

衝突ばねを用いた棒の衝突の数値解析

渡邊学歩¹・川島一彦²

¹学生会員 工修 東京工業大学大学院博士課程後期 理工学研究科 土木工学専攻
(〒152-8852 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

²フェロー会員 工博 東京工業大学大学院教授 理工学研究科 土木工学専攻 (同上)

兵庫県南部地震では、隣接桁間の衝突によって慣性力が一方から他方の桁に伝達され、被害をもたらした。このため、隣接桁間における衝突の影響を考慮した詳細な解析が求められている。骨組み構造モデルを用いた動的解析では、衝突ばねを用いて桁間に発生する衝突現象を再現できると言われている。本論文では、衝突ばねと桁をモデル化した弾性棒から成る解析モデルを用いて、地震時に想定される桁間の衝突や追突など3種類の状態に対する解析をおこなった。この結果、衝突ばねを用いることにより、弾性体の衝突現象を精度よく再現できることが分かった。

Key Words : impact, dynamic analysis, bridges, seismic design, pounding effect

1. はじめに

兵庫県南部地震では、落橋防止構造に被害が生じ、落橋防止構造を含めた相隣る桁間の衝突を含めた橋の地震応答の詳細な解析の必要性が指摘されている^{1), 2), 3)}。地震時保有耐力レベルの地震動を受けた場合には、相隣る桁間あるいは桁と橋台には衝突が生じ、桁どうしの地震応答が大きく変化し、ある一方の桁の慣性力が他方の桁に伝えられて支承や下部構造に損傷を生じる。衝突後のリバウンドによって桁間は開く方向に大きく変位し、落橋を防止するために必要とされる桁かかり長にも影響する。地震時の衝突力は一般に大変大きく、衝突緩衝装置等、落橋防止構造を設計するためには衝突現象を正しく取り入れた解析が必要とされる。

隣接桁間の衝突を見込んだ橋の地震応答解析を初めて行ったのは Tseng and Penzien⁴⁾である。桁間の相対変位が遊間よりも小さくなれば衝突力を伝え、反対に桁間の相対変位が遊間よりも大きくなれば衝突力を伝えないという衝突ばねによって衝突現象をモデル化し、1971年サンフェルナンド地震で落橋した5/14曲線橋を対象とした解析を行った。しかし、Tseng and Penzien が取り扱ったのは桁間の完全塑性衝突であり、これでは地震時に実際に生じる桁の地震応答を正しく解析することはできない。これを完全弾性衝突とした解析を行ったのは Kawashima and Penzien⁵⁾である。衝突ばねによる解析方法を修正して、5/14曲線橋をモデル化した模型橋の振動台実験を解析し、実験結果をうまく解析できることを示した。さらに、

川島⁶⁾は桁を弾性棒にモデル化し、衝突ばねを用いた衝突の解析において、ばね定数の与え方や積分時間間隔等に関して解析を行っている。

なお、機械系分野ではオフセット衝突による車体の変形や事故発生時の車の挙動⁷⁾など、衝突現象について幅広い研究がなされている。関根⁸⁾らは剛体球と積層板に対して、ラグランジュ未定乗数法を用いた FEM 解析⁹⁾により、衝突時に層間のはく離を有する複合積層板の変形応答解析を行っており、小笠原¹⁰⁾らは緩衝装置等にも用いられているハニカム構造材料の衝撃吸収特性に関して解析を行っている。こうした詳細な研究は、落橋防止装置などに利用できる緩衝材の衝撃特性に関する研究¹¹⁾や、衝撃的作用力に対する変形応答の研究、衝撃力の逆解析¹²⁾など、土木分野とも多くの共通分野を持っている。

本論文では、川島の解析をさらに発展させて不等長の棒や初期速度の異なる場合、衝突力や衝突によって生じる加速度など、衝突ばねによる構造物間の衝突に関する解析を行ったので、この結果を報告する。

2. 桁間の衝突のメカニズムとモデル化

(1) 波動論による衝突のメカニズム

いま、桁どうしの衝突を単純化するため、図-1に示すように、2つの弾性棒が縦方向に衝突する場合を考える。周知のように、棒が接触してから離反するまでの一連の

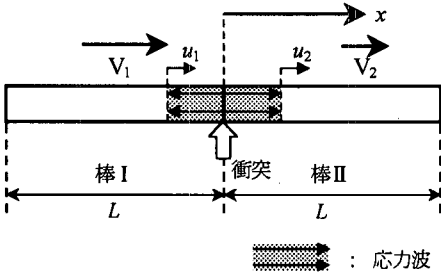


図-1 弾性棒の衝突とそれに伴う応力波の伝播

過程は棒内部を伝わる応力波の伝播によって解析することができる^{13), 14)}。以下の解析に必要な事項に絞って、棒の中の応力波の伝播に関して示すと、以下のようになる。応力波によって生じる棒の変位を u とすると、運動方程式は、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

ここに、 C は波動伝播速度であり、次式で与えられる。

$$C^2 = \frac{E}{\rho} \quad (2)$$

ここで、 ρ は棒の密度、 E は棒の弾性係数である。

式(1)の解は一般に2つの関数 f 、 g の和からなるダランベール解として次式のように与えられる。

$$u = f(x+Ct) + g(x-Ct) \quad (3)$$

式(3)では、関数 f は棒の負方向に伝わる波を、関数 g は正方向に伝わる波をそれぞれ表している。

いま、図-1に示すように断面 A_1 、弾性係数 E_1 を有する弾性棒 I が軸方向に速度 V_1 で、また、断面 A_2 、弾性係数 E_2 を有する弾性棒 II が軸方向に V_2 でそれぞれ運動する場合を考えると、棒 I、棒 II 内部の粒子の変位は次式で与えられる。

$$u_1 = f(x+C_1t); u_2 = g(x-C_2t) \quad (4)$$

ここで C_1 、 C_2 はそれぞれ、棒 I、棒 II 内の波動伝播速度である。したがって、棒中の応力は、

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = E_1 f'(x+C_1t) \\ \sigma_2 &= E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = E_2 g'(x-C_2t) \end{aligned} \quad (5)$$

また、棒 I、棒 II 内部の各点の速度 v_1 、 v_2 (粒子速度)は、

$$v_1 = V_1 + \frac{\partial u_1}{\partial t} = V_1 + C_1 f'(x+C_1t) \quad (6)$$

$$v_2 = V_2 + \frac{\partial u_2}{\partial t} = V_2 - C_2 g'(x-C_2t)$$

衝突開始直後 ($t=0$) において、衝突面 ($x=0$) における作用力および粒子速度の連続性から次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} A_1 E_1 f'(0+C_1 0) &= A_2 E_2 g'(0-C_2 0) \\ V_1 + C_1 f'(0+C_1 0) &= V_2 - C_2 g'(0-C_2 0) \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)から f' 、 g' を求めると、次式となる。

$$\begin{aligned} f'(0) &= -\frac{A_2 E_2 (V_1 - V_2)}{A_2 E_2 C_1 + A_1 E_1 C_2} \\ g'(0) &= -\frac{A_1 E_1 (V_1 - V_2)}{A_2 E_2 C_1 + A_1 E_1 C_2} \end{aligned} \quad (8)$$

これは接触面での境界条件であるが $x+C_1t=0$ 、 $x-C_2t=0$ の全領域で成り立つため、次式が成立する。

$$\begin{aligned} f'(x+C_1t) &= f'(0); x+C_1t=0 \\ g'(x-C_2t) &= g'(0); x-C_2t=0 \end{aligned} \quad (9)$$

式(8)を式(5)に代入すると、応力 σ_1 、 σ_2 は、

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{A_2 E_1 E_2 (V_1 - V_2)}{A_2 E_2 C_1 + A_1 E_1 C_2} \\ \sigma_2 &= -\frac{A_1 E_1 E_2 (V_1 - V_2)}{A_2 E_2 C_1 + A_1 E_1 C_2} \end{aligned} \quad (10)$$

また式(8)を式(6)に代入すると、粒子速度 v_1 、 v_2 は次式となる。

$$v_1 = v_2 = \frac{A_1 E_1 C_2 V_1 + A_2 E_2 C_1 V_2}{A_2 E_2 C_1 + A_1 E_1 C_2} \quad (11)$$

(2) 棒に生じる加速度および慣性力

衝突によって生じる粒子加速度を求める。図-1の右側の棒を考えると、棒内部では衝突の際、式(1)が成立し、初速度 $V_2 = -V_0$ で衝突すると、初期条件 ($t=0$) として次式が成り立つ。

$$u(x,0) = 0; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -V_0 \quad (12)$$

この条件により、式(1)をラプラス変換すれば、

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} = \frac{s^2}{C^2} \bar{u} + \frac{V_0}{C^2} \quad (13)$$

ここで、 $\bar{u}(x,s)$ は次式の通りである

$$\bar{u}(x,s) = \int_0^\infty u(x,t) e^{-st} dt \quad (14)$$

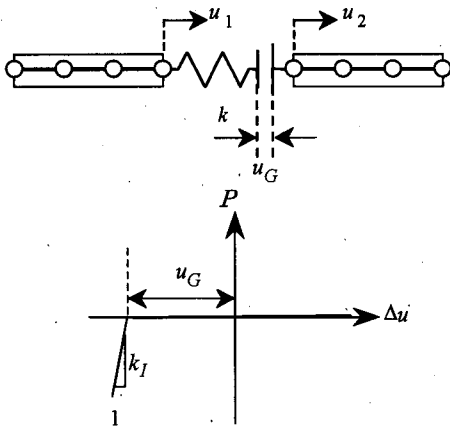


図-2 衝突ばねによるモデル化

式(13)の一般解は、次式で表される。

$$\bar{u}(x, s) = A_1 e^{sx/C} + A_2 e^{-sx/C} - V_0/s^2 \quad (15)$$

ここで、 A_1 、 A_2 は境界条件より定まる係数であり、境界条件は以下の通りである¹⁵⁾。

$$\begin{aligned} x=0; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= -\frac{\sigma_0}{E} \text{Unit}(t) \\ x=l; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= -\frac{\sigma_0}{E} \text{Unit}\left(t - \frac{l}{C}\right) \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 σ_0 は衝突によって応力波として伝播する軸方向応力の値であり、 E は棒の弾性係数である。また、関数 $\text{Unit}(t)$ はステップ関数である。

式(16)にラプラス変換を行うと、次式が得られる。

$$\begin{aligned} x=0; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= -\frac{\sigma_0}{E} \frac{1}{s} \\ x=l; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= -\frac{\sigma_0}{E} \frac{1}{s} e^{-\frac{l}{C}s} \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)を式(15)に代入すると、 A_1 、 A_2 は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= \frac{C\sigma_0}{Es^2} \end{aligned} \quad (18)$$

ところで、求めたいのは加速度 $\partial^2 u(x, t)/\partial t^2$ であり、これをラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) &= s^2 \bar{u} - s u(x, 0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \\ &= s^2 \bar{u} + V_0 \end{aligned} \quad (19)$$

したがって、式(15)、式(18)より、

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{C\sigma_0}{E} e^{-sx/c}$$

であるから、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{C\sigma_0}{E} \delta\left(t - \frac{x}{C}\right) \quad (20)$$

ここで、 $\delta(t-x/C)$ は Dirac の delta 関数であり、 $x-Ct=0$ のときに無限大の値をとる。つまり、 $x=l_s$ においては、波動が通り過ぎる瞬間(時刻 $t=l_s/C$) に加速度が無限大となる。

次に時刻 $t=l_s/C$ において、位置 $x=l_s$ の微小区間 Δx に作用する慣性力 F_I は、

$$\begin{aligned} F_I &= -\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x = \int_{l_s - \frac{\Delta x}{2}}^{l_s + \frac{\Delta x}{2}} \rho A C \frac{\sigma_0}{E} \delta\left(t - \frac{x}{C}\right) dx \\ &= -\rho A C \frac{\sigma_0}{E} \int_{l_s - \frac{\Delta x}{2}}^{l_s + \frac{\Delta x}{2}} \delta\left(\frac{l_s}{C} - \frac{x}{C}\right) dx \\ &= -\rho A C^2 \frac{\sigma_0}{E} \int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2} \delta(s) ds \\ &= -\rho A C^2 \frac{\sigma_0}{E} \\ &= -A\sigma_0 \end{aligned} \quad (21)$$

このことから、衝突によって生じる加速度は無限大になるが、物体力としての慣性力は無限大とはならず有限な値を示す。また、その絶対値は、軸方向に伝播する衝撃力 $N = A\sigma_0$ と等しい。

(3) 衝突ばねによるモデル化

衝突ばねは離散型構造解析による動的解析に用いるために提案されたものであり、図-2 に示すようにモデル化する。ここで、質量マトリクスは集中マトリクスとし、Newmark の一定加速度法¹⁶⁾を用いて解析する。また、解析を簡単にするために減衰は考慮しない。衝突ばね k は桁間の相対変位に応じて次式のように与えられる。

$$k = \begin{cases} k_I \cdots \Delta u \leq -u_G \\ 0 \cdots \Delta u > -u_G \end{cases} \quad (22)$$

ここに、

$$\Delta u = u_2 - u_1 \quad (23)$$

ここで、 u_G は桁間の遊間、 k_I は衝突ばねのばね定数である。衝突力 P_I は次式で与えられる。

表-1 等長, 等断面積の2本の棒の正面衝突

特性	棒 I	棒 II
弾性係数	$E = 100$	$E = 100$
断面積	$A = 1$	$A = 1$
単位体積質量	$\rho = 0.1$	$\rho = 0.1$
長さ	$L = 10$	$L = 10$
初速度	$V_1 = V_0$	$V_2 = -V_0$

$$P_I = \begin{cases} k_I \Delta u_I \cdots \Delta u \leq -u_G \\ 0 \quad \cdots \Delta u > -u_G \end{cases} \quad (24)$$

ここに,

$$\Delta u_I = \Delta u - u_G \quad (25)$$

衝突ばねは式(22)に示すように衝突が起こるか否かによって剛性が大きく異なるため, 衝突ばねを含むモデルは強い非線形を有する。このため, 運動方程式を満足させるように, 小さな積分時間間隔を採用するとともに, ここでは, 時刻 t における増分荷重 R_t のノルムに対するつり合い力 δR_t のノルムの比が次式を満足しない場合にはイテレーションによって解の精度を高めた。

$$\frac{\|\delta R_t\|}{\|R_t\| + \|R_t - \delta R_t\|} < 0.0005 \quad (26)$$

また, 式(26)が満足された場合にイテレーションは収束したと判定した。

前述したように, 衝突ばねを用いた解析では, 衝突ばねの大きさを適切に選定することが重要である。川島は棒要素の軸方向剛性 k_B を基本に衝突ばねの剛性比を次式のように定義し, $\gamma \approx 1$ となるように衝突ばねの剛性を定めることを提案している⁶⁾。

$$\gamma = \frac{k_I}{k_B} = \frac{k_I L}{nEA} \quad (27)$$

ここで, E, A, L はそれぞれ棒の弾性係数, 断面積, 長さ, n は要素分割数である。

以下では, 式(22)による衝突のモデル化の適用性を解析する。

3. 等長の弾性棒の正面衝突に対する解析

(1) 棒に生じる応力および粒子速度

等長, 等断面積で, 弾性係数も等しい 2 本の棒が反対方向に速度 $V_1 = V_0, V_2 = -V_0$ で運動し衝突する場合を衝突ばねを用いて解析する。この場合には $A_1 = A_2 = A_0, E_1 = E_2 = E_0, C_1 = C_2 = C_0$, であるから, 式(10), 式(11)から衝突面での応力 σ_0 および粒子速度 v_0 は次式のようになる。

$$\sigma_0 = \frac{E(V_1 - V_2)}{2C_0}; v_0 = \frac{V_1 + V_2}{2} \quad (28)$$

式(28)の応力波が棒 I, 棒 II 内を伝播しそれぞれ反対面(非衝突面と呼ぶ)に到達すると, 棒 I, 棒 II は接触したままともに速度が 0 となる。その後, 非衝突面で応力波は全反射して, 衝突面へと戻ってくるが, これによって, 棒 I の粒子速度は $-V_0$ に, また棒 II の粒子速度は V_0 と

なる。したがって, 応力波が衝突面に到達するとともに, 接触は終わり, 2つの棒の衝突は終了する。したがって, この場合には次式で与えられる, 応力波が棒の長さの2倍の距離を伝播する時間が衝突継続時間 T_I となる。

$$T_I = \frac{2L}{C_0} \quad (29)$$

以上に示した, 等長, 等断面積の2本の棒が正面衝突する場合を式(22)~式(27)による衝突ばねを用いて解析する。川島⁶⁾による解析に従い, 2本の棒が同一速度 $V_0 = 0.1$ で互いに反対方向に進行する場合を解析する。2つの棒の特性は表-1のように与える。ここで, 単位は任意のディメンジョンをとることができる。

この場合には, 式(29)による衝突継続時間 T_I , 式(28)による応力度は次式のようになる。

$$T_I = \frac{\sqrt{10}}{5}; \sigma_0 = \frac{\sqrt{10}}{10} \quad (30)$$

ここで, 応力度は引張を正, 圧縮を負とする。

解析では, 図-2 に示すように, 衝突面には式(22)による衝突ばねを取り付けた。衝突ばねの剛性 k_I は式(27)による剛性比 γ が1となるように k_I を仮定した。また, 非衝突面には $k = 0.01$ という微小な剛性のばねを取り付けた。これは, 棒の運動方向にわずかな剛性を与え, 無拘束のため数値解析不能とならないようにするためである。なお, 棒を剛体とみなしてこのばねによる 1 自由度系としての固有周期を求めると, 約 20 単位時間(衝突継続時間 T_I の約 100 倍)と長く, 以下の解析にはまったく影響を及ぼさない。1つの棒を 10 個の線形はり要素で表し, 積分時間間隔 Δt は式(30)による衝突継続時間 T_I の $\sqrt{10}/2000$ と十分小さくした。

図-3 は厳密解によって求めた衝突により2つの棒に生じる応力および粒子速度を主要な時刻に対して示した結果である。ここでは, 時間を無次元化するために, 式(18)で求められる衝突継続時間 T_I を 0.2 単位時間として, 0.05 単位時間ごとの応力および粒子速度の値を示している。また, 図-3 には後述する衝突ばねを用いた解析結果も比較のために示している。2章に示した衝突理論によ

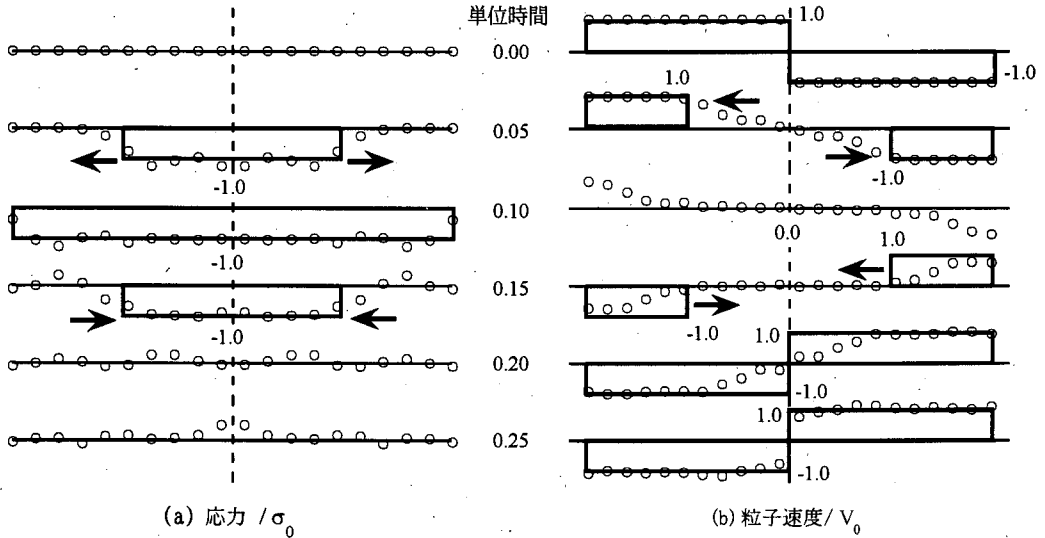


図-3 衝突時の応力伝播と粒子速度の変化

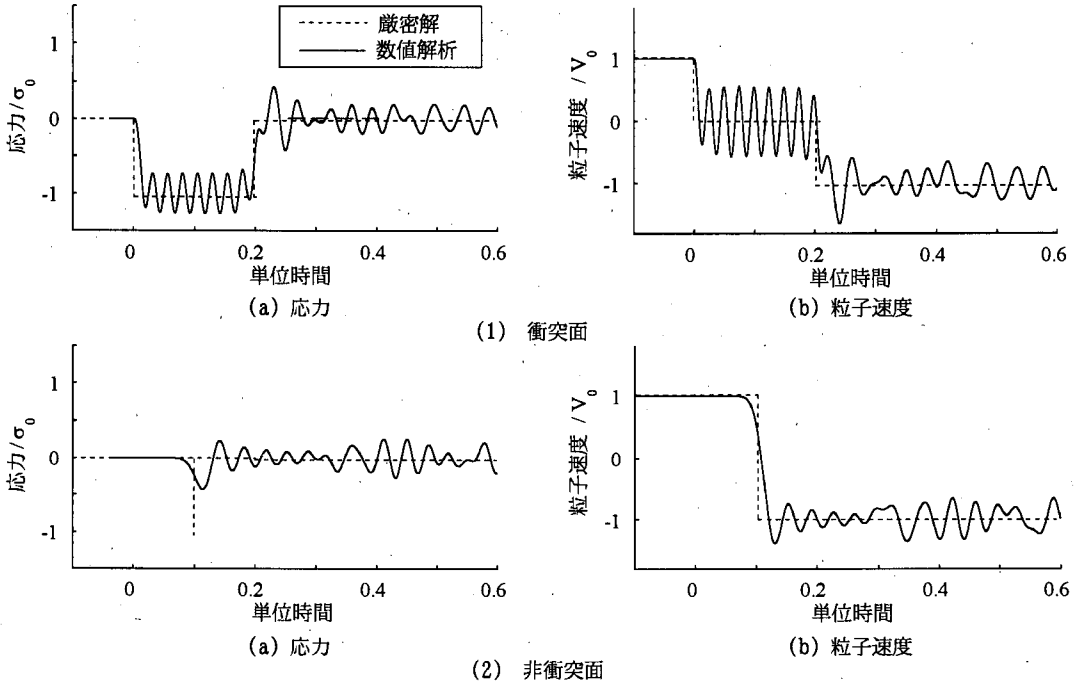
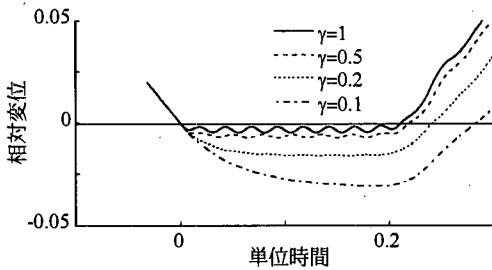


図-4 応力および粒子速度の厳密解と数値解析の比較(棒 I)

れば、衝突開始と同時に、応力波が棒中を伝播し、これにつれて圧縮応力領域が広がり 0.1 単位時間後には非衝突面に達する。その後、応力波の全反射に伴って非衝突面より圧縮応力が徐々に解放されて行き、すべての領域で応力がゼロになった瞬間に衝突が終了する。衝突ばねを用いて解析した結果は、応力フロントにおける応力勾配が厳密解のようにシャープではないが、このような衝

突の厳密解の特徴を全体として良く表している。

次に、応力および粒子速度が棒の中でどのように時間的に変化するかを示すために、棒 I の衝突面と非衝突面における時刻歴に着目すると図-4 のようになる。厳密解によれば衝突面においては、衝突継続時間 T_I (0.2 単位時間) だけ応力は式(30)による値 $-\sigma_0$ を保ち、一方非衝突面では応力度は常にゼロであるはずである。また、



(a) $\gamma = 0.1 \sim 1$

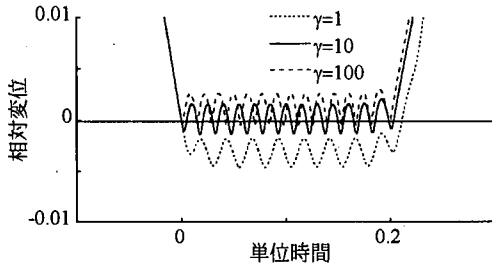
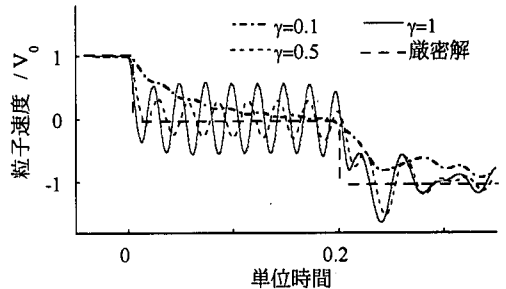
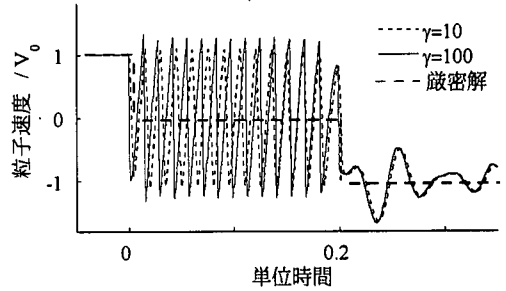


図-5 剛性比 γ と衝突時の相対変位の関係



(a) $\gamma = 0.1 \sim 1$



(b) $\gamma = 10 \sim 100$

図-7 剛性比 γ と衝突面における粒子速度の関係

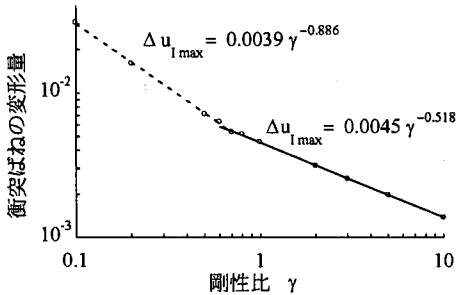


図-6 剛性比 γ と衝突時のオーバーラップの関係

(2) 衝突ばねの剛性

式(27)による剛性比 γ を 0.1~100 まで変化させた場合の棒 I ~ 棒 II 間の相対変位を示すと図-5 のようになる。これによれば、 $\gamma = 0.1$ の場合には明らかに 2 つの棒間に生じるオーバーラップが大きすぎるために衝突現象を表すためには、不適切である。 γ を 0.1 から順次大きくしていくと、オーバーラップは小さくなっていき、 $\gamma = 0.5$ の場合にはある程度衝突に伴う相対変位の変化を表している。 γ が 0.1 から 0.5 の場合には一回しか棒の衝突は生じないのに対して、 γ がこれよりも大きくなると、2 つの棒は衝突継続時間内に接触と離反を複数回繰り返すようになる。

式(25)によって与えられる衝突ばねに生じる最大変位 $\Delta u_{I max}$ が剛性比 γ によってどのように変化するかを示した結果が図-6 である。これによれば、おおよ $\gamma = 0.7$ を境として、 $\Delta u_{I max} \sim \gamma$ の関係は変化しており、 $\gamma < 0.7$ 程度の場合には、 $\Delta u_{I max}$ はおおよ γ に反比例して減少するのに対して、 $\gamma > 0.7$ となると、 $\Delta u_{I max}$ の減少率は低下し、概ね $1/\sqrt{\gamma}$ に比例して減少するようになる。これは上述したように γ が 0.5 程度以上となると、衝突継続時間内で棒の端部が接触と離反を繰り返すようになることに対応している。

棒の粒子速度や応力が剛性比 γ によってどのように変化するかを、衝突面を例に示した結果が図-7、図-8 である。図中には図-3 に示した厳密解も比較のために示

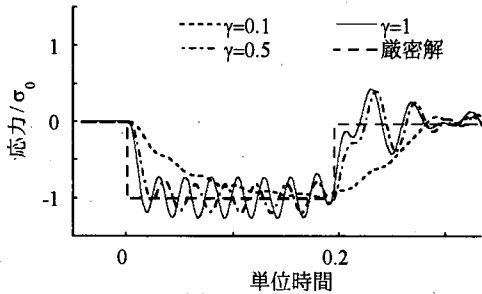
棒 I の速度は、衝突面においては衝突前には V_0 であるが、衝突開始と同時に 0 となり、衝突継続時間 T_I の間はこの値を保ち、衝突継続時間 T_I に達した瞬間に $-V_0$ となる。また非衝突面では衝突開始後 0.1 単位時間たった瞬間に V_0 から $-V_0$ に変化する。これに対して数値解析では、応力度、速度ともに、厳密解のまわりに小刻みに振動するが、全体としてこれらの特徴をよく再現している。

$m = \rho AL$ とおくと、衝突直前には棒 I と棒 II が持っている系全体の運動エネルギーおよび運動量はそれぞれ mV_0^2 および 0 である。一方、衝突後には、運動エネルギー E および運動量 P は、

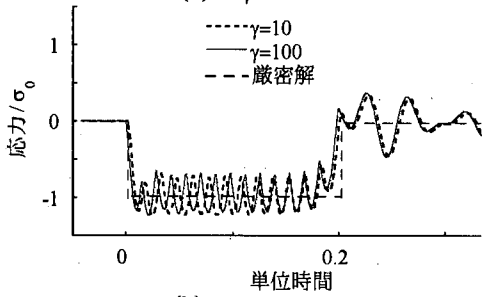
$$E = \frac{1}{2} m(-V_0)^2 + \frac{1}{2} m(V_0)^2 = mV_0^2 \quad (31)$$

$$P = mV_0 - mV_0 = 0 \quad (32)$$

であり、運動エネルギー、運動量はともに保存されていることがわかる。

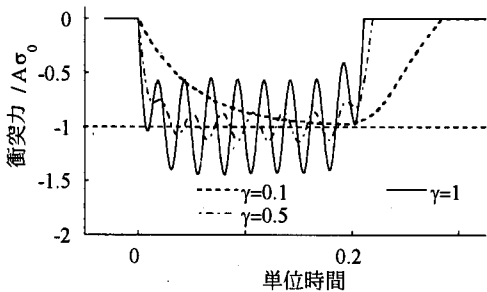


(a) $\gamma = 0.1 \sim 1$

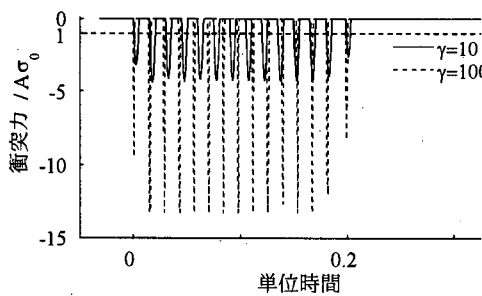


(b) $\gamma = 10 \sim 100$

図-8 剛性比 γ と衝突面における応力の関係



(a) $\gamma = 0.1 \sim 1$



(b) $\gamma = 10 \sim 100$

図-9 剛性比 γ と衝突面における衝突力の関係

している。これによれば、 $\gamma = 0.1$ の場合には接触と離反が1回しか生じないため、衝突面における応力の変化は緩やかであるが、 $\gamma > 0.5$ となると厳密解に近い応力の時間的変化を与えるようになる。しかし、剛性比 γ が10以上となると粒子速度は厳密解のまわりで振動するようになる。

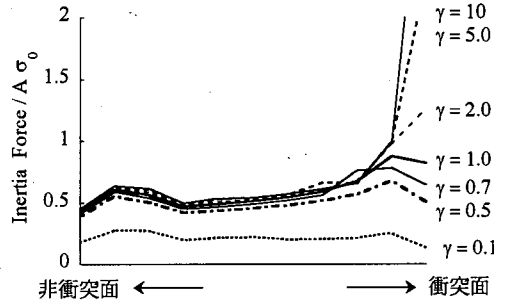


図-10 剛性比 γ が慣性力の最大値に及ぼす影響

図-9 は剛性比 γ を変化させた場合に衝突面に作用する衝突力 P_I を示したものである。図中には、衝突時に伝わる軸力の厳密解 $N = A\sigma_0 = \sqrt{10}$ も示している。衝突力 P_I は剛性比 γ によって大きく変化する、 $\gamma = 0.1 \sim \gamma = 1$ の場合には多少の変動はあっても衝突継続時間内で $P_I \approx 0.5$ 最大単位力力であるが、 γ が10以上となると衝突継続時間内にパルス状の衝突力 P_I が何回も作用するようになり、また、衝突力も大きくなる。

以上より、衝突ばねを $\gamma \approx 1$ という条件を満足するように定めることにより、棒間の相対変位や応力、粒子速度を実用的に計算することができるということが言える。

衝突時に桁の各点に作用する慣性力の分布を剛性比 γ ごとに示したのが、図-10である。剛性比 γ がおおよそ10以上になると、衝突面に作用する慣性力が大きくなる。

(3) 要素分割数の影響

以上より、剛性比 γ が衝突現象の再現性に大きな影響を与えることが分かった。しかし同じ衝突ばね剛性 k_I を用いても、要素分割数 n によって剛性比 γ は変化する。そこで、ここでは要素分割数 n を変えた場合に応答がどのようになるかを検討する。

剛性比を $\gamma = 1$ として、1つの棒の要素分割数 n を5、10、20と変化させた場合の衝突力 P_I および加速度の最大値を求めると表-2のようになる。図-9と同様に軸力の厳密解 $N = A\sigma_0 = \sqrt{10}$ で無次元化した結果を示している。また図-11は棒に生じる応力が要素分割数 n によってどのように変化するかを示したものである。要素分割数 n を変えると、衝突開始時における応力勾配は要素分割数 n によって変化するが、応力の最大値は変わらない。また衝突継続時間内で応力は厳密解のまわりを振動するが、このときの振幅も要素分割数 n によってほとんど変わらない。

これらの結果より、要素分割数 n を大きくしても衝突力や棒に生じる軸力はほとんど変化しないが、最大加速度

表-2 要素分割数 n が応答に与える影響

n	$P_I/A\sigma_0$	最大加速度
5	1.445	2.59
10	1.448	5.18
20	1.442	10.36

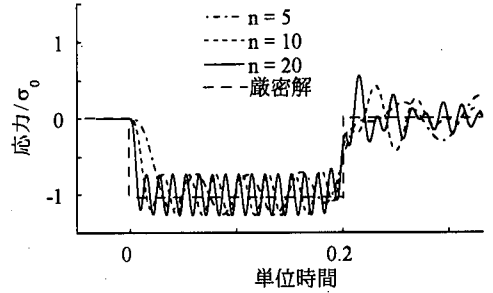


図-11 要素分割数 n と衝突面における応力の関係

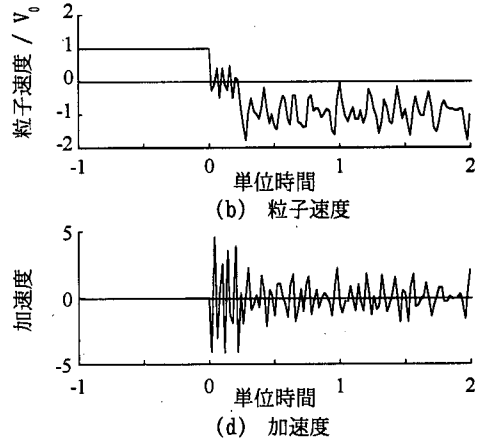
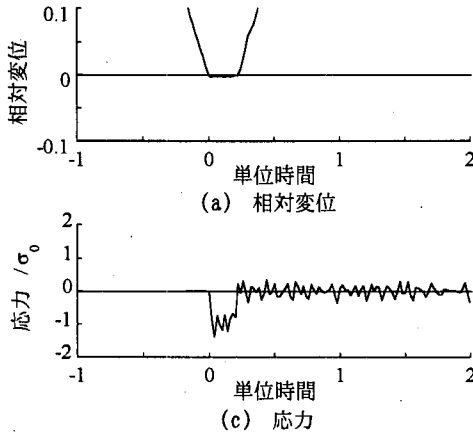


図-12 積分時間間隔 Δt を $\Delta t/T_I=0.1$ としたときの衝突面における応答

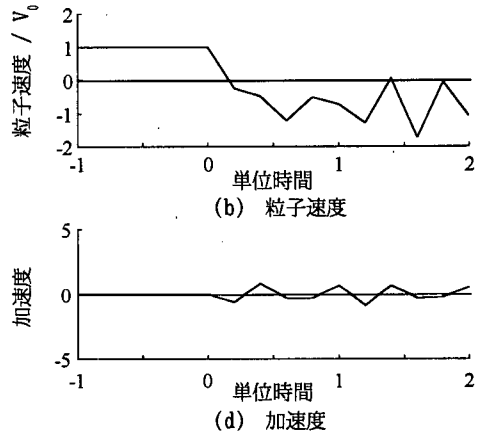
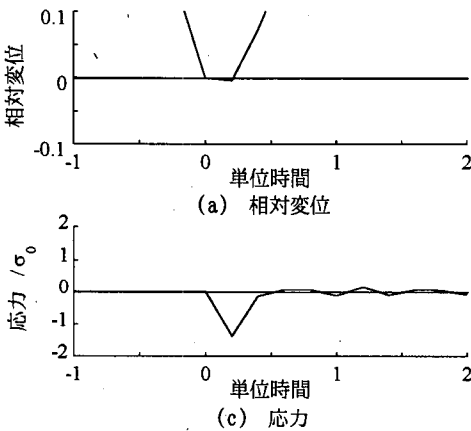


図-13 積分時間間隔 Δt を $\Delta t/T_I=1.0$ としたときの衝突面における応答

は要素分割数 n に比例して大きくなる事が分かる。これは要素分割数 n を 2 倍にすると節点の等価質量が $1/2$ となるため、同じ大きさの慣性力を得るために必要な加速度は 2 倍となるためである。

(4) 積分時間間隔 Δt の影響

以上の解析は積分時間間隔 Δt を $\Delta t/T_I = \sqrt{10}/2000$

とした場合であるが、これが変化するとどのように棒に生じる粒子速度や応力等が変化するかを示した結果が図-12~図-14 である。 $\Delta t/T_I = 1$ にすると、衝突継続時間内の粒子速度や応力の時間的変化がおおざっぱにしか把握できないが、衝突の過程は再現できている。さらに、 $\Delta t/T_I = 5$ としても、衝突継続時間内の応答は把握できないが、2つの棒の接触と離反という基本的な衝突現象

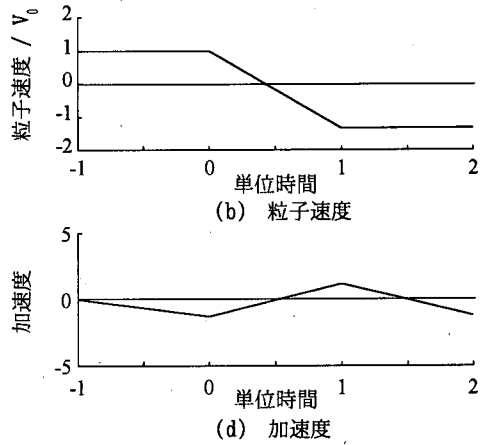
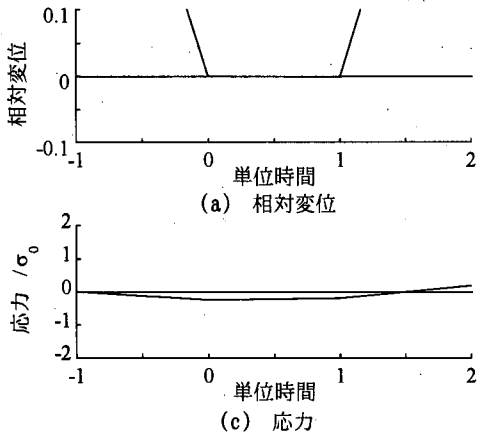


図-14 積分時間間隔 Δt を $\Delta t/T_1=5.0$ となるようにした場合の衝突面における応答

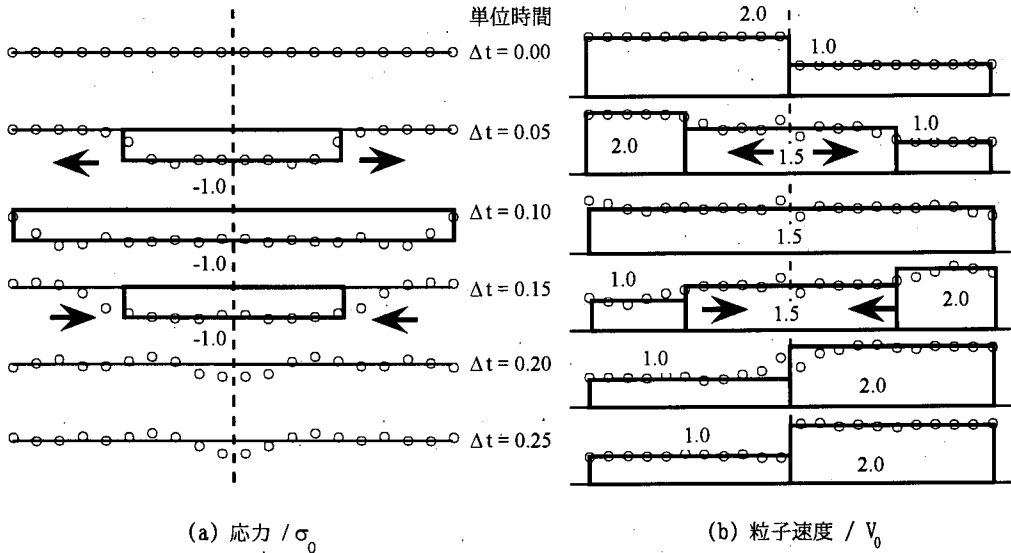


図-15 追突時の応力伝播と粒子速度の変化

の特徴は表している。ただし、応答加速度は $\Delta t/T_1 = 0.1$ の場合に比較して半以下に低下する。

4. 等長の棒が追突する場合の解析

地震時の桁の衝突としては、一方の桁に他方の桁が追突する場合がある。これに相当する場合として同じ長さを持つ2本の棒Ⅰ、棒Ⅱがあり、初速度 $V_1 = 2V_0 = 0.2$ (棒Ⅰ)、 $V_2 = V_0 = 0.1$ (棒Ⅱ)をもって棒Ⅰが棒Ⅱに追突する場合を解析する。棒の長さや弾性係数、断面積等は前述の解析と同じである。

厳密解から求められる衝突時の応力波伝播と粒子速度の変化をそれぞれ図-15に示す。図中には後述する

衝突ばねを用いた場合の解析結果も比較のために示している。3章と同じく、式(29)による衝突時間を0.2単位時間としている。これによれば、2つの棒の接触が始まった瞬間から応力波が2つの棒の内部を伝播していき、0.2単位時間が経過すると、棒内部を応力波が1往復して衝突が完了する。図-15には衝突ばねを用いて解析した場合の結果も示している。ここでは、1つの棒を10分割し、式(27)の剛性比 γ を1とし、 $\Delta t/T_1 = \sqrt{10}/2000$ とした場合の結果を示している。これによれば、応力フロントでの応力および粒子速度の変化率は厳密解のようにはならないが衝突の過程をよく表している。非衝突面に応力波が到達する0.1単位時間後には、棒Ⅰの速度は0.2から0.15に、棒Ⅱの速度は0.1から0.15へと変化する。これは弾性波理論の結果とも一致している。その後応力波が

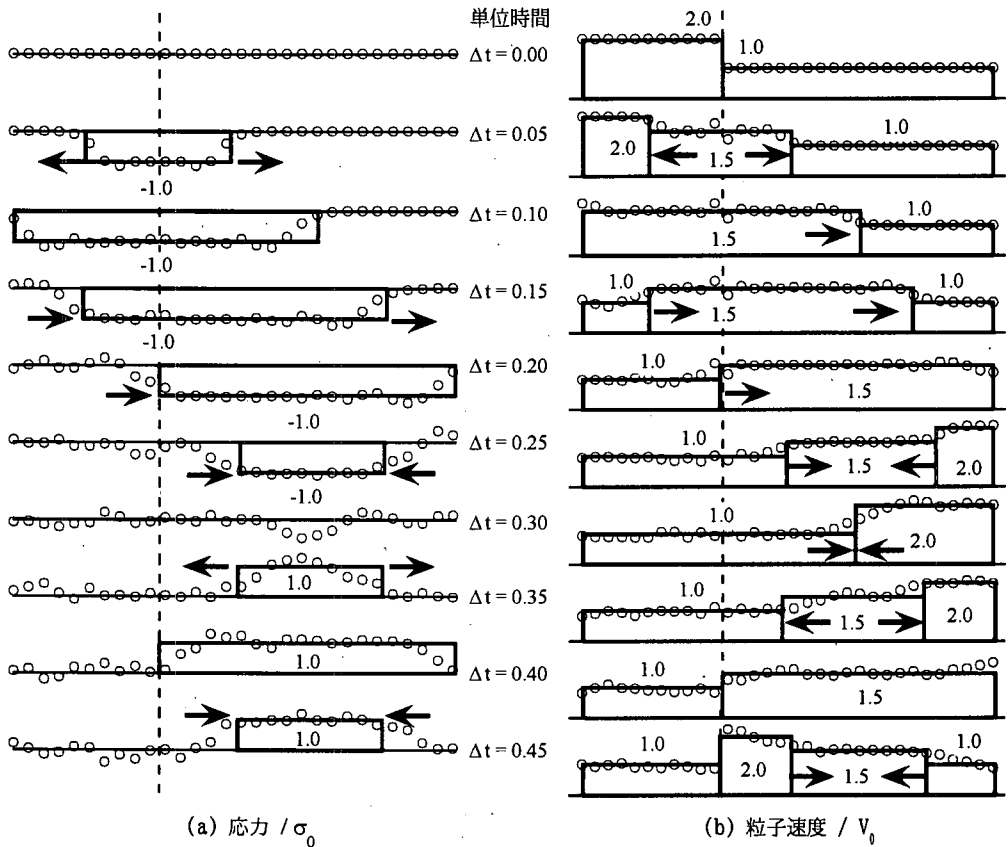


図-16 長さの異なる棒が追突する場合の応力伝播と粒子速度の変化

折り返し全反射した応力波の到達により棒 I の速度は $V_1' = 0.1$, 棒 II の速度は $V_2' = 0.2$ となる。衝突によって、互いの速度は交換されており、剛体が衝突する場合と同じ結果を与えている。

$m = \rho AL$ とおくと、衝突直前には棒 I と棒 II が持っている系全体の運動エネルギーおよび運動量はそれぞれ $5/2 mV_0^2$, $3mV_0$ である。衝突後には、これらはそれぞれ、

$$E = \frac{1}{2} m(V_0')^2 + \frac{1}{2} m(2V_0')^2 = \frac{5}{2} mV_0'^2 \quad (33)$$

$$P = mV_0' + m2V_0' = 3mV_0' \quad (34)$$

となることから、運動エネルギー、運動量とも保存されていることがわかる。

5. 不等長の棒が追突する場合の解析

(1) 衝突の解析

以上の解析では同じ長さの棒が衝突する場合を示した

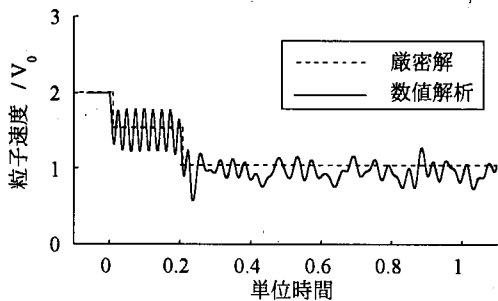
が、長さの異なる2つの棒が追突する場合にはこれよりもっと複雑な応答を示す。ここでは、棒 I の長さを $L = 10$ 単位、棒 II の長さを $2L = 20$ 単位とし、初速度を $V_1 = 2V_0$, $V_2 = V_0$ とした場合の衝突を解析する。ただし、その他の条件は前述の解析と同じとし、 $V_0 = 0.1$ とする。

波動論によれば衝突継続時間は、長い棒 II 内を応力波が1往復するのに必要な時間であり、次式のようになる。

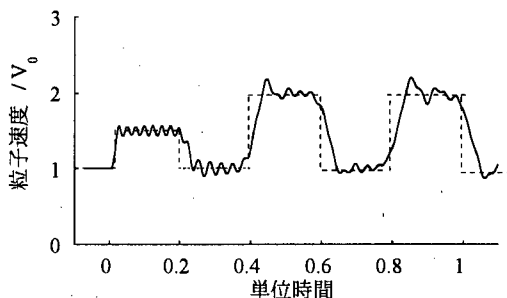
$$T_I = 4L/C_0 = 2\sqrt{10}/5 \quad (35)$$

ここでは前述した等長の棒部材の解析との比較を容易にするために、式(29)による衝突継続時間を 0.2 単位時間として結果を示すこととする。したがって、式(35)による衝突継続時間は 0.4 単位時間となる。

図-16 には衝突時の厳密解による応力波の伝播と粒子速度の変化を示す。図中には、後述する衝突ばねを用いた場合の解析結果も比較のために示している。棒 I, 棒 II が接触して衝突が開始すると、弾性波理論によれば、衝突面の粒子速度 v は応力波の伝播によって Δv だけ

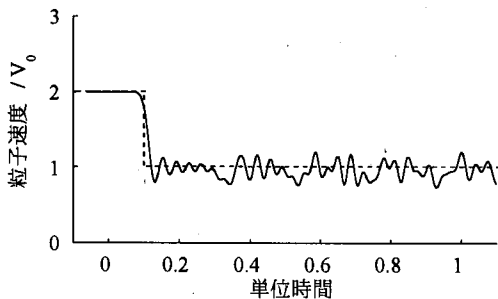


(a) 棒 I

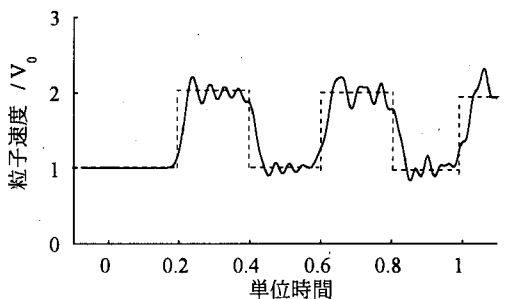


(b) 棒 II

(1) 衝突面



(a) 棒 I



(b) 棒 II

(2) 非衝突面

図-17 長さの異なる棒が追突する場合の粒子速度の変化

変化する。この粒子速度の増分 Δv は、式(6)、式(8)より棒 I、棒 II ではそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial t} = C_1 f' = -\frac{V_0}{2} \\ \Delta v_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial t} = -C_2 g' = \frac{V_0}{2} \end{aligned} \quad (36)$$

図-17、図-18 は厳密解による応力、粒子速度の変化を示したものである。図中には、後述する衝突ばねを用いた場合の解析結果も比較のために示している。これによれば、0.1 単位時間経過すると応力波は棒 I の非衝突面に到達し、固定端反射をするため、これ以降、棒 I では応力波が伝播するにつれて圧縮応力が解放されていく。0.2 単位時間経過した際には、棒 I の圧縮応力はゼロに戻る。

一方、衝突によって応力波が発生し、棒 I では応力波が到達すると粒子速度は $V_0/2$ だけ減少する。0.1 単位時間が経過し、非衝突面で応力波が固定端反射して戻っていくとさらに $V_0/2$ だけ粒子速度が減少する結果、応力波が棒 I 内を一往復した時点(0.2 単位時間)では棒 I の速度は $2V_0$ から V_0 に変化している。反対に、このときには棒 II では圧縮波が非衝突面に達し、速度が V_0 から $1.5V_0$ に変化する。

0.2 単位時間が経過した時点で、棒 I 内部では応力はゼロとなり等長の棒の衝突であれば、この時点で衝突が

完了する。しかし、この場合には、棒 II の衝突面側ではまだ圧縮状態にある。このために、0.2 単位時間が経過しても依然として棒 I と棒 II の接触は保たれたままとなり、棒 I を伝わってきた応力波は棒 II の側に伝播する。これにより、応力は棒 II の左側から順に解放されていき、粒子速度は $V_0/2$ だけ減少していく。

先に棒 II 内部を伝播した応力波は非衝突面において固定端反射をするので、非衝突面からも徐々に応力が解放されていく。棒 II を先に伝播した応力波は粒子速度を $V_0/2$ だけ増加させるので、0.2 単位時間経過後は、応力波の到達によって棒 II の非衝突面に近い点から順に粒子速度が $1.5V_0$ から $2V_0$ へと変化していく。

0.2 単位時間経過後、棒 II では両側から応力波が伝播し、0.3 単位時間時にはこれらの応力波がすれ違い、この時点で棒 II の全領域で応力波は 0 となる。そしてこれ以後、棒 II の中央より引張り応力状態となる。

粒子速度についてみてみると、応力波がすれ違った後、右側に進行する波は粒子速度を $V_0/2$ 増加させて $V_2' = 1.5V_0$ となり、逆に左側に進行する波は粒子速度を $V_0/2$ だけ減少させて $V_2' = 1.5V_0$ と変化させていく。したがって、棒 II の中央付近から粒子速度は $V_2' = 1.5V_0$ となっていく。そして、左側と右側の進行波がともに棒端部に到達する 0.4 単位時間経過時には棒 I の全領域で粒子速度が V_0 に、また棒 II の全領域で粒子速度が

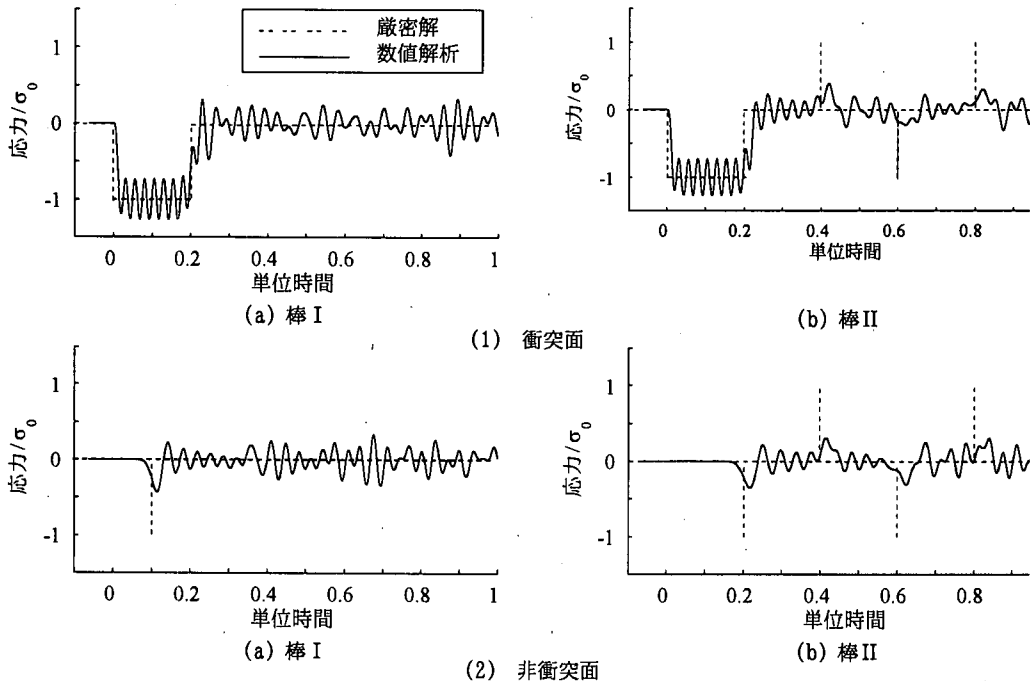


図-18 長さの異なる棒が追突する場合の応力の変化

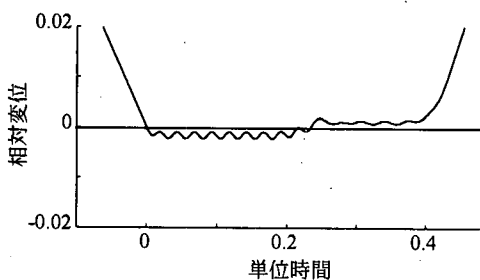


図-19 異なる長さの棒の衝突時における棒 I ~ 棒 II 間の相対変位

$V_2' = 1.5V_0$ となり、衝突が終了する。

以上のプロセスを衝突ばねを用いて解析した結果も図-16~図-18 に示している。図-16 によれば、等長の棒の衝突に対する図-3、図-15 同様に、衝突ばねを用いた解析では応力、粒子速度ともに波動論による解の特徴がよく表されている。棒 I および棒 II の衝突面、非衝突面の節点における粒子速度および応力を示した図-17、図-18 では、0.2 単位時間以降、棒 II の衝突面の粒子速度は V_0 を中心に振動し、非衝突面では $2V_0$ を中心として振動している。しかし、0.4 単位時間となると、逆に衝突面の粒子速度が $2V_0$ となり、非衝突面では V_0 となる。したがって、棒 II 全体としては、 $V_2' = 1.5V_0$ で運動しながら、各点の粒子速度は 0.2 単位時間ごとに周期的に変化して

いる。これは図-16 に示したように棒 II では 0.2 単位時間経過後、応力状態は圧縮と引張りを経験し、衝突完了 (0.4 単位時間) 後には棒 II は伸び縮みしながら $V_2' = 1.5V_0$ で運動することに対応している。

図-19 には衝突時における、棒 I ~ 棒 II 間の相対変位を示す。動的解析では約 0.2 単位時間以降棒 I ~ 棒 II 間の相対変位は正の値を示しており、棒 I と棒 II は離れたままとなっていることを示している。しかし、相対変位はわずかであり、0.4 単位時間経過後に、2 つの棒は本格的に離れていく。

(2) 剛体の衝突の違い

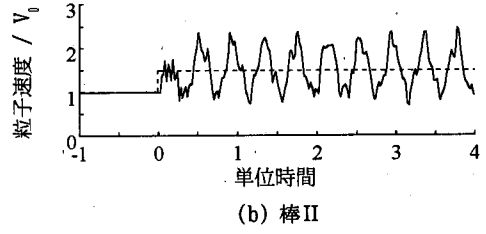
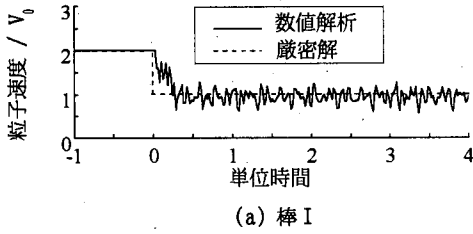
前述したように、長さ、断面積、弾性係数、密度が等しい 2 つの弾性棒の衝突では、衝突前後で 2 つの棒の速度は交換されるため、剛体の衝突問題と同じ結果を示した。しかし長さの異なる棒が衝突する場合、棒を剛体とみなすと衝突後の速度は波動論による結果とは大きく異なってくる。

剛体の衝突問題では完全弾性衝突を仮定すると運動量保存則は次式で与えられる。

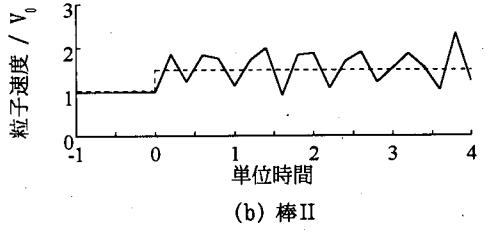
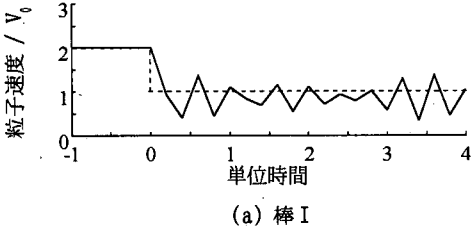
$$\rho AL \cdot 2V_0 + 2\rho AL \cdot V_0 = \rho AL \cdot V_1' + 2\rho AL \cdot V_2'$$

すなわち、

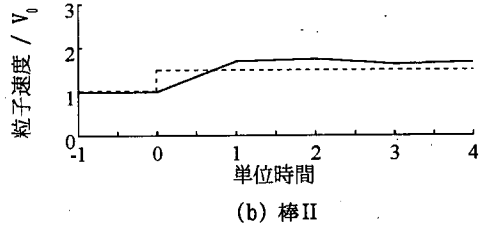
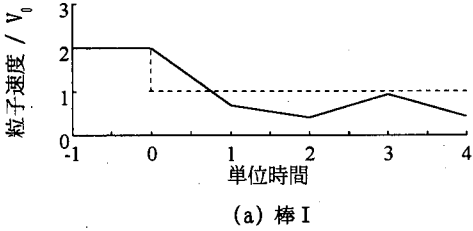
$$V_1' = 4V_0 - 2V_2' \quad (37)$$



(1) $\Delta t/T_I=0.1$ の場合



(2) $\Delta t/T_I=1$ の場合



(3) $\Delta t/T_I=5$ の場合

図-20 衝突面における粒子速度で表した積分時間間隔の影響

完全弾性衝突であるから、はねかえり係数 e は、

$$e = -\frac{V'_2 - V'_1}{V_0 - 2V_0} = 1$$

したがって、

$$V'_1 = V'_2 - V_0 \quad (38)$$

したがって、棒 I、棒 II の速度はそれぞれ $V'_1 = 2/3V_0$ 、 $V'_2 = 5/3V_0$ となる。

いま、 $m = \rho AL$ とおくと、衝突直前に棒 I と棒 II が持っている運動エネルギーおよび運動量はそれぞれ $3mV_0^2$ 、 $4mV_0^2$ である。衝突後には、剛体の衝突を仮定すると、運動エネルギー、運動量は、

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}V_0\right)^2 + \frac{1}{2}2m\left(\frac{5}{3}V_0\right)^2 = 3mV_0^2 \quad (39)$$

$$P = m\frac{2}{3}V_0 + 2m\frac{5}{3}V_0 = 4mV_0 \quad (40)$$

となり、この場合には運動エネルギー、運動量ともに保存されていることになる。

これに対して、弾性波理論によれば、上述の結果から

運動エネルギー、運動量は次式のようになる。

$$E = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}2m\left(\frac{3}{2}V_0\right)^2 = \frac{11}{4}mV_0^2 \quad (41)$$

$$P = mV_0 + 2m\frac{3}{2}V_0 = 4mV_0 \quad (42)$$

したがって、この場合には運動量保存則は成り立つが、運動エネルギーは失われていることが分かる。これは、図-16 に示したように、衝突後に棒 II には振動に伴う運動エネルギーが残るからである。

(3) 積分時間間隔 Δt の影響

長さが異なる棒の衝突解析に対する積分時間間隔 Δt の影響を検討するために、 $\Delta t/T_I$ を 0.1, 1, 5 とした場合の粒子速度、応力の時刻歴を求めると、図-20 のようになる。 $\Delta t/T_I = 0.1$ および 1.0 とした場合には衝突後の速度は棒 I では V_0 、棒 II では $1.5V_0$ と弾性波理論と一致する。しかし、 $\Delta t/T_I = 5$ とした場合には、衝突後の速度は棒 I では $2/3V_0$ 、棒 II では $5/3V_0$ となり、上述したように剛体の衝突問題として解析した場合の速度と一致する。したがって、衝突問題を弾性波理論で与えられる状態を

衝突ばねを用いて解析するためには、以下の条件を満足する必要がある。

$$\Delta t < T_I \quad (43)$$

6. 結論

地震時における桁間の衝突を衝突ばねを用いて解析した場合の特性を弾性棒の衝突問題として単純化し、等長の2つの棒が正面衝突する場合、追突する場合、長さの異なる2本の棒が追突する場合に分けて解析した。また棒を剛体として取り扱った場合の解析結果との比較も行った。以上の解析結果から得られる結論をまとめると、以下ようになる。

- 1) 衝突ばねの剛性 k_f は衝突後の速度および軸力には大きな影響を与えない。
- 2) 衝突継続時間内での粒子速度および衝突力の変化は、剛性比 γ に影響を受ける。 γ が一定であるという条件下で衝突ばねの剛性 k_f を大きくしても衝突力には変化はないが、剛性比 γ を大きくしていくと衝突力は急速に大きくなる。このような場合、衝突面では小刻みな衝突と離反が繰り返し起こり、パルス状の衝突力が繰り返して作用する。また γ が1を下回ると衝突継続時間 T_I が理論値よりも長くなり、衝突現象の再現性が低下する。
- 3) 剛性比 γ が一定であれば要素分割数 n が増加しても相対変位、粒子速度、応力、衝突力はほとんど変化しないが、応答加速度は要素分割数 n の増加に伴い増大する。
- 4) 等長の棒の衝突では、衝突前後で運動エネルギーは保存されるが、不等長の棒の衝突では、衝突後には長い棒の側に振動が残る結果、衝突前に比較して運動エネルギーが失われる。このため、棒を剛体とし、完全弾性衝突を仮定した場合とは異なる衝突後の速度を与える。弾性波動論と同じ衝突後の速度を得るためには、式(43)のように積分時間間隔を衝突継続時間よりも短くしなければならぬ。

参考文献

- 1) 矢部正明, 武村浩志, 川島一彦: 直橋および斜橋の桁間衝突とその影響, 構造工学論文集, 43A, pp.781-791, 1997.
- 2) 大塚久哲, 神田昌幸, 鈴木基行, 川神雅秀: 斜橋の水平地震動による回転挙動解析, 土木学会論文集, No.5701/I-40, 15-324, 1997.
- 3) 伊津野和行, 武野志之歩, 中井博: 長大橋とそのアプロー

チ桁の地震相互作用に関する考察, 土木学会論文集, No.633/I-49, pp.169-180, 1997.

- 4) Tseng, W.S. and Penzien, J.: Analytical Investigations of the Seismic Response of Long Multiple-span Highway Bridges, Report No. EERC73-12, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, USA, 1973.
- 5) Kawashima, K. and Penzien, J.: Theoretical and Experimental Dynamic Behavior of a Curved Model Bridge Structure, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 7, pp.129-145, 1979.
- 6) 川島一彦: 動的解析における衝突のモデル化に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第308号, pp.123-126, 1981.
- 7) 竹園茂男, 感元広文, 後藤健: 車両の二次元衝突(衝突中のタイヤ力を考慮した場合), 日本機械学会論文集(A編), 63巻, 630号, 論文No.98-0697, pp.680-687, 1999.
- 8) 関根英樹, 胡寧, 夏目卓也, 福永久雄: 層間かく離を有する複合材積層板の衝撃応答解析, 日本機械学会論文集(A編), 63巻, 608号, 論文No.96-0532, pp.787-793, 1997.
- 9) Carpenter, N. J., Taylor, R. L. and Katona, M. G.: Large Constraints for Transient Finite Element Surface Contact, Int. J. Num. Methods Eng., 32, pp.103-128, 1991.
- 10) 小笠原永久, 白鳥正樹, 宮原進, 于強, 宮野篤: ハニカム構造材料の衝撃吸収特性に関する研究, 日本機械学会論文集(A編), 63巻, 616号, 論文No.97-0464, pp.2575-2579, 1997.
- 11) 小林秀敏, 壺丸谷政志, 小林民巨: ペーパーハニカムコアの動的および静的圧縮試験と吸収エネルギー, 日本機械学会論文集(A編), 63巻, 616号, 論文No.97-0427, pp.2580-2585, 1997.
- 12) 井上裕嗣, 岸本喜久雄, 渋谷寿位置, 原田謙郎: 撃力の逆問題解析における数値ラプラス逆変換の適切化, 日本機械学会論文集(A編), 63巻, 616号, 論文No.97-0462, pp.2503-2509, 1997.
- 13) Goldsmith, W.: Impact, Edward Arnold, London, 1960.
- 14) Timoshenko, S. and Goodier, J.N.: Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 1951.
- 15) 宇治橋貞幸, 田中克典, 松本浩之, 足立忠晴: 落睡試験による繊維強化プラスチックの衝撃強度評価法, 日本機械学会論文集(A編), 63巻, 616号, 論文No.97-0082, pp.2560-2567, 1997.
- 16) Newmark, N. M.: A Method of Computation for Structural Dynamics, J. Engng. Mech. Div. ASCE, 85, pp.67-94, July, 1959.

(2000.3.7 受付)

ANALYSIS OF POUNDING OF TWO ELASTIC RODS USING IMPACT SPRING ELEMENT

Gakuho WATANABE and Kazuhiko KAWASHIMA

An analysis of poundings between two elastic rods is presented. Poundings of two rods, which have the same lengths and sections, traveling in the same and opposite directions were analyzed. The poundings based on the wave propagation theory were analyzed by a model consisted of the elastic beam elements and the impact spring element. The impact spring element has high stiffness only when a collision between the elastic rods has occurred. From these results, it is found that the analysis using the impact spring element realistically represents the pounding of elastic beams including the propagation of stress wave and changes of particle velocity, by appropriately providing the stiffness of the impact spring and the time interval of numerical integration.