

エネルギー原理に基づく箱形断面を有する 非線形剛節骨組構造物の最適設計法

谷脇一弘¹・大久保禎二²

¹正会員 博士 (工学) 愛媛大学工学部助手 工学部環境建設工学科 (〒790-8577松山市文京町3)

²フェロー会員 工学博士 愛媛大学工学部教授 工学部環境建設工学科 (〒790-8577松山市文京町3)

本研究は、線形・非線形挙動状態にある箱形断面を有する剛節骨組構造物の最適設計問題を統一的、かつ能率的に解くことのできる新しい最適設計法を提案するものである。最適化の方法は、まず最小コンプリメンタリーエネルギー原理に基づき、剛節骨組構造物の線形・非線形解析問題が満足すべき解析上の必要条件を誘導し、これを最適設計問題の制約条件として考慮する。さらに、設計変数として各部材の断面寸法のみならず、未知部材端力、および可動節点変位を考慮し、勾配射影法の手法を用いて設計変数の改良を行い、最適な部材断面寸法、部材端力および節点変位を決定するものである。設計例において、従来の最適設計アルゴリズム (双対法) により最適化を行う方法による解との比較を行い、本論文で提案した方法の信頼性および能率性を明らかにしている。

Key Words: nonlinear optimization, sizing optimization, box section, material nonlinearity, plane frame structures, energy principles, necessary conditions for nonlinear analysis problem

1. まえがき

近年、橋梁や建築構造物の設計において、性能規定化の考え方が導入され、従来の材料や構造物の弾性限度、疲労限界などに関する設計条件に加えて、地震動や風荷重などにより構造物が非線形域に入っても、適切なねばりと限界耐力を保有するように保有水平耐力や残留変位に対する検討を行うことが要求されている^{1)~3)}。このような観点から、構造物の非線形挙動あるいは弾塑性挙動を正確に解析できる解析理論と、種々の限界荷重状態における構造物の限界耐力に対しても、合理的な設計を能率的に行うことができる最適設計法を確立することが、きわめて重要な課題となっている。

剛節骨組構造物の非線形挙動状態における耐荷力の解析や最適設計法に関して、塑性メカニズムを考慮し、釣り合い条件および降伏条件を制約条件とし、種々の崩壊機構を考慮して構造物の最適塑性設計を行う方法が提案されている^{4)~6)}。しかし、これらの解析法および設計法では任意の応力度-ひずみ関係を有する非線形材料からなる構造物の応力度および変位を正確に解析し、これらの制約条件を考慮して最適設計を行うことが困難である。

ところで、近年、大久保らは最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づく骨組構造物の非線形解析法に

関する研究成果^{7)~11)}を基本として、線形および任意の非線形材料よりなるトラス構造物の最適設計問題を、挙動に関する感度係数を用いることなく統一的に、かつ能率的に解くことができる最適設計法を提案している^{12),13)}。

本研究は、大久保らにより提案されている非線形トラス構造物の最適設計法の考え方をさらに発展させ、線形・非線形状態にある箱形断面を有する剛節骨組構造物の各部材の最適な断面寸法を決定する最適設計問題を統一的かつ能率的に解くことができ、実務設計にもきわめて有効に利用することができる最適設計法を提案するのである。

本研究で対象としている非線形剛節骨組構造物の最適設計問題では、設計変数として箱形断面を有する各部材の上・下フランジの板厚を考慮している。そこで本研究では、まず大久保・牧野が文献(10),11)において提案している最小コンプリメンタリーエネルギー原理に基づく剛節骨組構造物の解析法を、箱形断面をも取り扱うことができるように理論式の拡張を行った。また、このような断面寸法を設計変数として考慮した剛節骨組構造物の最適設計問題においては、非線形解析問題の必要条件の導入および最適設計問題の再定式化がより複雑となる。本研究では、剛節骨組構造物の解析過程において、部材*i*の板厚が変化したことによる部材*i*のコンプリメンタリー

エネルギーの感度係数が容易に得られること、および各部材の最大応力度および各節点変位の板厚に関する感度係数も上記の各部材のコンプリメンタリーエネルギーの板厚に関する感度係数を用いて容易に計算できることに着目し、板厚の変化による影響をも考慮した非線形解析問題の必要条件の近似等号条件式群、各部材の最大応力度および各節点の変位に関する制約条件式に関する近似式を誘導した。これらの非線形解析問題の必要条件式群を原最適設計問題の等号条件として付加するとともに、各部材の最大応力度および節点変位に関する近似の不等号制約条件群を制約条件として考慮し、さらに、各部材の未知部材端力および各可動節点変位をも独立な設計変数として考慮し、最適設計問題を再定式化した。この最適設計問題を勾配射影法により解くことを繰り返すことにより、各部材の箱形断面の上・下フランジ板厚の最適解を決定することができる最適設計法を提案している。

設計例として、線形材料および種々の非線形材料よりなる3支間2層の剛節骨組構造物について、許容応力度および許容変位を種々変化させた場合の、本論文で提案している最適設計法による最適解と、挙動の制約条件の上・下フランジ板厚に関する感度係数を用い、双対法により最適化を行う方法による最適解との比較を行い、本論文で提案した最適設計法の汎用性、能率性および信頼性を明らかにしている。

2. 最適設計問題の定式化

本研究では、剛節骨組構造物の各部材の断面形状として図-1に示す箱形断面を考え、断面の高さ H 、断面の幅 B および腹板の板厚 t_w は既に与えられているものとし、設計変数として上・下フランジの板厚 t_u, t_l を考慮する。フランジが補剛材を有する場合には、通常、簡易的に補剛材の剛性をも板厚に換算して考慮する方法⁽⁴⁾が用いられるが、本論文で提案している最適設計法においても、この換算板厚をも含めた板厚を設計変数として考慮することにより、補剛材を有する箱形断面をも取り扱うことができる。以下の数式の表現を簡略化するため、すべての部材の断面寸法に関する設計変数群を $\mathbf{T} = [t_1, \dots, t_{2n}]^T = [t_{u1}, \dots, t_{un}, t_{l1}, \dots, t_{ln}]^T$ と表現するものとする。ただし、 n は部材数を示す。制約条件として、各部材の最大応力度および各可動節点変位に関する制約条件を考慮し、目的関数として、剛節骨組構造物の全重量 $\mathbf{W}(\mathbf{T})$ を考慮し、これを最小化するものとする、最適設計問題は以下のように表すことができる。すなわち、

$$\begin{aligned} \text{find } & \mathbf{T} = [t_1, \dots, t_{2n}]^T, \quad \text{which} \\ \text{min. } & \mathbf{W}(\mathbf{T}) = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i(t_{ui}, t_{li}) l_i \end{aligned} \quad (1)$$

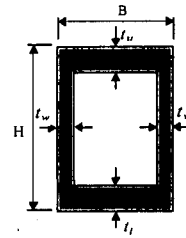


図-1 箱形断面

$$\begin{aligned} \text{sub. to } & g_{\sigma_k}(t_{uk}, t_{lk}, \mathbf{X}_k) = |\sigma_{kmax}(t_{uk}, t_{lk}, \mathbf{X}_k)| \\ & - |\sigma_{ka}| \leq 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (2) \end{aligned}$$

$$g_{\delta_l}(\lambda_l, \mathbf{T}) = |\lambda_l(\mathbf{T})| - |\lambda_{la}| \leq 0 \quad (l=1, \dots, r) \quad (3)$$

$$t'_i \leq t_i \leq t''_i \quad (i=1, \dots, 2n) \quad (4)$$

ここに、 r は変位制限の着目点数、 $\rho_i, A_i(t_{ui}, t_{li}), l_i$ は、それぞれ部材 i の単位体積当りの重量、断面積および部材長である。また、 $g_{\sigma_k}, g_{\delta_l}$ は、それぞれ部材 k の最大応力度および可動節点変位成分 l の変位に関する制約条件、 $\sigma_{kmax}, \sigma_{ka}, \mathbf{X}_k$ は、それぞれ部材 k の最大応力度、許容応力度および実部材端力、 λ_l, λ_{la} は可動節点変位成分 l の実変位および許容変位である。 t'_i および t''_i はそれぞれ t_i の下限値および上限値を示す。

3. 最小コンプリメンタリーエネルギー原理に基づく箱形断面を有する剛節骨組構造物の線形・非線形解析法

本研究では、箱形断面を有する非線形剛節骨組構造物の解析法として、大久保・牧野^{(10),(11)}により提案されている最小コンプリメンタリーエネルギー原理に基づく解析法を、箱形断面をも取り扱うことができるように拡張し解析を行っている。以下に、本研究で開発した最小コンプリメンタリーエネルギー原理に基づく箱形断面を有する剛節骨組構造物の線形・非線形解析法の詳細を記す。

(1) 曲げモーメントおよび軸力を受ける部材断面のひずみおよび応力度分布の決定

いま、曲げモーメント M と軸力 N を受ける部材断面のひずみ分布が、作用応力度の大きさに関係なく常にBernoulli-Eulerの平面保持の仮定を満足するものとする、部材の上・下縁ひずみ ϵ_u, ϵ_l を仮定することにより、図-2に示す断面の下縁から z の点におけるひずみ $\epsilon(z)$ は次式により計算される。

$$\epsilon(z) = \epsilon_l + \frac{\epsilon_u - \epsilon_l}{H} z \quad (5)$$

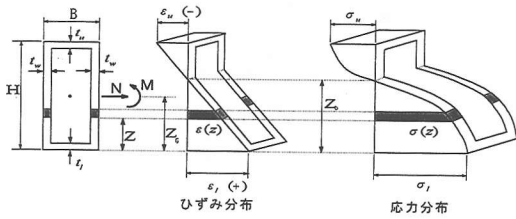


図-2 箱形断面におけるひずみ分布および応力分布

$\varepsilon(z)$ に対応する応力度は材料の応力度-ひずみ関係より直接求められる。したがって、断面の下縁から z の点に作用する応力度は、 $\varepsilon_u, \varepsilon_i$ および z の関数として次式で表すことができる。

$$\sigma(z) = \phi(\varepsilon_u, \varepsilon_i, z) \quad (6)$$

また、この応力度分布は断面における内力と作用力の釣合条件より次式を満足しなければならない。

$$\int_A \sigma(z) dA = N \quad (7)$$

$$- \int_A \sigma(z) z dA = M - Nz_G \quad (8)$$

ここに、 z_G は断面の下縁から図心までの距離を示す。式(7)および(8)に式(6)を代入することにより、両式をそれぞれ ε_u および ε_i の関数として次のように表すことができる。

$$f_N(\varepsilon_u, \varepsilon_i) = N \quad (9)$$

$$f_M(\varepsilon_u, \varepsilon_i) = M - Nz_G \quad (10)$$

箱形断面において、使用材料が図-7に示す非線形材料(b),(c),(d)である場合の、式(9),(10)の f_N, f_M の計算式を、それぞれ付録で示す。

式(9),(10)は、それぞれ $\varepsilon_u, \varepsilon_i$ を未知変数とする連立非線形方程式であり、これをNewton-Raphson法を用いて解くことにより、与えられた N と M に対する $\varepsilon_u, \varepsilon_i$ の値を求めることができ、また応力度-ひずみ関係より断面における応力度分布も決定することができる。

(2) 剛節骨組構造物の全コンプリメンタリーエネルギーの算定

図-3に示す剛節骨組構造物の部材 i の任意点 y において、軸力 $N_i(y)$ および曲げモーメント $M_i(y)$ が作用するものとする。点 y における部材断面の単位長さ当たりのコンプリメンタリーエネルギー $\pi_{Ci}(y)$ は次式により計算される。

$$\pi_{Ci}(y) = \int_{A_i(y)} \beta_{iy}(z) dA \quad (11)$$

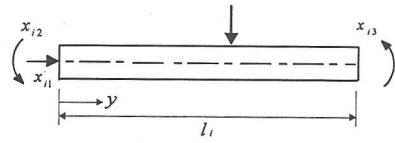


図-3 部材 i の未知部材端力 x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}

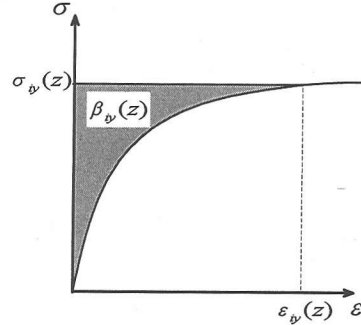


図-4 材料の非線形応力度-ひずみ関係およびコンプリメンタリーエネルギー密度 $\beta_{iy}(z)$

$$\beta_{iy}(z) = \int_0^{\sigma_{iy}(z)} \varepsilon(\sigma) d\sigma \quad (12)$$

ここに、 $\beta_{iy}(z)$ および $\sigma_{iy}(z)$ は、それぞれ部材 i の点 y の断面において、下縁より z の距離の点におけるコンプリメンタリーエネルギー密度 (図-4の陰影部分) および応力度であり、 $\sigma_{iy}(z)$ は前節より求められる。また、 $A_i(y)$ は部材 i の点 y における部材断面面積である。箱形断面において、使用材料が図-7に示す非線形材料(b),(c),(d)である場合の $\pi_{Ci}(y)$ の計算式を付録で示す。

式(11)の $\pi_{Ci}(y)$ を部材 i の全長にわたって積分することにより、部材 i の全コンプリメンタリーエネルギー Π_{Ci} を求めることができる。すなわち、

$$\Pi_{Ci} = \int_0^{l_i} \pi_{Ci}(y) dy \quad (13)$$

ここに、 l_i は部材 i の部材長である。

また、剛節骨組構造物全体のコンプリメンタリーエネルギー Π_C は各部材のコンプリメンタリーエネルギーを加え合わせるにより求められる。

$$\Pi_C = \sum_{i=1}^n \Pi_{Ci} \quad (14)$$

(3) 全コンプリメンタリーエネルギー最小化による剛節骨組構造物の材料非線形解析法の定式化

周知のごとく、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理によれば、釣合条件および境界条件を満たす種々の応力分布の中で、構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを最小とする応力分布が真の解となる⁷⁾¹¹⁾。

いま、部材 i の両端に作用する6個の部材端力のうち、部材 i 全体に関する $\sum H = 0, \sum V = 0, \sum M = 0$ の3個

の力の釣合条件を利用することにより、未知部材端力を図-3に示す x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} の3個に減少させることができる。また、各部材のコンプリメンタリーエネルギー Π_{C_i} および剛節骨組構造物全体のコンプリメンタリーエネルギー Π_C を、この3個の未知部材端力の関数として表すことができる。すなわち、

$$\Pi_{C_i} = \Pi_{C_i}(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) = \Pi_{C_i}(X_i) \quad (15)$$

$$\Pi_C = \sum_{i=1}^n \Pi_{C_i}(X_i) = \Pi_C(\mathbf{X}) \quad (16)$$

ここに、 $\mathbf{X} = [X_1^T, X_2^T, \dots, X_n^T]^T$

$$X_i = [x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}]^T$$

さらに、剛節骨組構造物の各可動節点における力の釣合方程式を次式で表すことができる⁷⁾¹¹⁾。

$$\mathbf{P} - \mathbf{C}\mathbf{X} = 0 \quad (17)$$

ここに、 $\mathbf{P} = [P_1, \dots, P_m]^T$ は各可動節点に作用する外力ベクトル、 \mathbf{C} は未知部材端力 \mathbf{X} を各可動節点における水平力、垂直力および曲げモーメントの成分へ変換する $m \times 3n$ の大きさの変換マトリックスを示す。ただし m は構造物の全自由度の数を示す。また、 j 番目の可動節点変位成分の位置における力の釣合方程式は次式で表すことができる。

$$P_j - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^3 C_{jik} x_{ik} = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (18)$$

ここに、 P_j は j 番目の可動節点変位の位置および方向に作用する外力、 C_{jik} は変換マトリックス \mathbf{C} における j 行 $3(i-1)+k$ 列の要素を示す。

以上の展開により、与えられた断面寸法 \mathbf{T}_0 における剛節骨組構造物の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題を、未知部材端力 \mathbf{X} の関数としてつぎのように定式化することができる。

$$\text{find} \quad \mathbf{X} = [X_1^T, X_2^T, \dots, X_n^T]^T, \quad \text{which}$$

$$\text{min.} \quad \Pi_C(\mathbf{X}, \mathbf{T}_0) = \sum_{i=1}^n \Pi_{C_i}(X_i, t_{ui}^0, t_{li}^0) \quad (19)$$

$$\text{sub. to} \quad g_j(\mathbf{X}) = P_j - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^3 C_{jik} x_{ik} = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (20)$$

(4) 全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題の解法

式(19)、(20)の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題において、式(19)の目的関数 $\Pi_C(\mathbf{X}, \mathbf{T}_0)$ を未知部材端力 \mathbf{X} についてテーラー展開し、 \mathbf{X} の変化量 $\Delta\mathbf{X}$ の二次形式で近似するとともに、式(20)の線形制約条件を $\Delta\mathbf{X}$ の線

形関数として表すことにより、 k 回目の改良過程における、 \mathbf{X} の改良のための変化量 $\Delta\mathbf{X}^k$ を決定する近似二次計画問題をつぎのように表現することができる。

$$\text{find} \quad \Delta\mathbf{X} = [\Delta X_1^{kT}, \Delta X_2^{kT}, \dots, \Delta X_n^{kT}]^T, \quad \text{which}$$

$$\text{min.} \quad Q_C(\Delta\mathbf{X}^k, \mathbf{T}_0) = \nabla \Pi_C^k(\mathbf{X}^k, \mathbf{T}_0) \Delta\mathbf{X}^k + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{X}^{kT} \mathbf{H}_C^k \Delta\mathbf{X}^k \quad (21)$$

$$\text{sub. to} \quad h_j(\Delta\mathbf{X}^k) = g_j(\mathbf{X}^k) - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^3 C_{jik} \Delta x_{ik} = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (22)$$

ここに、 $\nabla \Pi_C^k = \left[\frac{\partial \Pi_C^k}{\partial x_{i1}}, \dots, \frac{\partial \Pi_C^k}{\partial x_{n3}} \right]^T$ 、 \mathbf{H}_C^k は正定値

係数行列である。

上記の全コンプリメンタリーエネルギーの勾配 $\nabla \Pi_C$ の計算は、近似的に次の差分式により簡単に計算することができる。

$$\frac{\partial \Pi_C}{\partial x_{ik}} \cong \frac{\Pi_C(x_{i1}, \dots, x_{ik} + \Delta x_{ik}, \dots, x_{n3}, \mathbf{T}_0) - \Pi_C(\mathbf{X}, \mathbf{T}_0)}{\Delta x_{ik}} = \frac{\Pi_{C_i}(x_{i1}, \dots, x_{ik} + \Delta x_{ik}, \dots, x_{n3}, \mathbf{T}_0) - \Pi_{C_i}(X_i, \mathbf{T}_0)}{\Delta x_{ik}} \quad (23)$$

すなわち、全コンプリメンタリーエネルギー Π_C の部材 i の未知部材端力 x_{ik} ($k=1,2,3$) に関する感度係数を計算する場合には、 x_{ik} を微小変化させた場合の部材 i のコンプリメンタリーエネルギーの変化量を求めることにより、数値計算により容易に求めることができる。

式(21)、(22)で表される近似二次計画問題を勾配射影法の手法を用いて解き改良解 $\Delta\mathbf{X}^k$ を求め、 $\Delta\mathbf{X}^k$ を用いて \mathbf{X} を次式により改良する。

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \Delta\mathbf{X}^k \quad (24)$$

上記の \mathbf{X}^{k+1} を用いて $g_j(\mathbf{X})$ 、 $\nabla \Pi_C$ をそれぞれ修正し、式(21)および式(22)により \mathbf{X}^{k+1} に対する新たな近似二次計画問題を作成する。この場合、式(22)の二次形式における正定値係数行列 \mathbf{H}_C はBFGS公式を用いて修正する。

このようにして \mathbf{X} を改良するごとに式(21)、(22)の近似二次計画問題を修正し、 Π_C および \mathbf{X} が一定値に収束するまで改良を繰り返すことにより、最終的な真の未知部材端力 \mathbf{X}^* を決定することができる。なお、上で述べたアルゴリズムの詳細は、文献7)~11)を参照していただきたい。

(5) 各可動節点変位の計算

剛節骨組構造物の各可動節点の変位 λ の値は、文献13)

で述べたとく、式(19)および(20)で与えられる全コンプレメンタリーエネルギー最小化問題のラグランジュ関数 $L^p(\mathbf{T}_0, \mathbf{X}, \lambda)$

$$L^p(\mathbf{T}_0, \mathbf{X}, \lambda) = \Pi_c(\mathbf{X}, \mathbf{T}_0) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{X}) \quad (25)$$

を、 x_{ik} ($i=1, \dots, n$), ($k=1, 2, 3$) について最小化、ラグランジュ乗数 λ について最大化して得られる停留値 $L^p(\mathbf{T}_0, \mathbf{X}^*, \lambda^*)$ の λ^* の値として求めることができる。

式(25)のラグランジュ関数 $L^p(\mathbf{T}_0, \mathbf{X}, \lambda)$ の x_{ik} ($i=1, \dots, n$), ($k=1, 2, 3$) に関する停留条件より次式が得られる。

$$\frac{\partial L^p(\mathbf{T}_0, \mathbf{X}, \lambda)}{\partial x_{ik}} = \frac{\partial \Pi_c(\mathbf{X}, \mathbf{T}_0)}{\partial x_{ik}} + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{jik} = 0 \quad (i=1, \dots, n), (k=1, 2, 3) \quad (26)$$

上式をマトリックス表示すると次式のように表すことができる。

$$\nabla \Pi_c(\mathbf{X}, \mathbf{T}_0) + \mathbf{C}^T \lambda = 0 \quad (27)$$

上式の両辺に \mathbf{C} を左積することにより、

$$\mathbf{C} \cdot \nabla \Pi_c(\mathbf{X}, \mathbf{T}_0) + \mathbf{C} \mathbf{C}^T \lambda = 0 \quad (28)$$

が得られ、ラグランジュ乗数 (変位) $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T$ は次式より求めることができる。

$$\lambda = -(\mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C} \cdot \nabla \Pi_c(\mathbf{X}, \mathbf{T}_0) \quad (29)$$

したがって、荷重 \mathbf{P} による真の各可動節点変位 λ^* は、上式に前節で求めた真の部材端力 \mathbf{X}^* を代入することにより求めることができる。

$$\lambda^* = -(\mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C} \cdot \nabla \Pi_c(\mathbf{X}^*, \mathbf{T}_0) \quad (30)$$

4. 最小コンプレメンタリーエネルギーの原理による剛節骨組構造物の線形・非線形解析問題における必要条件の誘導

本研究では、大久保らが文献(12), (13)で提案している、挙動の感度係数を用いない材料非線形トラス構造物の最適設計法の考え方に基づき、箱形断面部材を有する剛節骨組構造物の部材断面の上・下フランジの最適解を決定している。この場合、3.で述べた剛節骨組構造物の解析問題の必要条件を誘導する必要がある。本節では、これらの解析上の必要条件を誘導する。

式(21)および(22)の近似二次計画問題で表される全コンプレメンタリーエネルギー最小化問題、すなわち剛節骨組構造物の近似の線形・非線形解析問題のラグランジュ関数 $L^A(\mathbf{T}_0, \mathbf{X}, \lambda)$ を導入する。

$$L^A(\mathbf{T}_0, \mathbf{X}, \lambda) = Q_c(\Delta \mathbf{X}, \mathbf{T}_0) - \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\Delta \mathbf{X}) \quad (31)$$

ここに、 λ_j は j 番目の節点変位成分方向に関する力の釣合条件式 $h_j(\Delta \mathbf{X})$ に掛かるラグランジュ乗数であり、3. (5) で述べたとく物理的には j 番目の可動節点変位を示している。このラグランジュ関数の Δx_{ik} ($i=1, \dots, n$), ($k=1, 2, 3$) および λ_j ($j=1, \dots, m$) に関する停留条件より、剛節骨組構造物の解析問題の必要条件を次式のように誘導することができる。

$$\frac{\partial L^A(\mathbf{T}_0, \mathbf{X}, \lambda)}{\partial \Delta x_{ik}} = \frac{\partial \Pi_c(\mathbf{X}_0, \mathbf{T}_0)}{\partial \Delta x_{ik}} + \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta x_{ik}} \right]^T \mathbf{H}_c \Delta \mathbf{X} + \sum_{j=1}^m \lambda_j (\mathbf{T}_0) C_{jik} = 0 \quad (i=1, \dots, n) (k=1, 2, 3) \quad (32)$$

$$\frac{\partial L^A(\mathbf{T}_0, \mathbf{X}, \lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^3 C_{jik} \Delta x_{ik} - g_j(\mathbf{X}_0) = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (33)$$

上式において、 $[\partial \Delta \mathbf{X} / \partial \Delta x_{ik}]^T$ は $\{3(i-1) + k\}$ 番目の要素が1.0、その他の要素が0.0となるベクトルの転置である。

ところで、本研究では、各部材の上・下フランジの板厚 t_u, t_l を設計変数として考慮し、それを変化させて最適な t_u, t_l を求める問題を考慮している。そこで、本研究では、板厚 t_u, t_l が変化したことによる式(32)の必要条件の変化をも考慮できるように、式(32)を設計変数 t_u, t_l についてテーラー展開し、次式のような近似式を用いることとした。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Pi_c(\mathbf{X}_0, \mathbf{T}_0)}{\partial \Delta x_{ik}} + \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial \Pi_c}{\partial \Delta x_{ik}} \right)}{\partial t_{ui}} \right) \Delta t_{ui} \\ & + \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial \Pi_c}{\partial \Delta x_{ik}} \right)}{\partial t_{li}} \right) \Delta t_{li} + \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta x_{ik}} \right]^T \mathbf{H}_c(\mathbf{X}_0) \Delta \mathbf{X} \\ & + \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_j (\mathbf{T}_0) C_{jik} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_{ui}} \Delta t_{ui} + \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_{li}} \Delta t_{li} \right) C_{jik} = 0 \end{aligned} \quad (i=1, \dots, n) (k=1, 2, 3) \quad (34)$$

ここに、 $\bar{\lambda}_j(\mathbf{T}_0)$ は初期板厚 \mathbf{T}_0 に対する j 番目の変位成分を示す。式(34)における $\partial(\partial \Pi_c / \partial \Delta x_{ik}) / \partial t_{ui(h)}$ の計算は、部材 i の板厚 $t_{ui(h)}$ を $t_{ui(h)}^0 + \Delta t_{ui(h)}$ と微小変化させることによるコンプレメンタリーエネルギー Π_{Ci} の変化量を求め、次式の差分法により計算を行っている。

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \Pi_c}{\partial \Delta x_{ik}} \right)}{\partial t_{ui(h)}} = \frac{\left(\frac{\partial \Pi_{Ci}(t_{ui(h)}^0 + \Delta t_{ui(h)})}{\partial x_{ik}} \right) - \left(\frac{\partial \Pi_{Ci}(t_{ui(h)}^0)}{\partial x_{ik}} \right)}{\Delta t_{ui(h)}} \quad (35)$$

上式において、 $\Delta t_{ui(h)}$ は、部材 i の上フランジ板厚の微小変化量 Δt_{ui} 、あるいは下フランジ板厚の微小変化量 Δt_{li} を示す。上式の右辺の分子第一項は、着目している部材 i の板厚 $t_{ui(h)}$ を $t_{ui(h)}^0 + \Delta t_{ui(h)}$ として式(23)より求められる。また、第二項の値は、着目している部材 i の板厚を $t_{ui(h)}^0$ として式(23)より求めた値であり、この値は、3.で述べたコンプレメンタリーエネルギー最小化の過程において求められている。

式(34)における $\partial \lambda / \partial t_{ui(h)}$ は、式(30)を $t_{ui(h)}$ について偏微分することにより計算することができる。また、この場合必要となる $\partial(\partial \Pi_c / \partial x_{ik}) / \partial t_{ui(h)}$ は、式(35)により計算することができる。

5. 最適設計問題の再定式化および各部材の断面寸法および挙動の改良

(1) 最適設計問題の再定式化

本研究では、式(1)~(4)の原最適設計問題に4.で誘導した解析上の必要条件、すなわち式(33)および式(34)を等号制約条件 $\bar{g}_j(\mathbf{X})$ および $\bar{g}_{ik}(\mathbf{T}, \mathbf{X}, \bar{\lambda})$ として付加する。さらに、断面寸法に関する設計変数 \mathbf{T} に加えて、構造物の未知部材端力 \mathbf{X} および可動節点変位 $\bar{\lambda}$ をも独立変数として考慮することにより、応力度制約および変位制約を考慮した剛節骨組構造物の最小重量設計問題を、次式のように再定式化することができる。

$$\begin{aligned} & \text{find} \quad \mathbf{T}, \mathbf{X}, \bar{\lambda}, \quad \text{which} \\ & \text{min.} \quad \mathbf{W}(\mathbf{T}) = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i(t_{ui}, t_{li}) l_i \end{aligned} \quad (36)$$

sub. to

$$\begin{aligned} & \bar{g}_{ik}(\mathbf{T}, \mathbf{X}, \bar{\lambda}) = \frac{\partial \Pi_c(\mathbf{X}_0, \mathbf{T}_0)}{\partial \Delta x_{ik}} \\ & + \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial \Pi_c}{\partial \Delta x_{ik}} \right)}{\partial t_{ui}} \right) \Delta t_{ui} + \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial \Pi_c}{\partial \Delta x_{ik}} \right)}{\partial t_{li}} \right) \Delta t_{li} \\ & + \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta x_{ik}} \right]^T \mathbf{H}_c(\mathbf{X}_0) \Delta \mathbf{X} + \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_j(\mathbf{T}_0) C_{jik} \\ & + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_{ui}} \Delta t_{ui} + \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_{li}} \Delta t_{li} \right) C_{jik} = 0 \end{aligned} \quad (i=1, \dots, n) \quad (k=1, 2, 3) \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \bar{g}_j(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^3 C_{jik} \Delta x_{ik} - g_j(\mathbf{X}_0) = 0 \\ & \quad \quad \quad (j=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (38)$$

$$g_{\sigma_k}(t_{ik}, t_{lk}, X_k) = \left| \sigma_{kmax}(t_{ik}, t_{lk}, X_k) \right| - |\lambda_{\sigma}| \leq 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (39)$$

$$g_{\lambda_l}(\mathbf{T}, \bar{\lambda}_l) = \left| \bar{\lambda}_l + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial \lambda_l}{\partial t_i} \Delta t_i \right| - |\lambda_{\sigma}| \leq 0 \quad (l=1, \dots, r) \quad (40)$$

$$t_i' \leq t_i \leq t_i'' \quad (i=1, \dots, 2n) \quad (41)$$

(2) 近似最適設計問題の導入

式(36)~(41)で表現される再定式化した最適設計問題を $\Delta \mathbf{T}$, $\Delta \mathbf{X}$ および $\Delta \bar{\lambda}$ に関して線形近似し、次の近似最適設計問題を導入する。

$$\begin{aligned} & \text{find} \quad \Delta \mathbf{T}, \Delta \mathbf{X}, \Delta \bar{\lambda} \quad \text{which} \\ & \text{min.} \quad \Delta \mathbf{W}(\Delta \mathbf{T}) = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i \left(\frac{\partial A_i}{\partial t_{ui}} \Delta t_{ui} + \frac{\partial A_i}{\partial t_{li}} \Delta t_{li} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

sub. to

$$\begin{aligned} & \tilde{g}_{ik}(\Delta \mathbf{T}, \Delta \mathbf{X}, \Delta \bar{\lambda}) = \bar{g}_{ik}(\mathbf{T}_0, \mathbf{X}_0, \bar{\lambda}_0) \\ & + \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial \Pi_c}{\partial \Delta x_{ik}} \right)}{\partial t_{ui}} \right) \Delta t_{ui} + \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial \Pi_c}{\partial \Delta x_{ik}} \right)}{\partial t_{li}} \right) \Delta t_{li} \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta x_{ik}} \right]^T \mathbf{H}_c \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta x_{jl}} \right] \Delta x_{jl} + \sum_{j=1}^m C_{jik} \Delta \bar{\lambda}_j \\ & + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_{ui}} \Delta t_{ui} + \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_{li}} \Delta t_{li} \right) C_{jik} = 0 \end{aligned} \quad (i=1, \dots, n), (k=1, 2, 3) \quad (43)$$

$$\tilde{g}_j(\Delta \mathbf{X}) = \bar{g}_j(\mathbf{X}_0) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^3 C_{jik} \Delta x_{ik} = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{g}_{\sigma_k}(\Delta \mathbf{T}, \Delta \mathbf{X}) = g_{\sigma_k}(\mathbf{T}_0, \mathbf{X}_0) + \frac{\partial \sigma_{kmax}}{\partial t_{uk}} \Delta t_{uk} \\ & + \frac{\partial \sigma_{kmax}}{\partial t_{lk}} \Delta t_{lk} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{kmax}}{\partial \Delta x_{ij}} \Delta x_{ij} \leq 0 \end{aligned} \quad (k=1, \dots, n) \quad (45)$$

$$\tilde{g}_{\lambda_l}(\Delta \mathbf{T}, \Delta \bar{\lambda}_l) = \left| \bar{\lambda}_l^0 + \Delta \bar{\lambda}_l + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial \lambda_l}{\partial t_i} \Delta t_i \right| - |\lambda_{\sigma}| \leq 0 \quad (l=1, \dots, r) \quad (46)$$

$$|\Delta t_i| \leq \xi \cdot t_i^0 \quad (i=1, \dots, 2n) \quad (47)$$

ここに、 ξ は $\Delta \mathbf{T}$ の改良幅を規定する move limit であり、本研究の計算例においては、主として 0.50~0.70 の値を用いている。

上記の近似問題において、正定値係数行列 H_c は、3. で述べた線形・非線形解析法においてBFGS公式により改良された最終の行列を用いており、 $\Delta T, \Delta X, \Delta \bar{\lambda}$ の最適化過程においては、各要素の値を固定している。式(45)の $\partial \sigma_{kmax} / \partial \Delta x_{ij}$ および $\partial \sigma_{kmax} / \partial t_{ik(lk)}$ の計算は、式(23)の $\partial \Pi_c / \partial x_{ik}$ および式(35)の $\partial (\partial \Pi_c / \partial \Delta x_{ik}) / \partial t_{ik(lk)}$ の計算過程において既に計算されており、最適化過程においてこれらの感度係数を求めるための付加的な演算は必要としない。

(3) 勾配射影法による T, X および $\bar{\lambda}$ の改良

5. (2) で導入した線形計画問題を解く方法として種々の方法が考えられるが、本研究では、アクティブとなる制約条件群のみに着目して設計変数の改良方向 S および改良幅 α をLPなどの手法と比較してより能率的に決定することができる勾配射影法を用いて解くこととした。以下、表現を簡略化するため、原設計変数 $T, X, \bar{\lambda}$ および近似問題の設計変数 $\Delta T, \Delta X, \Delta \bar{\lambda}$ をまとめて V および ΔV と表現することとする。

勾配射影法による設計変数 ΔV の改良方向 S は、目的関数 $W(T)$ の最急減少勾配 $-\nabla W(T)$ を全てのアクティブな制約条件面上に射影することにより、次式により決定することができる。すなわち、

$$S = -P_r \cdot \nabla W(T) \quad (48)$$

$$\text{ここに、 } P_r = I - A_q^T (A_q \cdot A_q^T)^{-1} A_q \quad (49)$$

ただし、 $I(q \times q)$ は単位行列、 A_q はアクティブな制約条件の係数行列、添字 q はアクティブな制約条件の数を示す。

また、 t 回目の ΔV の改良における改良方向 $S^{(t)}$ に沿った $\Delta V^{(t)}$ の改良幅 $\alpha^{(t)}$ は、アクティブでない制約条件式までの距離の最小値として次式で与えられる。

$$\alpha^{(t)} = \min. \left[-\frac{a_i^T \Delta V^{(t)} - b_i}{a_i^T S^{(t)}} \mid a_i^T S^{(t)} > 0, i \in G_M \right] \quad (50)$$

ここに、 G_M はアクティブでない制約条件式の集合、 a_i, b_i は、それぞれ i 番目のアクティブでない制約条件式の係数ベクトルおよび定数項である。

上記の改良方向 $S^{(t)}$ および改良幅 $\alpha^{(t)}$ を用いて、設計変数 $\Delta V^{(t)}$ は次式により改良される。

$$\Delta V^{(t+1)} = \Delta V^{(t)} + \alpha^{(t)} S^{(t)} \quad (51)$$

ΔV の改良に伴い新たにアクティブとなる制約条件の係数を係数行列 A_q に加えて、式(48)~(51)の計算を改良方向 S の成分が 0 となるまで繰り返す。

S の成分を 0 とする ΔV が得られれば、次式によりラグランジュ乗数 λ_q の値を計算する。

$$\lambda_q = -\nabla W(T) \cdot A_q^T (A_q \cdot A_q^T)^{-1} \quad (52)$$

もし、不等号制約条件に対する λ_q の成分の中に負の値が含まれている場合には、負となる成分の中で絶対値が最大となる不等号制約条件式の係数を A_q から取り除き、 $q = q - 1$ として、式(48)~(52)の計算を不等号制約条件に対する λ_q の成分が全て非負となるまで繰り返すことにより改良解 ΔV を決定することができる。

(4) 初期許容解 ΔV_r の決定

ところで、5. (3) で述べた勾配射影法を用いて式(42)~(47)の線形近似最適設計問題を解く場合には、初期値 ΔV^0 を許容領域内に設定する必要がある。そこで本研究では、初期値 ΔV^0 がすべての制約条件を満足していない場合には、以下に述べる方法により初期許容解 ΔV_r を求めることとした。

- ①まず、改良方向 S を目的関数 $W(T)$ の最急減少勾配、すなわち、 $S = -\nabla W(T)$ とする。
- ②違反している制約条件群 G_v に着目し、改良方向 S に沿って ΔV^0 を改良した場合、各違反している制約条件面上に ΔV を到達させるための改良幅 α_{vj} ($j \in G_v$) を次式により求める。

$$\alpha_{vj} = -\frac{a_j^T \Delta V^0 - b_j}{a_j^T S} \quad (j \in G_v) \quad (53)$$

ただし、1回目の ΔV の改良における ΔV^0 の値は 0.0 とする。

- ③ α_{vj} ($j \in G_v$) のうち、絶対値が最小となる値を選び、その改良幅を α_v とする。
- ④既に満足しているアクティブでない制約条件群 G_M に着目し、各制約条件を違反しないための改良幅 α_{β} ($j \in G_M$) を②で求めた方法と同様にして計算し、得られた α_{β} ($j \in G_M$) の中で③で得られた α_v と符号が同一となり、かつ絶対値が最小となる値を選び、その改良幅を α_{β} とする。
- ⑤③および④で得られた α_v と α_{β} の値を比較し、絶対値の小さい値を α として用い、次式により ΔV^0 を改良する。

$$\Delta V = \Delta V^0 + \alpha S \quad (54)$$

- ⑥改良した ΔV を用いて計算したすべての制約条件が満足されている場合には、初期許容解 ΔV_r が得られたこととなるため、 ΔV_r を初期値として5. (3) で述べた勾配射影法による T, X および $\bar{\lambda}$ の改良を行う。違反している制約条件が存在する場合には、 ΔV を新たな初期値 ΔV^0 として⑦へ進む。
- ⑦ ΔV の改良により新たにアクティブとなる制約条件 j の係数を係数行列 A_q に加え、式(48),(49)により改良方

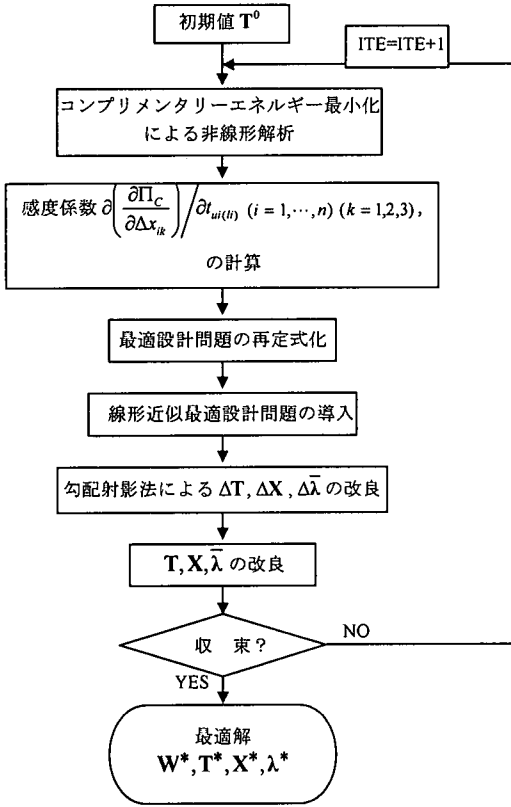


図-5 本研究で提案した最適設計法のフローチャート

向Sを計算する。

⑧すべての制約条件が満足されるまで②～⑧の操作を繰り返すことにより、初期許容解 ΔV_i を決定することができる。

(5) 最適設計法のフローチャート

5. (3)で述べた最適化アルゴリズムにより得られた近似問題の改良解 ΔV を用いて設計変数 V を次式により改良する。

$$V = V^0 + \Delta V \quad (55)$$

式(55)で改良された V を新たな初期値 V^0 として再び式(42)～(47)の線形近似最適設計問題を導入し、この近似問題を解くことを繰り返すことにより、 $W(T)$ および V を一定値に収束させることができ、最終的な最適解を決定することができる。本論文で提案した最適設計法のフローチャートを図-5に示す。3.および4.で述べたごとく、本論文で提案した最適設計法における主たる感度係数の計算は、式(35)による $\partial(\partial\Pi_c/\partial\Delta x_{ik})/\partial t_{u(i)}$ の計算のみであり、応力度および変位の感度係数はこの感度係数の値を用いてきわめて単純に計算することができ、能率的に最適解を決定することができる。このことは、本論文で提案している最適設計法の計算上の大きな利点の一つで

ある。

6. 挙動の感度係数を用い双対法により最適解を決定する方法

本論文で提案した最適設計法の能率性および信頼性を検討するため、挙動の感度係数を用い双対法により最適解を決定する方法による最適解との比較検討を行った。ここでは、双対法により最適解を決定する方法の概略について述べる。

双対法では、式(1)～(4)により定義される原最適設計問題の目的関数および制約条件を設計変数 T に関する一次の偏微分係数を用いて近似する。この場合、目的関数および制約条件は設計変数に関する偏微分係数の符号により順変数あるいは逆変数を用いて近似し、目的関数として $W(T)$ の変化量 $\Delta W(T)$ を考慮することにより、次式に示す変数分離型式の凸近似最適設計問題を導入することができる。

$$\begin{aligned} &\text{find } T, \quad \text{which} \\ &\text{minimize } \Delta W(T) = \sum_{i=1}^{2n} \left[\omega_{i(i)} t_i - \omega_{i(i)} (t_i^0)^2 \frac{1}{t_i} \right] \quad (56) \end{aligned}$$

sub. to

$$\bar{g}_j(T) = \sum_{i=1}^{2n} \left[s_{j(i)} t_i - s_{j(i)} (t_i^0)^2 \frac{1}{t_i} \right] + \bar{U}_j \leq 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (57)$$

$$\bar{g}_l(T) = \sum_{i=1}^{2n} \left[d_{l(i)} t_i - d_{l(i)} (t_i^0)^2 \frac{1}{t_i} \right] + \bar{U}_l \leq 0 \quad (l=1, \dots, r) \quad (58)$$

$$t_i' \leq t_i \leq t_i'' \quad (i=1, \dots, 2n) \quad (59)$$

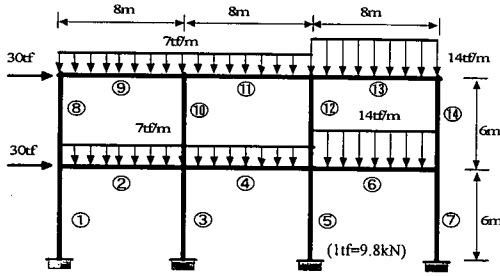
$$\text{ここに、} \bar{U}_j = g_j(T_0) - \sum_{i=1}^{2n} t_i^0 [s_{j(i)} - s_{j(i-1)}]$$

$$\bar{U}_l = g_l(T_0) - \sum_{i=1}^{2n} t_i^0 [d_{l(i)} - d_{l(i-1)}]$$

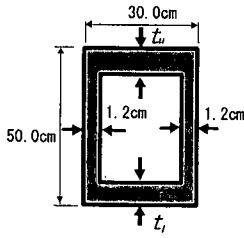
$$\omega_{ii} = \frac{\partial W(T)}{\partial t_i}, \quad s_{ji} = \frac{\partial g_j(T)}{\partial t_i}, \quad d_{li} = \frac{\partial g_l(T)}{\partial t_i}$$

上式において、挙動の感度係数 s_{ji} 、 d_{li} の計算は、板厚 t_{ii} あるいは t_i を微小に変化させ、3.で述べた最小コンプリメンタリーエネルギー原理に基づく解析法を用いて再度解析を行い、差分法により求めている。

式(56)～(59)により定式化した凸近似最適設計問題のラグランジュ関数を導入し、このラグランジュ関数をラグランジュ乗数(双対変数)について最大化、設計変数 T



(a) 3支間2層剛節骨組構造物



(b) 各部材の断面形状

図-6 3支間2層剛節骨組構造物および各部材の断面形状

に関して最小化することにより改良解を決定する。得られた改良解を新たな初期値として再び式(56)~(59)の凸近似最適設計問題を導入し、設計変数および双対変数の改良を行う。この改良プロセスを設計変数、双対変数および目的関数の値が一定値に収束するまで繰り返すことにより、最終的な最適解を決定することができる。双対法による最適化アルゴリズムの詳細については文献14),15)で述べているので参照していただきたい。

7. 設計例

本論文で提案した方法(Proposed-M)および6.で述べた双対法により最適解を決定する方法(Dual-M)により、種々の線形・非線形材料よりなる剛節骨組構造物の最適設計を行い、その結果の比較検討を行ったが、ここでは、図-6に示す14部材を有する3支間2層の剛節骨組構造物について得られた最適解、能率性および信頼性について比較検討を行った結果について述べる。

各部材の断面の高さおよび幅、腹板の板厚は、図-6に示すようにそれぞれ50cm, 30cmおよび1.2cmと仮定し、各部材の設計変数である上・下フランジ板厚 t_u, t_l の最小値および初期値をそれぞれ0.6cmおよび5.0cmとした。使用材料としては、図-7の線形材料(a)および4種類の非線形な応力度-ひずみ関係を有する材料(b),(c),(d),(e)を考慮している。なお、剛節骨組構造物の各部材はすべて同一

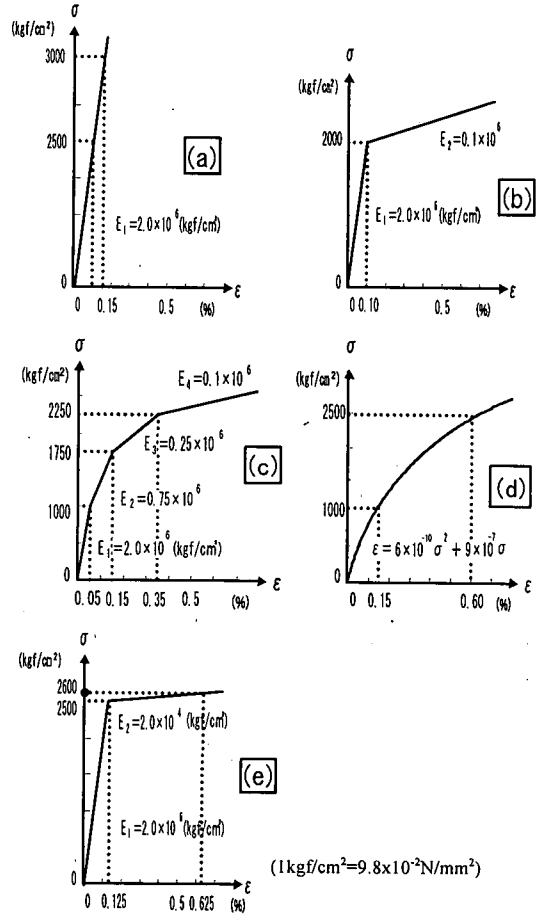


図-7 線形材料(a)および4種類の非線形材料(b),(c),(d),(e)の応力度-ひずみ関係

の応力度-ひずみ関係を有する材料よりなるものとし、その許容応力度 σ_0 を材料(a)~(d)の場合には2500kgf/cm²(245.17N/mm²),材料(e)の場合には2600kgf/cm²(254.97N/mm²)としている。また、すべての材料の単位体積当りの重量 ρ を7850kgf/m³(76930N/m³)と設定した。3.で述べたコンプリメンタリーエネルギー最小化による線形・非線形構造解析問題においては、各部材を離散的に多くの要素に分割し、各要素のコンプリメンタリーエネルギーを集計して求めているが、この分割要素長の最小値を2.0cmとしている。また、 $\Delta T, \Delta X, \Delta \lambda$ の最適化過程において考慮している各部材の最大応力度に関する制約条件は、各部材のすべての分割点の応力度を検査し、その中で最大の応力度を用いて最大応力度の制約条件を導入している。本研究では、本論文で提案した方法がいかなる設計問題に対しても能率的かつ正確に最適解を決定できることを明らかにすることを目的としている。そのため、設計例においては、それぞれの材料の場合について、最適解におけるアクティブとなる制約条件が応力度制約の

表-1 線形材料(a)の場合の, Proposed-M および Dual-M により得られた最適解における
目的関数の値および計算時間の比較 (1tf=9.8kN, 1kgf/cm²=9.8x10⁻²N/mm²)

設計条件	線形材料(a), $\lambda_0 = 50.0\text{cm}$		線形材料(a), $\lambda_0 = 5.0\text{cm}$	
	Proposed-M	Dual-M	Proposed-M	Dual-M
方法	Proposed-M	Dual-M	Proposed-M	Dual-M
設計変数	$T, X, \bar{\lambda} (\xi = 0.60)$	T	$T, X, \bar{\lambda} (\xi = 0.50)$	T
許容応力度	2500 kgf/cm ²	2500 kgf/cm ²	2500 kgf/cm ²	2500 kgf/cm ²
部材番号	t_u, t_l (cm), σ_{\max} (kgf/cm ²)	t_u, t_l (cm), σ_{\max} (kgf/cm ²)	t_u, t_l (cm), σ_{\max} (kgf/cm ²)	t_u, t_l (cm), σ_{\max} (kgf/cm ²)
1	1.03, 0.96, 1847.5	0.60, 0.78, 1860.0	1.41, 1.41, 1615.9	0.81, 0.77, 1701.2
2	1.37, 1.66, <u>2499.0</u>	1.34, 1.64, <u>2491.1</u>	1.43, 1.65, <u>2509.0</u>	1.76, 1.78, 2444.6
3	1.91, 0.71, 2453.1	1.48, 0.71, <u>2475.3</u>	1.79, 1.79, 2274.5	2.14, 2.13, 2179.6
4	1.20, 1.34, <u>2485.4</u>	1.15, 1.36, <u>2492.7</u>	1.29, 1.29, <u>2492.3</u>	1.23, 1.41, <u>2503.3</u>
5	1.68, 0.66, <u>2507.2</u>	1.83, 0.67, <u>2485.8</u>	1.35, 1.31, <u>2518.6</u>	1.82, 1.80, 2346.7
6	3.02, 3.02, <u>2503.3</u>	3.10, 3.14, <u>2495.7</u>	2.91, 2.89, <u>2507.3</u>	2.80, 2.78, <u>2499.5</u>
7	2.30, 1.60, <u>2500.2</u>	2.48, 1.70, <u>2490.8</u>	2.03, 2.08, 2439.0	1.93, 1.86, 2424.8
8	0.60, 0.60, 367.1	0.60, 0.60, 624.7	0.60, 0.60, 665.0	0.60, 0.60, 463.6
9	0.60, 1.11, <u>2514.1</u>	0.62, 1.11, <u>2491.6</u>	0.60, 1.21, <u>2473.8</u>	0.83, 1.13, <u>2499.9</u>
10	0.60, 0.64, 1914.5	0.60, 0.60, 1945.3	1.30, 1.30, 1430.6	1.30, 1.30, 1480.8
11	1.07, 1.22, <u>2481.1</u>	0.89, 1.24, <u>2494.4</u>	0.81, 1.19, <u>2491.7</u>	0.85, 1.20, <u>2500.4</u>
12	0.60, 0.60, 1035.1	0.60, 0.60, 1031.4	0.60, 0.60, 873.4	0.60, 0.60, 818.7
13	1.37, 1.71, <u>2509.1</u>	1.39, 1.72, <u>2498.3</u>	1.47, 1.82, <u>2506.6</u>	1.35, 1.69, <u>2499.3</u>
14	1.14, 2.05, <u>2507.6</u>	1.15, 2.07, <u>2499.1</u>	2.69, 1.79, <u>2505.4</u>	1.50, 1.89, <u>2499.6</u>
W(tf)	14.5812	14.5008	15.2011	15.1165
λ_{\max} (cm)	5.60	5.66	5.01	5.00
Act. Con. ¹⁾	σ	σ	σ, λ	σ, λ
反復改良回数	25	17	11	7
計算時間(秒)	180.3 (0.140) ²⁾	1290.0 (1.000) ²⁾	69.7 (0.153) ²⁾	454.4 (1.000) ²⁾

1) 最適解においてアクティブとなった制約条件

2) 双対法による方法(Dual-M)により要した計算時間に対する比(by DEC 3000/300)

み,あるいは応力度と変位制約となるように許容変位 λ_0 の値を種々変化させ最適設計問題を設定している。

線形材料(a)の場合について,許容変位 λ_0 を50.0cmおよび5.0cmとし,本論文で提案した方法(Proposed-M)および挙動の感度係数を用い双対法により最適解を決定する方法(Dual-M)により得られた最適解の比較をそれぞれ表-1に示す。

λ_0 を50.0cmとした最適設計問題においては,最適解において応力度の制約条件がアクティブな制約条件となっている。この設計問題において,Proposed-Mでは板厚の変化量 ΔT の改良幅を規定するmove limit ξ の値を0.60に規定している。このProposed-MおよびDual-Mにより得られた最適な上・下フランジの板厚は1,3,5,11部材において異なっているが,最大応力度の分布は2つの方法ともにほぼ同じ分布となっている。目的関数の値の比較では,Proposed-Mの場合14.5812tf(142.8958kN),Dual-Mの場合では14.5008tf(142.1078kN)と,0.55%の相対誤差でほとんど一致した解が得られている。最適解を得るための反復改良回数は,Proposed-Mの場合では25回,Dual-Mの場合では17回となっている。Proposed-Mの場合には,一回の反復改良過程において非線形挙動の感度係数の計算を行う

必要がないのに対し,Dual-Mの場合には, t_u, t_l を微量変化させて再解析を行い,差分法により感度係数の計算を行っていることより,計算時間の比較では,Proposed-Mの場合には180.3秒,Dual-Mの場合には1290.0秒と,Proposed-Mの場合がDual-Mの場合の14.0%の計算時間により能率的に最適解を決定している。

λ_0 を5.0cmとした場合には,最適解において応力度および変位の制約条件が同時にアクティブな制約条件となっている。この設計問題においては,Proposed-Mにおける ξ の値を0.50に規定している。Proposed-MおよびDual-Mにより得られた最適な上・下フランジの板厚は異なっているが,最大応力度の分布は両方法ともにほぼ同じ分布となっている。目的関数の値の比較では,Proposed-Mの場合15.2011tf(148.9708kN),Dual-Mの場合では15.1165tf(148.1417kN)と0.56%の相対誤差によりほとんど一致している。計算時間を比較すると,Proposed-Mの場合69.7秒,Dual-Mの場合454.7秒と,Proposed-Mの場合がDual-Mの場合の15.3%の計算時間により能率的に最適解を決定している。

つぎに,非線形材料(b)を用い λ_0 を50cmとした場合,非線形材料(c)を用い λ_0 を12.0cmとした場合,さらに,

表-2 材料(b) $\lambda_0 = 50.0\text{cm}$, 材料(c) $\lambda_0 = 12.0\text{cm}$, 材料(d) $\lambda_0 = 16.0\text{cm}$ の場合の, Proposed-M および Dual-M により得られた最適解の比較

設計条件	材料(b), $\lambda_0 = 50.0\text{cm}$		材料(c), $\lambda_0 = 12.0\text{cm}$		材料(d), $\lambda_0 = 16.0\text{cm}$	
	Proposed-M	Dual-M	Proposed-M	Dual-M	Proposed-M	Dual-M
設計変数	$T, X, \bar{\lambda} (\xi = 0.60)$		$T, X, \bar{\lambda} (\xi = 0.70)$		$T, X, \bar{\lambda} (\xi = 0.70)$	
部材番号	$t_u, t_l (\text{cm}), \sigma_{\max} (\text{kgf/cm}^2)$	$t_u, t_l (\text{cm}), \sigma_{\max} (\text{kgf/cm}^2)$	$t_u, t_l (\text{cm}), \sigma_{\max} (\text{kgf/cm}^2)$	$t_u, t_l (\text{cm}), \sigma_{\max} (\text{kgf/cm}^2)$	$t_u, t_l (\text{cm}), \sigma_{\max} (\text{kgf/cm}^2)$	$t_u, t_l (\text{cm}), \sigma_{\max} (\text{kgf/cm}^2)$
1	0.60, 0.60, 2271.7	0.60, 1.36, 2313.2	0.93, 1.11, 2129.2	0.60, 0.60, 2169.5	1.17, 1.27, 1504.6	0.78, 0.60, 1703.0
2	1.13, 1.34, <u>2486.5</u>	1.14, 1.30, <u>2508.4</u>	0.98, 1.21, <u>2505.2</u>	1.19, 1.24, <u>2498.6</u>	1.15, 1.43, 2491.1	2.09, 2.05, 2141.4
3	1.28, 0.60, 2393.0	0.60, 0.60, <u>2505.0</u>	0.60, 1.20, 2395.0	1.35, 1.07, 2324.0	3.29, 2.88, 1762.0	2.64, 2.55, 1913.3
4	0.89, 1.00, <u>2509.6</u>	0.78, 0.88, <u>2513.0</u>	0.90, 1.04, <u>2476.8</u>	0.86, 1.00, <u>2499.0</u>	1.29, 1.30, 2319.7	1.29, 1.42, 2271.6
5	1.40, 0.60, 2367.3	0.60, 0.60, 2470.0	1.36, 0.99, 2321.2	1.37, 0.91, 2302.2	2.10, 1.46, 1894.4	2.24, 1.83, 1930.7
6	1.97, 1.90, <u>2490.4</u>	2.08, 2.04, <u>2499.4</u>	2.10, 2.04, <u>2502.7</u>	2.05, 2.02, <u>2499.8</u>	2.51, 2.47, <u>2494.8</u>	2.73, 2.32, <u>2491.1</u>
7	0.60, 0.60, <u>2484.8</u>	0.91, 0.60, <u>2524.8</u>	0.86, 1.09, 2427.3	1.22, 0.82, 2370.4	2.86, 2.12, 1881.0	2.36, 1.84, 1985.0
8	0.60, 0.60, 564.2	0.60, 0.60, 756.7	0.60, 0.60, 746.2	0.60, 0.60, 478.5	0.60, 0.60, 529.4	0.60, 0.60, 447.9
9	0.60, 0.83, 2350.8	0.60, 0.60, 2474.9	0.60, 0.60, 2461.8	0.60, 0.60, 2461.6	0.97, 1.01, 2335.2	1.14, 0.92, 2352.9
10	0.60, 0.60, 2038.1	0.60, 0.60, 2036.5	0.67, 0.61, 1912.2	0.60, 0.60, 1918.3	1.09, 1.20, 1428.7	1.01, 1.23, 1458.7
11	0.74, 1.02, <u>2438.5</u>	0.65, 0.97, <u>2503.8</u>	0.65, 0.97, <u>2506.3</u>	0.68, 0.99, <u>2500.7</u>	0.61, 1.12, <u>2499.0</u>	0.71, 1.09, 2452.3
12	0.60, 0.60, 915.0	0.60, 0.60, 1103.7	0.60, 0.60, 1044.4	0.60, 0.60, 1045.1	0.60, 0.60, 885.6	0.60, 0.60, 767.1
13	0.76, 0.95, <u>2510.2</u>	0.83, 0.92, <u>2503.1</u>	0.84, 1.12, <u>2490.3</u>	0.79, 1.07, <u>2501.4</u>	1.33, 1.63, <u>2492.7</u>	1.19, 1.50, <u>2514.0</u>
14	0.70, 1.14, <u>2500.8</u>	0.60, 1.24, <u>2504.1</u>	0.89, 1.20, <u>2494.3</u>	0.65, 1.32, <u>2500.1</u>	2.19, 2.24, 2114.0	1.55, 2.26, 2120.1
W(tf)	12.8435	12.7324	13.1116	13.0637	15.3664	15.2682
$\lambda_{\max}(\text{cm})$	10.09	10.83	12.07	12.00	16.05	15.99
Act. Con. ¹⁾	σ	σ	σ, λ	σ, λ	σ, λ	σ, λ
反復改良回数	28	8	32	8	16	17
計算時間(秒)	377.6 (0.116) ²⁾	3246.0 (1.000) ²⁾	549.9 (0.152) ²⁾	3614.1 (1.000) ²⁾	410.5 (0.055) ²⁾	7482.3 (1.000) ²⁾

1) 最適解においてアクティブとなった制約条件

2) 双対法による方法(Dual-M)により要した計算時間に対する比(by DEC 3000/300)

非線形材料(d)を用い $\lambda_0 = 16.0\text{cm}$ とした場合について, Proposed-MおよびDual-Mにより得られた最適解の比較結果, Proposed-Mにおける ξ の値をそれぞれ表-2に示す.

材料(b)を用い $\lambda_0 = 50.0\text{cm}$ とした場合の最適設計問題においては, 最適解において応力度の制約条件がアクティブとなっている. 表-2より明らかなごとく, 2つの方法により得られた各部材の最適上・下フランジの板厚は異なっている. また, 部材の応力度が許容応力度とほぼ等しい値となっている部材群は, Proposed-Mの場合には, 2, 4, 6, 7, 11, 13, 14となっているのに対し, Dual-Mの場合には, さらに部材3の応力度も許容応力度とほぼ等しい値となっている. 目的関数の値を比較すると, Proposed-Mの場合には12.8435tf (125.8663kN), Dual-Mの場合には12.7324tf (124.7775kN)と, 0.87%の相対誤差でほぼ一致している. 最適解を得るまでの反復改良回数の比較では, Proposed-Mの場合が28回, Dual-Mの場合が8回となっている. しかし, 上で述べたごとく, Proposed-Mの場合では, 一回の反復改良過程において陽に非線形挙動の感度係数の計算を行う必要がないことより, Proposed-Mの場合には377.6秒, Dual-Mの場合には3246.0秒と, Proposed-Mの場合がDual-Mの場合の11.6%の計算時間により能率的に最適解を決定している.

材料(c)を用い $\lambda_0 = 12.0\text{cm}$ とした場合には, 最適解に

において応力度および変位の制約条件が同時にアクティブとなっている. 材料(b)の場合と同様に, 両最適設計法により得られた各部材の最適上・下フランジの板厚は異なっているが, いずれの最適設計法の最適解においても, 2, 4, 6, 11, 13, 14部材の最大応力度が許容応力度とほぼ等しくなっている. 目的関数の値はProposed-Mの場合には13.1116tf (128.4937kN), Dual-Mの場合には13.0637tf (128.0243kN)と0.37%の相対誤差で一致している. 最適解を得るための計算時間の比較では, Proposed-Mの場合には549.9秒, Dual-Mの場合には3614.1秒とProposed-Mの場合がDual-Mの場合の15.2%の計算時間により能率的に最適解を決定している.

材料(d)を用い $\lambda_0 = 16.0\text{cm}$ とした場合には, 最適解において応力度および変位の制約条件が同時にアクティブとなっている. 目的関数の値はProposed-Mの場合には15.3664tf (150.5907kN), Dual-Mの場合には15.2682tf (149.5284kN)と0.64%の相対誤差でほとんど一致している. 計算時間に着目すると, Proposed-Mの場合には410.5秒, Dual-Mの場合には7482.3秒とProposed-Mの場合がDual-Mの場合の5.5%の計算時間により能率的に最適解を決定している.

つぎに本論文で提案した最適設計法がいかなる設計条件においても能率的かつ正確に最適解を決定できること

表-3 材料(b), (c), (d)において, 変位制限を種々変化させた場合の Proposed-M および Dual-M により得られた最適解における目的関数の値(w)および計算時間(CPU)の比較 (1tf=9.8kN)

材料(b)			材料(c)			材料(d)		
$\lambda_o, S_{AG}^1, \xi^2$	Proposed-M	Dual-M	$\lambda_o, S_{AG}^1, \xi^2$	Proposed-M	Dual-M	$\lambda_o, S_{AG}^1, \xi^2$	Proposed-M	Dual-M
$\lambda_o = 50.0\text{cm}$ $S_{AG} = \sigma$ $\xi = 0.60$	W=12.84tf CPU=377.6秒 (0.116) ³⁾	12.73tf 3246.0秒 (1.000) ³⁾	$\lambda_o = 50.0\text{cm}$ $S_{AG} = \sigma$ $\xi = 0.70$	12.96tf 378.3秒 (0.122) ³⁾	12.84tf 3105.8秒 (1.000) ³⁾	$\lambda_o = 50.0\text{cm}$ $S_{AG} = \sigma$ $\xi = 0.60$	13.77tf 805.8秒 (0.247) ³⁾	13.76tf 3265.0秒 (1.000) ³⁾
$\lambda_o = 9.0\text{cm}$ $S_{AG} = \sigma, \lambda$ $\xi = 0.70$	W=13.09tf CPU=293.2秒 (0.104) ³⁾	13.01tf 2816.7秒 (1.000) ³⁾	$\lambda_o = 12.0\text{cm}$ $S_{AG} = \sigma, \lambda$ $\xi = 0.70$	13.11tf 549.9秒 (0.152) ³⁾	13.06tf 3614.1秒 (1.000) ³⁾	$\lambda_o = 19.0\text{cm}$ $S_{AG} = \sigma, \lambda$ $\xi = 0.60$	14.37tf 722.8秒 (0.195) ³⁾	14.30tf 3703.7秒 (1.000) ³⁾
$\lambda_o = 5.0\text{cm}$ $S_{AG} = \sigma, \lambda$ $\xi = 0.60$	W=15.45tf CPU=110.7秒 (0.063) ³⁾	15.36tf 1745.2秒 (1.000) ³⁾	$\lambda_o = 8.0\text{cm}$ $S_{AG} = \sigma, \lambda$ $\xi = 0.70$	14.40tf 471.6秒 (0.158) ³⁾	14.36tf 2983.3秒 (1.000) ³⁾	$\lambda_o = 16.0\text{cm}$ $S_{AG} = \sigma, \lambda$ $\xi = 0.70$	15.37tf 410.5秒 (0.055) ³⁾	15.27tf 7482.3秒 (1.000) ³⁾

- 1) 最適解においてアクティブとなった制約条件
- 2) 提案した方法(Proposed-M)において用いた move limit の値
- 3) 双対法による方法(Dual-M)により要した計算時間に対する比(by DEC3000/300)

表-4 材料(e)の場合の Proposed-M および Dual-M により得られた最適解における目的関数の値および計算時間の比較 (1tf=9.8kN, 1kgf/cm²=9.8x10⁻²N/mm²)

設計条件	材料(e), $\lambda_o = 50.0\text{cm}$		材料(e), $\lambda_o = 5.0\text{cm}$	
	Proposed-M	Dual-M	Proposed-M	Dual-M
設計変数	$T, X, \bar{\lambda} (\xi = 0.05)$	$T (\xi = 0.05)$	$T, X, \bar{\lambda} (\xi = 0.05)$	$T (\xi = 0.05)$
許容応力度	2600 kgf/cm ²	2600 kgf/cm ²	2600 kgf/cm ²	2600 kgf/cm ²
部材番号	t_u, t_l (cm), σ_{max} (kgf/cm ²)	t_u, t_l (cm), σ_{max} (kgf/cm ²)	t_u, t_l (cm), σ_{max} (kgf/cm ²)	t_u, t_l (cm), σ_{max} (kgf/cm ²)
1	0.60, 0.60, 2119.1	最適化不能	0.96, 0.94, 1598.5	最適化不能
2	0.89, 1.22, <u>2533.1</u>		1.72, 1.73, <u>2492.7</u>	
3	1.16, 0.60, <u>2505.7</u>		2.34, 2.33, 2070.0	
4	0.77, 0.97, <u>2525.2</u>		1.16, 1.26, <u>2503.0</u>	
5	1.48, 0.60, <u>2507.3</u>		2.04, 2.04, 2209.7	
6	2.65, 2.68, <u>2512.8</u>		2.37, 2.35, <u>2511.2</u>	
7	2.18, 1.30, <u>2509.4</u>		2.18, 2.15, 2286.5	
8	0.61, 0.61, 621.8		0.60, 0.60, 532.3	
9	0.65, 0.64, <u>2516.5</u>		0.83, 1.02, <u>2502.3</u>	
10	0.60, 0.60, 2062.4		1.36, 1.36, 1490.3	
11	0.71, 0.81, <u>2522.9</u>		0.75, 0.90, <u>2510.2</u>	
12	0.60, 0.60, 1044.0		0.60, 0.60, 777.1	
13	0.84, 1.22, <u>2592.2</u>		1.00, 1.27, <u>2533.4</u>	
14	0.84, 1.81, <u>2510.5</u>		1.57, 1.73, <u>2501.1</u>	
W(tf)	13.3997		14.9204	
λ_{max} (cm)	6.57		5.01	
Act. Con. ¹⁾	σ		σ, λ	
反復改良回数	14		15	
計算時間(秒)	71.9		63.4	

- 1) 最適解においてアクティブとなった制約条件

を明らかにするため, 材料(b)において変位制限 λ_o を50.0cm, 9.0cm, 5.0cm, 材料(c)において λ_o を50.0cm, 12.0cm, 8.0cm, 材料(d)において λ_o を50.0cm, 19.0cm, 16.0cmと設定した場合のProposed-MおよびDual-Mにより得られた目的関数の値, 計算時間の比較検討を行った結果を表-3に

示す。これらの各条件は各材料において応力度制約のみ, および応力度および変位制約条件が支配的となる設計条件を規定しているものである。

Proposed-Mを用いて材料(b),(c),(d)における最適設計問題の最適解を得るために要した計算時間を比較すると,

材料(c)の場合は材料(b)の場合の1.00~4.26倍の計算時間を要している。さらに非線形性が強くなる材料(d)の場合には、材料(b)の場合の2.13~3.71倍の計算時間を要している。つぎに、Proposed-MおよびDual-Mにより得られた最適解における目的関数の値を比較すると、いずれも0.07%~0.93%の相対誤差で一致している。Proposed-MおよびDual-Mによる計算時間を比較すると、Proposed-Mの場合がDual-Mの場合の5.5%~24.7%の計算時間によりきわめて能率的に最適解を決定している。

さらに、本論文で提案している最適設計法の適用性および信頼性がきわめて優れていることを明らかにするため、図-7に示すパイリニヤーな応力度-ひずみ関係を有する材料(e)を考慮し、許容応力度を 2600kgf/cm^2 (254.97N/mm^2)とし、最適解が応力度-ひずみ関係の折点近傍で決定される場合について検討を行った。この設計例において、表-1に示した線形材料(a)の場合のDual-Mに得られた最適解を初期値とし、move limit ξ の値を5%と小さくすることにより、Proposed-Mの場合には表-4に示す最適解を得た。しかし、Dual-Mの場合には、Proposed-Mの場合と同様の板厚の改良幅を規定するmove limitの制約条件を設定したにもかかわらず、変位制約の近似の精度が悪く、真の変位制約と近似の変位制約の値が大きく異なったため、 $\lambda_a = 50.0\text{cm}$ および 5.0cm のいずれの場合にも最適解を得ることができなかった。

表-4に示すProposed-Mにより得られた最適解において、 $\lambda_a = 50.0\text{cm}$ の場合の主要な部材の弾性係数は $2.0 \times 10^4\text{kgf/cm}^2$ ($1.961 \times 10^3\text{N/mm}^2$)となっている。また、この場合の目的関数の値と表-1に示した線形材料(a)、 $\lambda_a = 50.0\text{cm}$ の場合の目的関数の値を比較すると、非線形材料(e)の場合が 13.3997tf (131.3171kN)、線形材料(a)の場合が 14.5008tf (142.1078kN)となっており、許容応力度を 100kgf/cm^2 (9.8N/mm^2)増加させ非線形領域を考慮することにより目的関数の値が7.6%減少している。また、 $\lambda_a = 5.0\text{cm}$ の場合では非線形材料(e)の場合が 14.9204tf (146.2199kN)、線形材料(a)の場合が 15.1165tf (148.1417kN)と、線形材料の場合の1.3%の減少となっている。

上記の両最適設計法による最適解の比較検討の結果、本論文で提案した最適設計法は、線形および任意の非線形応力度-ひずみ関係を有する材料よりなる剛節骨組構造物の、いかなる設計条件を有する最適設計問題に対しても、確実に全域的な最適解を決定できることが明らかとなり、本論文で提案している最適設計法は、極めて汎用性のある統一かつ能率的な最適設計法であるということが出来る。

8. 結論

本研究において得られた主な結論は以下の通りである。

- 1) 剛節骨組構造物の線形・非線形解析問題を全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題として定式化し、そのラグランジュ関数の停留条件より誘導した解析上の必要条件を、原最適設計問題に等号制約条件として加えるとともに、設計変数として箱形断面を有する各部材の上・下フランジ板厚 t_u, t_l のみならず、未知部材端力および可動節点変位をも独立の設計変数として考慮し、勾配射影法により改良解を求める方法により、各部材の上・下フランジ板厚の最適解を能率的に決定することができる。
- 2) 本論文で提案している剛節骨組構造物の最適設計法はエネルギー原理に基づき展開しているの、いかなる線形・非線形の応力度-ひずみ特性を有する材料よりなる剛節骨組構造物の最適設計問題に対しても統一的に適用することができ、きわめて汎用性を有する。
- 3) 非線形構造解析において必要となる、構造物の全コンプリメンタリーエネルギー Π_c の未知部材端力 x_k に関する感度係数 $\partial \Pi_c / \partial x_k$ ($i=1, \dots, n$) ($k=1, 2, 3$)の計算は、部材 i の未知部材端力 x_k を微小量変化させた場合の着目部材 i におけるコンプリメンタリーエネルギー Π_{Ci} の変化量のみを計算することにより、きわめて容易に求めることができる。さらに、未知変位 λ の板厚 t_u, t_l に関する感度係数の計算、および最適化計算において必要となる $\partial(\partial \Pi_c / \partial x_k) / \partial t_{u(l)}$ ($i=1, \dots, n$) ($k=1, 2, 3$)の計算は、 $\partial \Pi_{Ci} / \partial x_k$ の t_u, t_l の変化に対する変化量のみを計算することにより容易に求めることができる。これらのことは、本論文で提案している最適設計法の計算上の大きな利点である。
- 4) 本論文で提案した最適設計法では、最適解を決定する過程で、構造物の挙動(各部材の最大応力度および各節点の変位)の原設計変数に関する感度係数の計算を直接陽に行う必要がないため、通常の挙動の感度係数を陽に求めて最適解を決定する方法と比較して、きわめて能率的に最適解を決定することができる。例えば、本論文の最適設計例で述べた挙動の感度係数を用い双対法により最適解を決定する方法との計算時間の比較では、本論文で提案した方法が双対法の5.5%~24.7%の計算時間できわめて能率的に最適解を決定している。
- 5) 本論文で述べた最適設計例において、本論文で提案した方法および挙動の感度係数を用い双対法により最適解を決定する方法により得られた最適解における目的関数の値を比較すると、0.07%~0.93%の相対誤差でほぼ完全に一致しており、本論文で提案した方法により確実に非線形剛節骨組構造物の全域的な最適解を決定することができることが明らかとなった。
- 6) 図-7(e)に示す材料のように応力度-ひずみ関係の一部に弾性係数の値が弾性領域における弾性係数の1/100程度の微小な値となる領域(ほぼ水平となる領域)を

有し、最適解がその領域で決定される問題では、挙動の感度係数を用い双対法により最適解を決定する方法においては、変位制約の近似の精度が悪くなり最適解を決定することが困難となる。一方、本論文で提案した方法では、上・下フランジ板厚の一回の改良幅の最大値を規制するmove limitの値を5%程度と小さく設定することにより確実に最適解を決定することができ、本論文で提案している最適設計法はきわめて信頼性の高い最適設計法であることが明らかとなった。

あとがき

本論文において、線形・非線形挙動状態にある箱形断面を有する剛節骨組構造物の最適設計問題をエネルギー原理に基づき統一的、かつ能率的に解くことのできる新しい最適設計法を提案し、線形材料および種々の非線形材料を使用した場合の最適設計例を示し、本論文で提案した方法の汎用性、信頼性、適用性および能率性を明らかにするとともに、実際の骨組構造物の計画および概略設計の段階できわめて大きな威力を発揮するものであり、実際の設計への適用の見地からもきわめて有効な最適設計法であることを示した。また、本論文では箱形断面を有する各部材の上・下フランジ板厚を設計変数として取り扱っているが、本論文で提案している最適設計法により、箱形断面の板厚のみならず断面の幅や高さも同様に設計変数として取り扱うことができ、きわめて汎用性のある最適設計法である。

今後の課題としては、本論文で提案した最適設計法による劣化型材料を使用した場合の剛節骨組構造物の最適化への展開が考えられる。

付録 箱形断面に対する f_N, f_M, π_{Ci} の計算式

材料が図-7に示す3種類の非線形材料(b),(c),(d)の場合の図-1に示す高さH, 幅B, 上・下フランジの板厚 t_u, t_l , 腹板の板厚 t_w の箱形断面において、式(9),(10)および(11)の f_N, f_M および π_{Ci} の計算式を以下に示す。

(1) 材料(b), (c)の場合

図-A.1に示す応力分布において、応力度の勾配が変化する点およびフランジと腹板とが接合する板厚の変化する点において応力分布を分割した場合の k 番目の要素の面積、断面の幅、断面下縁から要素の図心までの距離、要素のコンプリメンタリーエネルギー密度をそれぞれ $A_k, B_k, z_{G_k}, \omega_k$ ($k=1, \dots, q$, ただし q は分割した要素数)とすると、 k 番目の要素の $f_{N_k}, f_{M_k}, \pi_{Ci_k}$ は次式より計算することができる。

$$f_{N_k} = B_k A_k \quad (A.1)$$

$$f_{M_k} = -B_k A_k z_{G_k} \quad (A.2)$$

$$\pi_{Ci_k} = B_k \omega_k \quad (A.3)$$

ここに、 B_k は、

$$z \geq H_1 \text{ かつ } z \leq H_2 \text{ の場合 } B_k = 2t_w$$

$$z \leq H_1 \text{ または } z \geq H_2 \text{ のとき } B_k = B$$

となる。 A_k は引張応力度の場合には正の値、圧縮応力度の場合には負の値とする。

f_N, f_M, π_{Ci} はすべての要素を加え合わせるにより次式により計算することができる。

$$f_N = \sum_{k=1}^q f_{N_k} \quad (A.4)$$

$$f_M = \sum_{k=1}^q f_{M_k} \quad (A.5)$$

$$\pi_{Ci} = \sum_{k=1}^q \pi_{Ci_k} \quad (A.6)$$

次に、 k 番目の分割要素の下側および上側のひずみおよび応力度を図-A.2に示すごとくそれぞれ $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}$ および σ_k, σ_{k+1} と表し、 k 番目のコンプリメンタリーエネルギー密度 ω_k の計算式について述べる。

k 番目の要素の応力分布は次式で表される。

$$\sigma(z) = \sigma_{k+1} + E_k (\varepsilon(z) - \varepsilon_{k+1}) \quad (A.7)$$

ただし、 $z_k \leq z \leq z_{k+1}$

ここに、 E_k は k 番目の要素の弾性係数を示す。

σ_{k+1} におけるコンプリメンタリーエネルギー密度を β_{k+1} と仮定すると、 $\sigma(z)$ におけるコンプリメンタリーエネルギー密度 $\beta(z)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \beta(z) &= \beta_{k+1} + \frac{1}{2} (\varepsilon(z) + \varepsilon_{k+1}) (\sigma(z) - \sigma_{k+1}) \\ &= \beta_{k+1} + \frac{E_k}{2} (\varepsilon^2(z) - \varepsilon_{k+1}^2) \end{aligned} \quad (A.8)$$

また、平面保持の仮定(式(5))より、

$$dz = \frac{1}{c} d\varepsilon \quad (A.9)$$

ここに、 $c = (\varepsilon_u - \varepsilon_l) / H$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \omega_k &= \int_{z_k}^{z_{k+1}} \beta(z) dz = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left\{ \beta_{k+1} + \frac{E_k}{2} (\varepsilon^2(z) - \varepsilon_{k+1}^2) \right\} dz \\ &= \beta_{k+1} (z_{k+1} - z_k) + \frac{E_k}{2c} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\varepsilon^2(z) - \varepsilon_{k+1}^2) d\varepsilon \\ &= \beta_{k+1} (z_{k+1} - z_k) \end{aligned}$$

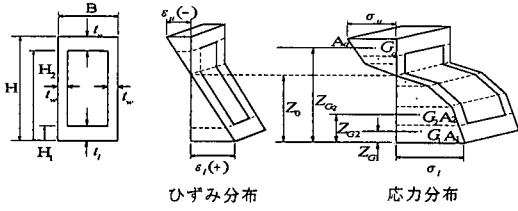


図-A.1 材料(b), (c)の場合の箱形断面のひずみ分布および応力分布

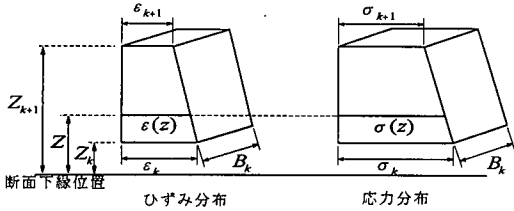


図-A.2 分割したk番目の要素におけるひずみ分布および応力分布

$$+ \frac{E_k}{c} \left\{ \frac{1}{6} (\varepsilon_{k+1}^3 - \varepsilon_k^3) - \frac{\varepsilon_{k+1}^2}{2} (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k) \right\} \quad (A.10)$$

上式は $\varepsilon_k \geq 0, \varepsilon_{k+1} \geq 0$ の場合および $\varepsilon_k \leq 0, \varepsilon_{k+1} \leq 0$ の場合のいかなる場合についても適用することができる。

(2) 材料(d)の場合

材料(d)を用いた場合の f_N, f_M, π_{Cl} の計算も材料(b),(c)の場合と同様、板厚の変化する点において応力度分布を分割し、それぞれの要素の $f_{N_k}, f_{M_k}, \pi_{Cl_k}$ を計算し、式(A.4),(A.5),(A.6)によりすべての要素について加えあわせることにより計算することができる。材料(d)を用いた場合の箱形断面のひずみ分布および応力分布を断面下縁のひずみ ε_1 が $\varepsilon_1 \geq 0$ となる場合について図-A.3に示す。k番目の要素の $f_{N_k}, f_{M_k}, \pi_{Cl_k}$ の計算式は、図-A.3(b)に示す断面下縁から断面内のひずみの値が0.0となる位置までの距離を z_0 とし、 ε_1 の符号および z_0 の位置により次に述べる(i),(ii),(iii),(iv)のように場合分けをして、それぞれつぎのように計算することができる。

(i) $\varepsilon_1 \geq 0$ かつ $0 \leq z \leq z_0$ の場合

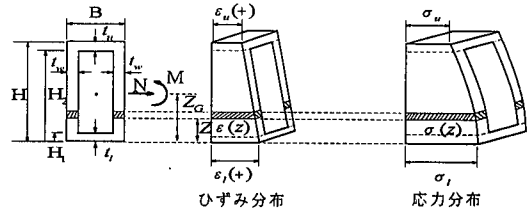
材料(c)の応力度-ひずみ関係より

$$\varepsilon(z) = a\sigma^2(z) + b\sigma(z) \quad (A.11)$$

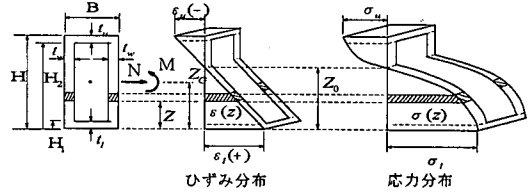
ここに、 $a=6.0 \times 10^{-10} \text{cm}^4/\text{kgf}^2$ ($6.239 \times 10^{-8} \text{mm}^4/\text{N}^2$), $b=9.0 \times 10^{-7} \text{cm}^2/\text{kgf}$ ($9.177 \times 10^{-6} \text{mm}^2/\text{N}$)である。

式(5)を(A.11)へ代入することにより

$$cz + \varepsilon_1 = a\sigma^2(z) + b\sigma(z) \quad (A.12)$$



(a) $\varepsilon_1 \geq 0, z_0 \geq 0$ の場合



(b) $\varepsilon_1 \leq 0, z_0 \geq 0$ の場合

図-A.3 材料(d)の場合の箱形断面のひずみ分布および応力分布

となり、上式をzについて解くと

$$z = \frac{1}{c} \{ a\sigma^2(z) + b\sigma(z) - \varepsilon_1 \} \quad (A.13)$$

となる。さらにdzは

$$dz = \frac{1}{c} \{ 2a\sigma(z) + b \} d\sigma \quad (A.14)$$

となる。

したがって、k番目の要素の $f_{N_k}, f_{M_k}, \pi_{Cl_k}$ はそれぞれ次式で計算することができる。

$$\begin{aligned} f_{N_k} &= B_k \int_{z_k}^{\varepsilon_{k+1}} \sigma(z) dz \\ &= \frac{B_k}{c} \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} \sigma(z) \cdot \{ 2a\sigma(z) + b \} d\sigma \\ &= \frac{B_k}{c} \left\{ \frac{2a}{3} (\sigma_{k+1}^3 - \sigma_k^3) + \frac{b}{2} (\sigma_{k+1}^2 - \sigma_k^2) \right\} \end{aligned} \quad (A.15)$$

$$\begin{aligned} f_{M_k} &= -B_k \int_{z_k}^{\varepsilon_{k+1}} \sigma(z) \cdot z dz \\ &= -\frac{B_k}{c^2} \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} \sigma(z) \cdot \{ a\sigma^2(z) + b\sigma(z) - \varepsilon_1 \} \cdot \{ 2a\sigma(z) + b \} d\sigma \\ &= \frac{B_k}{c^2} \left\{ -\frac{2a^2}{5} (\sigma_{k+1}^5 - \sigma_k^5) - \frac{3ab}{4} (\sigma_{k+1}^4 - \sigma_k^4) \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^2 - 2a\varepsilon_1}{3} (\sigma_{k+1}^3 - \sigma_k^3) + \frac{b\varepsilon_1}{2} (\sigma_{k+1}^2 - \sigma_k^2) \right\} \end{aligned} \quad (A.16)$$

$$\pi_{Cl_k} = B_k \int_{z_k}^{\varepsilon_{k+1}} \left\{ \int_0^{\sigma(z)} \varepsilon(\sigma) d\sigma \right\} dz$$

$$= B_k \int_{z_k}^{\varepsilon_{k+1}} \left\{ \frac{a}{3} \sigma^3(z) + \frac{b}{2} \sigma^2(z) \right\} dz$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{B_k}{c} \int_{\sigma_{z_i}}^{\sigma_{z_{i+1}}} \left\{ \frac{a}{3} \sigma^3(z) + \frac{b}{2} \sigma^2(z) \right\} \cdot \{2a\sigma(z) + b\} d\sigma \\
&= \frac{B_k}{c} \left\{ \frac{2a^2}{15} (\sigma_{z_{i+1}}^5 - \sigma_{z_i}^5) \right. \\
&\quad \left. + \frac{ab}{3} (\sigma_{z_{i+1}}^4 - \sigma_{z_i}^4) + \frac{b^2}{6} (\sigma_{z_{i+1}}^3 - \sigma_{z_i}^3) \right\} \quad (A.17)
\end{aligned}$$

ここに、上式の $\sigma_{z_{i+1}}$ 、 σ_{z_i} は、式(A.11)の $\varepsilon(z)$ にそれぞれ $\varepsilon_{z_{i+1}}$ 、 ε_{z_i} を代入して解くことにより求められる。

また B_k は、

$$z \geq H_1 \text{ かつ } z \leq H_2 \text{ の場合 } B_k = 2I_w$$

$$z \leq H_1 \text{ または } z \geq H_2 \text{ のとき } B_k = B$$

となる。

(ii) $\varepsilon_i \geq 0$ かつ $z_0 \leq z \leq H$ の場合

応力度-ひずみ関係より

$$cz + \varepsilon_i = -a\sigma^2(z) + b\sigma(z) \quad (A.18)$$

z について解くと

$$z = \frac{1}{c} \left\{ -a\sigma^2(z) + b\sigma(z) - \varepsilon_i \right\} \quad (A.19)$$

さらに dz は

$$dz = \frac{1}{c} \left\{ -2a\sigma(z) + b \right\} d\sigma \quad (A.20)$$

よって、 f_{N_k} 、 f_{M_k} 、 π_{C_i} の計算は、式(A.15)、(A.16)、(A.17)の a の代わりに $-a$ を用いて計算する。すなわち、

$$\begin{aligned}
f_{N_k} &= B_k \int_{z_i}^{z_{i+1}} \sigma(z) dz \\
&= \frac{B_k}{c} \left\{ -\frac{2a}{3} (\sigma_{z_{i+1}}^3 - \sigma_{z_i}^3) + \frac{b}{2} (\sigma_{z_{i+1}}^2 - \sigma_{z_i}^2) \right\} \quad (A.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{M_k} &= -B_k \int_{z_i}^{z_{i+1}} \sigma(z) \cdot z dz \\
&= \frac{B_k}{c^2} \left\{ -\frac{2a^2}{5} (\sigma_{z_{i+1}}^5 - \sigma_{z_i}^5) + \frac{3ab}{4} (\sigma_{z_{i+1}}^4 - \sigma_{z_i}^4) \right. \\
&\quad \left. - \frac{b^2 + 2a\varepsilon_i}{3} (\sigma_{z_{i+1}}^3 - \sigma_{z_i}^3) + \frac{b\varepsilon_i}{2} (\sigma_{z_{i+1}}^2 - \sigma_{z_i}^2) \right\} \quad (A.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{C_i} &= B_k \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left\{ \int_0^{\sigma(z)} \varepsilon(\sigma) d\sigma \right\} dz \\
&= \frac{B_k}{c} \left\{ \frac{2a^2}{15} (\sigma_{z_{i+1}}^5 - \sigma_{z_i}^5) \right. \\
&\quad \left. - \frac{ab}{3} (\sigma_{z_{i+1}}^4 - \sigma_{z_i}^4) + \frac{b^2}{6} (\sigma_{z_{i+1}}^3 - \sigma_{z_i}^3) \right\} \quad (A.23)
\end{aligned}$$

(iii) $\varepsilon_i \leq 0$ かつ $0 \leq z \leq z_0$ の場合

式(A.15)、(A.16)、(A.17)の f_{N_k} 、 f_{M_k} 、 π_{C_i} の計算式におい

て、 ε_i 、 ε_u 、 σ_i 、 σ_u の代わりに $-\varepsilon_i$ 、 $-\varepsilon_u$ 、 $-\sigma_i$ 、 $-\sigma_u$ を用いてそれぞれ f_{N_k} 、 f_{M_k} 、 π_{C_i} を計算し、 f_{N_k} 、 f_{M_k} についてはその値に負号をつけなければならない。ただし、 π_{C_i} については負号を付ける必要はない。

(iv) $\varepsilon_i \leq 0$ かつ $z_0 \leq z \leq H$ の場合

(iii)の場合と同様に、式(A.21)、(A.22)、(A.23)の f_{N_k} 、 f_{M_k} 、 π_{C_i} の計算式において、 ε_i 、 ε_u 、 σ_i 、 σ_u の代わりに $-\varepsilon_i$ 、 $-\varepsilon_u$ 、 $-\sigma_i$ 、 $-\sigma_u$ を用いてそれぞれ f_{N_k} 、 f_{M_k} 、 π_{C_i} を計算し、 f_{N_k} 、 f_{M_k} についてはその値に負号をつけなければならない。ただし、 π_{C_i} については負号を付ける必要はない。

参考文献

- 1) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, V耐震設計編, 平成8年12月.
- 2) 建設省, (財)日本建築センター 編集: 改正建築基準法令集, 平成12年.
- 3) 建設省監修: 平成12年6月1日施行 改正建築基準法(2年目施行)の解説, 新日本法規出版(株), 平成12年.
- 4) Cohn, M.Z. and Maier, G.: *Engineering plasticity by mathematical programming*, Pergamon, Part II 7,8, 135-196, 1979.
- 5) Ishikawa, N.: Iterative Optimal Plastic Design of Steel Frames, 土木学会論文集, 第237号, pp.109-119, 1975.5.
- 6) 澤田樹一郎, 中村雄治, 松尾彰: 反復線形計画法を用いた平面ラーメンの最適弾性・塑性設計法, 日本建築学会構造系論文集, 第485号, pp.117-125, 1996.7.
- 7) 大久保禎二, 和多田康男: エネルギー原理およびSQPによるトラス構造物の材料非線形解析法に関する研究, 土木学会論文集, 第374号/I-6, pp.427-436, 1986.10.
- 8) Ohkubo, S., Watada, Y. and Fujiwaki, T.: Nonlinear analysis of truss by energy minimization, *Computers & Structures*, Vol.27, No.1, 129-145, 1987.
- 9) 大久保禎二, 藤脇敏夫: コンプリメンタリーエネルギー最小化によるはり構造物の材料非線形解析法, 土木学会論文集, 第398号/I-10, pp.227-236, 1988.10.
- 10) Ohkubo, S. and Makino, K.: Material nonlinear analysis of rigid plane frames by total complementary energy minimization, *Journal of Structural Eng. and Earthquake Eng.*, Vol.7, No.1, 25s-36s, 1990.
- 11) Ohkubo, S. and Makino, K.: Nonlinear stress and displacement analysis of rigid plane frames by total complementary energy minimization, *Computers & Structures*, 44(1/2), 193-206, 1992.
- 12) Ohkubo, S. and Watada, Y.: A new optimum design method for material nonlinear structures without behavior sensitivities based on energy principle, *Proc. of WCSMO-1*, 429-436, 1995.
- 13) 大久保禎二, 和多田康男, 大森久義: エネルギー原理に基づく材料非線形トラス構造物の挙動の感度係数を用いない最適設計法に関する研究, 土木学会論文集, No.507/I-30, pp.77-87, 1995.1.
- 14) 大久保禎二, 谷脇一弘: 鋼斜張橋のケーブル配置および部材断面の最適設計法, 土木学会論文集, No.428/I-15, 1991.4.
- 15) 大久保禎二, 谷脇一弘: 構造形状・部材の材種・断面寸法を設計変数としたトラス構造物の耐震最適設計法, 土木学会論文集, No.570/I-40, pp.47-61, 1997.7.

(1999. 11. 30 受付)

OPTIMUM DESIGN METHOD FOR NONLINEAR FRAME STRUCTURES WITH BOX SECTIONS BASED ON ENERGY PRINCIPLES

Kazuhiro TANIWAKI and Sadaji OHKUBO

This paper presents a unified and efficient new optimum design method for nonlinear plane frame structures with box sections. The material nonlinear structural analysis problem is formulated as the total complementary energy minimization problem, and the necessary conditions for analysis problem are derived. Then the primary optimum design problem is reformulated considering both the primary design constraints and the necessary conditions for the analysis problem. In the reformulated optimum design problem the structural behaviors are also dealt with as the design variables. The reformulated optimum design problem is solved efficiently by using the gradient projection method. In the optimization process, the complementary energy sensitivities with respect to primary design variables at each member element is used, however the calculation of behavior sensitivity with respect to primary design variables is not necessary. The rigorousness, efficiency and reliability of the proposed method are demonstrated by comparing the results obtained by the dual method in which the behavior sensitivities are used.