

# ハイラーキ要素による ケーブル構造の有限変位解析

林 正<sup>1</sup>・岩崎英治<sup>2</sup>・山野長弘<sup>3</sup>・時 譲太<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部環境・建設系 (〒940-2188 長岡市上富岡町 1603-1)

<sup>2</sup>正会員 工博 長岡技術科学大学助教授 工学部環境・建設系 (〒940-2188 長岡市上富岡町 1603-1)

<sup>3</sup>正会員 工修 川田テクノシステム株式会社 設計部課長 (〒116-0014 東京都荒川区東日暮里 5-51-11)

<sup>4</sup>正会員 工修 阪神高速道路公団 (研究当時 長岡技術科学大学大学院工学研究科学生)

3次元有限変位解析に用いるハイラーキケーブル要素を提案する。本要素は  $p$  法による高次のアイソパラメトリック要素で、極端に湾曲した状態のケーブルを 1 要素で解析することができて高精度の解が得られる。また、数値計算の効率化を計ることができるアダプティブ法のアルゴリズムを開発する。数値計算の結果から、本要素は収束性と安定性に優れていることを確かめた。

**Key Words :** hierarchical cable element, isoparametric element, adaptive method, finite displacement analysis, guyed tower

## 1. まえがき

マトリックス構造解析法において、ケーブル要素は支線付マストや斜張橋の有限変位解析に用いられる。ケーブル要素では、サグによる応力弛緩を考慮して、あらゆる荷重状態において常に軸引張力が生じるものでなければならない。

Livesley<sup>1)</sup>は支線付マストの解析にサグの影響を考慮した接線剛性行列を用いているが、この式は Ernst の修正弾性係数と等価であり、非抗压材の解析には適用できない。マトリックス法による斜張橋の解析には Ernst の修正弾性係数がよく用いられている。しかし、部材長が短くなる場合には、非抗压性を考慮するためにケーブル部材の剛性をゼロにすることが行われている<sup>2),3)</sup>。

著者の 1 人はケーブルの特性を考慮した要素を提案し<sup>4)</sup>、斜張橋の有限変位解析に応用した<sup>5)</sup>。この要素は放物線ケーブルを対象にしているの、サグが大きい場合には適用できない。後藤<sup>6)</sup>はカテナリーケーブルの式を導き、精度のよい接線剛性行列を求めている。

マトリックス法による解法に解析解を使用すれば高精度の解が得られて計算効率はいよ、種々の問題に適用するためには制約がある。文献 4),6) では平面構造を解析対象にしているの、3次元解析に用いるためには修正が必要である。

先に、著者らは 3次元の任意形状のケーブルに適用できる式を提案した<sup>7)</sup>。また、謝ら<sup>8)</sup>は 4 節点の 3次元ケーブル要素を定式化している。しかし、有限要素法の定式化により、大きく湾曲したケーブルを分割せずに解析できる要素は開発されていないようである。

本研究では、1 要素で極端に弛緩した状態に適用可能なハイラーキケーブル要素を提案する。この要素では、 $p$  法による標準的な手法を用いているので、FEM 解析の汎用性を有しているが、一般化変位を定める節点を持たない内部自由度(節線変位)を有するので<sup>9)</sup>、通常の写像方法ではアイソパラメトリック要素として定式化することができない。そこで、ハイラーキ写像の手法<sup>10)</sup>を用いて、任意な自由度数を有するアイソパラメトリック要素として定式化する。

$p$  法を非線形解析に用いる場合には、計算効率を高めるために内部自由度を縮約するが、このための各要素での縮約演算と全体解析で 2 段階の収束計算を行う必要がある。この場合に、ケーブル要素の内部自由度数が不足すると不平衡力の減少が遅くなって全体解析の効率性が損なわれる。本研究では、全体解析の収束性が悪化しないように、所望の解析精度を得るのに必要な級数の展開項数を事前に決定するアダプティブ法のアルゴリズムを開発する。

$p$  法による解析精度のよいことは知られているが、ケーブル部材のような変形量の大きい有限変位解析に適用するためには、上述のような最適な内部自由度数の選択手法などの数値計算法に対する検討が必要になる。一般にアイソパラメトリック要素のガウス積分では、Jacobian の多項式の次数は考慮されないが、ケーブル要素の剛性行列の要素には高次多項式の Jacobian が分母に現れるので、これを考慮した積分点数を用いなければならない。しかし、その積分に必要な積分点数は不明である。

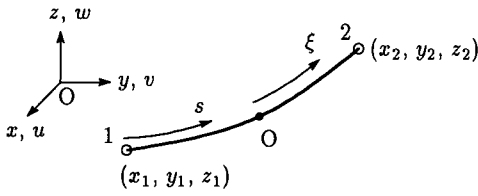


図-1 空間曲線材

本論文では、単一ケーブルの数値計算により提案するケーブル要素の特性を調べ、風荷重を受ける大規模支線付マストの解析に用いて、ケーブルの曲率が反転する場合の解の収束性や安定性を確かめる。

## 2. ハイラーキケーブル要素

### (1) 変位関数

ケーブル要素は部材軸方向に一樣な伸び剛性を有する空間曲線材で、曲げ剛性は無視して応力-ひずみ関係は線形とする。

ハイラーキケーブル要素は、図-1に示すように両端のみに節点1,2を有する。要素の軸線に沿って曲線座標  $s$  をとり、自然座標  $\xi$  ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ) をパラメータとして  $s(\xi)$  で表す。

全体デカルト座標系  $(x, y, z)$  の並進変位の3成分を  $u, v, w$  とし、要素の変位関数を次式の級数で表す。

$$u(\xi) = \sum_{k=1}^m N_k(\xi) u_k \quad (1)$$

$v(\xi), w(\xi)$  も同じ級数で表される。形状関数  $N_k(\xi)$  には、次式のハイラーキ多項式を用いる<sup>9)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1-\xi), & N_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1+\xi) \\ N_k(\xi) &= (1-\xi^2)\xi^{k-3} & (k \geq 3) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

変位の3成分の一般化変位を各級数項  $k$  ごとに分けて、次の一般化変位ベクトル  $d_k$  で表す。

$$d_k = \{u_k \ v_k \ w_k\}^T \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

ここに、 $k = 1, 2$  は要素両端の節点変位、 $k \geq 3$  は節線変位(内部自由度)であり、 $m$  は展開項数である。

上式の  $d_k$  を全級数項について集めると、要素の一般化変位ベクトル  $d$  が得られる。

$$d = \{d_1^T \ d_2^T \ \dots \ d_m^T\}^T \quad (4)$$

各変位成分に対する  $3m$  次の形状関数ベクトル  $f_i$  をまとめて次式で与える。

$$\begin{bmatrix} f_1^T \\ f_2^T \\ f_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_m & 0 & 0 \\ 0 & N_m & 0 \\ 0 & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (5)$$

式(4)、(5)を用いて、変位関数を次のスカラー積で表す。

$$u(\xi) = f_1^T d, \quad v(\xi) = f_2^T d, \quad w(\xi) = f_3^T d \quad (6)$$

### (2) 伸び率

空間曲線の伸張前後の線素  $ds, ds^*$  は次式で与えられる。

$$ds = J_s d\xi, \quad ds^* = J_s^* d\xi \quad (7)$$

ここに、 $( )^*$  は伸張後の物理量を示し、 $J_s, J_s^*$  は次式の一次元のヤコビアンである。なお、アイソパラメトリック写像の一般的な記述法に従って、伸張前後の  $\xi$  には同一記号を用いる。

$$\left. \begin{aligned} J_s &= \{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2\}^{\frac{1}{2}} \\ J_s^* &= \{(J_1^*)^2 + (J_2^*)^2 + (J_3^*)^2\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$J_1 = \frac{dx}{d\xi}, \quad J_2 = \frac{dy}{d\xi}, \quad J_3 = \frac{dz}{d\xi} \quad (9)$$

$$J_i^* = J_i + e_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

$$e_i = g_i^T d \quad (11)$$

$$g_i = \frac{df_i}{d\xi} \quad (12)$$

軸線の伸び率  $\epsilon_s$  は式(7)より次のようになる。

$$\epsilon_s = \frac{J_s^*}{J_s} - 1 \quad (13)$$

なお、伸張後における各変位成分の方向余弦を

$$t_i^* = \frac{J_i^*}{J_s^*} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (14)$$

で定めると、軸線の単位接線ベクトルは次式となる。

$$t^* = \{t_1^* \ t_2^* \ t_3^*\}^T \quad (15)$$

### (3) 剛性方程式

増分理論による定式化を行うために、増分前の既知量に  $( )^*$ 、増分後の変化量に添記号  $\Delta$  を付けて表す。伸び率の増分は式(13)の伸び率を変位増分  $\Delta d$  でテイラー展開し、微小ひずみの仮定を用いると次式のようになる。

$$\Delta \epsilon_s = \frac{1}{J_s J_s^*} \sum_{i=1}^3 (J_i^* + \frac{1}{2} \Delta e_i) \Delta e_i \quad (16)$$

上式に式(11)を代入して次式のように表す。

$$\Delta \epsilon_s = \left\{ b^* + \frac{1}{2} B^* \Delta d \right\}^T \Delta d \quad (17)$$

ここに、

$$\mathbf{b}^* = \frac{1}{J_s} (t_1^* \mathbf{g}_1 + t_2^* \mathbf{g}_2 + t_3^* \mathbf{g}_3) \quad (18)$$

$$\mathbf{B}^* = \frac{1}{J_s J_s^*} (\mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{22} + \mathbf{G}_{33}) \quad (19)$$

$$\mathbf{G}_{ii} = \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^T \quad (20)$$

増分後の仮想ひずみエネルギーは次式で求まる。

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\sigma_s^* + \Delta \sigma_s) \delta(\Delta \varepsilon_s) dV \\ &\equiv \delta(\Delta \mathbf{d})^T \{ [\mathbf{K}_T] \Delta \mathbf{d} + \mathbf{F}_\sigma^* \} \end{aligned} \quad (21)$$

ここに、 $\mathbf{K}_T$  は接線剛性行列、 $T_s^*$  は  $\sigma_s^*$  による張力である。

$$\mathbf{K}_T = \int_s [E A \mathbf{b}^* \mathbf{b}^{*T} + T_s^* \mathbf{B}^*] ds \quad (22)$$

$$\mathbf{F}_\sigma^* = \int_s T_s^* \mathbf{b}^* ds \quad (23)$$

$$T_s^* = \sigma_s^* A \quad (24)$$

$E$  はヤング係数、 $A$  は要素の断面積である。

仮想仕事は、ケーブル要素に作用する分布荷重  $\mathbf{q}$  と部材端力  $\mathbf{F}_1^*$ 、 $\mathbf{F}_2^*$  およびそれらの増分力を考慮して次式となる。

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_s (\mathbf{q} + \Delta \mathbf{q})^T \delta(\Delta \mathbf{u}) ds \\ &\quad + (\mathbf{F}_1^* + \Delta \mathbf{F}_1^*)^T \delta(\Delta \mathbf{d}) \end{aligned} \quad (25)$$

ここに、

$$\mathbf{q}(s) = \{q_x \quad q_y \quad q_z\}^T \quad (26)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \{\Delta u \quad \Delta v \quad \Delta w\}^T \quad (27)$$

$$\mathbf{F}^* = \{ \mathbf{F}_1^{*T} \quad \mathbf{F}_2^{*T} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \cdots \}^T \quad (28)$$

$\mathbf{q}$  は無応力時の単位長さ当りの  $x, y, z$  成分で表し、伸張後の総量は不変とする。なお、内部自由度に対する一般化力  $F_k^*$  ( $k \geq 3$ ) はゼロである。

仮想仕事の原理により、次式のケーブル要素の剛性方程式が得られる。

$$[\mathbf{K}_T] \Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{P} + \Delta \mathbf{F} + \mathbf{R}^* \quad (29)$$

ここで、不平衡力  $\mathbf{R}^*$  と  $\mathbf{q}$  による等価節点力  $\mathbf{P}^*$  は次式で与えられる。

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{P}^* + \mathbf{F}^* - \mathbf{F}_\sigma^* \quad (30)$$

$$\mathbf{P}^* = \int_s (q_x \mathbf{f}_1 + q_y \mathbf{f}_2 + q_z \mathbf{f}_3) ds \quad (31)$$

なお、構造全体の剛性方程式を組み立てるときには、式(29)から内部自由度を消去した6元の剛性方程式を用いる。

#### (4) 接線剛性行列

式(22)のダイアド  $\mathbf{b}^* \mathbf{b}^{*T}$  を次式のように表すことができる。

$$\mathbf{b}^* \mathbf{b}^{*T} = \frac{1}{J_s^2} [\mathbf{T}^*] [\mathbf{G}] [\mathbf{T}^*]^T \quad (32)$$

ここに、

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} t^* & & & \mathbf{0} \\ & t^* & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & t^* \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{sym.} & & & g_{mm} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{k\ell} &= g_k(\xi) g_\ell(\xi) \\ g_k(\xi) &= dN_k/d\xi \end{aligned} \right\} (k, \ell = 1, 2, \dots, m) \quad (35)$$

$\mathbf{T}^*$  は  $(3m \times m)$  行列で、 $t^*$  は式(15)の単位接線ベクトルである。

変位関数を  $m$  項まで級数展開すると、式(22)の接線剛性行列は  $3m$  元の対称行列になる。これを  $m^2$  個の小行列に分割すると、級数項  $k, \ell$  に関する3次の正方行列  $k_{k\ell}$  は次のようになる。

$$k_{k\ell} = \int_{-1}^1 g_{k\ell} \left\{ \frac{EA}{J_s} [t^* t^{*T}] + \frac{T_s^*}{J_s^*} [\mathbf{I}] \right\} d\xi \quad (36)$$

ここに、 $\mathbf{I}$  は3次の単位行列である。なお、軸ひずみが一定な直線要素のときには両端節点で  $k_{1\ell} = k_{2\ell} = \mathbf{0}$  ( $\ell \geq 3$ ) であるので、式(36)はトラス材の式に一致する。

#### (5) アイソパラメトリック写像

通常の有限要素法では、1次元要素の写像関数にLagrangeの補間多項式が用いられる。しかし、ハイラーキ要素では、内部自由度の一般化変位を定める節点をもたないために、アイソパラメトリック表示の式が得られない。また、有限変位解析においては、変形後の座標値に変位が影響するので、通常の並進変位と物理的意味の異なる内部自由度をそのまま用いることができない。そこで、写像関数に式(2)のハイラーキ多項式を用いた次のハイラーキ写像を用いる<sup>10)</sup>。

$$x = \sum_{k=1}^n N_k(\xi) \hat{x}_k, \quad y = \sum_{k=1}^n N_k(\xi) \hat{y}_k, \quad z = \sum_{k=1}^n N_k(\xi) \hat{z}_k \quad (37)$$

ここに、 $(\hat{x}_k, \hat{y}_k, \hat{z}_k)$  は級数の展開係数であり、通常のデカルト座標値とは異なるハイラーキ座標値である。

ここで、写像の分点数  $n$  を変位の展開項数  $m$  に等しく  $n = m$  にすると、式(37)はハイラーキ多項式を

用いたアイソパラメトリック写像になる。なお、変形後の形状は式(1)の一般化変位を用い、次式のハイアラキーアイソパラメトリック写像を用いて定める。

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \sum_{k=1}^m N_k(\xi)(\hat{x}_k + u_k) \\ y^* &= \sum_{k=1}^m N_k(\xi)(\hat{y}_k + v_k) \\ z^* &= \sum_{k=1}^m N_k(\xi)(\hat{z}_k + w_k) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

変形後のヤコビアンは式(10)に式(35), (38)を用いると、次式で表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} J_1^* &= \sum_{k=1}^m g_k(\xi)(\hat{x}_k + u_k) \\ J_2^* &= \sum_{k=1}^m g_k(\xi)(\hat{y}_k + v_k) \\ J_3^* &= \sum_{k=1}^m g_k(\xi)(\hat{z}_k + w_k) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

### (6) ハイアラキー座標値

親要素上に  $m$  個の写像点を設けて要素の両端を 1, 2,  $\xi$  の原点を 3 とし、点 4 以降を後述する方法に従って定めると、式(37)の第 1 式より次式が求まる。

$$x_i = \sum_{k=1}^m N_k(\xi_i) \hat{x}_k \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (40)$$

ここに、 $x_i$  と  $\xi_i$  は写像点  $i$  のデカルト座標値と  $\xi$  座標値である。

点 1, 2, 3 に関するハイアラキー座標値は、式(40)より次の値となる。

$$\hat{x}_1 = x_1, \quad \hat{x}_2 = x_2, \quad \hat{x}_3 = x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad (41)$$

上式を式(40)に代入し、各式を  $(1 - \xi_i^2)\xi_i$  で割ると次式が求まる。

$$\begin{bmatrix} 1 & \xi_4 & \xi_4^2 & \dots & \xi_4^{m-4} \\ 1 & \xi_5 & \xi_5^2 & \dots & \xi_5^{m-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi_m & \xi_m^2 & \dots & \xi_m^{m-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_4 \\ \hat{X}_5 \\ \vdots \\ \hat{X}_m \end{bmatrix} \quad (42)$$

ここに、

$$\hat{X}_i = \frac{x_i}{\xi_i(1 - \xi_i^2)} + \frac{x_1}{2(1 + \xi_i)} - \frac{x_2}{2(1 - \xi_i)} - \frac{x_3}{\xi_i} \quad (i \geq 4) \quad (43)$$

点 4 以降は、 $\xi$  の原点に関して親要素で左右対称になるように定めると、対称条件より式(42)は 2 組の式に

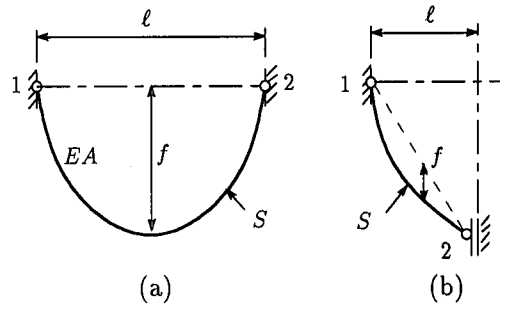


図-2 カテナリーケーブル

分離することができ、それぞれ式(42)と同じ形のファンデルモンドの行列になるので容易に解くことができる。なお、 $\hat{y}_k, \hat{z}_k$  座標値についても  $x_i$  に  $y_i, z_i$  を用いて、同じ式で求めることができる。

## 3. アダプティブ要素

ケーブル要素は外的要因により形状が激しく変化するので、曲線の形状に応じて適切な展開項数を用いる必要がある。そこで、ハイアラキー多項式による曲線近似の誤差を次の数値解析例により求め、曲線形状による展開項数の関係とガウス積分に必要な積分点数を調べる。

### (1) 曲線の多項式近似

数値解析例は図-2(a), (b) に示す対称、非対称ケーブルである。図(a)は両端を固定支持した無応力長  $S_0 = 100$  のケーブルに自重  $g(s) = 1$  が作用する場合であり、スパン  $l$  を  $S_0$  より少し長い  $l = 100.1$  の状態からケーブルが大きく湾曲する  $l = 5$  まで種々に変化させる。図(b)は図(a)をスパン中央点において切断し、鉛直方向にローラー支持した場合である。これらのケーブルはともに 1 要素を用い、伸び剛性を  $EA = 2 \times 10^6$  とする。

フリーハンギングのケーブル形状はカテナリー曲線になるので、この解析例<sup>6)</sup>から求めたハイアラキー座標値を用いて伸張後のケーブル長  $S$  を次式で計算する。

$$S = \int_{-1}^1 J_3^* d\xi \quad (44)$$

式(44)ではガウス積分を用いるが、ヤコビアン  $J_3$  は多項式ではないので必要十分な積分点数が不明である。そこで、任意の展開項数について積分値  $S$  が収束するときの積分点数を求める。

表-1 に展開項数  $m$  と積分点数  $n$  および厳密な長さに対する  $S$  の相対誤差を示す。なお、表は相対誤差が  $10^{-3}\%$  以下 (5 桁以上の精度) になる計算結果の一部を

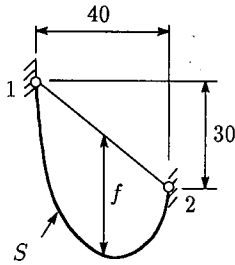


図-3 傾斜ケーブル

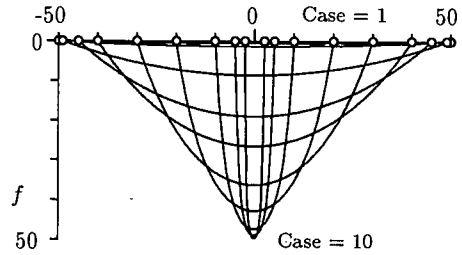


図-4 対称ケーブルの変形図

示したものである。表-1 で要素が大きく湾曲した状態に対しても展開項数を2項増すごとに誤差はほぼ1/100ずつ減少しているの、級数の収束性は良いと言える。

また、対称ケーブルと非対称ケーブルを比較すると、非対称ケーブルの方が直線形状に近いにもかかわらず、展開項数  $m$  による誤差はそれほど変わらないことから、適切な展開項数はケーブルの外見の形状から判断できないことが分かる。

### (2) アダプティブ法

$p$ 法では、構造全体解析の計算効率を計るために、内部自由度を事前に縮約する。この縮約演算には、式(29)のケーブル部材の要素剛性方程式が非線形であるのでNewton法を用いる。

数値計算では、要素形状を表す式(38)の展開項数を上げると、内部自由度に対する増分量はゼロに収束する。このときの部材端力を用いて全体解析を行う。この計算は、通常の有限変位解析<sup>11)</sup>と同じである。

$p$ 法による非線形解析では2段階の収束計算が必要であるので、多くの計算時間を要する全体解析の反復回数を少なくするために、ケーブル要素の誤差が全体解析の収束計算に影響しないように、ケーブル要素の非線形解析を高精度に行う。また、所望の精度を得るために必要なケーブル要素の最適な展開項数を事前に求める。このために、次項の最適展開項数の推定法を用いる。

### (3) 最適展開項数

展開項数はケーブル張力などの精度に著しく影響するものと考えられる。そこで、解の所望精度(有効桁数)を  $r$ 桁とすると、表-1の結果からサグ・ケーブル長比  $f/S$  をパラメータにした次の推定式を考える。

$$m = 2[r \cdot f/S] + 5 \quad (45)$$

ここに、 $[ \ ]$  はガウス記号である。

ケーブル構造の解析では、増分前の局所座標系について式(45)から求まる展開項数を式(44)に用い、ケーブル長  $S$  の誤差評価を事前に行う。所望の精度を満た

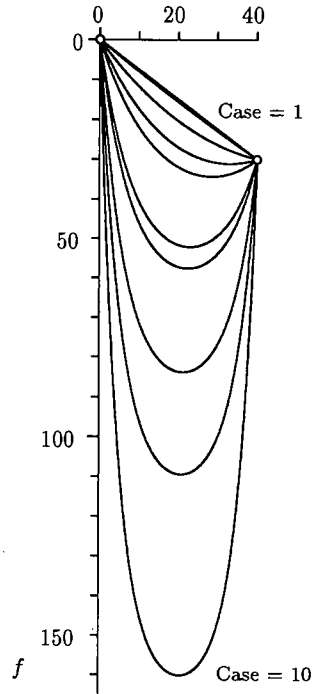


図-5 傾斜ケーブルの変形図

さないときには、さらに2項増して再度誤差評価を行う。このようにして、各ケーブルごとに求めた展開項数を用いて構造全体の解析を行う。構造解析では式(36)の積分計算が必要なので、積分点数  $n$  は表-1の結果を考慮して  $n \geq m$  とする。

本手法の妥当性を調べるために、図-2のケーブルについて  $r = 12$ (相対誤差は  $10^{-10}\%$ ) としたときの水平反力  $H$  とケーブル張力の最大値  $T_{max}$  の誤差を調べた結果を表-2に示す。負の誤差は多項式近似による解が厳密解よりも小さな値であることを示す。

表-2より、解の精度に多少のばらつきはあるものの、全てのケースにおいてほぼ所望精度の解が求められている。なお、無応力長  $S_0$  が弦長  $L$  より短いときには  $m = 3$  としても10桁程度の精度が得られる。

同様の計算を図-3に示す傾斜ケーブルで、固定間距

表-1 多項式近似による曲線長の誤差

対称ケーブル				非対称ケーブル			
$\ell$	項数	点数	誤差 (%)	$\ell$	項数	点数	誤差 (%)
$(f/S)$	$m$	$n$	$S/S_{exact}-1$	$(f/S)$	$m$	$n$	$S/S_{exact}-1$
100.1	3	2	$1.5 \times 10^{-7}$	50.05	3	2	$9.7 \times 10^{-9}$
(0.0057)	5	4	$4.8 \times 10^{-13}$	(0.0029)	5	3	$6.7 \times 10^{-14}$
100.0	3	2	$4.4 \times 10^{-6}$	50.0	3	2	$2.8 \times 10^{-7}$
(0.0133)	5	4	$7.4 \times 10^{-11}$	(0.0066)	5	3	$4.5 \times 10^{-12}$
90.0	5	4	$7.0 \times 10^{-4}$	45.0	5	4	$7.6 \times 10^{-6}$
(0.1907)	7	5	$2.3 \times 10^{-6}$	(0.0991)	7	5	$1.1 \times 10^{-8}$
	9	6	$5.2 \times 10^{-9}$		9	5	$3.2 \times 10^{-12}$
60.0	7	5	$8.1 \times 10^{-4}$	30.0	7	5	$2.2 \times 10^{-5}$
(0.3628)	9	6	$8.6 \times 10^{-6}$	(0.2149)	9	6	$8.8 \times 10^{-8}$
	11	7	$6.3 \times 10^{-8}$		11	7	$2.4 \times 10^{-10}$
20.0	9	7	$4.2 \times 10^{-4}$	10.0	9	5	$5.6 \times 10^{-5}$
(0.4728)	11	8	$8.7 \times 10^{-6}$	(0.3568)	11	7	$3.5 \times 10^{-7}$
	13	10	$8.1 \times 10^{-8}$		13	9	$2.8 \times 10^{-9}$
5.0	11	7	$6.2 \times 10^{-4}$	2.5	11	7	$1.6 \times 10^{-5}$
(0.4954)	13	9	$8.0 \times 10^{-6}$	(0.4361)	13	9	$3.6 \times 10^{-7}$
	15	11	$9.4 \times 10^{-8}$		15	11	$4.8 \times 10^{-9}$

表-2 ケーブルの水平反力と張力の誤差

Case	対称ケーブル				非対称ケーブル				傾斜ケーブル			
	$\ell$	項数 $m$	誤差 (%)		$\ell$	項数 $m$	誤差 (%)		$S_0$	項数 $m$	誤差 (%)	
			$H$	$T_{max}$			$H$	$T_{max}$			$H$	$T_{max}$
1	100.1	5	$1.8 \times 10^{-15}$	$1.6 \times 10^{-15}$	50.05	5	$-4.4 \times 10^{-16}$	$-6.7 \times 10^{-16}$	49.0	5	$-5.5 \times 10^{-16}$	$-6.7 \times 10^{-16}$
2	100.0	5	$5.3 \times 10^{-10}$	$5.3 \times 10^{-10}$	50.0	5	$1.6 \times 10^{-11}$	$1.6 \times 10^{-11}$	50.0	5	$-1.3 \times 10^{-9}$	$-1.2 \times 10^{-9}$
3	98.0	9	$1.2 \times 10^{-14}$	$1.0 \times 10^{-14}$	49.0	7	$3.1 \times 10^{-12}$	$2.9 \times 10^{-12}$	51.0	9	$-1.1 \times 10^{-11}$	$-7.9 \times 10^{-12}$
4	90.0	11	$-4.2 \times 10^{-13}$	$-2.3 \times 10^{-13}$	45.0	9	$-2.0 \times 10^{-12}$	$-1.5 \times 10^{-12}$	55.0	13	$-7.1 \times 10^{-15}$	$-4.5 \times 10^{-15}$
5	80.0	13	$-6.1 \times 10^{-15}$	$-7.8 \times 10^{-16}$	40.0	11	$-2.4 \times 10^{-14}$	$-1.7 \times 10^{-14}$	60.0	13	$-1.1 \times 10^{-12}$	$-2.1 \times 10^{-13}$
6	60.0	15	$-2.9 \times 10^{-14}$	$-3.5 \times 10^{-15}$	30.0	13	$-1.0 \times 10^{-14}$	$-5.4 \times 10^{-15}$	80.0	15	$-6.2 \times 10^{-14}$	$-1.2 \times 10^{-12}$
7	40.0	15	$-1.8 \times 10^{-12}$	$-4.4 \times 10^{-14}$	20.0	13	$-4.3 \times 10^{-12}$	$-8.9 \times 10^{-13}$	100.0	15	$5.0 \times 10^{-12}$	$1.2 \times 10^{-12}$
8	20.0	17	$1.1 \times 10^{-12}$	$2.7 \times 10^{-15}$	10.0	15	$2.0 \times 10^{-13}$	$-5.3 \times 10^{-14}$	150.0	17	$-1.9 \times 10^{-11}$	$-1.0 \times 10^{-11}$
9	10.0	17	$2.4 \times 10^{-12}$	$2.2 \times 10^{-16}$	5.0	17	$-3.6 \times 10^{-13}$	$-3.8 \times 10^{-14}$	200.0	17	$1.2 \times 10^{-12}$	$1.2 \times 10^{-12}$
10	5.0	17	$4.5 \times 10^{-11}$	$2.7 \times 10^{-15}$	2.5	17	$-1.1 \times 10^{-11}$	$-1.9 \times 10^{-13}$	300.0	17	$2.2 \times 10^{-11}$	$-1.9 \times 10^{-12}$

離を一定にして無応力長  $S_0$  を変化させた場合について行った結果を表-2 に示す。傾斜ケーブルについても図-2 と同様な精度の値が得られている。

図-2(a), 3 の対称、傾斜ケーブルの変形図を図-4, 5 に示す。本ケーブル要素は直線に近い状態から大きく湾曲した状態までを 1 要素で表現できていることが分かる。

以上の手法がケーブル要素に対するアダプティブ法の概念である。本手法はケーブル形状に対する誤差を事前に評価するので、事後誤差評価のアルゴリズムよりも計算効率に優れている。なお、数値計算では、増分荷重による形状変化に対して展開項数が不足するときには、収束状態に応じて項数を増やす。

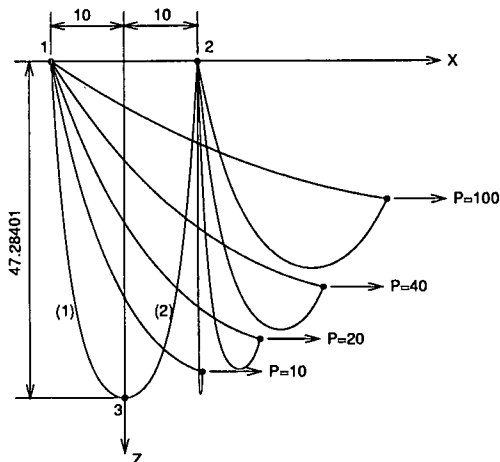


図-6 平面ケーブルの変形図

(4) ケーブル構造

a) 平面解析

2本のケーブルを最下端で結合し、この点に水平荷重が作用する場合を計算する。このモデルは文献6) に示

されているものであるが、ここでは初期条件を図-2(b) と同一にして、ケーブルの無応力長を 50、伸び剛性を

表-3 平面解析の計算結果

荷重倍率	反復回数	多項式の項数		不平衡力 (%)	
		(1)	(2)	X	Z
自重	5	15	15	—	$10^{-8}$
$\lambda=1$	15	13	19	$10^{-5}$	$10^{-4}$
2	6	11	17	$10^{-6}$	$10^{-6}$
4	14	11	15	$10^{-8}$	$10^{-8}$
6	8	9	15	$10^{-8}$	$10^{-4}$
8	6	9	15	$10^{-7}$	$10^{-7}$
10	5	9	15	$10^{-5}$	$10^{-6}$

表-4 3次元解析の計算結果

荷重倍率	反復回数	多項式の項数		不平衡力 (%)	
		(1)	(2), (3)	X	Z
自重	5	15	15	—	$10^{-8}$
$\lambda=1$	11	13	17	$10^{-6}$	$10^{-7}$
2	7	11	15	$10^{-6}$	$10^{-7}$
4	17	9	15	$10^{-6}$	$10^{-6}$
6	11	9	15	$10^{-6}$	$10^{-6}$
8	11	9	13	$10^{-4}$	$10^{-4}$
10	6	7	13	$10^{-4}$	$10^{-5}$

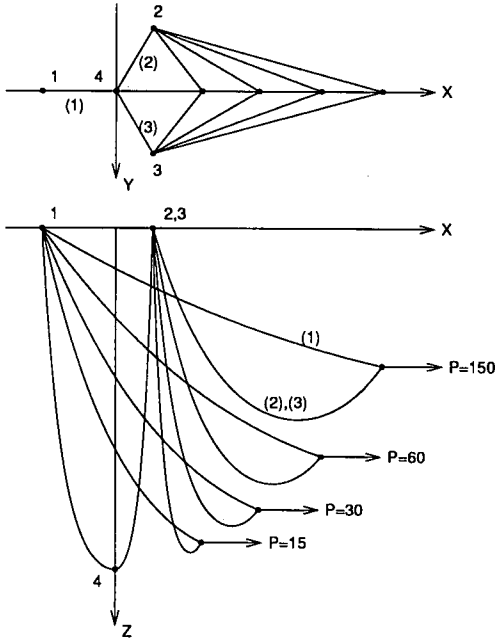


図-7 立体ケーブルの変形図

$EA = 2 \times 10^6$ , 単位長さ当たりの自重を  $q(s) = 1$  (総重量  $Q = 100$ ) とする。

数値計算では、図-6に示す自重による変形状態を求めた後に、水平荷重の増分を  $\Delta P = 10$ , 荷重倍率を  $\lambda = 1, 2, 4, 6, 8, 10$  として、 $P = \lambda \Delta P = 10 \sim 100$  まで載荷する。

アダプティブ法を用いた場合の全体解析における Newton-Raphson 法の反復回数, 多項式の項数及び結合点における不平衡力を表-3に示す。表中の( )はケーブル番号, 不平衡力は結合点に生じる X, Z 成分で、総荷重  $\sum P$  及び  $Q$  に対する相対誤差 (%) のオーダーである。

本計算例では、 $P = 10$  のときに右側のケーブル (2) がほぼ鉛直に近い状態になるために Newton-Raphson 法の反復回数は多いが、不平衡力は極めて小さい。このような垂直状態でも、数値計算上で支障は起きなかった。

### b) 3次元解析

平面解析と同じケーブルを3本用いて、ケーブルの上端を正三角形の頂点1, 2, 3に配置し、下端4で結合したケーブル構造<sup>7)</sup>を計算する。ケーブルの無応力長、断面諸量などは平面解析と同じである。

数値計算では、自重載荷後、ケーブルの結合点に集中荷重  $\Delta P = 15$  を平面解析と同じ増分倍率で増加した結果を表-4に示す。表中のケーブル (2), (3) は変形後、対称な位置にある。なお、Y 成分は常にゼロであった。

多項式の項数は、図-7に示すケーブルの変形状態とよく対応している。また、全体解析の精度は不平衡力から判断して十分であると思われる。

以上の結果より、アダプティブ要素で用いた展開項数は妥当な数といえる。

## 4. Guyed Tower の計算

### (1) 解析モデル

図-8に示す高さ600mの塔を48本のケーブルで支持した支線付マストについて数値計算を行う。この種の構造物では塔の曲げ剛性が低くてケーブルで支持することにより安定性を持たせるが、ケーブルの支持効果を大きくするためにケーブルの断面積を大きくすると塔の軸圧縮力が増加して座屈強度が低下するので、剛比の選定が難しい構造物である。

ここでは、塔の断面はオメガ電波塔(塔は高さ455m, 直径3mの円管構造)を参考にして、外径3.5m, 板厚20mm, ヤング係数  $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$  (206MPa) の円管とする。ケーブルは文献12)の600m guyed towerを参考にして、実断面が直径10cmの円形断面、ヤング係数は  $2.0 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$  (196MPa) とする。

同一断面の12段のケーブルを塔頂から50mの等間隔で取り付け、ケーブルの無応力長は表-5のサグを有する放物線の曲線長(750.93952~158.19071m)とする。各ケーブルを1要素のアダプティブ要素でモデル化し、比較のために、リンクケーブルを用いた解析を行う。リンクケーブルでは10等分割した折れ線の全長を曲線長に一致させるので、無応力状態での初期形状のサグは

表-5 ケーブルサグの初期値

部材番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
サグ比	0.060	0.060	0.055	0.055	0.040	0.040	0.035	0.035	0.025	0.020	0.015	0.015

表-6 死荷重によるケーブル張力 (tf)

部材番号	ハイアラーク		リンク		誤差 (%)	
	上端	下端	上端	下端	上端	下端
1	136.119	99.177	135.611	98.672	-0.37	-0.50
2	128.576	94.713	128.085	94.225	-0.38	-0.51
3	125.746	94.962	125.263	94.482	-0.38	-0.50
4	117.833	90.128	117.370	89.668	-0.39	-0.51
5	106.121	81.494	105.745	81.119	-0.35	-0.46
6	100.365	78.816	99.997	78.449	-0.36	-0.46
7	98.605	80.135	98.239	79.770	-0.37	-0.45
8	92.000	76.609	91.644	76.254	-0.38	-0.46
9	61.952	49.637	61.738	49.423	-0.34	-0.43
10	61.701	52.465	61.482	52.247	-0.35	-0.41
11	63.784	57.627	63.552	57.395	-0.36	-0.40
12	62.276	59.197	62.031	58.952	-0.39	-0.41

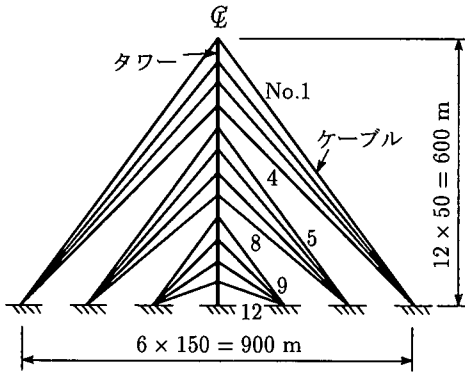


図-8 60m Guyed Tower

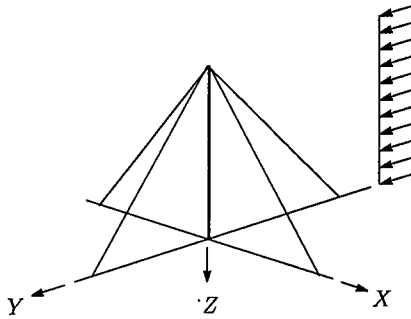


図-9 風荷重

表-5の値より若干大きくなる。塔は60等分割して、 $C^1$ 級のはり要素<sup>11)</sup>を使用する。

数値計算では、塔とケーブルの死荷重(密度  $7.85 \times 10^3 \text{ kgf/cm}^3$ )に対する収束計算を行ってから、図-9に示すように、高さ方向に等分布する風荷重を水平方向(Y軸方向)に作用させる。塔には  $1.0 \text{ tf/m}$  ( $10 \text{ kN/m}$ )、ケーブルには  $0.03 \text{ tf/m}$  ( $0.3 \text{ kN/m}$ ) を、風方向の垂直面(X-Z平面)へのそれぞれの射影長に対して載荷するので、風荷重に垂直な2面のケーブルには横荷重が作用し、風荷重に平行な2面のケーブルでは吹き上げと吹き下ろし荷重が作用する。

風荷重の載荷には荷重倍率  $\lambda$  を用いて、上記の荷重を  $\lambda$  倍した計算を行う。荷重強度は強風 ( $40 \text{ m/sec}$ ) を想定しているので、 $\lambda > 2$  の荷重はあり得ない風荷重であるが、本解析法の収束性と数値的安定性を調べるためにあえて大きな荷重を用いる。

(2) 計算結果

死荷重によるケーブル張力を表-6に示す。誤差はハイアラークケーブルに対するリンクケーブルの値で表している。アダプティブ要素で使用したハイアラーク要素の項数は7項である。両要素による差は0.5%以下で、よく一致している。また、全体解析における Newton-Raphson 法の反復回数とともに3回である。

風荷重による張力の比較を表-7に示す。 $\lambda = 1$  のときの差は応力弛緩が起きる吹き上げケーブルの下端で1~2%で、他のケーブルでの差は死荷重の場合と同程度である。 $\lambda = 6$  のときには張力の小さいケーブルで違いが認められるが、張力の大きいケーブルでの差はわずかである。なお、吹き上げ荷重を受けるケーブルの下端側のケーブル張力がほぼゼロになる  $\lambda = 2$  のときに、最大の差が生じる。

荷重倍率の増分を  $\Delta\lambda = 1$  として計算したが、ハイア



表-7 死荷重と風荷重によるケーブル張力

(tf)

部材番号	$\lambda = 1$						$\lambda = 6$						
	ハイアラーキ		リンク		誤差 (%)		ハイアラーキ		リンク		誤差 (%)		
	上端	下端	上端	下端	上端	下端	上端	下端	上端	下端	上端	下端	
横風荷重	1	163.163	126.230	162.563	125.634	-0.36	-0.47	417.566	382.317	416.263	381.020	-0.31	-0.33
	2	152.635	118.798	152.060	118.227	-0.37	-0.48	391.343	359.282	390.092	358.035	-0.32	-0.34
	3	147.506	116.760	146.946	116.202	-0.38	-0.47	372.797	343.779	371.592	342.576	-0.32	-0.35
	4	136.865	109.197	136.332	108.667	-0.39	-0.48	346.862	320.766	345.712	319.614	-0.33	-0.35
	5	126.974	102.379	126.526	101.932	-0.35	-0.43	308.672	285.338	307.788	284.454	-0.28	-0.31
	6	118.056	96.531	117.626	96.102	-0.36	-0.44	286.751	266.038	285.863	265.154	-0.31	-0.33
	7	113.848	95.396	113.426	94.976	-0.37	-0.44	270.890	252.958	270.020	252.096	-0.32	-0.34
	8	104.788	89.413	104.384	89.010	-0.38	-0.45	250.149	235.352	249.294	234.498	-0.34	-0.36
	9	74.220	61.919	73.961	61.661	-0.34	-0.41	175.644	163.957	175.075	163.384	-0.32	-0.35
	10	70.936	61.710	70.682	61.457	-0.35	-0.41	160.113	151.223	159.572	150.681	-0.33	-0.35
	11	70.940	64.789	70.681	64.530	-0.36	-0.40	153.150	147.118	152.599	146.569	-0.36	-0.37
	12	68.226	65.150	67.958	64.883	-0.39	-0.41	149.563	146.547	149.009	145.994	-0.37	-0.37
吹き上げ荷重	1	75.333	24.883	74.839	24.394	-0.65	-1.96	230.144	113.931	229.198	113.029	-0.41	-0.79
	2	71.807	24.456	71.364	24.020	-0.61	-1.78	202.659	89.624	201.815	88.830	-0.41	-0.88
	3	71.396	27.137	70.989	26.737	-0.57	-1.47	181.674	71.678	180.912	70.970	-0.41	-0.98
	4	70.784	29.608	70.407	29.237	-0.53	-1.25	163.215	56.137	162.507	55.487	-0.43	-1.15
	5	48.028	14.421	47.721	14.119	-0.64	-2.09	151.594	74.271	151.082	73.786	-0.33	-0.65
	6	51.204	20.671	50.921	20.391	-0.55	-1.35	141.300	66.598	140.585	65.911	-0.50	-1.03
	7	55.421	27.964	55.135	27.681	-0.51	-1.01	128.751	56.830	127.871	55.978	-0.68	-1.50
	8	56.933	32.555	56.655	32.280	-0.48	-0.84	101.634	32.843	101.093	32.331	-0.53	-1.55
	9	25.341	8.536	25.193	8.390	-0.58	-1.71	77.385	38.700	77.236	38.559	-0.19	-0.36
	10	30.069	16.341	29.931	16.204	-0.45	-0.83	62.531	26.642	62.317	26.438	-0.34	-0.76
	11	37.487	26.835	37.322	26.671	-0.43	-0.61	48.184	15.153	47.791	14.768	-0.81	-2.53
	12	47.461	39.886	47.253	39.678	-0.43	-0.52	25.384	4.727	28.018	2.085	10.37	-55.9
吹き下し荷重	1	189.476	166.036	189.030	165.593	-0.23	-0.26	834.444	879.859	834.375	879.788	-0.00	-0.00
	2	190.328	169.986	189.891	169.550	-0.23	-0.25	949.524	998.086	948.962	997.521	-0.05	-0.05
	3	195.212	177.960	194.783	177.532	-0.22	-0.24	1038.760	1090.328	1036.733	1088.297	-0.19	-0.18
	4	182.118	167.945	181.654	167.482	-0.25	-0.27	1000.902	1055.394	996.847	1051.334	-0.40	-0.38
	5	188.823	173.227	188.571	172.976	-0.13	-0.14	964.474	994.907	961.936	992.365	-0.26	-0.25
	6	166.038	153.511	165.749	153.223	-0.17	-0.18	665.787	698.894	669.118	702.226	0.50	0.47
	7	155.052	145.597	154.773	145.319	-0.18	-0.19	481.743	517.667	487.668	523.596	1.23	1.14
	8	139.829	133.450	139.510	133.131	-0.22	-0.23	626.273	665.293	626.303	665.322	0.00	0.00
	9	123.922	116.122	123.802	116.002	-0.09	-0.10	930.296	945.506	919.948	935.153	-1.11	-1.09
	10	119.391	114.665	119.219	114.493	-0.14	-0.15	677.161	695.184	672.773	690.795	-0.64	-0.63
	11	110.980	109.327	110.786	109.133	-0.17	-0.17	296.103	317.024	301.860	322.781	1.94	1.81
	12	83.841	85.264	83.591	85.013	-0.29	-0.29	201.545	225.494	205.447	229.396	1.93	1.73

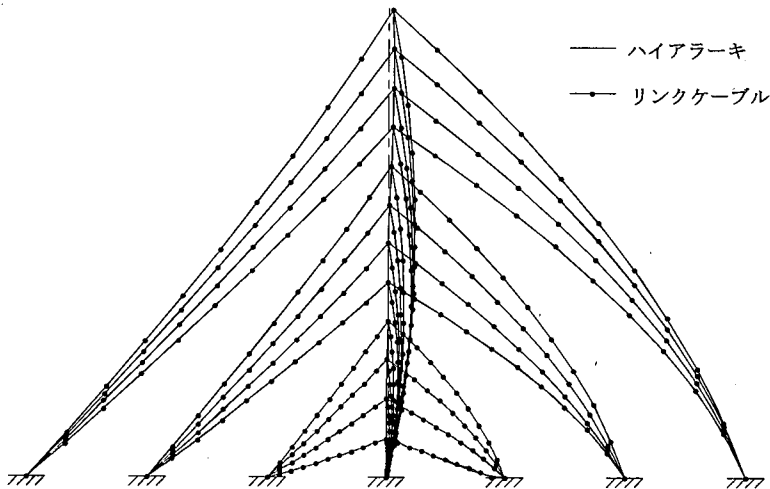


図-10 死荷重と風荷重 ( $\lambda = 6$ ) による変形図

ラーキ要素では、 $\lambda = 5$ までのNewton-Raphson法の反復回数は5~8回で、 $\lambda = 6$ のときに10回となり、それ以上は $\Delta\lambda = 0.5$ に半減しないと収束しなかった。一方、リンクケーブルでは $\lambda > 1$ で $\Delta\lambda = 0.5$ 、 $\lambda > 2$ ではさらに荷重増分を小さくする必要があった。これより、ハイアラキ要素の収束性の良いことが分かる。なお、塔上の節点における不平衡力は両要素とも $10^{-4} \sim 10^{-5}$ tf(断面力に対する相対誤差で $10^{-5}\%$ )程度で収束している。

$\lambda = 6$ のときの変形図を図-10に示す。吹き上げ荷重を受けるケーブルの展開項数は最上段で11項、No.2~10は9項、No.11と12及びその他のケーブルで7項である。

## 5. 結 論

本研究では、マトリックス構造解析法において有用な $p$ 法によるケーブル要素を開発し、次の知見を得ることができた。

- (1) ハイアラキケーブル要素は大きく湾曲したケーブルを1要素で解析することができて、極めて高精度の値が得られる。
- (2) ハイアラキ写像によりアイソパラメトリック要素として定式化し、事前誤差評価を行うことによって計算効率のよいアダプティブ法のアルゴリズムを提案した。
- (3) 風荷重を受ける大規模支線付マストに適用して、サグが逆転する場合でも収束性のよいことを示した。また、リンク要素に比べて計算精度、数値的安定性に優れていることが分かった。
- (4) 本要素は、形状関数に最も簡単なハイアラキ多項式を用いた $p$ 法により定式化されているので、

FEMの汎用性により種々の問題に応用することができる。

## 参考文献

- 1) Livesley, R.K. : Automatic design of guyed masts subject to deflection constraint, *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, Vol.2, No.1, pp.33-43, 1970.
- 2) Wang, P.H., Tseng, T.C. and Yang, C.G. : Initial shape of cable-stayed bridges, *Computer & Structures*, Vol.46, No.6, pp.1095-1106, 1993.
- 3) Wang, P.H. and Yang, C.G. : Parametric studies on cable-stayed bridges, *Computer & Structures*, Vol.60, No.2, pp.243-260, 1996.
- 4) 前田幸雄, 林 正, 前田研一 : サグを考慮したケーブル部材の計算式, 土木学会論文報告集 第257号, pp.123-126, 1977.
- 5) Maeda, Y and Hayashi, M : Non-linear behaviour of long-span cable-stayed girder bridges, *Proc. on Analytical Problems for Design of Structures, 20th Symp. on Bridge and Structural Eng.*, pp.195-208, 1975.
- 6) 後藤茂夫 : 柔ケーブル材の接線剛性方程式について, 土木学会論文報告集 第270号, pp.41-49, 1978.
- 7) 岩崎英治, 林 正 : 修正された変分原理による空間曲線材の有限変位解析, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.367-380, 1991.
- 8) 謝 旭, 伊藤 学, 山口宏樹 : Updated Lagrangian手法に基づく柔ケーブルの非線形解析, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.427-434, 1995.
- 9) 林 正, 岩崎英治 : ハイアラキ要素による骨組構造解析, 土木学会論文集, No.570/I-40, pp.163-174, 1997.
- 10) 林 正, 山中素直, 加瀬部 弘, 佐藤敏亮 : ハイアラキ要素による有限要素解析の効率化, 土木学会論文集, No.591/I-43, pp.71-84, 1998.
- 11) 前田幸雄, 林 正 : 立体骨組の有限変位解析, 土木学会論文報告集 第253号, pp.13-27, 1976.
- 12) El-Ghazaly, H.A. and Al-Khaiat, H.A. : Analysis And Design of Guyed Transmission Towers - Case Study in Kuwait, *Computers & Structures*, Vol.55, No.3, pp.413-431, 1995.

(2000. 4. 24 受付)

## FINITE DISPLACEMENT ANALYSIS OF CABLE STRUCTURES BY HIERARCHICAL ELEMENTS

Masa HAYASHI, Eiji IWASAKI, Nagahiro YAMANO and Jota TOKI

A hierarchical cable element is presented for the 3-D finite displacement analysis of cable structures. The element is a high order isoparametric element of  $p$ -version and highly accurate solutions could be obtained with one element for a extremely slackened cable. Moreover, an adaptive technique is proposed to improve on the efficiency of the numerical calculation of cable structures. The convergence and stability in the computation are demonstrated by several examples.