの理論構造を応用して岩盤の内部構造の情報からその巨視的変形強度特性を評価する方法を提案した¹⁾。そこでは、岩盤に存在する亀裂を薄い弱層として理想化し、岩盤を弱層が分布する一種の連続体複合材料として扱っている。そして、均質化理論に基づいて、岩盤の構造全体を扱う巨視スケールの問題と内部構造を扱う微視スケールの問題を分離して扱い、亀裂分布の画像情報と岩石

コアの力学特性のみから、岩盤を等価な均質体に置き換えたときの均質化弾性テンソルならびにその破壊基準を定める数値解析手法を示している。しかしながら、亀裂を薄い弱層として理想化したことにより、亀裂の開閉や滑りに起因した現象を表現できないという欠点を抱えている。

そうした問題を解決すべく微視構造を構成している亀裂を弱層に置き換えることなく、開閉や滑りが自由な構造的欠陥としてあるがままに扱おうとすると問題は極端に複雑になる。しかし、それも均質化理論の多段階スケールの理論構造にSignoriniの問題⁴⁾の取り扱いに見られる亀裂接触の数理を取り込むことによって解決できる。著者らは、無数の微視亀裂が存在する物体に対して2段階スケールからアプローチする「マルチスケール応力変形解析法」としてそのことを実践的に示した²⁾。そこでは無数の亀裂を含む物体を対象として述べているが、実はマルチスケール応力解析法は、均質化理論に基づいて微視構造を含む物体を取り扱う際の一般的な枠組みを与えている。変分不等式に基づくその理論的枠組みは、亀裂のみならず様々な特徴を有した微視構造に適用可能である³⁾。当然のことながら、それは参考文献1)に提案した亀裂を弱層に置き換えて連続体として扱う方法を包含している。本論文の主目的は、その一般性を持った理論的枠組みを提示することである。この目的は、変分不等式によるその一般的な定式化を示しながら、著者らが既に発表している2つの手法の関連性を明確にすることで達成される。また、そうすることでマルチスケール解析法の幅広い適用性を浮き彫りにすることができると考える。

また、微視構造において亀裂を具体的に扱うような場合は変分不等式を扱うことになるために、亀裂を弱層に置き換えて扱っている参考文献1)の場合のように巨視スケールと微視スケールの問題を分離することができず、構造物全体の巨視スケールでのつり合い式と、微視構造の応答を同時に連成させて解くという、文字通り二つのスケールの連成解析が必要となる。そしてこの場合、微視構造の解析だけから均質化弾性テンソル等を定める均質化プロセスと呼ばれる解析が独立には成立しない。

マルチスケール応力変形解析が岩石コアの力学特性と不連続面情報だけを用いることは手法本来の特徴であり、それが大きな長所であることは変わりない。しかし、常に構造物全体を対象とした巨視・微視スケール連成解析を行わねばならないという設定は、岩盤構造物の計画・調査段階において用いるにはやや重い道具として映る。ところが、このマルチスケール解析法の中で現れる微視構造の挙動を記述

する変分不等式を利用して少し工夫を加えると、岩石の強度と亀裂の配置から岩盤の巨視的な破壊基準が推定できる。それは、亀裂本来の開閉や閉合の挙動を考慮した破壊基準を得ることを意味し、参考文献1)において示した手法よりも、一段と実際の岩盤の特性に近づいたものとなる。本論文のもう一つの目的はその方法を提示して適用性を検討することである。

2. 均質化理論に基づくマルチスケール応力変形解析

均質化理論^{5,7)}の基本的なアイデアは、微視構造を有する材料に対して、材料全体が置かれる力学系を記述する巨視スケール変数と、材料内部の微視構造を記述する微視スケール変数の2つの変数を導入して問題を扱うことにある。マルチスケール応力変形解析法は、この均質化理論の基本的な特徴に立脚し、様々な内部構造を持つ広範囲の対象に対して適用可能な理論構造を備えている。

ここでは、マルチスケール応力変形解析法を以下のような流れで説明する(図-1)。まず、内部構造を有する物体の力のつり合いの問題について、既に参考文献2)において示している定式化に沿って、それをも包含する形の2変数展開による変分不等式の一般的定式化を示す。そして、微視構造が複数の線形材料で構成された連続体の場合にはそれが変分不等式に変わること、一方、微視構造に開閉を伴う亀裂を含む場合には変分不等式のままで扱わねばならないこと等を示し、著者らが参考文献1), 2)に提案している2つの手法の関連性およびマルチスケール応力変形解析法におけるそれらの位置付けを明示する。また、その理論構造は次節において提案する分布亀裂を含む材料の巨視的破壊強度の合理的な評価法につながるものである。

(1) 周期的微視構造を含む材料の力のつり合い問題の変分法による定式化

a) 問題の一般的設定

図-2(a)に示すような力のつり合いの問題を考える。今、この構造体は図-2(b), (c)に示すように、複数の材料が混在したり、あるいは亀裂が分布したりしている基本単位構造(ユニットセル)を周期的に含んでいるものとする。全体構造から見た時のそのユニットセルの寸法は小さいとし、それを ϵY で表す。

この構造体の全体の3次元領域を Ω^ϵ 、その境界を

微視構造を含む物体の静的つり合い問題の一般的な形

For $\forall v^\varepsilon \in V^\varepsilon$, V^ε : 閉凸部分集合

$$\int_{\Omega^\varepsilon} D_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_l} \frac{\partial (v_i^\varepsilon - u_i^\varepsilon)}{\partial x_j} dx$$

$$\geq \int_{\partial\Omega^\varepsilon} t_i (v_i^\varepsilon - u_i^\varepsilon) dx + \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon (v_i^\varepsilon - u_i^\varepsilon) dx$$

2つのスケール変数の導入
 ・巨視空間と微視空間の分離
 ・関数の2変数漸近展開

巨視問題 (平均変位)

For $\forall w^0 \in V$, V : 閉部分空間 (→ 等式)

$$\int_{\Omega} \left[D_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^0}{\partial x_j} \right) \right]_Y \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx$$

$$= \int_{\Omega} [f_i]_Y w_i^0 dx + \int_{\partial\Omega} t_i w_i^0 dx$$

微視問題 (微視変位)

(微視構造一般)

For $\forall w^1 \in W_Y$, W_Y : 閉凸部分集合 (→ 不等式)

$$\int_Y D_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \frac{\partial (w_i^1 - u_i^1)}{\partial y_j} dy$$

$$\geq - \left(\int_Y D_{ijkl} \frac{\partial (w_i^1 - u_i^1)}{\partial y_j} dy \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l}$$

(微視構造が亀裂を含む時)

For $\forall w^1 \in K_{Y_f}$, K_{Y_f} : 閉凸錐 (→ 不等式)

$$\int_Y D_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy \geq - \left(\int_Y D_{ijkl} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l}$$

(微視構造が線形弾性材料からなる時)

For $\forall w^1 \in V_Y$, V_Y : 閉部分空間 (→ 等式)

$$\int_Y D_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy = - \left(\int_Y D_{ijkl} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l}$$

図-1 マルチスケール応力変形解析法の定式化の流れ

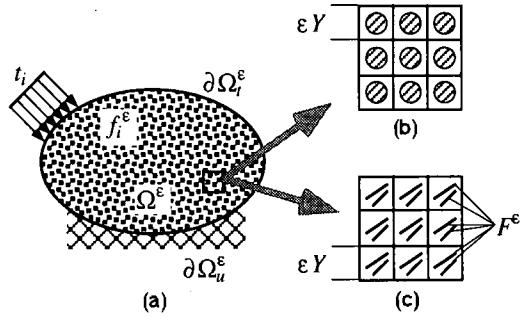


図-2 微視的周期構造を含む材料: (a)力のつり合いの問題; (b)複数の弾性材料からなる周期構造; (c)亀裂を含んだ周期構造

$\partial\Omega^\varepsilon$ とすれば、図-2(a)の力のつり合いの問題は、以下のような方程式群によって記述される。
 (つり合い式)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon(x)}{\partial x_j} + f_i^\varepsilon(x) = 0 \quad \text{in } \Omega^\varepsilon, \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega_u^\varepsilon \\ \sigma_{ij}^\varepsilon n_j = t_i & \text{on } \partial\Omega_f^\varepsilon \end{cases} \quad (2)$$

(変位ひずみ関係式)

$$e_{ij}^\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon(x)}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

(応力ひずみ関係式)

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(x) = D_{ijkl}^\varepsilon(x) e_{kl}^\varepsilon(x) \quad (4)$$

ここで、上記の各変数の肩につけた添え字 ε は、それらが微視構造に依存する量であることを表している。境界 $\partial\Omega^\varepsilon$ 上で与えられる表面力ベクトルは、外的条件として与えられるものであり、微視的周期構造には依存しないことから添え字 ε がつかないことに注意する。

b) 変分問題としての定式化

上の方程式(1)から(4)によって記述される問題は、変位 v_i^ε の許容関数空間を、変位境界のみならず微視構造に応じた何らかの制約条件が課せられた Ω^ε 上の1位のSobolev空間 $H^1(\Omega^\varepsilon)$ のある閉凸部分集合

$$V^\varepsilon = \left\{ v^\varepsilon \mid v^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon); v^\varepsilon = \mathbf{0} \text{ on } \partial\Omega_u^\varepsilon \text{ and some constraints on } v^\varepsilon \right\} \quad (5)$$

として、 V^ε において汎関数

$$J(v^\varepsilon) = \frac{1}{2} a(v^\varepsilon, v^\varepsilon) - l(v^\varepsilon) \quad (6)$$

を最小化する問題と等価であり、変位の解 u^ε は

$$J(u^\varepsilon) \leq J(v^\varepsilon), \quad \forall v^\varepsilon \in V^\varepsilon$$

を成り立たせるものとして与えられる。ここに、 $a(*,*)$ と $l(*)$ は、それぞれ V^ϵ 上の双一次形式と一次形式であり、次式で与えられる。

$$a(u^\epsilon, v^\epsilon) = \int_{\Omega^\epsilon} D_{ijkl}^\epsilon \frac{\partial u_k^\epsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v_l^\epsilon}{\partial x_j} dx \quad (7)$$

$$l(v^\epsilon) = \int_{\partial\Omega_i^\epsilon} t_i v_i^\epsilon dx + \int_{\Omega^\epsilon} f_i v_i^\epsilon dx \quad (8)$$

さらに、この式(5)から(8)で与えられる最小化問題は、以下の変分不等式の解 u^ϵ を求める問題と等価であることが示される^{5),8),9)}。

$$a(u^\epsilon, v^\epsilon - u^\epsilon) \geq l(v^\epsilon - u^\epsilon), \forall v^\epsilon \in V^\epsilon \quad (9)$$

以上、式(9)に至るまでは、微視構造についてはその存在を意識した添え字 ϵ を変数に付けただけで詳細な取り扱いは何も行っておらず、形式的な変分不等式による定式化を与えたに過ぎない。式(5)の許容関数の空間 V^ϵ は微視構造が決める問題の性質に応じて定められる。そして、次節以降に見るように、式(9)は選ばれたその許容関数空間の性質によって形を変える。

(2) 微視・巨視、二つのスケール変数の導入と漸近展開

a) 二つのスケール変数の導入による空間の分離

均質化理論は、内部に周期構造を有する材料の平均特性(均質化特性)を求めることを目的とし、特異摂動法の手法を借りて、周期を成す基本構造(ユニットセル)の寸法 ϵY (図-2参照)が無小になるときの支配方程式の挙動を調べて所望の平均特性を得る、という手続きが取られる。その際、無限小とされる内部構造について、数学的にどのように扱えばその影響を取り込んだ方程式を得ることができるか、ということが問題となる。

これに対して均質化理論は、全体構造に対する空間の測度を x とし、 x で指定される1点の近傍に存在する微視構造を表現するために相対寸法パラメータ ϵ を用いた新たな空間測度 $y = x/\epsilon$ を導入して問題の解決を図る。測度 x を巨視スケール変数、 y を微視スケール変数と呼ぶ。2つのスケール変数の導入により、周期的微視構造を備えた領域 Ω^ϵ は、巨視スケール変数 x を測度とする全体領域 Ω と、微視スケール変数 $y = x/\epsilon$ を測度とする基本単位構造 Y とに分解され、 Ω^ϵ はそれらの積空間として

$$\Omega^\epsilon = \Omega \times Y = \left\{ (x, y) \mid x \in \Omega, y = \frac{x}{\epsilon} \in Y \right\} \quad (11)$$

と表される(図-3)。

この空間の分解に伴って、添え字 ϵ がついた諸量は $\Omega \times Y$ を定義域とする2つのスケール変数 (x, y) の

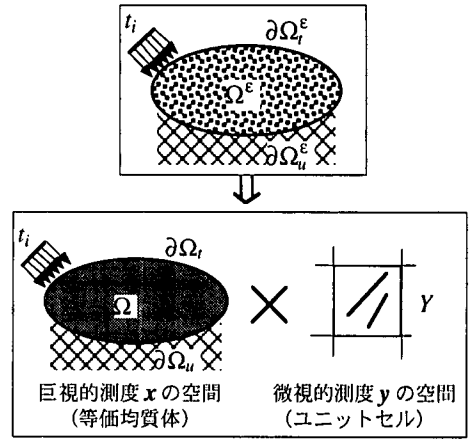


図-3 2つの異なるスケールの空間への分解

関数として

$$\begin{aligned} u_i^\epsilon(x) &= u_i(x, y), & f_i^\epsilon(x) &= f_i(x, y) \\ e_{ij}^\epsilon(x) &= e_{ij}(x, y), & \sigma_{ij}^\epsilon(x) &= \sigma_{ij}(x, y) \\ D_{ijkl}^\epsilon(x) &= D_{ijkl}(x, y) \end{aligned} \quad (12)$$

のように表され、微視構造の周期性を反映して y に関して Y -周期性：

$$\phi(x, y + Y) = \phi(x, y) \quad (13)$$

を持つ関数として再定義される⁵⁾⁷⁾。

これら測度スケールの異なる2つの空間にまたがって定義される Y -周期関数については次の定理が成立する⁵⁾⁷⁾。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \times Y} \phi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) dx = \int_{\Omega} [\phi(x, y)]_Y^- dx \quad (14-1)$$

ここに、

$$[\phi(x, y)]_Y^- = \frac{1}{|Y|} \int_Y \phi(x, y) dy \quad (14-2)$$

この定理は「微視構造の寸法を無限小とした時、2つの空間測度を持つ Y -周期関数の構造全体にわたる積分値の極限は、点 x に存在する微視構造 Y における平均値を構造全体にわたって積分したものに等しい」ことをいう。この定理は、均質化理論において、巨視的特性に及ぼす微視構造の影響を評価する際に重要な役割を演ずる。

また、これらの関数の微分は $y = x/\epsilon$ であることから、連鎖律に従って

$$\frac{\partial \phi^\epsilon(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x_i} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y_i} \quad (15)$$

と与えられる。

本手法の最終的な対象として考えている岩盤においては、内部の分布亀裂や異種岩石の混在の状態が式(13)に言うような周期性を厳密に満たしていると

は考えられない。しかし、それらが過去の自然の作用によって生じたもので、部分的には大まかな周期性が認められると判断して良く、そうした部分毎にユニットセルを定義して本手法を適用することが可能である。

b) 変分不等式の2変数漸近展開

以上の準備のもとに、導入した2つのスケール変数 $x \in \Omega$, $y \in Y$ を用いて変分不等式の漸近展開を行う。こうしたマルチスケール漸近展開は特異摂動法に見られるもので、その起源は19世紀後半の Poincare, Lindstadt にまで遡ることができる¹⁰⁾。

しかし、均質化理論で用いる2変数漸近展開は特異摂動法におけるそれとは異なり、漸近展開を施した後に微視構造のスケール・パラメータを $\varepsilon \rightarrow 0$ とする極限操作を行って、微視構造が無限小となった極限に対応する等価な均質体の支配方程式を求める操作へと展開される。その結果、得られた方程式においては、巨視変数 x の関数は所与の境界条件下における等価均質体の挙動を記述し、微視変数 y の関数はその平均挙動に影響を及ぼす周期的微視構造の振る舞いを記述する役割を担うことになる。

変分不等式(9)に現れている解関数 u^ε と任意の許容関数 v^ε (以後、試験関数と呼ぶ) を上述のように2つのスケール変数の関数として再定義し、微視構造の寸法パラメータ ε を用いて次のような漸近展開形を表す。

$$\begin{aligned} u_i^\varepsilon &= u_i(x, y) = u_i^0(x) + \varepsilon u_i^1(x, y) + \varepsilon^2 u_i^2(x, y) + \dots \\ v_i^\varepsilon &= v_i(x, y) = v_i^0(x) + \varepsilon v_i^1(x, y) + \varepsilon^2 v_i^2(x, y) + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

上式(16)において、 $u_i^1, u_i^2, \dots, v_i^1, v_i^2, \dots$ は y に関して Y -周期性を有し、微視構造に依存する関数である。この漸近展開において重要なことは、 u_i^0 と v_i^0 は微視変数 y に依存しないことである¹⁾。このことは u_i^0 (したがって v_i^0) については、微視構造とは無関係な巨視変数 x を測度とする Ω 上の許容関数空間から選ぶことができ、微視構造の特徴は微視変位 u_i^1, u_i^2, \dots および v_i^1, v_i^2, \dots が属する許容関数空間を考える際に考慮すればよいことを意味する。

したがって、式(5)に対応して u_i^0 と v_i^0 については

$$V = \{v^0(x) \mid v^0 \in H^1(\Omega); v^0 = 0 \text{ on } \partial\Omega_u\} \quad (17)$$

なる部分空間を考えればよい。また、 $u_i^1, u_i^2, \dots, v_i^1, v_i^2, \dots$ については関数の明確な性質として判っている Y -周期性と、微視構造によって決まる何らかの制約条件を満たす閉凸分集合

$$V_Y = \left\{ v^1(x, y) \mid \begin{array}{l} v^1 \in H^1(\Omega \times Y); Y\text{-periodic} \\ \text{and some constraints on } v^1 \end{array} \right\} \quad (18)$$

としておく。

以上の準備のもとに、微分が式(15)に示したような連鎖律に従うこと、および積分の極限について式(14)が成立することに注意して、式(16)を変分不等式(9)に代入して $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を取ると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [D_{ijkl}]_Y \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial (v_i^0 - u_i^0)}{\partial x_j} dx \\ & + \int_{\Omega} \left[D_{ijkl} \frac{\partial (v_i^1 - u_i^1)}{\partial y_j} \right]_Y \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} dx \\ & + \int_{\Omega} \left[D_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right]_Y \frac{\partial (v_i^0 - u_i^0)}{\partial x_j} dx \\ & + \int_{\Omega} \left[D_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \frac{\partial (v_i^1 - u_i^1)}{\partial y_j} \right]_Y dx \\ & - \int_{\Omega} [f_i]_Y (v_i^0 - u_i^0) dx - \int_{\partial\Omega_t} t_i (v_i^0 - u_i^0) dx \\ & \geq 0, \quad \forall v^0 \in V, \forall v^1 \in V_Y \end{aligned} \quad (19)$$

上式は、周期的微視構造を持つ構造体の力のつり合いの問題では、微視構造の影響は u_i^1 を介して反映されることを示している。

(3) 巨視的挙動 (平均変位) の仮想仕事式

式(19)において、まず、試験関数 v_i^1 については V_Y がいかなる許容関数空間であるかに関わらず $v_i^1 = u_i^1$ と選ぶことができる。また、 v_i^0 については V が部分空間なので、 w^0 を V に属する任意の関数、 α を任意の実数として $v_i^0 = u_i^0 + \alpha w_i^0$ と選ぶことができるので、結局、不等式(19)は次のような等式に置き換わる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[D_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \right]_Y \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx \\ & = \int_{\Omega} [f_i]_Y w_i^0 dx + \int_{\partial\Omega_t} t_i w_i^0 dx, \quad \forall w^0 \in V \end{aligned} \quad (20)$$

この式は、微視構造を含む構造体の平均変位 u^0 が従うべき仮想仕事式である。微視構造の影響は左辺の未知関数 u_i^1 の y に関する偏導関数を介して反映される。仮想仕事式(20)が次の巨視的な境界値問題と等価であることは容易に示される⁹⁾。

$$\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (21)$$

$$\begin{cases} u_i^0 = 0 & \text{on } \partial\Omega_u \\ \Sigma_{ij} n_j = t_i & \text{on } \partial\Omega_t \end{cases} \quad (22)$$

ここに、 Σ_{ij} と F_i は平均挙動を支配する巨視応力と物体力で、それぞれユニットセル領域 Y における微

視的応力 σ_{ij}^0 と物体力 f_i の平均値

$$\Sigma_{ij}(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma_{ij}^0(x, y) dy \quad (23)$$

$$F_i(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i(x, y) dy$$

で与えられる。さらに、 σ_{ij}^0 は微視構造内部に分布する微視応力であり、式(4)に式(16)を代入して $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を取ることにより、

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0(x, y) &= D_{ijkl}(x, y) \left(\frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1(x, y)}{\partial y_l} \right) \\ &= D_{ijkl}(x, y) e_{kl}^0(x, y) \end{aligned} \quad (24)$$

と与えられる。

以上、周期的微視構造を含む構造体が占める領域を巨視・微視2つのスケールの空間領域に分解したことにより、材料内部の微視構造は微視スケールで扱えばよく、構造体の平均挙動は巨視スケールの空間において微視構造の存在を意識せずに考えれば良いことを示した。平均変位 u^0 に関する上記の式(20)から(24)は微視構造の特徴に依存せず常に成立する。

一方、微視構造の影響を表す変位 u^1 については、以下の節に述べるように、微視構造に依存した許容関数空間を特定して初めてその支配方程式が定まる。

(4) ユニットセルが複数の弾性材料から成る場合の微視問題の方程式と均質化・局所化プロセス

ユニットセルが図-2(b)に見るように複数の弾性材料から構成される場合を考える。ただし、これら異種材料は互いに完全密着して変形に伴う分離などは起こらないとする。

a) 微視問題の支配方程式

このような場合、2.(1).a)に述べた式(1), (3), (4)は Ω^ε の全領域において成立し、 $u^\varepsilon(x)$ の許容関数空間は式(5)に与えたそのままでのよいことになる。したがって、空間を分解した後の $u^1(x, y)$ の許容関数空間も式(18)に与えた部分空間

$$V_Y = \left\{ v^1(x, y) \mid v^1 \in H^1(\Omega \times Y); Y\text{-periodic} \right\}$$

としてよい。したがって、変分不等式(19)において、試験関数の v_i^0 については $v_i^0 = u_i^0$ と選んで、 v_i^1 については、 w^1 を V_Y に属する任意関数、 α を任意の実数として $v_i^1 = u_i^1 + \alpha w_i^1$ と選ぶことができる。その結果、次の等式を得る。

$$\int_{\Omega} \left[D_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} \right] dx = 0, \quad \forall w^1 \in V_Y \quad (25)$$

そして、上式が成立するためには u_i^1 が基本単位構造

Y において次の等式を満たせば十分である。

$$\int_Y D_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy = - \left(\int_Y D_{ijkl} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \quad (26)$$

$$\forall w^1 \in V_Y$$

上式(26)が微視スケールの挙動 u_i^1 が従うべき方程式である。上式において $\partial u_k^0 / \partial x_l$ は y に依存しない定数係数として入っており、巨視挙動が微視構造に及ぼす影響を表している。この式には y に関する定数項 (x の任意関数) 分の不定性があるが、それは u^1 のユニットセルにおける平均値がゼロ、すなわち

$$\left[u_i^1 \right]_Y^- = \frac{1}{|Y|} \int_Y u_i^1(x, y) dy = 0 \quad (27)$$

なる制約を許容関数空間 V_Y に課すことにより一般性を失うことなく除去できる⁵⁾。すなわち、制約条件付きの V_Y の部分空間を

$$\tilde{V}_Y = \left\{ v^1(x, y) \mid v^1 \in V_Y; [v^1]_Y^- = 0 \right\} \quad (28)$$

として、この部分空間上で式(26)を考えれば唯一解 u_i^1 が得られる。

以上、内部に図-2(b)のような周期的微視構造を有する構造体の挙動を表す平均変位 $u^0(x)$ と微視変位 $u^1(x, y)$ は、全体構造に対する式(20)とユニットセルについての式(26)の2つの変分等式の解として与えられることが示された。

b) 均質化プロセス

このように微視スケールの問題が変分等式(26)で与えられる場合、それは $\partial u_k^0 / \partial x_l$ を定数パラメータとして単独で解くことができ、 $u_i^1(x, y)$ の一般解は次式で与えられる⁵⁾。

$$u_i^1(x, y) = -\chi_i^{kl}(x, y) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + c(x) \quad (29)$$

ここに、 $c(x)$ は x に関する任意関数である。また、 $\chi_i^{kl}(x, y)$ は次式の解として得られる。

$$\int_Y D_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy = \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial w_i^1}{\partial y_j} dy, \quad \forall w^1 \in V_Y \quad (30)$$

式(29)に与えられる微視変位 $u_i^1(x, y)$ を平均挙動の仮想仕事式(20)に代入すると次式を得る。

$$\int_{\Omega} D_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} F_i w_i^0 dx + \int_{\partial \Omega_1} t_i w_i^0 dx \quad (31)$$

$$\forall w^0 \in V$$

ここに、

$$D_{ijkl}^H(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijpq}(x, y) \left(\delta_{pk} \delta_{ql} - \frac{\partial \chi_p^{kl}(x, y)}{\partial y_q} \right) dy \quad (32)$$

とされている。また、 F_i は既に式(23)に与えられている。式(31)は D_{ijkl}^H と F_i を用いた全体構造の仮想仕事式の解が巨視変位 u_k^0 であることを表している。 D_{ijkl}^H を均質化弾性テンソル、 F_i を均質化(平均)物体力と呼ぶ。

また、式(23)、(24)を参照すると、平均挙動を表す巨視的な構成式が式(32)の D_{ijkl}^H を用いて

$$\Sigma_{ij}(x) = D_{ijkl}^H(x) \left(\frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \right) = D_{ijkl}^H(x) E_{kl}(x) \quad (33)$$

$$E_{kl}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^0(x)}{\partial x_k} \right)$$

と与えられることが判る。

以上のように、周期的微視構造を含む構造体を与えられたとき、その基本単位であるユニットセルの情報から、式(30)を解いて特性関数を求め、式(23)、(32)によって構造体の巨視的特性(均質化弾性テンソル、均質化物体力)を求める一連の作業を均質化プロセスと呼ぶ。

c) 局所化プロセス

均質化プロセスにおいてこれら巨視的特性を定めた後、構造体が置かれた境界値問題(31)を解けば、平均変位 $u_i^0(x)$ が求められる。すると今度は、この平均変位 u^0 と特性関数 χ^{kl} を式(24)と(29)に用いることによって、ユニットセル内部に分布する微視的な変位、ひずみおよび応力が求められる。このように、均質化プロセスとは逆に、巨視的な点 x での平均挙動が与えられたときに、その点近傍に存在する微視構造内部に分布する諸量を求めることを局所化プロセスと呼ぶ。

特に、式(24)、(33)から誘導される巨視応力と微視応力の関係

$$\sigma_{ij}^0(x) = \left[D_{ijpq}(x, y) - D_{ijkl}(x, y) \frac{\partial \chi_k^{pq}(x, y)}{\partial y_l} \right] \frac{\partial u_p^0(x)}{\partial x_q}$$

$$= \left[D_{ijpq} - D_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{pq}}{\partial y_l} \right] \left(D^H(x) \right)_{pqmn}^{-1} \Sigma_{mn}(x) \quad (34)$$

は、巨視的強度特性評価において重要な役割を演ずる¹⁾。

(5) 微視構造が亀裂を含む場合の微視問題の支配方程式とマルチスケール応力変形解析²⁾

次に、ユニットセルが図-2(c)に示すように亀裂を含んでいる場合を考える。詳細は参考文献2)に示しているので以下では要点のみを示す。亀裂は厚みがなく、表面は滑らかで摩擦はないとする。

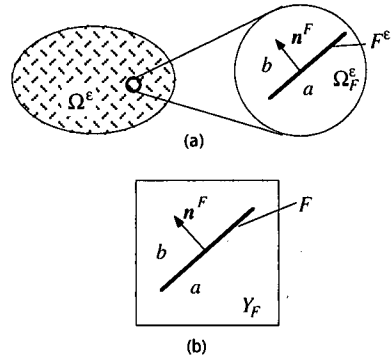


図-4 亀裂部分のモデル化：(a)元の問題、(b)微視スケールでの亀裂の取り扱い

a) 亀裂の接触問題の変分法定式化

この場合、2.(1).a)に示した最初の方程式(1)から(4)は、図-4(a)に示すように、領域 Ω^ϵ から亀裂が占める閉領域 F^ϵ を除いた領域 $\Omega_F^\epsilon = \Omega^\epsilon \setminus F^\epsilon$ を対象に考える必要がある。また、亀裂が占める閉領域 F^ϵ においては、摩擦のない亀裂の接触を考える必要がある。これはSignoriniの問題として知られており、以下のような方程式群で記述される^{2),4)}。

(つり合い式)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\epsilon(x)}{\partial x_j} + f_i^\epsilon(x) = 0 \quad \text{in } \Omega_F^\epsilon \quad (35)$$

$$\begin{cases} u_i^\epsilon = 0 & \text{on } \partial \Omega_{F_u}^\epsilon \\ \sigma_{ij}^\epsilon n_j = t_i & \text{on } \partial \Omega_{F_t}^\epsilon \end{cases} \quad (36)$$

(変位ひずみ関係式)

$$e_{ij}^\epsilon(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\epsilon(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\epsilon(x)}{\partial x_i} \right) \quad (37)$$

(応力ひずみ関係式)

$$\sigma_{ij}^\epsilon(x) = D_{ijkl}^\epsilon(x) e_{kl}^\epsilon(x) \quad (38)$$

(亀裂面の接触条件)

$$[n_i^F u_i^\epsilon] \leq 0 \quad \text{on } F^\epsilon \quad (39)$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^\epsilon n_j \Big|_a = -\sigma_{ij}^\epsilon n_j \Big|_b = \sigma_N n_i^F \\ \sigma_N \leq 0 \end{cases} \quad \text{on } F^\epsilon \quad (40)$$

$$\sigma_N [n_i^F u_i^\epsilon] = 0 \quad \text{on } F^\epsilon \quad (41)$$

そして、この問題の許容関数空間は、亀裂領域 F^ϵ を除いた領域の部分空間

$$V_F^\epsilon = \left\{ v^\epsilon \mid v^\epsilon \in H^1(\Omega_F^\epsilon); v^\epsilon = 0 \quad \text{on } \partial \Omega_u^\epsilon \right\} \quad (42)$$

に含まれる閉凸錐

$$K_F^\epsilon = \left\{ v^\epsilon \mid v^\epsilon \in V_F^\epsilon; [n_i^F v_i^\epsilon] \leq 0 \quad \text{on } F^\epsilon \right\} \quad (43)$$

となり、変分不等式

$$a(u^\varepsilon, v^\varepsilon - u^\varepsilon) \geq l(v^\varepsilon - u^\varepsilon), \forall v^\varepsilon \in K_F^\varepsilon \quad (44)$$

を満たす解 $u^\varepsilon \in K_F^\varepsilon$ を求める問題として定式化される^{2),4)}.

ここで、(2)節で述べたように領域 Ω_F^ε を2つのスケールの空間に分解して変分不等式(44)を考えると、亀裂は微視領域に存在することになり、領域 Ω_F^ε は $\Omega_F^\varepsilon = \Omega \times Y_F$ と分解される。ここに、 $Y_F = Y \setminus F$ である²⁾。こうして再び巨視スケールにおいては平均挙動のみを扱い、微視構造に存在する亀裂は図-4(b)に示すような微視スケールの領域で扱われることになる。

この空間の分解に伴う2変数漸近展開式(16)を式(44)に代入すると再び式(19)と全く同じ形の変分不等式が得られる。ただし、許容関数空間は、 u_i^0 と v_i^0 については式(17)と同じ部分空間 V でよいが、微視変位 $u_i^1, u_i^2, \dots, v_i^1, v_i^2, \dots$ については、Signoriniの問題を周期的微視構造において扱うために、式(18)とは定義域が異なる部分空間

$$V_{Y_F} = \{v^1(x, y) | v^1 \in H^1(\Omega \times Y_F); Y\text{-periodic}\} \quad (45)$$

の開凸錐

$$K_{Y_F} = \{v^1(x, y) | v^1 \in V_{Y_F}; [n_i^F v_i^1] \leq 0 \text{ on } F\} \quad (46)$$

としておく必要がある^{2),4)}。

そして、この場合も、平均変位 u^0 については(3)節と同様の議論が成立して式(20)と全く同じ仮想仕事式を得る。それは既に述べたとおり、平均変位 u^0 の支配方程式が微視構造に依存しないことの当然の帰結である。

b) 微視問題の支配方程式

微視スケールにおける u^1 が従うべき支配方程式は、変分不等式(19)を手掛かりにして導出される。まず v_i^0 については $v_i^0 = u_i^0$ と選ぶ。一方、 v_i^1 についてはそれが属している K_{Y_F} が開凸錐であることから、 $v_i^1 = u_i^1 + \alpha w_i^1$ ($\forall w^1 \in K_{Y_F}, \forall \alpha \geq 0$) と選ぶと(錐だから $\alpha < 0$ は選べない) 次式を得る。

$$\int_{\Omega} \left[D_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_i} \right) \frac{\partial w_j^1}{\partial y_j} \right] dx \geq 0, \forall w^1 \in K_{Y_F} \quad (47)$$

そして、この式が成立するための十分条件として、 u^1 に関する次のような基本単位構造 Y における変分不等式が得られる。

$$\int_Y D_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_i} \frac{\partial w_j^1}{\partial y_j} dy \geq - \left(\int_Y D_{ijkl} \frac{\partial w_j^1}{\partial y_j} dy \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} \quad (48)$$

$$\forall w^1 \in K_{Y_F}$$

この変分不等式も式(26)と同様、 K_{Y_F} に u^1 の平均値がゼロとなるように制約を加えた部分凸錐

$$\bar{K}_{Y_F} = \{v^1(x, y) | v^1 \in K_{Y_F}; [v^1]_{\bar{Y}} = 0\} \quad (49)$$

の上で考えれば唯一解が得られる⁵⁾。

ユニットセルが亀裂を含む場合は、以上のように微視構造の挙動を表す u^1 は変分不等式の解として定められる。そのため、(4)節で見たように微視問題の方程式(変分等式)の一般解を求めてから巨視問題の仮想仕事式を解くというプロセスは成立せず別の取り扱いが必要となる。以下にその一連の解析方法を述べるが、それは(4)節で示した方法を包含するより一般的な方法であり、ここで扱っている亀裂を含む場合だけに限らずより広い範囲に適用できるものである(例えば参考文献3)を参照)。

c) マルチスケール応力変形解析

微視スケールの支配方程式が変分不等式で与えられる場合には、微視構造を含む構造体の挙動を記述する $u^0(x)$ と $u^1(x, y)$ を求めるには以下の巨視問題のと微視問題の式を同時に解く作業が必要となる。

(巨視スケールの問題：式(20))

$$\int_{\Omega} \left[D_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_i} \right) \right] \frac{\partial w_j^0}{\partial x_j} dx$$

$$= \int_{\Omega} [f_i]_{\bar{Y}} w_i^0 dx + \int_{\partial\Omega} t_i w_i^0 dx, \quad \forall w^0 \in V$$

(微視スケールの問題：式(48))

$$\int_Y D_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_i} \frac{\partial w_j^1}{\partial y_j} dy$$

$$\geq - \left(\int_Y D_{ijkl} \frac{\partial w_j^1}{\partial y_j} dy \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_i}, \quad \forall w^1 \in K_{Y_F}$$

著者らは、参考文献2)において、この2つの式を同時に解いて微視構造を有する構造体の力学挙動を解析することを「マルチスケール応力変形解析」と命名し、定式化および制約条件付き問題として扱うその数値解析アルゴリズムを確立している。詳細は参考文献2)に譲るが、基本的には以下の手順で構成される。

u^1 に適当な関数(例えば定数関数)を初期解として設定し、

i) u^1 を用いて全体構造に対する巨視的境界問題(20)を解いて $u^0(x)$ を求める。

ii) 得られた平均変位 u^0 から、 $\partial u_k^0 / \partial x_i$ を外的に強制された巨視的変位勾配(巨視ひずみ)として、点 x にある微視構造での接触問題(47)に一樣に与えて u^1 を求める。

構造体の全ての点 x においてこうして $u^1(x, y)$ を求めた後、それを再び i, j の巨視的境界値問題に返し、上記の 2 式が全ての点 x において満足されるまで上記 i, j の作業を繰り返すというものである。

d) 巨視的挙動の構成式

このように、微視変位 $u^1(x, y)$ の一般解が定まらず、微視と巨視の 2 つの方程式を同時に扱わねばならない状況では、2.(4).b) で見たようなユニットセルの構造から巨視的な変形特性を求める均質化プロセスは成立せず、均質化弾性テンソルは式(32)のような陽な形で求めることができない。

この場合の巨視的な構成式は、式(24)を

$$\sigma_{ij}^0 = D_{ijkl} (E_{kl}(u^0) + e_{kl}(u^1)) \quad (50)$$

ここに、

$$E_{kl}(u^0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^0(x)}{\partial x_k} \right) \quad (51)$$

$$e_{kl}(u^1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^1(x, y)}{\partial y_l} + \frac{\partial u_l^1(x, y)}{\partial y_k} \right)$$

と書き換え、式(23)を用いて平均挙動に対するひずみエネルギー密度関数を

$$U(E) = \frac{1}{2|Y|} \int_Y D_{ijkl} (E_{kl} + e_{kl}) (E_{ij} + e_{ij}) dy \quad (52)$$

と定義することによって、

$$\Sigma_{ij} = \frac{\partial U(E)}{\partial E_{ij}} \quad (53)$$

のように超弾性体のそれとして形式的に表すことができるのみである⁹⁾。

e) 局所化プロセスと均質化プロセス

均質化弾性係数テンソルを求める均質化プロセスは成立しないが、点 x における巨視ひずみ E_{ij} (変位勾配 $\partial u_i^0 / \partial x_j$) が与えられた時に、式(47)を利用してユニットセル内部の微視変位 $u_i^1(x, y)$ を求めることはできる。さらに、得られた $u_i^1(x, y)$ と平均変位 $u_i^0(x)$ を式(24)に用いれば、ユニットセル内部の微視応力分布 $\sigma_{ij}^0(x, y)$ を求めることができる。すなわち、

局所化プロセス: $u_i^0(x), E_{ij}(x) \Rightarrow u_i^1(x, y) \Rightarrow \sigma_{ij}^0(x, y)$ は可能である。また、均質化弾性テンソルが定まらないため、巨視応力 $E_{ij}(x)$ から微視応力 $\sigma_{ij}^0(x, y)$ を定める局所化プロセスは式(32)のように陽な形で与えることはできないが、逆に上述の局所化プロセスによって得られた微視応力 $\sigma_{ij}^0(x, y)$ から巨視応力 $\Sigma_{ij}(x)$ を定める均質化プロセス: $\sigma_{ij}^0(x, y) \Rightarrow \Sigma_{ij}(x)$ は、式(23)によって実現できる。

3. マルチスケール応力変形解析を利用した亀裂性材料の巨視的強度特性評価

ここでは、2.(5).e) に述べた局所化プロセスを利用することによって、亀裂を無数に含む材料の巨視的な強度特性を評価することが可能であり、マルチスケール応力変形解析法が亀裂性材料の強度特性評価においても有効であることを示す (2.(4).c) に示した局所化プロセスの利用は参考文献1)を参照)。

(1) 局所化プロセスによって定められる巨視的破壊基準の意味

求めるべき「巨視的破壊基準」は、内部に無数の小さな亀裂を含む構造体の平均挙動を支配する巨視応力 Σ_{ij} を用いた破壊基準 $F(\Sigma_{ij}) = 0$ である。この破壊基準 $F(\Sigma_{ij}) = 0$ は、亀裂などの内部構造の空間的配置に依存するため、空間に固定した座標を参照して応力 Σ_{ij} の 6 成分をそのまま用いた関数として表現するのが実用的である。

現実にもそのような材料が与えられた場合、その破壊基準は、対象とする材料から十分な内部構造 (亀裂) を含む供試体をサンプリングして、様々な応力経路の強度試験を行って決定するという方法が考えられる。しかしながら、そうした内部構造を含む材料の供試体試験では、必ず内部構造の寸法と供試体寸法の相対関係が試験結果に大きな影響を及ぼす。いわゆる「寸法効果」と呼ばれている問題がつきまとう。しかし、考えてみれば、供試体試験とは「約束された寸法に設定された境界値問題」であり、材料自体が有限寸法の内部構造を含んでいれば、均質な「材料の試験」という意味合いは薄れて、内部構造の特徴的な寸法に強く影響を受ける「構造体の試験」という色合いが強くなることは自明である。さらに、岩盤のような大きな対象となつては、亀裂などの内部構造を十分に含む数多くの供試体試験などは初めから望むべくもない。

土木工学が扱わねばならない材料には内部構造を有する複雑な材料が多いが、そのような内部構造を有する材料に対しては、その存在に起因する上述のような問題に対処し得る新しいアプローチが必要である。そして、その一つがここに示す方法であると考えられる。

以下に述べる方法は、現実には不可能な「内部構造を十分に含んだ巨大な (無限大の) 供試体に対し、何通りもの応力経路において強度試験を行って破壊基準を定める」ことに相当し、得られた破壊基準は供試体寸法が無限大の場合に対応する¹⁾。

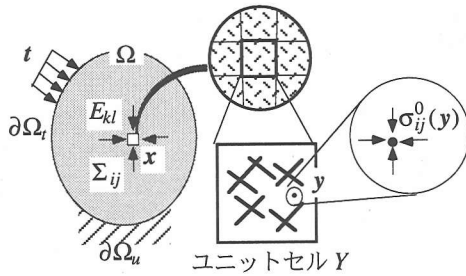


図-5 巨視応力, 巨視ひずみ, 微視応力

(2) 巨視的破壊基準決定の方法

a) 局所化プロセスの利用

2.(5).e)に述べた通り, 図-5に示すように, 周期的微視亀裂が分布する構造体のある点での巨視ひずみ $E_{ij}(x)$ (平均変位の勾配 $\partial u_k^0(x)/\partial x_l$) が与えられれば, その点に存在するユニットセル内部の微視変位 u_i^1 が変分不等式(48)の解として与えられる. u_i^1 を得れば, $\partial u_k^1/\partial x_l$ と併せてユニットセル内の各点 y における微視応力 σ_{ij}^0 が式(24)で与えられる. そして, 式(23)に見る微視的応力 σ_{ij}^0 のユニットセル上での平均値が巨視応力 $\Sigma_{ij}(x)$ を与える.

このことは, 「亀裂を無数に含む構造体のある点に作用する巨視応力が $\Sigma_{ij}(x)$ であるとき, その点に存在する微視構造内部では式(24)にしたがって微視応力 $\sigma_{ij}^0(x, y)$ が分布する」ことを意味する.

b) 破壊基準決定のための数値試験

微視構造を含む材料の1点での破壊開始の基準を次のように定義する:

[定義]: 材料内の点 x の近傍にあるユニットセルの内部において, 微視応力 σ_{ij}^0 が構成材料其質部分の強度を超えるような点 y が現れれば, 構造体の点 x において巨視的な破壊が始まる.

これは物理的・工学的に許容できる安全側の考え方である. この定義のもとで, 所望の巨視的破壊基準は前項a)に挙げた三つの式を利用して以下のように数値的に定めることができる.

I) 準備

i-1) (ミクロ場): 微視構造を構成する基質材料の物性値の把握

基質材料の破壊基準 $f(\sigma_{ij}^0) = 0$ を室内試験等によって, 例えばDrucker-Pragerの基準

$$f(\sigma_{ij}^0) = \alpha \sigma_{kk}^0 + \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}^0 s_{ij}^0} - K = 0 \quad (54)$$

のように定める. ここに, s_{ij}^0 は微視応力 σ_{ij}^0 の偏差成分を表す. また, α と K は材料定数であり, Mohr-Coulombの基準の粘着力 c および内部

摩擦角 ϕ と次式で関係付けられる.

$$\alpha = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 \pm \sin \phi)}, \quad K = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 \pm \sin \phi)} \quad (55)$$

分母の複号は主応力空間における π 平面上でのMohr-Coulomb基準のいびつな六角形に対し, Drucker-Prager基準の円がその内側の3頂点を通るときプラス, 外側の3頂点を通るときマイナスである.

i-2) (マクロ場): 単位巨視ひずみの準備

一方において, 図-6に示すように6次元の巨視ひずみ空間において, 単位球面上に均等に分布する十分な数の単位巨視ひずみ \bar{E}_{kl} を準備する.

II) 数値強度試験

準備した各単位ひずみ \bar{E}_{kl} について以下の作業を行う.

ii-1) 微視変位分布の計算

単位ひずみ \bar{E}_{kl} に対して, 変分不等式(49)を満足するユニットセル内部の微視変位分布 $u_i^1(x, y)$ を求める.

ii-2) 微視応力の計算

与えた \bar{E}_{kl} と求められた微視変位分布 $u_i^1(x, y)$ から, 式(24)によってユニットセル内に分布する微視応力 σ_{ij}^0 を算定する. また, 式(23)によって σ_{ij}^0 から単位ひずみ \bar{E}_{kl} に対応する巨視応力 $\bar{\Sigma}_{kl}(x)$ を求めておく.

ii-3) 破壊時巨視応力の算定

求めた微視応力 σ_{ij}^0 がユニットセル内のいたるところで式(54)に与えられている基質材料の破壊基準を超えないようにしつつ, 単位ひずみ \bar{E}_{kl} を何倍まで大きく出来るかという倍率係数の最大値

$$\beta_{\max} = \max \left\{ \beta > 0 \mid f(\beta \sigma_{ij}^0) \leq 0, \forall y \in Y \right\} \quad (56)$$

を求める. すると巨視応力 $\Sigma_{kl} = \beta_{\max} \bar{\Sigma}_{kl}$ がその単位応力方向の破壊時の巨視応力を与える.

III) 破壊時の巨視応力点形成する曲面

こうして, 準備した全ての単位ひずみ \bar{E}_{kl} に対して上記ii)の数値強度試験を行って破壊時巨視応力 Σ_{kl} を求めると, 亀裂を含む場合は, それらは巨視応力空間におけるいくつかの凸領域の和で表される有界領域の連続した境界面上に分布する. この境界面が巨視的破壊基準を与える(図-6). この亀裂を含む構造体の巨視的破壊基準面は, 連続ではあるが微分可能でなく, 凸性も保証されない可能性がある.

IV) 巨視的破壊基準面の二次曲面による近似

しかしながら, 凸でない破壊基準面を解析に用い

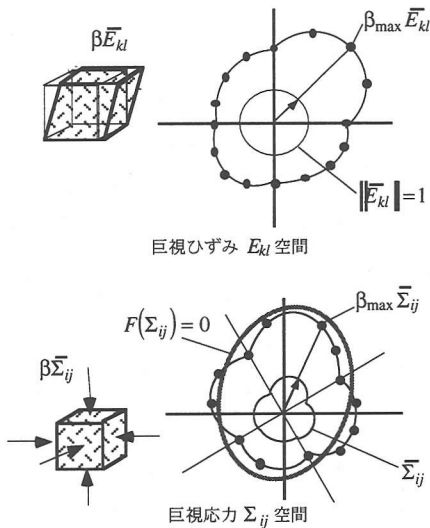


図-6 ユニットセルに対する数値強度試験

るのは、様々な場面で極めて有効に機能する凸解析の手法が適用できない等の問題を生じる。したがって、本研究では、その境界面を滑らかな曲面で近似して巨視的破壊基準 $F(\Sigma_{ij})=0$ を定めることにする。これには参考文献1)での提案と同様に、座標変換等の扱いが便利な二次曲面

$$F(\{\Sigma\}) = \{\Sigma\}^t [A] \{\Sigma\} + \{b\}^t \{\Sigma\} - 1 = 0 \quad (57)$$

$$\{\Sigma\} = \{\Sigma_x \quad \Sigma_y \quad \Sigma_z \quad \Sigma_{yz} \quad \Sigma_{zx} \quad \Sigma_{xy}\}^t$$

を用いる。曲面は原点を通らないので定数項を1としている。係数行列 $[A]$ およびベクトル $\{b\}$ は最小二乗法によって定める。

2.(4)で述べたように、ユニットセルが複数の線形弾性材料で構成されている場合には、亀裂が存在する場合とは異なり、巨視的破壊基準面の凸性は保証される。その場合は、上記の手順i-2)において単位ひずみ \bar{E}_{kl} の代わりに単位応力 $\bar{\Sigma}_{kl}$ を準備し、数値強度試験II)において、式(34)を用いて各 $\bar{\Sigma}_{kl}$ から直接に微視応力 σ_{ij}^0 を算定する。そして、後は上記と同様の手順に従えばよい¹⁾。

4. 不連続面を配置した石膏供試体の強度評価への適用

以上に述べた提案手法の有効性を検証するために、規則的な不連続面を配置した石膏供試体の一面せん断試験の解析を実施して試験結果との比較検討を行う。なお、この一面せん断試験は参考文献2)においても検証例題の一つとして取り上げたものである。

表-1 石膏モルタルの材料定数

一軸圧縮強度 σ_c	218.8 kgf/cm ²	(21.44 MPa)
引張り強度 σ_t	15.8 kgf/cm ²	(1.55 MPa)
粘着力 c	33.3 kgf/cm ²	(3.26 MPa)
内部摩擦角 ϕ	56.3 度	
ヤング率 E	37,300 kgf/cm ²	(3,650 MPa)
ポアソン比 ν	0.16	

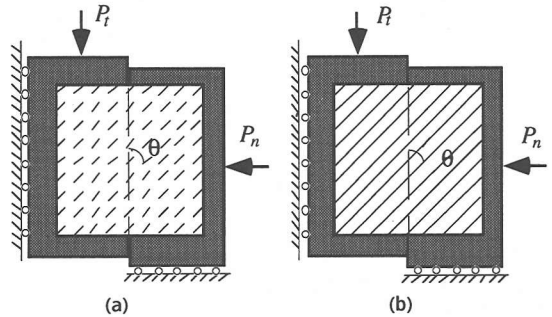


図-7 不連続面を配置した石膏モルタル供試体の一面せん断試験：(a) 分布開口亀裂モデル、(b) 積層体モデル¹⁰⁾

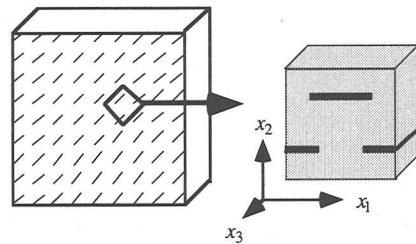


図-8 石膏供試体のユニットセル

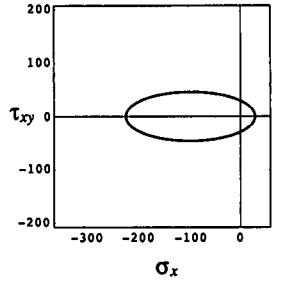
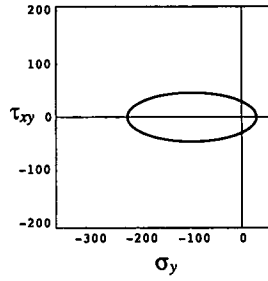
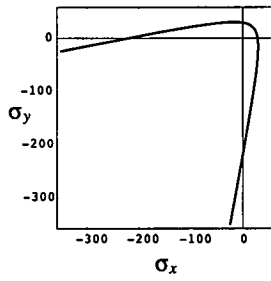
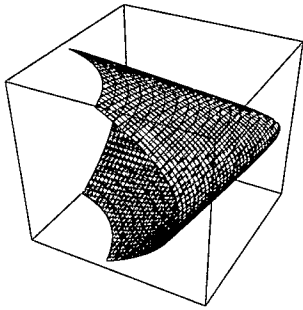
(1) 石膏供試体の一面せん断試験

図-7に示すような二種類の石膏モルタル供試体の一面せん断試験によって、不連続面の角度 θ および拘束荷重 P_n の違いによるせん断破壊荷重 P_t の変化が調べられている¹¹⁾。供試体の大きさは $15 \times 15 \times 4$ cmである。図-7(a)に示す供試体では、石膏モルタルが固まらないうちに幅9mm、厚さ0.2mmの薄い鉄片を差し込むことによって規則的な開口不連続面を形成している。また、図-7(b)に示す供試体は、石膏モルタルが固まらないうちに所定の間隔で供試体を切ることによって作成されている。

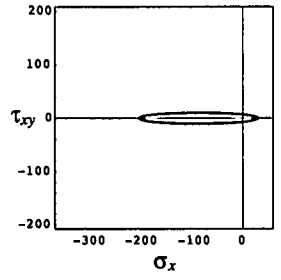
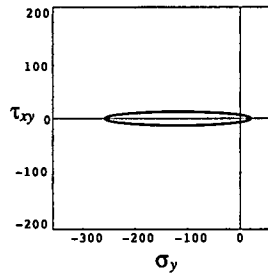
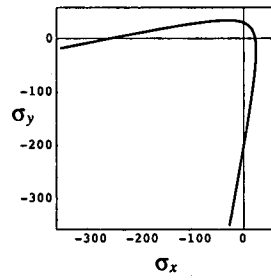
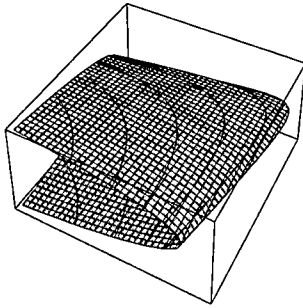
石膏モルタルの材料定数は、円柱供試体に対する3軸圧縮試験によって表-1のように定められている。

(2) 石膏供試体の巨視的破壊基準の決定

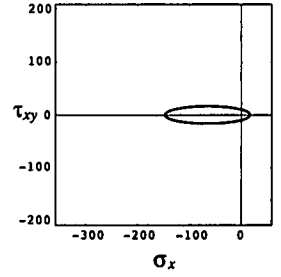
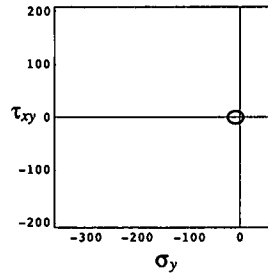
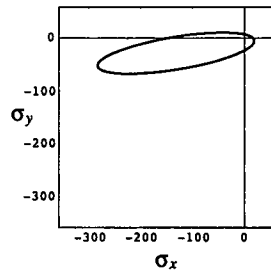
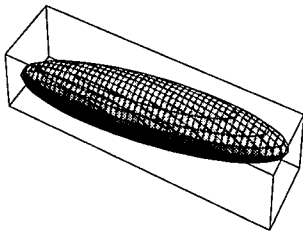
図-7(a)に示されている供試体のユニットセルを



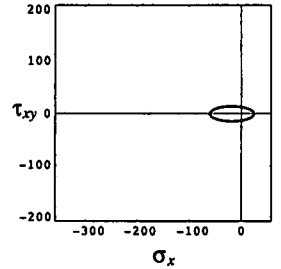
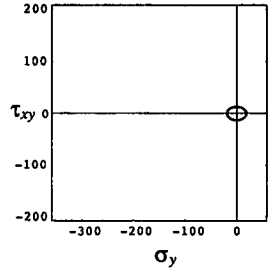
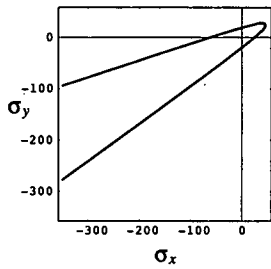
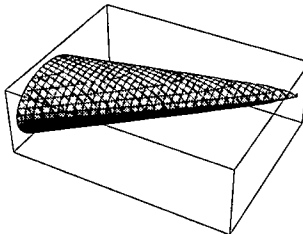
(a) 健全な石脊供試体



(b) 摩擦なし亀裂モデル



(c) 完全開口亀裂モデル



(d) 連続体弱層モデル

図-9 巨視的破壊二次曲面 (平面応力条件) 単位: kgf/cm² (0.098 MPa)

図-8のように抜き出し、その有限要素モデルを作成した。ここで、不連続面は厚みがない分離面とし、二重節点を与えている。

石膏モルタル基質部は等方弾性体と仮定し、表-1にあるヤング率とポアソン比を設定した。また、その強度については、表-1にある粘着力 c と内部摩擦角 ϕ が与えるMohr-Coulombの破壊基準に外接するようなDrucker-Pragerの基準を式(54)に従って

$$f(\sigma_{ij}^0) = \alpha \sigma_{kk}^0 + \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}^0 s_{ij}^0} - K = 0 \quad (58)$$

$$\alpha = 1.329, K = 29.52 \text{ kgf/cm}^2 (2.89\text{MPa})$$

と定めた。そして、3.(2).b)に述べた手順に従って、ユニットセル有限要素モデルを用いた数値試験を実施して、巨視的破壊基準を式(57)に与えられる二次曲面として決定した。その際、不連続面の基本的な特性に対するモデル化の違いが、強度評価にどのような影響を及ぼすかを調べるために、次のような3ケースを設定した。

ケース1) 摩擦なし亀裂モデル：式(39)から(41)の制約条件式を満たす亀裂 (Signoriniの問題)。亀裂は滑らかで摩擦がなく、垂直圧縮応力のみを伝達する。

ケース2) 完全開口亀裂モデル：亀裂については開口のみならず重なり合うことも許容する。圧みはないが常に開口した状態にあるような亀裂を想定している。式(39)から(41)の制約条件をはずし、二重節点が設けられた分離面のまま通常の弾性つり合い計算を行うことで実現する。

以上の2ケースに加えて、比較のために参考文献1)での計算結果を再整理したものをケース3)とする。

ケース3) 連続体弱層モデル：亀裂部分を薄い弱層として扱う。これはケース2)に近いが、有限幅の開口亀裂のモデルになっている。

比較のために、三軸試験で得られた健全な石膏材料の破壊二次曲面と共に、上の3ケースについて得られた巨視的破壊二次曲面を図-9に示す。なお、破壊基準は二次元平面応力条件に対するものである。

図-9(a)の曲面は健全な石膏供試体の材料強度を表しており、主応力空間においてDrucker-Prager型の円錐面で現れるものを、二次元平面応力条件のもとで応力空間 $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ における二次曲面で近似したものとなっている。近似の結果、破壊曲面は二葉双曲面の片方の曲面で表されている。

図(a)を基準として図(b)を見ると、せん断強度が亀裂の存在により大きく低下している様子が見て取れる。圧縮に対しては亀裂面が密着しているために材料本来の強度が発揮されており、摩擦のない亀裂

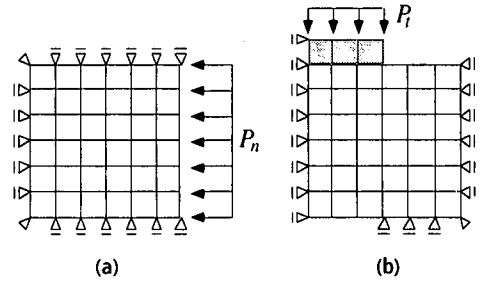


図-10 極限荷重解析用有限要素モデル

が分布する場合の巨視的な強度の特徴が良く表れている。

図(c)は亀裂部分が圧縮にも抵抗しない場合の結果である。この場合は、亀裂は幾何学的制約のない孔としての効果を及ぼす。静水圧に近い圧縮状態でも亀裂の両端が石膏モルタルの限界強度に達するため、破壊曲面は楕円体として評価されている。その半径は亀裂面に垂直な σ_y 軸方向に短く、面に平行な σ_x 軸方向に長い。そして、その主軸は亀裂の方向を反映して静水圧軸から σ_y 軸方向に傾いている。

図(d)は亀裂を薄い弱層(厚みは要素二つ分)としてモデル化した連続体計算の結果²⁾である。現れている曲面は(a)、(b)と同様、二葉双曲面の一方である。水平な亀裂(弱層)の分布により、亀裂面に垂直な σ_y 軸方向の強度が小さくなって形が鋭くなり、主軸は亀裂の方向を反映して静水圧軸から σ_y 軸方向に幾分傾いている。このケースにおいては開口したままの亀裂を想定していることは図(c)と同じである。が、結果は、図(c)とは異なって静水圧に近い圧縮では破壊しないという評価になった。このことは、亀裂の形や厚みが巨視的強度に大きな影響を及ぼすことを示唆している。

(3) 一面せん断試験に対する極限荷重解析

以上のようにして得られた巨視的な破壊基準が構造解析においてどの程度有効なものであるかを検証するために、それらを極限荷重解析による一面せん断試験のシミュレーションを行い実際の試験結果と比較検討した。

極限荷重解析では解析対象を完全塑性体として扱う。したがって今の場合、亀裂を配置した石膏供試体を上に定めた破壊基準に従う完全塑性材料からなる連続体に置き換えて扱うことを意味する。

完全塑性体に対して単位荷重 $\{F\}$ の比例荷重を行った時の極限荷重 $\{\alpha F\}$ を求める問題は、荷重係数 α および残留応力 $\{\bar{\sigma}'\}$ を変数として、残留応力の自己つり合い式と線形不等式で表された降伏条件を制約条

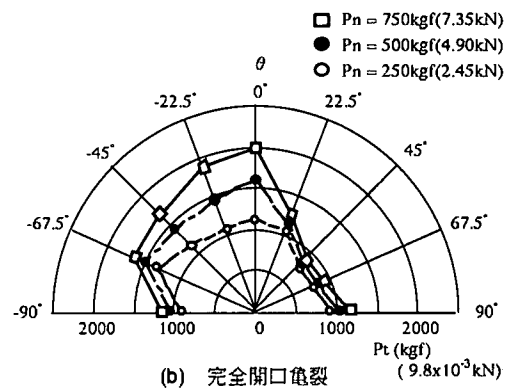
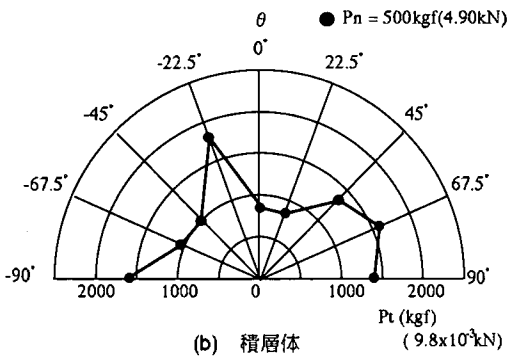
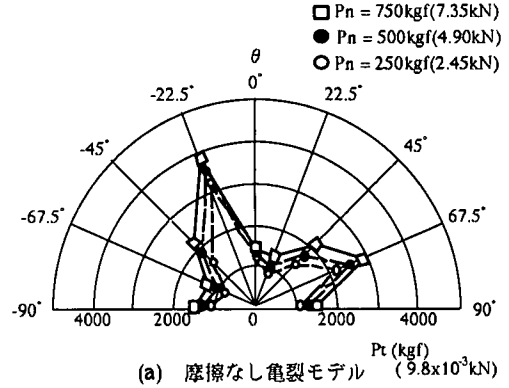
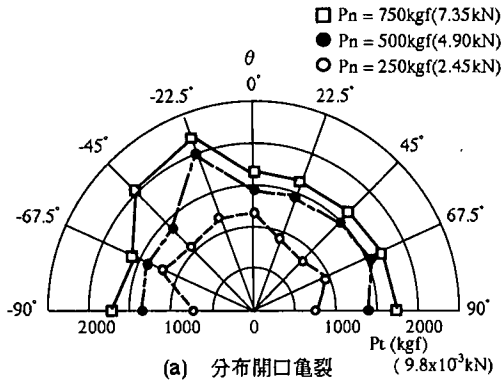


図-11 亀裂の角度とせん断破壊荷重の関係 (試験結果)

件として、 α の最大化を図る線形計画問題として以下のように定式化される^{(11),(12)}。

$$\begin{cases} \text{maximize } \alpha \\ \text{subject to} \\ \begin{cases} [\tilde{N}]'(\alpha\{\tilde{\Sigma}^e\} + \{\tilde{\Sigma}^r\} + \{\tilde{\Sigma}^0\}) \leq \{\tilde{R}\} \\ \{\tilde{B}\}'\{\tilde{\Sigma}^r\} = \{0\} \\ \{\tilde{B}\}'\{\tilde{\Sigma}^e\} = \{\tilde{F}\} \end{cases} \end{cases} \quad (59)$$

ここに、 $[\tilde{N}]$ は、破壊基準を有限個の接平面で囲まれた凸多面体(錐)に置き換えたときの接平面に立てた外向き法線ベクトルを並べた行列、および $\{\tilde{R}\}$ はそれら接平面に向かう応力空間原点からの距離、 $\{\tilde{\Sigma}^e\}$ は単位外荷重 $\{\tilde{F}\}$ に対する静的可容応力ベクトル、 $\{\tilde{\Sigma}^0\}$ は初期応力ベクトルである。線形計画問題としての一面せん断試験の解析では、参考文献1)で行っているのと同様の方法を採用した。

まず、石膏モルタルのヤング率とポアソン比を用いた等方弾性体に仮定して、図-10(a)に示す有限要素モデルを用いて所定の側方荷重 P_n に対する応力分布を求めて初期応力分布 $\{\tilde{\Sigma}^0\}$ とする。

次に、図-10(b)に示すような上部に鋼の弾性係数を持つ要素を乗せた有限要素モデルを用いて、単位

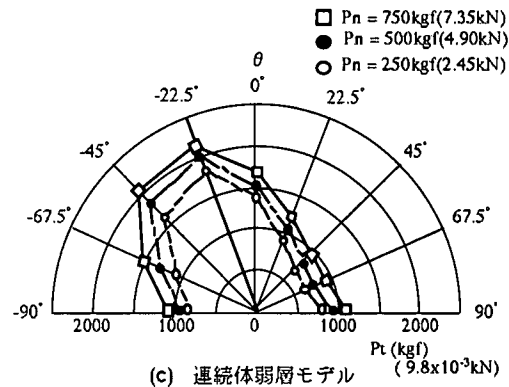


図-12 分布亀裂の角度とせん断破壊荷重の関係 (解析結果)

せん断荷重 P_t に対する弾性応力分布 $\{\tilde{\Sigma}^e\}$ を求め、初期応力分布 $\{\tilde{\Sigma}^0\}$ と併せて式(59)に用いた。

また、亀裂の配置角度に応じて先に得られた破壊二次曲面を座標変換し、それを接平面で囲まれた凸多面体に置き換えて式(60)の $[\tilde{N}]$ と $\{\tilde{R}\}$ を定めた。図-11に試験結果、図-12に解析結果を示す。

図-11の試験結果では、亀裂の配置角度が差し目(-22.5度~-15度付近)の時に強度が大きくなる特徴が現れている。その傾向は亀裂が供試体を完全に分離している積層体供試体ではより顕著になって

いる。このような強度特性が解析でどの程度予測できるかがここでの主題である。

図-12に示した解析は全て分布亀裂のモデルによる結果である。しかし、図-12(a)に示す摩擦なし亀裂モデルによる解析結果が、積層体モデルの試験結果に対して、強度異方性の発現の様子が酷似していることが興味深い。ただし、図-12(a)は荷重のスケールが実験値の2倍になっていることに注意する。摩擦なし亀裂モデルで考慮したことは、亀裂が密着して圧縮力を伝達すること、開口および滑りに対しては抵抗を示さないことであるが、これは積層体供試体の不連続面部分にも共通した特徴である。解析モデルと実際の供試体におけるこうした亀裂の特徴の共通性が、試験の結果と酷似した解析結果をもたらしたと考えられる。ただし、解析と試験では強度の大きさに2倍程度の開きが生じている。これは、実際の供試体では亀裂が供試体を貫いているのに対して、解析では短い分布亀裂を想定しているという違いに起因すると思われる。

一方、図-12(b)の完全開口亀裂モデルと(c)の連続体弱層モデルによる解析結果は、破壊基準面の形が異なっているにも関わらず、双方とも図-11(a)に見る分布開口亀裂供試体の試験結果と良く似た傾向の強度特性を予測した。(b)と(c)では図-9に見たようにそれぞれ楕円体と双曲面の違いはあっても、一面せん断において実現する応力状態ではその差異が現れる程に圧縮は支配的でなく、良く似た傾向にあるせん断強度が予測において支配的に現れたためと考えられる。これら2つの解析結果が試験結果と良く似た強度特性を示したことについて、これら解析モデルにおける亀裂の特徴と供試体における実際の開口亀裂の共通点として考えられるのは、亀裂面が閉じる方向にも運動可能であること、その結果、亀裂両端に圧縮の応力集中が発生し得ることなどである。

以上のことは、亀裂が分布する岩盤のような構造体について、微視構造としての亀裂の特徴をうまく表現しさえすれば、先に述べた提案法による巨視的破壊基準は、岩盤などの構造体が示す強度を精度良く予測し得ることを示唆している。

5. 結 論

土木工学が対象とする材料には、岩盤のように複雑な内部構造を有しているものが多い。均質化理論に基づくマルチスケール応力変形解析法は、そのような内部構造を有する材料の力学挙動を扱うのに極めて有力な手法である。

本論文では、まず、そのマルチスケール応力変形解析法について、変分不等式から出発する一般的な定式化を示し、その理論的な構造についての以下の重要な特徴を明示した。

1) 均質化理論の本質的な特徴である巨視と微視の二つのスケールでの取り扱いにおいては、内部の微視構造がいかなる特徴を有していようとも、微視構造の挙動を取り込んだ形で表現される構造体全体に対する巨視的な仮想仕事式の形は不変であり、微視構造の挙動については微視スケールにおいて具体的に取り扱いえれば良い。

2) そして、微視構造が複数の材料で構成される連続体の場合にはその挙動は微視スケールにおける変分等式で記述される。したがって、そのような微視構造を含む材料全体の挙動は、巨視的な仮想仕事式とその等式の2つの変分等式を解くことによって得られる。また、微視構造の挙動が変分等式で記述される結果、それは単独で解くことができ微視構造の形態から構造体の巨視的特性を評価する均質化プロセス、また逆に巨視的な平均挙動から微視構造内部の応力分布などを知る局所化プロセスが成立する。

3) 一方、微視構造が亀裂を含む場合には、微視スケールの挙動は変分不等式で記述されることになる。そのため、そのような微視構造を含む材料全体の挙動を知るには、その変分不等式と巨視的挙動の仮想仕事式を連成させて解くマルチスケール応力変形解析法のアルゴリズムが必要となる。このアルゴリズムは微視構造が連続体の場合を包含する一般的な方法である。

そして、マルチスケール応力変形解析を利用して、岩盤のように無数の亀裂を含む物体の巨視的強度特性を破壊基準の形に評価する方法を提案した。

その議論の中において、微視構造に亀裂を含む場合には、巨視的な破壊基準は一般には凸曲面とはならないことを示した。しかし、凸でない破壊基準面では、凸解析に基づくあらゆる議論が成立しなくなり、実用面では様々な困難が生じるため、滑らかな二次曲面で近似することを提案した。

検証例題として、規則的に亀裂を配置した石膏モルタル供試体の一面せん断試験の解析を行った結果、亀裂の形や開口の様子に巨視的強度が大きく左右されることが明らかとなった。そして、このことはまた、それら亀裂の特徴をユニットセルモデルの中にもうまくモデル化すれば、岩盤のような無数の亀裂を含む物体の巨視的強度が十分な精度で予測し得るとの結論を得た。

本研究では扱っていないが、摩擦は岩盤の亀裂なを扱う場合には無視できない重要な特徴である。摩

擦の影響がどのように巨視的な強度に影響を及ぼすか、また、本来凸曲面を構成しない強度特性を強引に凸な二次曲面で表すことの問題などは今後の課題である。

参考文献

- 1) 京谷孝史, 寺田賢二郎, 欧陽立珠: 岩石の力学特性と不連続面画像情報による岩盤の変形強度特性評価. 土木学会論文集, No. 631/III-48, 131-150, 1999.
- 2) 寺田賢二郎, 京谷孝史: 無数の亀裂を有する物体のマルチスケール応力変形解析法. 土木学会論文集, No. 619/I-47, 23-34, 1999.
- 3) 寺田賢二郎, 菊池昇: 非均質弾塑性体のマルチスケール解析のための一般化アルゴリズム, 土木学会論文集, 633/II-49, 217-229, 1999.
- 4) Kikuchi, N. and Oden, J. T.: *Contact Problem in Elasticity: A study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, Philadelphia, SIAM, 1988.
- 5) Sanchez-Palencia, E.: *Non-homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- 6) Lions, J. L.: *Some methods in the mathematical analysis of systems and their control*, Science Press, Beijing, China, 1981.
- 7) Bensoussan, A., Lions, J. L. and Papanicolaou, G.: *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- 8) 柴垣和三雄: 関数解析と数値解析の基礎, 森北出版, 1985.
- 9) 菊池文雄: 有限要素法の数理, 培風館, 1994.
- 10) Smith, D. R.: *Singular-perturbation theory*, Cambridge University Press, 1985.
- 11) 川本眺万, 吉田英生: 節理体および積層体の巨視的なせん断破壊性状について, 材料, 17(181), 42-49, 1968.
- 12) Maier, G.: Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and nonassociated flow-laws: a finite element, linear programming approach, 'Meccanica IV:3 250-260, 1969.
- 13) Cohn, M. Z. and Maier, G. (eds): Engineering plasticity by mathematical programming, Proc. NATO Advanced Study Institute, Pergamon Press, 94-134, 1977.
- 14) 金子賢治, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 岸野佑次: 非線形均質化理論に基づく粒状体マルチスケール解析法の開発とその応用, 土木学会論文集, No.680/III-55, 183-199, 2001.

(2000. 2. 7 受付)

A MULTISCALE STRUCTURAL ANALYSIS AND ITS APPLICATION TO A STRENGTH EVALUATION FOR FISSURED MEDIA

Takashi KYOYA and Kenjiro TERADA

A framework of the multiscale analysis method based on the mathematical homogenization theory is explored within the context of strength evaluation for fissured media. The two-scale variational formulation with appropriate functional setting plays a crucial role in our modeling for a general class of heterogeneous media. In particular, this modeling method for a fissured medium yields the microscopic variational inequality whereas the macroscopic problem is a standard equality. The formulation is utilized to propose the numerical strategy for evaluating its macroscopic strength and its feasibility is discussed by means of mathematical statements and through several numerical examples.