

FDS法による1次元河床変動解析

西本直史¹・森 明巨²・板倉忠興³・田原達人⁴

¹正会員 博(工) 日本建設コンサルタント(株) 東京支社技術一部技術課長 (〒105-0004 東京都港区新橋6-17-19)

²正会員 工博 北海道大学助手 工学研究科環境資源工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

³正会員 工博 北海道大学教授 工学研究科環境資源工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

⁴正会員 日本建設コンサルタント(株) 東京支社技術一部部長 (〒105-0004 東京都港区新橋6-17-19)

限界流や流れの遷移を伴う河床変動解析では、流れが河床変化に影響を及ぼすと同時に河床変化も流れに影響を及ぼすという相互干渉を考慮する必要がある。この構造を特性帯の理論を用いて解明し、その結果をFDS法(流束差分法)に適用して解析の有効性を確認する。その中で、FDS法の流れのみの解析に現れる非物理的な解(気体流における膨張衝撃波)が本解析では現れないことを示し、この性質は流れのみの解析における膨張衝撃波の除去として利用できることを示す。さらに、本研究で得られた相互干渉の構造を踏まえ、流れの基礎方程式に流砂の連続式を単純に加えた解析(準定常解析)による効率的な計算法を提案する。

Key Words : flux difference splitting , open channel flow , bed variation , bed load , entropy condition

1. はじめに

河床変動解析では、解析の単純化や効率化のため擬似定常の仮定がよく用いられる。擬似定常は、河床変化が流れの変化に比べて緩慢であるため相対的に流れの擾乱の伝播速度が非常に大きいとする(流れの非定常項を無視する)ことであり、この結果、河床擾乱の伝播速度 γ は次のようになる¹⁾。

$$\gamma = \frac{-1}{(1 - Fr^2)(1 - \lambda)} \frac{\partial q_B}{\partial h} \quad (1)$$

ここに、 Fr はフルード数、 λ は河床材料の空隙率、 q_B は掃流砂量、 h は水深である。 $\partial q_B / \partial h$ は負であるため、 γ は射流で負の値、常流で正の値となる。したがって、流砂の連続式に対する風上差分として、射流では前進差分、常流では後退差分が用いられる。しかし、このような解析法を限界流や流れの遷移がある場合に適用しようとすると、次の問題が生じる。

- ① 限界流で γ が発散する。
- ② 跳水が計算点間にある場合、後退差分と前進差分が交錯するため(図-1(1))、土砂収支を満たすための工夫²⁾が必要となる。
- ③ 支配断面が計算点間にある場合、上流側計算点で後退差分、下流側計算点で前進差分となり(図-

1(2))、計算点 i の河床高は、上流側計算点 $i-1$ の流砂量に関係なく決定されてしまう。これらの問題では、河床擾乱に関する伝播速度を適切に評価する必要がある。 Fr が1に近づくとdynamic

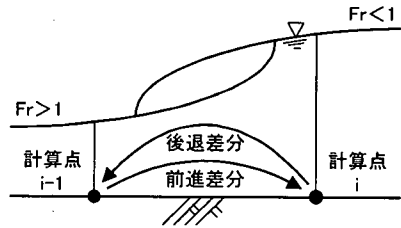


図-1(1) 流砂の連続式の風上差分(跳水部)

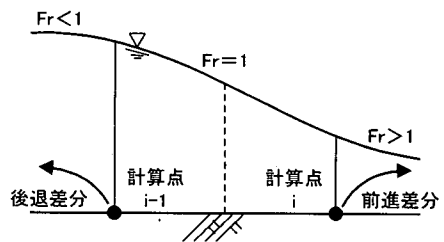


図-1(2) 流砂の連続式の風上差分(支配断面)

wave の伝播速度の一つである $\Lambda_- = v - c$ (v は流速, c は長波の伝播速度) は 0 に近づくため, 河床擾乱に関する伝播速度が小さくても相対的に無視できなくなるからである。

岡部, 芦田³⁾は, 流砂濃度を考慮した河床擾乱の伝播特性を示し, これに基づいた河床変動量の算出法を提案し, マコーマック法に適用した。ただし, 計算では特性変量が扱われておらず, また, 計算の安定のためソース項(底面圧力項, 摩擦項)の扱いが調整されている。

限界流や流れの遷移がある場合には, 流れが河床変化に影響を及ぼすと同時に河床変化も流れに影響を及ぼすという, 相互干渉を考慮する必要がある。そこで, 本論文では, 相互干渉の構造を特性帯の理論を用いて解明し, その結果を常射流混在流の解析に有効な FDS 法⁴⁾に適用して, 解析の有効性を確認する。その中で, FDS 法の流れのみの解析に現れる非物理的な解(気体流における膨張衝撃波)が本解析では現れないことを示し, さらに, この性質を生かして, 流れのみの解析でエントロピー条件を満たす解が容易に得られることを示す。また, 本解析では特性速度を求めるときに 3 次方程式を解く必要があるため, これを避けるため準定常解析の有用性を明らかにし, 準定常解析を効率的に用いる計算法を提案する。

大川, 清水ら⁵⁾は, 河床変化と流れの相互干渉を考慮した FDS 法による 2 次元河床変動計算を行っているが, 本論文は, ①相互干渉の構造, ②膨張衝撃波の除去が必要であること, ③Rankine-Hugoniot 関係⁶⁾を満たす方法, ④本解析の特質の利用(エントロピー条件), ⑤効率的な計算法, を示している。

2. 河床変化と流れの相互干渉の構造

(1) 基礎方程式

河床変化による底面圧力変化が流れに作用し, この流れの変化が同時に河床変化に作用する。このような河床変化と流れの相互干渉を組み込むため, 基礎方程式を次のとおりとする。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Omega = 0 \quad (2)$$

$$\phi = \begin{pmatrix} h \\ q \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \tilde{h} \cdot g(h + \eta) \\ \frac{q_B}{1 - \lambda} \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ fq \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここに, q は単位幅流量, η は河床高, g は重力加速度, $f = v/\varphi^2 h$ で φ は流速係数である。 \tilde{h} は局所的な(離散化式では計算点間の)平均水深である。これは, 圧力

勾配を担う近傍の平均水深で, 次式で定義される。

$$\frac{\partial(\tilde{h} \cdot g(h + \eta))}{\partial x} = \tilde{h} \frac{\partial g(h + \eta)}{\partial x} = h \frac{\partial g(h + \eta)}{\partial x} \quad (3)$$

式(2)の流束 Φ を保存変量 ϕ で微分すると, 移流形の方程式(4)を得る。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + J \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Omega = 0 \quad (4)$$

$$J = \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - v^2 & 2v & c^2 \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

ここに, $c^2 = g\tilde{h}$ である。 α, β は, 掃流砂量式に M.P.M 式⁷⁾を適用し流速係数 φ を一定とすると, それぞれ次のようになる。

$$\alpha = \frac{1}{1 - \lambda} \frac{\partial q_B}{\partial h} = -\beta v$$

$$\beta = \frac{1}{1 - \lambda} \frac{\partial q_B}{\partial q} = \frac{24}{s g \varphi^3 (1 - \lambda)} \sqrt{v^2 - u_{*c}^2} \frac{v}{h} \quad (5)$$

ここに, s は砂礫の水中比重, u_{*c} は限界摩擦速度で岩垣の式⁸⁾から求める。

(2) 特性速度と Fr=1

流束のヤコビアン J は実数の特性速度 Λ を持ち, Λ は 3 次方程式(6)の根で与えられる。

$$\Lambda^3 - 2v\Lambda^2 + (v^2 - c^2 - c^2\beta)\Lambda - c^2\alpha = 0 \quad (6)$$

図-2 は, 表-1 に示す case2 の条件について, Cardano の解法により式(6)の性質を示したものである。これより, $Fr=1$ でも 0 となる Λ はないことが分かる。ここで, Λ/v が最大となる解を Λ_+ , 原点付近の正の解を Λ_p , 負の解を Λ_m とする。流砂がない場合 ($\alpha = \beta = 0$) には, 射流のとき $\Lambda_+ = v + c$, $\Lambda_p = v - c$, $\Lambda_m = 0$ となり, 常流のとき $\Lambda_+ = v + c$, $\Lambda_p = 0$, $\Lambda_m = v - c$ となる。したがって, Λ_p か Λ_m のどちらかしか伝播しない。しかし, 流砂があると常に下流と上流それぞれの方向に伝播する特性波がある。

図-3 は, 表-1 に示す条件について, Λ_p/v , Λ_m/v と Fr の関係をみたものである。比較のために $(v - c)/v$ も示した。この図から次のことが分かる。

- Λ_p は, 流砂なしでは 0 で, 流砂が発生すると正の値となつて, 射流の領域では $v - c$ に漸近する。
- Λ_m は, 流砂なしでは $v - c$ で, 流砂が発生すると $v - c$ より小さな負の値となり, 射流の領域では 0 に漸近する。
- $Fr=1$ で Λ_p と Λ_m の絶対値は, ほぼ等しくなる。

以上から, Λ_p と Λ_m は, dynamic wave の $v - c$ 波を異符号の 2 つの波に分割したものとみることができる。ただし, 図-3(1)において概ね, $Fr \leq 0.8$ で $\Lambda_p = 0$, $\Lambda_m = v - c$ となり, $Fr \geq 1.2$ で $\Lambda_p = v - c$, $\Lambda_m = 0$ となるが, Λ_p, Λ_m のいずれも $Fr=1$ で 0 にならず不連

表-1 3次方程式を解くための計算条件

case	河床勾配 $I_b (=I_0)$	粒径 d (mm)	流速係数 u/u_*	砂の水中 比重 s	砂の 空隙率 λ
1	1/400	5.0	$6.0+5.75\log(h/2.5d)$	1.65	0.4
2	1/200	5.0	同上	1.65	0.4
3	1/100	5.0	同上	1.65	0.4
4	1/70	5.0	同上	1.65	0.4

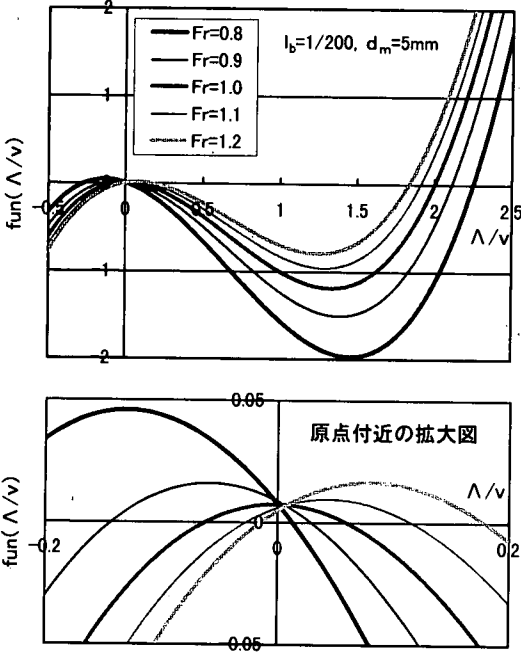


図-2 3次方程式の性質 (case2)

続にもならない。このため、流れのみの場合の $Fr=1$ の特異点は、流砂があると取り除かれて、限界流や流れの遷移の問題が消滅する。

すなわち、流れのみの解析⁹⁾では、支配断面においてエントロピー条件を満たす(膨張衝撃波を除去する)ために、 $\Lambda_- (=v-c)$ に関する流束差の伝播量の調整が必要であったが、本解析では $Fr=1$ でも必ず Λ_p が下流に、 Λ_m が上流に伝播するため、このような調整は不要である。このことは後述の河床変動計算で確認される。

(3) 流束差 (特性波群)

左固有ベクトルを成分とする正方行列を L とし、 $\partial W = L \partial \phi$ で定義される特性変量 W を導入する。 ∂W は次のように表される。

$$\partial W = \begin{pmatrix} \partial W_+ \\ \partial W_p \\ \partial W_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_+ L_{11} \partial h + \Lambda_+ L_{12} \partial q + c^2 L_{13} \partial \eta \\ \Lambda_p L_{21} \partial h + \Lambda_p L_{22} \partial q + c^2 L_{23} \partial \eta \\ \Lambda_m L_{31} \partial h + \Lambda_m L_{32} \partial q + c^2 L_{33} \partial \eta \end{pmatrix}$$

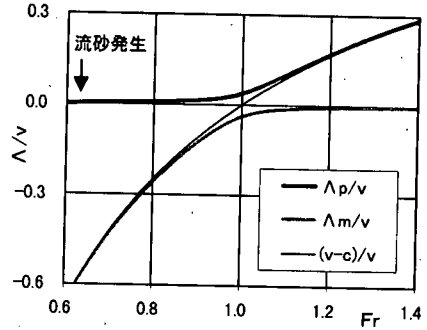


図-3(1) 特性速度とフルード数 (case1)

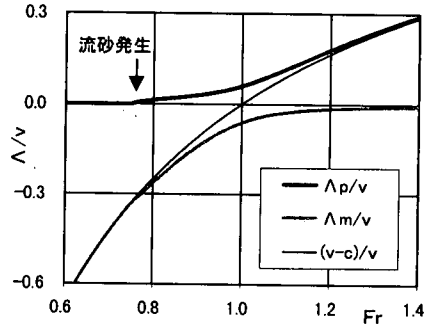


図-3(2) 特性速度とフルード数 (case2)

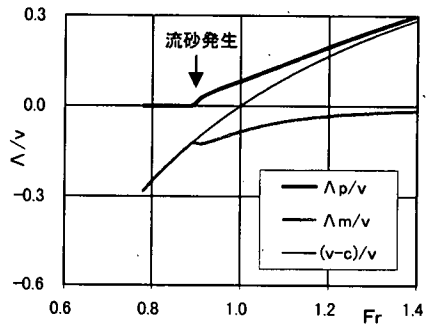


図-3(3) 特性速度とフルード数 (case3)

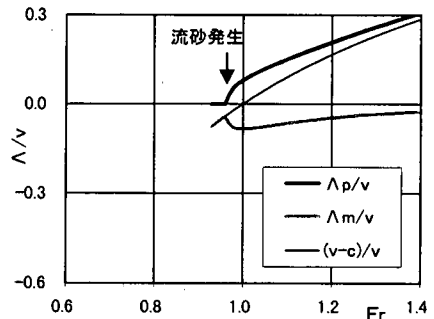


図-3(4) 特性速度とフルード数 (case4)

$$= \begin{pmatrix} (\Lambda_+ - v) \{ \Lambda_+ (\partial q - v \partial h) + c^2 \partial \eta \} + \Lambda_+ c^2 \partial h \\ (\Lambda_p - v) \{ \Lambda_p (\partial q - v \partial h) + c^2 \partial \eta \} + \Lambda_p c^2 \partial h \\ (\Lambda_m - v) \{ \Lambda_m (\partial q - v \partial h) + c^2 \partial \eta \} + \Lambda_m c^2 \partial h \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$L = \begin{pmatrix} \Lambda_+ L_{11} & \Lambda_+ L_{12} & c^2 L_{13} \\ \Lambda_p L_{21} & \Lambda_p L_{22} & c^2 L_{23} \\ \Lambda_m L_{31} & \Lambda_m L_{32} & c^2 L_{33} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$= \begin{pmatrix} \Lambda_+ \{ c^2 - v(\Lambda_+ - v) \} & \Lambda_+ (\Lambda_+ - v) & c^2 (\Lambda_+ - v) \\ \Lambda_p \{ c^2 - v(\Lambda_p - v) \} & \Lambda_p (\Lambda_p - v) & c^2 (\Lambda_p - v) \\ \Lambda_m \{ c^2 - v(\Lambda_m - v) \} & \Lambda_m (\Lambda_m - v) & c^2 (\Lambda_m - v) \end{pmatrix}$$

移流形の式(4)にLを作用させ固有ベクトル空間に変換することによって、次の方程式を得る。

$$\frac{\partial W}{\partial t} + D \frac{\partial W}{\partial x} + L \Omega = 0 \quad (9)$$

$$D = \begin{pmatrix} \Lambda_+ & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_p & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_m \end{pmatrix}$$

Lの逆行列L⁻¹を式(9)に作用させ元の空間に戻すと、流束差は式(10)となる。

$$\partial \Phi = L^{-1} D \partial W = \frac{1}{M_d} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_+ \partial W_+ \\ \Lambda_p \partial W_p \\ \Lambda_m \partial W_m \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$M_d = L_{12} L_{22} L_{31} \Lambda_m (\Lambda_+ - \Lambda_p) + L_{11} L_{22} L_{32} \Lambda_+ (\Lambda_p - \Lambda_m) + L_{12} L_{21} L_{32} \Lambda_p (\Lambda_m - \Lambda_+)$$

$$M_{11} = L_{22} L_{32} (\Lambda_p - \Lambda_m), \quad M_{12} = L_{12} L_{32} (\Lambda_m - \Lambda_+)$$

$$M_{13} = L_{12} L_{22} (\Lambda_+ - \Lambda_p), \quad M_{21} = L_{22} L_{31} \Lambda_m - L_{21} L_{32} \Lambda_p,$$

$$M_{22} = L_{11} L_{32} \Lambda_+ - L_{12} L_{31} \Lambda_m, \quad M_{23} = L_{12} L_{21} \Lambda_p - L_{11} L_{22} \Lambda_+,$$

$$M_{31} = (L_{21} L_{32} - L_{22} L_{31}) \Lambda_p \Lambda_m / c^2,$$

$$M_{32} = (L_{12} L_{31} - L_{11} L_{32}) \Lambda_+ \Lambda_m / c^2,$$

$$M_{33} = (L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}) \Lambda_+ \Lambda_p / c^2$$

式(10)のM_dは、流砂がある限り0とはならない。

3. 数値解法と境界条件

(1) Roeの線形化

衝撃波（開水路流れでは段波や跳水）を捕獲するためには、不連続部を含む検査面において保存形の式(2)を有限体積的に解いてRankine-Hugoniot関係（以降ではR-H関係と呼ぶ）を満たす必要がある。そこで、移流形（式(4)）の離散化式のJを局所的に平均量 \tilde{j} として固定し、 $\partial \Phi = \tilde{j} \partial \phi$ の関係（R-H関係）を保証する。これがRoeの線形化である。

これには3つの方法があるが文献4)を踏まえ、開水路

流れにも無理なく適応できるDeconinckら^{9,10)}の方法を用いる。これは、計算点間を線形に分布するパラメータベクトルを導入し積分することによって平均量を得る方法であり、リーマン問題を解くものではない。Roeの線形化を容易にするため、式(11)に示すパラメータベクトルを採用する。

$$Z = (Z_1 \ Z_2 \ Z_3) = (h \ v \ \eta) \quad (11)$$

Roeの線形化の具体的な方法は文献4)に示すとおりで、結局、 \tilde{j} は次のとおりとなる。

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - (2k_2 - k_1) \bar{Z}_2^2 & 2k_2 \bar{Z}_2 & c^2 \\ k_3 \bar{\alpha} & k_3 \bar{\beta} & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$k_1 = 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta v}{\bar{v}} \right)^2, \quad k_2 = 1 + \frac{1}{12} \frac{\Delta v}{\bar{v}} \frac{\Delta h}{h},$$

$$k_3 = \frac{(v^2 - u_c^2 \varphi^2)_R^{3/2} - (v^2 - u_c^2 \varphi^2)_L^{3/2}}{3 \Delta v \sqrt{v^2 - u_c^2 \varphi^2 \bar{v}}}$$

ここに、 $\bar{v} = (v_R + v_L)/2$ 、 $\bar{h} = (h_R + h_L)/2$ 、 $\bar{\varphi} = (\varphi_R + \varphi_L)/2$ 、 $\Delta v = v_R - v_L$ 、 $\Delta h = h_R - h_L$ で、添字のL、Rはそれぞれ左右の計算点の量であることを示す。また、 $c^2 = g\bar{h}$ 、 $\Delta v = 0$ のとき $k_3 = 1$ とする。さらに、一様粒径を想定して u_c^2 を定数、 φ を定数とし、 $\bar{\alpha}$ および $\bar{\beta}$ を式(5)とする。 $k_1 \sim k_3$ のように煩雑な係数が現れるのは、 Φ の q^2/h がZの3次式($Z_1 Z_2^2$)で表されることとM.P.M式⁷⁾の関数形に起因している。

$$\bar{\alpha} = -\bar{\beta} \bar{v}, \quad \bar{\beta} = \frac{24}{sg \bar{\varphi}^3 (1 - \lambda)} \sqrt{\bar{v}^2 - u_c^2 \bar{\varphi}^2} \frac{\bar{v}}{h} \quad (5')$$

Λ の3次式は式(6)となり、数値計算でこの解を特性速度として用い、Lに式(8)を用いると不連続部においてR-H関係を保証したことになる。

$$\Lambda^3 - 2k_2 \bar{v} \Lambda^2 - \{ (k_1 - 2k_2) \bar{v}^2 + c^2 + k_3 c^2 \bar{\beta} \} \Lambda - k_3 c^2 \bar{\alpha} = 0 \quad (6')$$

$$L = \begin{pmatrix} \Lambda_+ \{ c^2 - \bar{v}(\Lambda_+ - k_1 \bar{v}) \} & \Lambda_+ (\Lambda_+ - \bar{v}) & c^2 (\Lambda_+ - \bar{v}) \\ \Lambda_p \{ c^2 - \bar{v}(\Lambda_p - k_1 \bar{v}) \} & \Lambda_p (\Lambda_p - \bar{v}) & c^2 (\Lambda_p - \bar{v}) \\ \Lambda_m \{ c^2 - \bar{v}(\Lambda_m - k_1 \bar{v}) \} & \Lambda_m (\Lambda_m - \bar{v}) & c^2 (\Lambda_m - \bar{v}) \end{pmatrix} \quad (8')$$

(2) 流束差の配分と解の算出

図-4に示すように、特性速度 Λ の符号に従って流束差 $\Delta \Phi$ を次のように配分する。

$$\Delta \Phi = \frac{1}{M_d} \begin{pmatrix} M_{11} \Lambda_+ \Delta W_+ + M_{12} \Lambda_p \Delta W_p \\ M_{21} \Lambda_+ \Delta W_+ + M_{22} \Lambda_p \Delta W_p \\ M_{31} \Lambda_+ \Delta W_+ + M_{32} \Lambda_p \Delta W_p \end{pmatrix} \text{を } i \text{ に配分}$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{M_d} \begin{pmatrix} M_{13} \Lambda_m \Delta W_m \\ M_{23} \Lambda_m \Delta W_m \\ M_{33} \Lambda_m \Delta W_m \end{pmatrix} \text{を } i-1 \text{ に配分}$$

最終的に、式(13)で Δt 後の h 、 q 、 η を算出する。

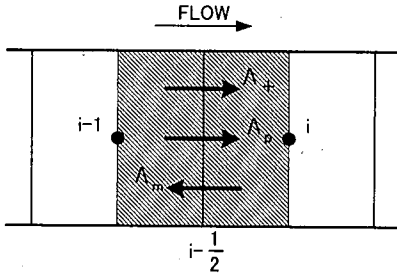


図-4 特性速度 Λ の方向

$$\begin{pmatrix} h \\ (1+f\Delta t)q \\ \eta \end{pmatrix}_i^{n+1} = \begin{pmatrix} h \\ q \\ \eta \end{pmatrix}_i^n - \Delta t \left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} \right)_i^n \quad (13)$$

ここに、 n は時間ステップ、 Δx は計算点の支配区間である。 Δt は CFL 条件から決める。右辺の第2項には配分された $\Delta\Phi$ を用いる。なお、左辺に摩擦項 f が含まれているのは、計算の安定を図るため摩擦項を陰的に取扱ったものである。

(3)境界条件

文献 4) と同様の考え方で境界条件を設定する。すなわち、指定した境界値となるように、計算領域外から流束差 $\Delta\Phi$ を配分する。

a) 上流端 (図-5(1))

計算領域外から Λ_+ 属と Λ_p 属の波が伝播してくるから、上流端 $i=1$ の未知量の算定式は次のとおりとなり、2つの条件 (F_+ と F_p) を与える。

$$\begin{pmatrix} h \\ q \\ \eta \end{pmatrix}_{i=1}^{n+1} = \begin{pmatrix} h' \\ q' \\ \eta' \end{pmatrix}_{i=1}^{n+1} - \begin{pmatrix} M_{11}F_+ + M_{12}F_p \\ M_{21}F_+ + M_{22}F_p \\ M_{31}F_+ + M_{32}F_p \end{pmatrix}_{i=1-\frac{1}{2}}^n \quad (14)$$

ここに、 h' 、 q' 、 η' は計算領域内について式(13)から得られた解、右辺第2項は計算領域外から配分される量であり、 $M_{11} \sim M_{32}$ を上流端の水理量から求める。式(14)では様々な条件設定が可能であるが、例えば q と $h + \eta$ を与えると、これによって定まる F_+ と F_p から解が求まる。

b) 下流端 (図-5(2))

計算領域外から Λ_m 属の波が伝播してくるから、下流端 $i=k$ の未知量の算定式は次のとおりとなり、1つの条件 (F_m) を与える。

$$\begin{pmatrix} h \\ q \\ \eta \end{pmatrix}_{i=k}^{n+1} = \begin{pmatrix} h' \\ q' \\ \eta' \end{pmatrix}_{i=k}^{n+1} - \begin{pmatrix} M_{13}F_m \\ M_{23}F_m \\ M_{33}F_m \end{pmatrix}_{i=k+\frac{1}{2}}^n \quad (15)$$

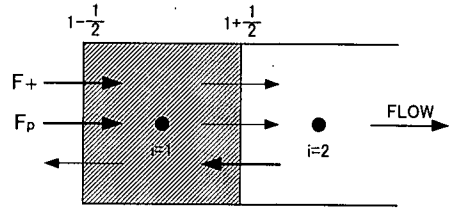


図-5(1) 上流端境界

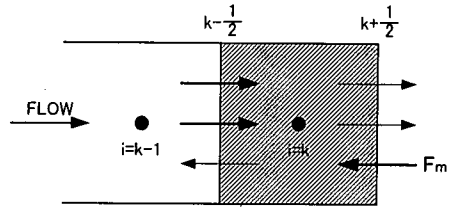


図-5(2) 下流端境界

表-2 整合を考慮した境界条件

計算手法		河床変動解析	流れの解析 ⁴⁾
上流端	常流	$q, \partial \eta / \partial t = 0$	q
	射流	$q, h + \eta$	q, h
下流端	常流	$h + \eta$	h
	射流	$\partial \eta / \partial t = 0$	—

ここに、右辺第2項は計算領域外から配分される量であり、 $M_{13} \sim M_{33}$ を下流端の水理量から求める。式(15)では、例えば $h + \eta$ を与えると、これによって定まる F_m から解が求まる。

c) 境界条件の整合

河床変動計算では、水理条件によって流砂がないところもある。FDS法は計算点間の流束差のやりとりに基づく方法であるので、このような計算点間では、流れの解析⁴⁾を適用すると効率的である。上下流端境界において、流砂がない場合にも同様である。

この場合、流砂の有無によって解析が異なるため境界条件の整合を図る必要がある。流れの解析⁴⁾では、常流、射流に分けて境界条件を設定する必要があることや η が変化しないことを考慮すると、表-2に示す境界条件が適切と考えられる。

4. 河床変動計算

表-3に示す条件で計算を行い、 Fr 、水位、 η の変化をみた。境界条件は表-2に示したとおりであるが、計算区間長が25mと十分に長いことから、水位条件として等流水位を与え続けた。

表-3 河床変動計算の条件

case	初期 Fr	河床勾配 $I_b (=I_0)$	粒径 d(mm)	初期水深 h_0 (m)	$u/u_* = 6.0 + 5.75 \cdot \log(h_0/2.5d)$	初期 τ_*	砂の水中 比重s	砂の 空隙率 λ	計算格子		初期条件	
									Δx (m)	Δt (sec.)	流れ	計算開始直後に与える河床擾乱
1-1	0.9	1/400	5.0	1.527097	18.0	0.463	1.65	0.4	0.05	0.005	等流	幅40cm, 高さ1cmの三角状突起
1-2	1.0	1/400	5.0	3.401674	20.0	1.031	1.65	0.4	0.05	0.004	等流	同上
1-3	1.1	1/400	5.0	7.577375	22.0	2.296	1.65	0.4	0.05	0.002	等流	同上
2	1.0	1/200	1.0	0.065158	14.1	0.197	1.65	0.4	0.05	0.01	等流	振幅0.5cm, 波長45cmのsinカーブ

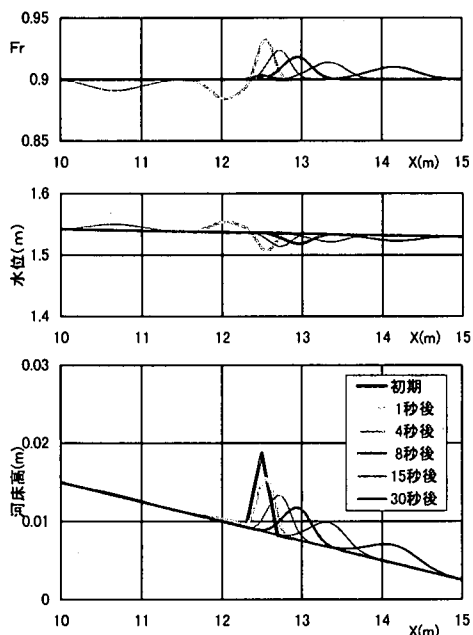


図-6(1) 微小河床擾乱の変化 (case1-1)

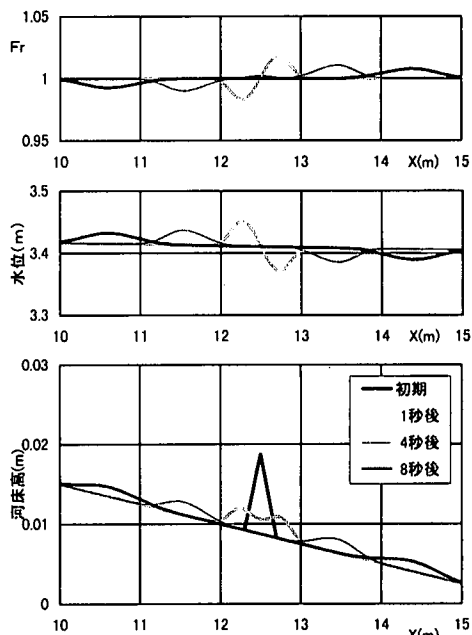


図-6(2) 微小河床擾乱の変化 (case1-2)

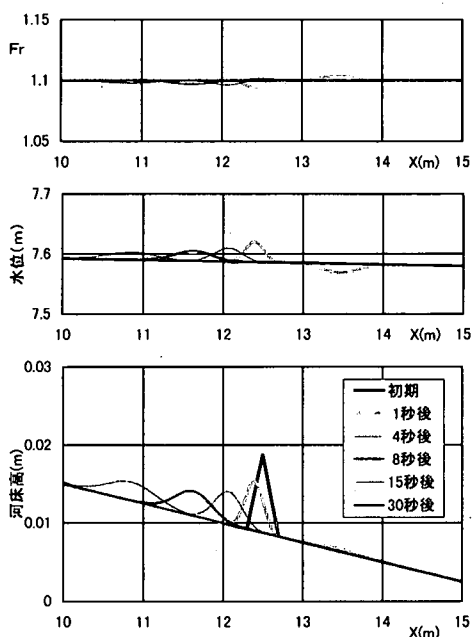


図-6(3) 微小河床擾乱の変化 (case1-3)

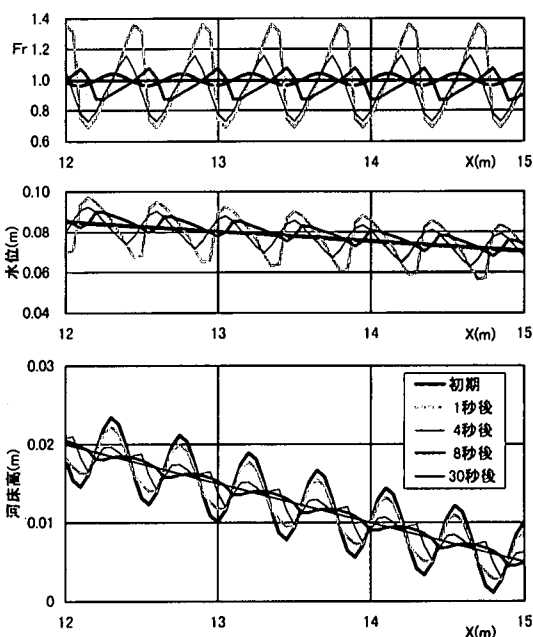


図-7 微小河床擾乱の変化 (case2)

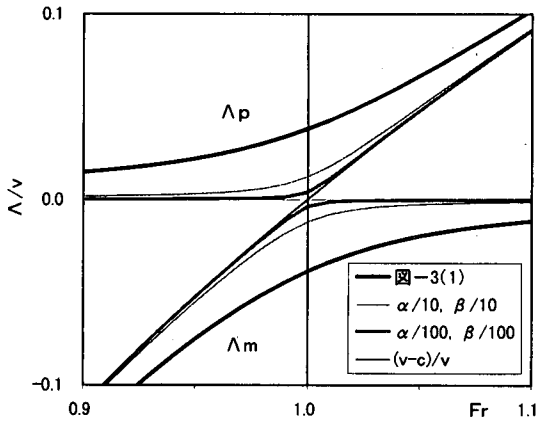


図-8 α, β の違いによる Λ_p, Λ_m の変化 (表-1 case1)

図-6は、case1の計算結果である。case1-1と1-3では、既往の知見⁹⁾と同じく大きな河床擾乱が常流では下流に、射流では上流に伝播する。ただし、常に上下流に伝わる波があるため、これらとは逆の方向には小規模の河床擾乱が伝わる。Fr=1のcase1-2では、ほぼ同じ大きさの Λ_p と Λ_m が反対方向に伝わるため、同程度の河床擾乱が上下流にみられる。図-7は、case2の計算結果である。初期河床擾乱には、Kennedy¹¹⁾の理論による卓越河床波を与えた。河床擾乱を与えた影響で直ちに常射流混在流が発生するが、計算は安定しており、時間の経過とともに河床波は減衰する。河床波を減衰させないためには、流砂の遅れなどを解析に取り込むことが必要と考えられるが、本論文の主旨ではないのでここでは流砂の非平衡性を問題としないことにする。

以上から、本解析は限界流や流れの遷移がある場合の河床変動解析に有効であることが分かる。

5. 流れのみの計算への応用

図-8は、流砂パラメータ α, β を元の値の1/10, 1/100にしたときの Λ_p, Λ_m の変化をみたものである。特性速度はFr=1で0に近づくが、0にはならず、かつ平滑でFr=1が特異点とならない。これは、 $\partial\eta/\partial t$ および $\partial\eta/\partial x$ の効果によるもので、例えば、 $\partial\eta/\partial t$ を除くと($\alpha=\beta=0$)、 $\Lambda_p + \Lambda_m = v-c$ となってFr=1で不連続となる。

この特性速度の性質を、流れのみの解析に利用する。すなわち、支配断面のある計算点間でのみ微量の流砂を発生させて計算し、その後に河床変化を0とする。この解は、エントロピー条件を満たすはずである。

そこで、表-3のcase1-2の条件で、支配断面で微量の

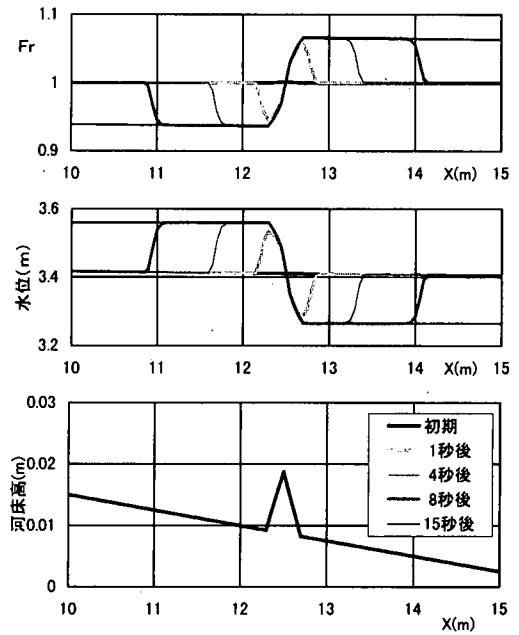


図-9(1) 流れの計算 (特性速度の性質を利用)

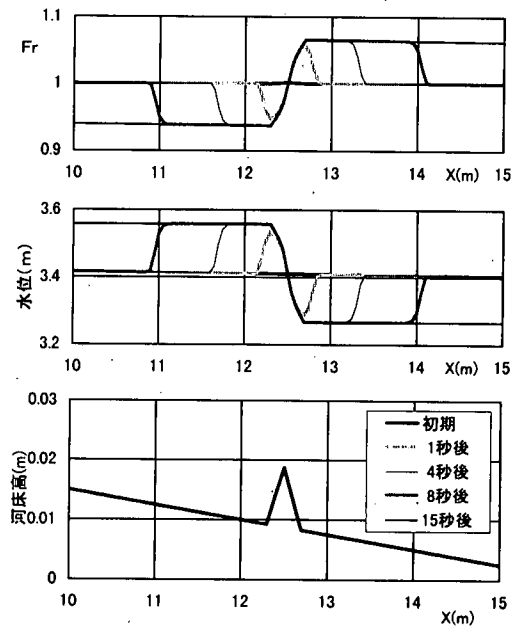


図-9(2) 流れの計算 (文献4)による)

流砂 (α, β を元の1/10)を発生させ、これ以外では流砂を0とすると図-9(1)が得られた。河床突起を瞬間的に与えたために、段波が上下流に伝播している。一方、図-9(2)は、文献4)に基づく流れの計算結果である。両者を比較すると、段波の伝播速度はほぼ一致しており、 $x=10m, 15m$ 地点における15秒後水位の相対差は約

0.05%と非常に小さい。以上から、本理論がエントロピー条件を満たす方法として利用できることが分かる。ただし、 α 、 β を極端に小さくすると Λ_p 、 Λ_m は0に近づき、有効桁の関係で計算誤差が大きくなる。図-9と図-6(2)を比較すると、Fr=1近傍において流砂と河床変化が流れの平滑化効果をもつことが分かる。

6. 河床変動の簡易計算法

以上に示した河床変動解析では、特性速度を求めるときに3次方程式を解くなど計算効率が低下する。そこで、本解析法に基づいて準定常解析法を分析し、これを効率的に用いる計算法を提案する。

(1) 準定常解析の基礎方程式と流束差の配分

基礎方程式の保存形は式(16)で、式(2)において $\partial\eta/\partial x$ 項をソース項 Ω に移動したものである。

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \Omega = 0 \quad (16)$$

$$\phi = \begin{pmatrix} h \\ q \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \\ \frac{q_B}{1-\lambda} \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ gh \frac{\partial\eta}{\partial x} + fq \\ 0 \end{pmatrix}$$

移流形の方程式は式(17)である。

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + J \frac{\partial\phi}{\partial x} + \Omega = 0 \quad (17)$$

$$J = \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - v^2 & 2v & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

ここに、 $c = \sqrt{gh}$ である。

式(17)の流束のヤコビアンJは3つの実数の固有値を持ち、式(18)を解いて特性速度は式(19)となる。

$$\Lambda^3 - 2v\Lambda^2 + (v^2 - c^2)\Lambda = 0 \quad (18)$$

$$\text{射流: } \Lambda_+ = v + c, \Lambda_p = v - c (= \Lambda_-), \Lambda_m = 0 (= \Lambda_0) \quad (19)$$

$$\text{常流: } \Lambda_+ = v + c, \Lambda_p = 0 (= \Lambda_0), \Lambda_m = v - c (= \Lambda_-)$$

先に示した解析に対して、常に $\Lambda = 0$ の特性速度があり、このためFr=1が特異点となる。残りの2つは、dynamic waveの伝播速度に等しくなる。

∂W は式(20)で、便宜上、 Λ_p 、 Λ_m の代わりに Λ_- 、 Λ_0 を用いた。

$$\partial W = \begin{pmatrix} \partial W_+ \\ \partial W_- \\ \partial W_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Lambda_- \partial h + \partial q \\ -\Lambda_+ \partial h + \partial q \\ \left(\frac{\Lambda_+ \Lambda_-}{v} - 2v \right) \partial h + \partial q + \frac{\Lambda_+ \Lambda_-}{\alpha} \partial \eta \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$L = \begin{pmatrix} -\Lambda_- & 1 & 0 \\ -\Lambda_+ & 1 & 0 \\ \Lambda_+ \Lambda_- / v - 2v & 1 & \Lambda_+ \Lambda_- / \alpha \end{pmatrix}$$

式(17)にLを作用させて固有ベクトル空間に変換すると式(21)を得る。

$$\frac{\partial W}{\partial t} + D \frac{\partial W}{\partial x} + L \Omega = 0 \quad (21)$$

$$D = \begin{pmatrix} \Lambda_+ & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_- & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_0 \end{pmatrix}$$

逆行列 L^{-1} を式(21)に作用させ、元の空間に戻すと流束差は式(22)となる。

$$\partial\Phi = L^{-1} D \partial W = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} \ell_{11} \Lambda_+ \partial W_+ + \ell_{12} \Lambda_- \partial W_- \\ \ell_{21} \Lambda_+ \partial W_+ + \ell_{22} \Lambda_- \partial W_- \\ \ell_{31} \Lambda_+ \partial W_+ + \ell_{32} \Lambda_- \partial W_- \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$L^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{\Lambda_+}{\alpha(v-\Lambda_+)} & -\frac{\Lambda_-}{\alpha(v-\Lambda_-)} & \frac{0}{\Lambda_+ \Lambda_-} \\ \frac{v\Lambda_+}{v\Lambda_+} & -\frac{v\Lambda_-}{v\Lambda_-} & \frac{2\alpha c}{\Lambda_+ \Lambda_-} \end{pmatrix}$$

Roeの線形化には式(23)に示すパラメータベクトルを用いる。 \tilde{J} は式(24)となる。

$$Z = (Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3) = (h \quad v \quad \eta) \quad (23)$$

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - (2k_2 - k_1)\bar{Z}_2^2 & 2k_2\bar{Z}_2 & 0 \\ k_3\bar{\alpha} & k_3\bar{\beta} & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$k_1 \sim k_3$ は式(12)、 $\bar{\alpha}$ 、 $\bar{\beta}$ は式(5)と同じである。

結局、 Λ_+ と Λ_- に式(25)、Lに式(26)、 L^{-1} に式(27)を用いることによって、不連続部におけるR-H関係を保証する。

$$\Lambda_{\pm} = \bar{v} \pm \tilde{c}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{12} \frac{\Delta h}{h} \frac{\Delta v}{\bar{v}} \right) \bar{v} \pm \sqrt{gh + \left(\frac{\Delta v}{12} \right)^2 \left\{ 12 + \left(\frac{\Delta h}{h} \right)^2 \right\}} \quad (25)$$

$$L = \begin{pmatrix} -\Lambda_- & 1 & 0 \\ -\Lambda_+ & 1 & 0 \\ \frac{\Lambda_+ \Lambda_-}{\bar{v}} - 2\bar{v} & 1 & \frac{\Lambda_+ \Lambda_-}{\bar{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$L^{-1} = \frac{1}{2\tilde{c}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \Lambda_+ & -\Lambda_- & 0 \\ E_+ & -E_- & E_0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$E_+ = \frac{\bar{\alpha}(\bar{v} - \Lambda_+)}{\bar{v}\Lambda_+}, \quad E_- = \frac{\bar{\alpha}(\bar{v} - \Lambda_-)}{\bar{v}\Lambda_-}, \quad E_0 = \frac{2\bar{\alpha}\tilde{c}}{\Lambda_+ \Lambda_-}$$

ここに、 $\bar{\alpha} = k_3 \bar{\alpha}$ である。

流束差は、 Λ の符号によって次のように配分する。

① $\Lambda_+ > 0, \Lambda_- > 0$ (射流)

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2\bar{c}} \begin{pmatrix} \Lambda_+ \Delta W_+ - \Lambda_- \Delta W_- \\ \Lambda_+^2 \Delta W_+ - \Lambda_-^2 \Delta W_- \\ E_+ \Lambda_+ \Delta W_+ - E_- \Lambda_- \Delta W_- \end{pmatrix}_{i-\frac{1}{2}} \quad \text{を計算点 } i \text{ に配分}$$

② $\Lambda_+ > 0, \Lambda_- < 0$ (常流)

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2\bar{c}} \begin{pmatrix} \Lambda_+ \Delta W_+ \\ \Lambda_+^2 \Delta W_+ \\ E_+ \Lambda_+ \Delta W_+ \end{pmatrix}_{i-\frac{1}{2}} \quad \text{を計算点 } i \text{ に配分}$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2\bar{c}} \begin{pmatrix} -\Lambda_- \Delta W_- \\ -\Lambda_-^2 \Delta W_- \\ -E_- \Lambda_- \Delta W_- \end{pmatrix}_{i-\frac{1}{2}} \quad \text{を計算点 } i-1 \text{ に配分}$$

(2) 底面圧力項の配分

式(28)の底面圧力項 Ω^n を特性波の方向に配分する。

$$\Omega^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{c}h \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

すなわち、 Ω^n を固有ベクトル空間に変換すると $L\Omega^n = \bar{c}h \frac{\partial \eta}{\partial x} (1 \ 1 \ 1)^T$ となるので、それぞれ $\Lambda_+, \Lambda_-, \Lambda_0$ の方向に配分する。そして、 L^{-1} を作用させて元の空間に戻す。なお、水深の平均量 \bar{h} には、Roeの線形化 (式(25)) を援用して $\bar{h} = \bar{c}^2/g$ を与える。

ところで、 $\Lambda_0 = 0$ の特性波については、どの方向に配分すべきであろうか。厳密な解析では下流と上流に伝播する特性波が常にあることが重要な特性になっていることから、 Λ_- と逆方向に配分することが考えられる。すなわち、図-10において、 $Fr < 1$ では Λ_p の方向、 $Fr > 1$ では Λ_m の方向に配分し、 Λ_- と合せて常に上流と下流に伝播する波があるようにする。よって Ω^n の配分法は以下のとおりとなる。

① $\Lambda_+ > 0, \Lambda_- > 0$ (射流)

$$\frac{\bar{c}h \Delta \eta}{2\bar{c} \Delta x} \begin{pmatrix} 1-1 \\ \Lambda_+ - \Lambda_- \\ E_+ - E_- \end{pmatrix}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\bar{c} \Delta \eta}{2\Delta x} \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda_+ - \Lambda_- \\ -E_0 \end{pmatrix}_{i-\frac{1}{2}} \quad \text{を計算点 } i \text{ に配分}$$

$$\frac{\bar{c} \Delta \eta}{2\Delta x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \end{pmatrix}_{i-\frac{1}{2}} \quad \text{を計算点 } i-1 \text{ に配分}$$

② $\Lambda_+ > 0, \Lambda_- < 0$ (常流)

$$\frac{\bar{c}h \Delta \eta}{2\bar{c} \Delta x} \begin{pmatrix} 1 \\ \Lambda_+ \\ E_+ + E_0 \end{pmatrix}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\bar{c} \Delta \eta}{2\Delta x} \begin{pmatrix} 1 \\ \Lambda_+ \\ E_- \end{pmatrix}_{i-\frac{1}{2}} \quad \text{を計算点 } i \text{ に配分}$$

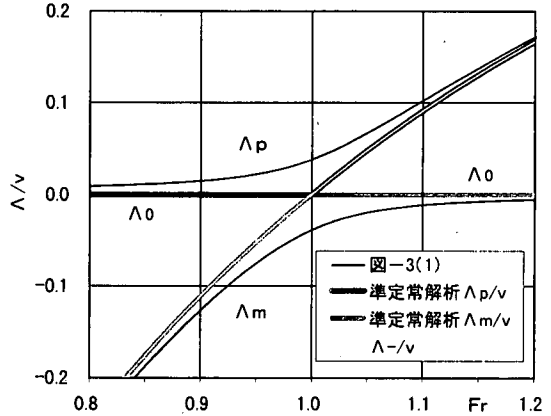


図-10 準定常解析における Λ_p, Λ_m

$$\frac{\bar{c} \Delta \eta}{2\Delta x} \begin{pmatrix} -1 \\ -\Lambda_- \\ -E_- \end{pmatrix}_{i-\frac{1}{2}} \quad \text{を計算点 } i-1 \text{ に配分}$$

ただし、 $Fr=1 (\Lambda_- = 0)$ のときは、式(27)に示した L^{-1} の成分 E_-, E_0 が発散するので適用不可である。

(3) 準定常解析による数値解の算出方法

式(29)により Δt 後の h, q, η を算出する。

$$\begin{pmatrix} h \\ (1+f\Delta t)q \\ \eta \end{pmatrix}_i^{n+1} = \begin{pmatrix} h \\ q \\ \eta \end{pmatrix}_i^n - \Delta t \left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta x} \right)_i^n - \Delta t (\Omega^n)_i^n \quad (29)$$

境界条件は、射流、常流に分けて設定する。上流端が射流の場合には、上流端 $i=1$ の未知量の算定式は式(30)となり、上流端に2つの条件 (F_+ と F_-) を与える。

$$\begin{pmatrix} h \\ q \\ \eta \end{pmatrix}_{i=1}^{n+1} = \begin{pmatrix} h' \\ q' \\ \eta' \end{pmatrix}_{i=1}^{n+1} - \begin{pmatrix} F_+ - F_- \\ \Lambda_+ F_+ - \Lambda_- F_- \\ E_+ F_+ - E_- F_- \end{pmatrix}_{i=1-\frac{1}{2}}^n \quad (30)$$

上流端が常流の場合には、上流端の未知量の算定式は式(31)となり、上流端に2つの条件 (F_+ と F_0) を与える。

$$\begin{pmatrix} h \\ q \\ \eta \end{pmatrix}_{i=1}^{n+1} = \begin{pmatrix} h' \\ q' \\ \eta' \end{pmatrix}_{i=1}^{n+1} - \begin{pmatrix} F_+ \\ \Lambda_+ F_+ \\ E_+ F_+ + E_0 F_0 \end{pmatrix}_{i=1-\frac{1}{2}}^n \quad (31)$$

下流端が射流の場合には、下流端 $i=k$ の未知量の算定式は式(32)となり、下流端に1つの条件 (F_0) を与える。

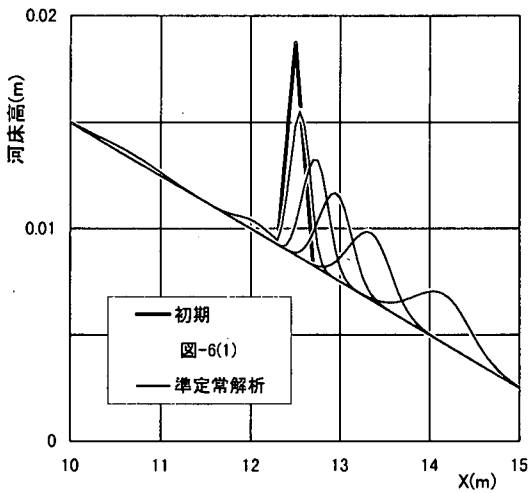


図-11(1) 微小河床擾乱の変化 (case1-1)

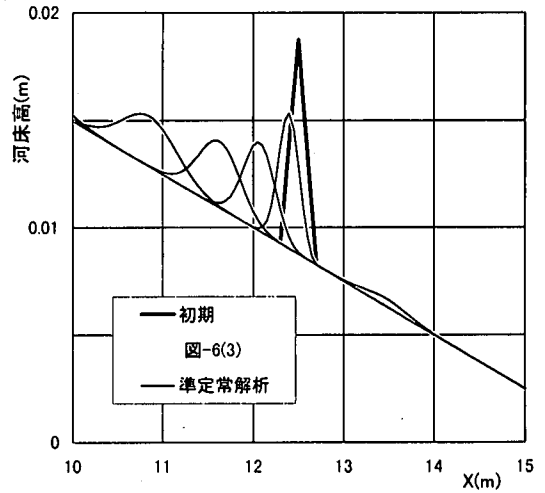


図-11(2) 微小河床擾乱の変化 (case1-3)

$$\begin{pmatrix} h \\ q \\ \eta \end{pmatrix}_{i=k}^{n+1} = \begin{pmatrix} h' \\ q' \\ \eta' \end{pmatrix}_{i=k}^{n+1} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 F_0 \end{pmatrix}_{i=k+\frac{1}{2}}^n \quad (32)$$

下流端が常流の場合には、下流端の未知量の算定式は式(33)となり、下流端に1つの条件 (F_-) を与える。

$$\begin{pmatrix} h \\ q \\ \eta \end{pmatrix}_{i=k}^{n+1} = \begin{pmatrix} h' \\ q' \\ \eta' \end{pmatrix}_{i=k}^{n+1} - \begin{pmatrix} -F_- \\ \Lambda_- F_- \\ -E_- F_- \end{pmatrix}_{i=k+\frac{1}{2}}^n \quad (33)$$

(4) 計算結果

以上の準定常解析は $Fr=1$ には適用できないので、表-3のcase1-1, 1-3の計算を行い、4節の結果と比較したのが図-11である。両者はよく一致している。これは、底面圧力項 (式(28)) のうち Λ_0 に関する項を Λ_- の逆方向に配分すると、河床変化と流れの相互干渉を考慮した解析とほぼ同等になることを示している。なお、準定常解析による演算時間は、相互干渉を考慮した場合の約半分となる。

以上から、限界流と流れの遷移点では厳密に河床変化と流れの相互干渉を考慮した解析を適用し、これ以外では準定常解析を適用するのが効率的である。さらに、流砂がないところでは流れのみの解析を適用するとより効率的となる。これらの河床変動計算フローは図-12となる。

このように計算点間毎に異なる解析法を選択できるのは、FDS法が保存則に基づいて計算点間の流束差のやり取りから解を算出するスキームであることによる。

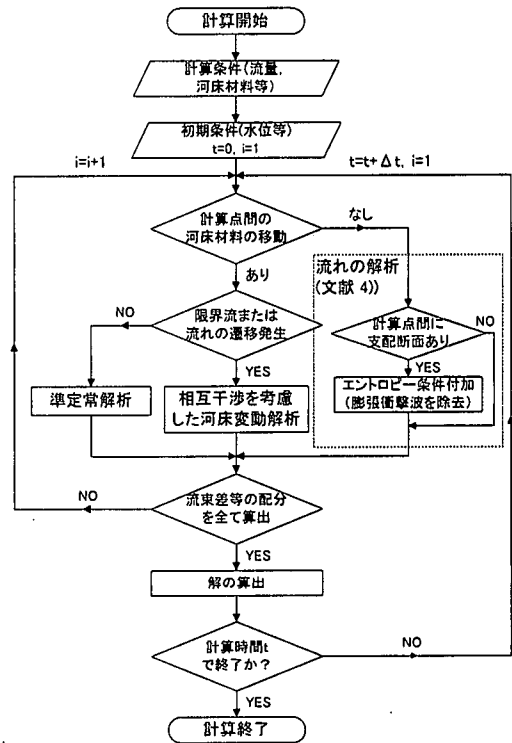


図-12 河床変動計算フロー

7. おわりに

本研究では、掃流砂を対象とする河床変動解析にFDS法を適用した。河床変化と流れの相互干渉を考慮した解

析では、流れ解析の $Fr=1$ における支配断面問題が消滅することを示し、河床変動計算を実行し、限界流や流れの遷移がある場合にも有効であることを確認した。また、支配断面問題消滅の性質を流れの解析に利用できることを示した。

本解析では3次方程式を解く必要があるため、計算効率を上げるため、本理論に基づいた合理的な準定常解析を利用する河床変動計算法を提案した。

謝辞：本研究の一部は、文部省科学研究費補助金、試験研究(B) (課題番号09450185, 代表 板倉忠興) の援助の基に行われた。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 黒木幹男, 岸力, 清水康行: 河床変動の数値計算法に関する研究, 第17回自然災害科学総合シンポジウム講演論文集, pp.175-178, 1980.
- 2) 道上正規, 藤田正治, 前田真吾: 非平衡浮遊砂を考慮した急勾配水路における貯水池堆砂の計算法, 水工学論文集, 第34巻, pp.367-372, 1990.
- 3) 岡部健士, 芦田和男: 流れの遷移を伴う一次元河床変動の数値解法, 土木学会論文集, No.434/II-16, pp.37-45, 1991.
- 4) 西本直史, 森明巨, 板倉忠興, 金澤克己: FDS法による1次元開水路流れの数値解析, 土木学会論文集, No.670/II-54, pp.25-36, 2001.
- 5) 大川秀典, 清水康行, 藤田睦博, 橋本識秀: FDS法を用いた開水路の河床変動計算, 水工学論文集, 第42巻, pp.685-690, 1998.
- 6) 例えば巽友正: 流体力学, 新物理学シリーズ21, 培風館, p.225, 1982.
- 7) 水理公式集 平成11年版, 土木学会, p.162, 1999.
- 8) 水理公式集 平成11年版, 土木学会, p.158, 1999.
- 9) Deconinck, H., Roe, P.L. and Struijs, R.: A multi-dimensional generalization of Roe's flux difference splitter for the Euler equations, *Journal of Computers and Fluids*, Vol.22, No.2/3, pp.215-222, 1993.
- 10) Paillere, H., Weide, E. and Deconinck, H.: Multi-dimensional upwind methods for inviscid and viscous compressible flows, *Computational Fluid Dynamics, VKI Lecture Series 1995-02*, 1995.
- 11) Kennedy, J.F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.16, pp.521-544, 1963.

(2000.4.25 受付)

NUMERICAL COMPUTATION OF 1-D BED VARIATION BASED ON FDS METHOD

Naoshi NISHIMOTO, Akio MORI, Tadaoki ITAKURA and Tatsuhito TAHARA

It is demonstrated theoretically that the characteristic wave $u-c$ of shallow water equations is splitted into two waves on the erodible bed with the bed deformation. Such behaviors of the waves eliminate the flow analysis problem at $Fr=1$. The results of the theory are applied to the three types of numerical calculations using FDS method. 1. Rigorous calculations of the bed deformation; For $Fr < 1$, main bed wave propagates downstream and reverse for $Fr > 1$. 2. Flow calculation without bed deformation; Flow including the point $Fr=1$ is calculated successfully without any adjustment of the control section problem. 3. Simplified version of the bed analysis; The traditional way is modified in which the efficiency of calculation is more compared to the rigorous method.