土木学会論文集 No.667／IV-50, 1-14, 2001.1

不確実性下における最適補修投資ルール

栗野盛光[1]・小林潔司[2]・渡辺晴彦[3]

[1]学生会員　工修　京都大学大学院博士後期課程　工学研究科土木工学専攻(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)
[2]正会員　工博　京都大学教授　大学院工学研究科土木工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)
[3]正会員　工博　（株）日水コン環境事業部(〒163-1122 東京都新宿区西新宿6-22-1)

本研究では，不確実な需要変動下での社会資本の最適補修タイミングを決定する問題をとりあげる．期待総費用を最小にするような補修投資の最適なタイミングを決定する問題を最適インパルス制御問題として定式化し，最適補修投資戦略が最適インパルス制御ルールとして表現されることを示す．その上で，各時点の社会資本のサービス水準という局所的情報に基づいて補修投資を行うべきかどうかを判定する補修投資ルールを提案する．さらに，数値計算事例を用いて補修投資ルールの適用方法を示す．

Key Words *: repairing policy, uncertainty, decision rules, optimal impulse control problem*

1．はじめに

社会資本は，施設利用や自然現象に基づいた減耗を通じて劣化していく．社会資本の維持・更新が必要とされる局面としては，１）構造物の力学的強度（性能水準）が低下した場合，２）構造物の劣化により施設の物理的なサービス水準が低下する場合がある．前者が生じた場合，構造物の更新（取り替え）投資が必要となる．一方，後者の場合，サービス水準が低下した施設の補修投資が必要となる．両者の問題には，それぞれ異なったアプローチが必要となるが，本研究では後者の問題に着目する．中でも，施設に対する累積需要や自然的劣化によりサービス水準が低下するような社会資本をとりあげる．このような補修投資の例としては，たとえば道路舗装の補修をはじめとする多くの交通施設の維持・補修工事が該当する．

社会資本の補修投資は，物理的に低下したサービス水準を増加させる投資である．以下，簡単のために「機能」という用語を用いるが，特に断らない限り「機能」とは施設の「物理的なサービス水準」を意味している．補修投資を行う場合,「補修投資をどのようなタイミングで実施するか」，あるいは「どのような水準の補修投資を行うべきか」を決定することが重要な問題となる．従来より，社会資本の最適補修問題に関しては膨大な研究が蓄積されている．その多くは，社会資本の機能低下プロセスを確定的な変化過程として記述し，施設補修のための評価関数を最大にしうるような補修投資ルールを設計することを目的としている．しかし，各期の施設需要が確率的に変動する場合や施設の劣化過程に不確実な変動がある場合，従来の確定的な補修投資ルールだけでは十分に対応できない．

２．(２）で述べるように，施設に対する需要が確率的に変動する場合，施設の累積需要には予測不可能な非定常的な変動が生じることになる．さらに，施設の劣化過程にも不確定な要素が介在するため，施設の機能劣化の過程を確定的に把握することが困難となる．したがって，事前に確定的な施設補修計画を策定することは困難である．むしろ，それぞれの時点において観察される施設の機能水準や施設に対する需要ポテンシャルという局所的な情報を用いながら，各時点において補修投資の有無，投資水準の内容を判断するための補修ルールを設計することが重要である．

本研究では，施設需要に不確実な変動が生じるような社会資本の最適補修戦略について考察する．特に，刻々と変化する社会資本の機能水準と施設に対する需要量の観測値に基づいて，補修投資のタイミングと投資水準の内容を適応的に決定するような補修投資ルールを設計する問題をとりあげる．以下，２．では本研究の基本的な考え方を示す．３．において最適補修問題を定式化する．４．では，最適補修問題を準変分不等式問題として表現し最適補修投資ルールを導出する．５．で数値計算事例を示す．

2．本研究の基本的立場

(1) 従来の研究

最適補修問題に関しては，オペレーションズ・リサーチの分野において最適取り替え問題としてすでに確立した研究分野となっている[1)]．特に，破壊や故障がある定常的な確率過程に従って生起するようなシステム

の最適補修戦略に関しては膨大な研究が蓄積されている[1),2)]．そこでは，最適補修問題を確率動的計画問題，あるいはマルコフ決定過程として定式化しており，最適保全・補修戦略は一連の確定的ルールとして定義される．最適補修モデルと類似の数学的構造を持つ在庫管理モデル[1)]に関しても，Scarfによる (S,s) 問題[3),4)]を契機として研究が蓄積された．そこでは，最適在庫管理ルールは在庫投資が行われる直前の在庫量 s と直後の在庫量 S の組 (S,s) として表される．Scarfの (S,s) 問題の特徴は，事前の最適在庫計画ではなく，在庫量というその時々の局所的な情報に基づいて在庫投資を決定する適応的ルールを決定する点にある．最近では，非定常的な需要変動下での在庫投資モデル[5),6)]も開発されている．補修投資前の施設の機能水準を在庫投資問題における s に，投資後の機能水準を S と解釈すれば，Scarfの (S,s) ルールを最適補修問題に応用できる．

一方，公共施設の補修問題に関しては，土木計画の分野をはじめとして研究が蓄積されてきた．例えば，機能水準を確定的に扱い補修費用の最小化や工事量の平準化をめざした補修計画モデル[7),8)]や，施設需要との関連を定型化した補修モデル[9),10)]が提案されているが，そこでは施設需要は確定的な扱いになっている．本研究では，劣化過程が施設に対する累積需要に影響を受けるような土木施設を対象とする．施設需要に不確実性が存在する場合，3．で示すように累積需要や劣化過程は非定常的な確率過程に従い，定常的な故障過程を仮定した伝統的な最適補修モデルを適用できない．また，補修投資の戦略は事前の確定的な補修計画として一意的に決定すべきものではなく，Scarf流の (S,s) ルールのように，施設需要や，施設の劣化の程度という事後的な観測情報に基づいて補修投資の実行の有無やその内容をそのつど決定する事後的ルールの方が望ましい．最近，内田[11)]は，道路施設を対象として機能水準の劣化に関する評価指標を提案した．評価指標は，補修投資が必要となる道路施設の機能水準と補修後の機能水準の組で表され，Scarfの (S,s) ルールと類似の内容となっている．しかし，補修ルールは道路施設をとりまく需要条件と無関係に設定されており，厳密にはScarfの意味における状況依存的ルールではない．また，補修ルールが導出された理論的な根拠が明らかではない．

本研究では，Scarfの (S,s) ルールの考え方に基づいた土木施設の最適補修戦略を求める方法を提案する．その際，施設の累積需要が非定常確率過程に従うことより，Sulemによる非定常在庫投資理論[5),6)]に着目する．さらに，在庫投資理論を最適補修問題に適用するにあたり，1）累積需要と劣化過程が同時に非定常な確率過程に従って変動する，2）利用者費用が施設需要と劣化水準の双方に同時に規定される，3）投資費用関数が非線形性を有する，という最適補修問題の特性を明示的に考慮したような最適補修モデルを定式化する．

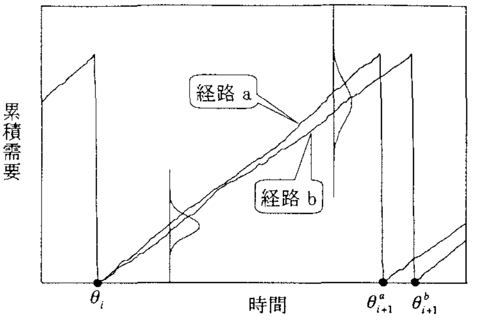

図-1　累積需要の変化過程

（2）将来需要の不確実性

施設需要がある定常的な確率過程に従って変動している場合を考える．すなわち，ある微小な期間における施設需要が確定的な需要量と，その時々における確率的な変動成分により構成されている．いま，ある期間における施設需要が偶然的な理由により，確定的な水準より低いレベルに陥ったと考えよう．当該期における施設需要が減少した結果，それ以降のすべての時点における累積需要は一律に減少する．すなわち，各時点の確率的な変動は累積的に集計化され，将来時点における累積需要に累積的な影響を及ぼす．より遠い将来時点における累積需要ほど，より多くの不確実性に直面する．施設需要に不確実性が存在する場合，施設管理者が管理する累積需要は過去の偶然的な需要変動に対する経路依存性を示すようになる．図-1は，時点 θ_i において補修投資を行った後の累積需要の変化を示したものである．この図では，ある時点における累積需要が，あるトレンド値を中心として，その回りで正規分布に従って分布している．さらに，各期における不確実な需要変化が時間を通じて累積され，遠い将来になるほど累積需要はより大きな分散に従って分布する．図には時点 θ_i 以降の累積需要の発展経路 a, b を例示している．累積需要の発展経路は無数に存在し，現時点 θ_i においてつぎの補修投資のタイミング θ_{i+1} を確定的に予測できない．

（3）補修投資ルール

施設の機能水準は時間とともに劣化する．施設の劣化過程は施設の累積的需要や時間的な自然的劣化に支配される．施設需要が多ければ劣化の速度も早いだろう．図-2は累積需要が図-1の2つの経路 (a,b) に従って変化する場合，それと対応して施設の機能水準がど

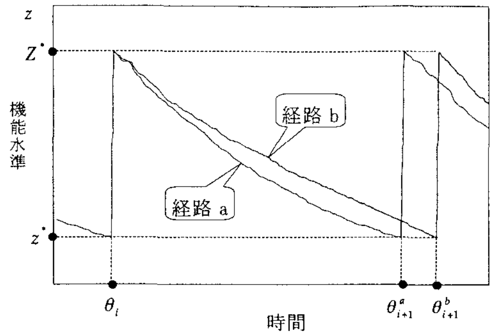

図-2　機能水準の変化過程

のように劣化するかを示している．時刻θ_iで補修投資を行えば，施設の機能水準はある水準Z^*まで回復（上方にジャンプ）する．補修投資後，施設の劣化過程が再び始まる．**図-1**において時刻θ_i以降の累積需要の経路bが経路aよりも下方に推移するため，経路bの施設の劣化速度は経路aよりスローダウンする．このため，**図-2**において経路bは経路aより上方に位置している．経路aでは時刻θ_{i+1}^aで機能水準z^*に達し補修投資が行われるが，経路b上では補修投資のタイミングが遅れ時点θ_{i+1}^bとなる．このように施設需要に不確実な変動がある場合，将来の累積需要の動向は本質的に不確実である．したがって，事前につぎの補修投資のタイミングを計画しておくことはできない．施設管理者は機能水準や施設需要の水準をモニタリングしながら，最新の情報に基づいて「すぐに補修投資を実施すべきか」，あるいは「補修投資を見送るか」，「補修する場合にはどの程度の機能水準に回復すべきか」を決定する．

施設が劣化すればするほど，それを利用する顧客が負担する利用者費用や施設利用が環境にもたらす社会的費用で構成される可変的費用が増加する．施設管理者は時間を通じた可変的費用と施設の補修投資費用の和として定義される期待総費用の現在価値（期待ライフサイクルコスト）を最小にするように補修投資のタイミングと補修投資の水準を決定する．一般に，施設の補修投資費用は，補修投資を行う時点での施設の機能水準や補修投資後の機能水準に依存する．施設の補修投資を実施する最適な補修前の機能水準z^*と補修後の機能水準Z^*が存在するだろう．たとえば，施設需要が多い施設では機能の劣化速度は早くなり，施設の劣化による総可変的費用が増加するだろう．施設の需要条件が異なれば，最適補修投資を行うべきタイミングや最適補修投資戦略(z^*, Z^*)は異なった値となるだろう．本研究では，施設管理者が各時点の機能水準に関する最新の情報に基づいて，補修投資を実施するか否かを決定する適応的ルールを決定する問題を考える．このような補修ルールは施設が置かれている需要条件に依存する．そこで，施設の需要条件と最適補修ルールの関係を分析することが必要となる．以上の問題意識に基づいて，本研究では需要条件と最適補修ルールの関係を１つの管理図として整理する方法を提案する．

3．最適補修モデルの定式化

（1）モデル化の前提条件

施設管理者が，初期時点から無限に続く時間軸上で土木施設の機能水準と需要水準を観察しながら，施設の物理的機能を回復するために補修投資を行う問題を考えよう．以下，補修投資後の機能水準を回復水準と呼ぼう．回復水準は機能水準の劣化過程と需要水準の変動過程に影響を受ける．ここでは，施設機能が劣化すれば可変的費用が増大するようなタイプの社会資本を考える．このような社会資本の例としては，例えば道路等の交通施設が該当しよう．施設の機能水準が低下すれば，燃費，車体の劣化損傷，事故確率の増加等により利用者費用が増加する．また，舗装の劣化は騒音の増大をもたらし，道路利用による社会的費用も増加する．ここで，施設の機能水準は施設需要に影響を及ぼさないと仮定する．例えば道路の利用者は上述のような利用者費用を負担しているという意識は通常持っていないだろう．このように考えれば，施設の機能水準が需要水準に影響を及ぼさないという仮定は一定の妥当性を持っている．さらに，施設需要は外生的に与えられる不確実要素のため3.（2）で記述するような定常的な確率過程に従って変動すると考える．一方，施設の機能水準は累積的な施設需要や自然的劣化により時間を通じて低下していく．施設需要が不確実であるため累積的需要を確定的に把握できない．したがって，施設の機能水準の劣化過程は累積的需要，自然的劣化という２種類の不確実性に直面する．補修投資は固定費用，補修前の機能水準と補修後の回復水準と対応して変化する変動費用により構成される．施設管理者は補修費用と可変的費用で構成される期待費用の現在価値の総和を最小にするように，補修投資のタイミングと回復水準を決定する．なお，本研究では土木施設の力学的強度の劣化は生じないと考える．力学的強度が劣化する場合には，施設の更新（取り替え）投資と補修投資の問題を同時に考える必要がある．また，施設需要はトレンドのない定常的な確率過程に従うと考える．トレンドが存在する場合には，施設の容量拡大投資（あるいは施設廃棄）と補修投資の同時決定が必要となる．本研究ではこのような施設の更新や容量拡大の可能性がない最適補修問題に焦点を絞ることとする．

（2）施設需要の変化過程のモデル化

初期時点からt期までの施設の累積需要を$s(t), t \in [0, \infty)$と表す．いま，累積需要$s(t)$が伊藤過程

$$ds(t) = \beta dt + \sigma dW_1(t) \tag{1a}$$

$$s(0) = s_0 \tag{1b}$$

に従うと仮定する．ここに，βは平均需要密度，βは分散の程度を表すパラメータであり，ともに時間tおよび状態変数$s(t)$のどちらにも依存しない実定数であると仮定する．もちろん，β, σが$s(t), t$に依存するような確率過程を考えることも可能である．ここでは，プロトタイプモデルを定式化するにあたり，議論の見通しをよくするためにβ, σが定数であると仮定する．さらに，$W_1(t)$はウィナー過程であり，

1) $W_1(t)$は連続であり$W_1(0) = 0$である，
2) $W_1(t)$は正規分布$N(0, t)$に従う，
3) 増分$W_1(s+t) - W_1(s)$は正規分布$N(0, t)$に従い，時刻sまでの$W_1(t')$の履歴とは独立である，

という3つの性質を満足する[12),13)]と仮定する．累積需要過程(1a)では，累積需要の連続性が成立するため瞬間的需要密度はゼロである．このような施設としては，たとえば道路区間のように，サービスが瞬間的には競合的であり，同時に多数の顧客が利用できないような施設が該当する．いま，施設需要は微小な時間区間Δに対して定義されるとしよう．時間時期を微小幅Δの間隔に分割し，時刻t_kを$t_k = k\Delta$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$と表現する．時刻t_kから時刻t_{k+1}における期間を期間kと呼ぶ．そして，k期における施設需要を$\hat{s}(k) = s(t_{k+1}) - s(t_k)$として，離散化した施設需要$\hat{s}(k)$を考えよう．このとき，$k$期における施設需要は，平均$E[\hat{s}(k)] = \beta\Delta$，分散$Var[\hat{s}(k)] = \sigma^2\Delta$の正規分布に従う．また，確率変数$\hat{s}(k)$と$\hat{s}(k')$は互いに独立であるから，確率過程$\{\hat{s}(k) | k = 0, 1, 2, \cdots\}$は定常過程に従うこととなる．この時，$\Delta \to dt$の極限操作により，累積需要過程(1a)を定義することができる．累積需要の変動過程が式(1a)で表される時，時刻tにおける累積需要は式(1a)を伊藤積分することにより

$$s(t) = s_0 + \beta t + \sigma W_1(t) \tag{2}$$

と表される．上式の右辺第3項はウィナー積分の結果と対応している．式(2)より，時刻tにおける$s(t)$の期待値，及び分散は

$$E[s(t)|s_0] = s_0 + \beta t \tag{3a}$$

$$Var[s(t)] = \sigma^2 t \tag{3b}$$

で表される．ある任意時刻$t > 0$までの累積需要が式(2)に従って変化し，その時点の累積需要が$\bar{s}(t)$となったとしよう．この時，時刻tにおいて将来時刻$t' > t$における累積需要の期待値を求めれば

$$E[s(t')|\bar{s}(t)] = \bar{s}(t) + \beta(t' - t) \tag{4}$$

となる．このことは，将来の累積需要の予測値はその予測を行った時点における累積需要の水準$\bar{s}(t)$に依存することを意味している．将来の累積需要の予測は現時点における累積需要の水準に基づいて常に修正を余儀なくされる．また，式(3b)より，tが大きいほど累積需要の分散は大きくなる．このことは遠い将来ほど，累積需要の不確実性が大きくなることを意味する．

本研究では，各期における需要がある定常過程に従って変動することを想定している．累積需要の変動過程を式(1a)を用いて記述することにより，のちに述べるように，最適補修ルールを施設の機能水準に関する情報のみを用いて記述することが可能となる．しかし，施設が置かれている環境によっては，施設需要そのものが非定常過程に従って変動すると考えた方が望ましい場合もあるだろう．当然のことながら，需要の変動過程の定式化が異なれば，最適補修問題の定式化も異なってくる．需要変動過程の特定化とモデルの拡張に関する議論については５．（５）で議論する．以下では，施設の累積需要が式(1a)に従うことを前提にして議論をすすめる．

（3）補修過程のモデル化

施設の機能水準は顧客の施設利用と自然的減耗により低下していくと考える．施設の機能水準$z(t)$が

$$dz(t) = -\rho z(t)ds(t) - \delta z(t)dt - \gamma z(t)dW_2(t) \tag{5a}$$

$$z(0) = z_0 \tag{5b}$$

に従って変化すると仮定する．ここに，$W_2(t)$は平均0，分散tのウィナー過程であり，$W_1(t)$と同一の条件を満足する．そして，$W_2(t)$は$W_1(t)$と互いに独立であると仮定する．ρは施設需要に依存する劣化率，δは平均劣化率，γは自然的劣化の分散の程度を表すパラメータである．パラメータρ, δ, γは時間tおよび状態変数$s(t)$, $z(t)$に依存しない実定数であると仮定する．確率過程(5a)は施設の機能水準が幾何学的ブラウン運動[13)]に従うことを表している．この過程の意味を説明するために確率微分方程式を解いてみよう．確率過程$ln\{z(t)\}$は，伊藤の公式より

$$\begin{aligned} d[ln\{z(t)\}] &= -\left\{(\rho\beta + \delta) + \frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2 + \gamma^2)\right\}dt \\ &\quad -\rho\sigma dW_1(t) - \gamma dW_2(t) \\ &= -\rho ds(t) - \left\{\delta + \frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2 + \gamma^2)\right\}dt \\ &\quad -\gamma dW_2(t) \end{aligned} \tag{6}$$

に従う．したがって，確率微分方程式(5a)の解は

$$\begin{aligned} z(t) = z_0 \exp\Big[&-\rho\{s(t) - s_0\} - \{\delta + \frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2 + \gamma^2)\}t \\ &-\gamma W_2(t)\Big] \end{aligned} \tag{7}$$

となる．ここで，$s(t)$は時刻0から時刻tまでの累積需要を意味するので，$s(t) - s_0$は期間$[0, t]$における施設

需要の総和を表している．式(5a)は施設の機能水準が期間$[0,t]$における施設需要と自然的減耗の加重和により指数的に減耗する過程を表現している．$W_1(t), W_2(t)$の確率変動項を除けば，式(7)は従来の最適補修問題で取り上げられてきた指数的劣化曲線に他ならない．

補修投資が時刻$0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_i < \cdots$において実施され，時刻$\theta_i$に施設の機能水準が回復水準$Z(\theta_i)$に改善されると考える．補修投資前の機能水準を$z(\theta_i^-)$，補修投資後の機能水準（回復水準）を$z(\theta_i) = Z(\theta_i)$で表す．以上のような補修投資が行われる場合，施設の機能水準は以下の確率過程に従って推移する．

$$dz(t) = -\rho z(t)ds(t) - \delta z(t)dt - \gamma z(t)dW_2(t) + \sum_{i \geq 1}\{Z(\theta_i) - z(\theta_i^-)\}\iota(t-\theta_i) \tag{8a}$$

$$z(0) = z_0 \tag{8b}$$

ここで，$\iota(\cdot)$はディラックの測度(Dirac measure)であり，$t = \theta_i$の時にのみ確率測度1を，それ以外の時は確率測度0を与える．以上の補修投資過程では，補修投資によりインパルス時間$0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_i < \cdots$においてシステムの状態がジャンプするようなインパルス制御過程となっている．すなわち，制御変数はインパルス時間θ_iとインパルスの大きさ$Z(\theta_i)$からなる．点列$\{\theta_i, Z(\theta_i)\}_{i \geq 1}$をインパルス制御(impulse control)と呼ぶ．確率微分方程式(8a)を伊藤積分すれば，施設の機能水準の確率分布の時間的な推移状態を

$$z(0) = z_0 \tag{9a}$$

$$z(\theta_i) = Z(\theta_i) \tag{9b}$$

$$\begin{aligned} z(t) = z(\theta_i)\exp\Big[&-\rho\{s(t) - s(\theta_i)\} \\ &-\{\delta + \frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2 + \gamma^2)\}(t-\theta_i) \\ &-\gamma\{W_2(t) - W_2(\theta_i)\}\Big], \ (\theta_{i+1} > t \geq \theta_i) \end{aligned} \tag{9c}$$

と表せる．式(9c)より，状態変数$z(t)$の中に状態変数$s(t), s(\theta_i)$が含まれているが，時刻tにおいては累積需要$s(t)$，$s(0)$は既知であり，時刻tにおける機能水準の情報$z(t)$に既に累積需要の情報$s(t)$，$s(0)$が織り込まれている．したがって，のちに4．(2) で述べるように，最適制御問題を状態変数$z(t)$に関わる制御問題として議論することが可能となり，最適制御問題の取り扱いが極めて簡便化されることになる．これは，時刻tにおける施設需要を瞬間的需要ではなく，微小期間における累積需要の変化として定義したことの論理的な帰結である．なお，施設需要自体がウィナー過程に従って変動する場合，最適補修問題の構造は複雑にならざるを得ないが，その取り扱いについては5．(5) で改めて議論する．

(4) 最適補修問題の定式化

管理主体は総費用を最小化するように施設の維持管理を行う．総費用は可変的費用と補修投資費用で構成される．一般に，施設利用による可変的費用は施設の機能水準と施設の需要量に依存して決定される．ここで，可変的費用が施設の機能水準に依存する費用と施設需要量に依存する混雑費用の加法和で表されると仮定しよう．すなわち，利用者の道路利用により，混雑費用以外に施設の機能水準のみに依存する可変的費用が発生する．本研究では施設の機能水準が施設需要に影響を及ぼさないと仮定している．この場合，施設の機能水準が変化しても混雑費用は変化せず，機能水準の変化による可変的費用だけが変動する．以上の仮定が成立する場合には，施設の機能水準と対応して変化する可変的費用のみに焦点を絞って最適補修の問題を議論することが可能となる．のちに，5．(5) で以上の仮定を緩めた場合について議論する．

いま，施設の機能水準の劣化に応じて生じる需要1単位当たりの費用が施設の機能水準zの関数$c(z)$として表されると仮定しよう．zは施設の機能水準を1元的に表すパラメータであり，区間$(0,\infty)$で定義されていると考える．例えば，道路施設の機能水準が舗装表面の轍の程度を示すパラメータで表現されていると考えよう．$z = 0$が最悪の機能水準に対応しており，zの値が大きくなるほど機能水準は向上する．$c(z)$は任意の$z \in (0,\infty)$に対して2回連続微分可能であり，

$$c(z) > 0, \ \frac{dc(z)}{dz} < 0, \ \frac{d^2c(z)}{dz^2} > 0 \tag{10}$$

を満足すると仮定する．ここで，微小期間$[t, t+dt]$における施設需要が$ds(t)$で表されるので，微小期間$[t, t+dt]$における可変的費用は$c(z(t))ds(t)$と表現することができる．つぎに，時刻θ_iにおいて機能水準が$z(\theta_i^-)$である施設に対して補修投資により機能水準を$Z(\theta_i)$まで改善する場合を考えよう．土木施設の補修費用は，土木施設やそれが置かれている環境によって多様に異なる．補修費用関数の推定は今後の経験的研究の蓄積に委ねざるを得ないが，ここでは，補修費用は補修前の機能水準$z(\theta_i^-)$と補修投資後の回復水準$Z(\theta_i)$との双方に依存して決定されると考えよう．以下，特に断らない限り，補修投資前の機能水準$z(\theta_i^-)$をzで，補修投資後の回復水準$Z(\theta_i)$をZで表す．補修費用関数をzとZの関数

$$f(z, Z) = g(z, Z) + \kappa \tag{11}$$

で表そう．通常インパルス制御問題では，インパルス時刻に生じる費用を$(Z-z)$の関数として$f(z,Z) = g(Z-z) + \kappa$と表現する場合が多い[6),19),23)]．しかしながら，土木施設の場合，補修費用が$(Z-z)$のみに依存するとは考えにくい．むしろ，補修投資後の機能水準を大きくすればするほど，より質のいい材料，特殊な工法，綿

密な施工等が必要となり，限界的な補修投資費用が増大すると考えられる．また，補修投資直前の機能水準が小さければ小さい（劣化が進めば進むほど）ほど，限界的な補修投資費用が増大するであろう．したがって，$g(z,Z)$ は連続微分可能であり

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial g(z,Z)}{\partial z} < 0, & \frac{\partial^2 g(z,Z)}{\partial z^2} > 0 \\ \frac{\partial g(z,Z)}{\partial Z} > 0 & \frac{\partial^2 g(z,Z)}{\partial Z^2} > 0 \\ \frac{\partial^2 g(z,Z)}{\partial z \partial Z} \leq 0 & \lim_{Z\to\infty} f(z,Z) = \infty \end{array}\right\} \tag{12}$$

を満足すると仮定する．$g(z,Z)$ は z,Z に関して非凸関数となっている．また，κ は固定費用である．実際問題として，回復水準 Z の上限は有限の値をとる．限界投資費用は Z が大きくなると十分に大きくなり，最適補修水準は必ず技術的に達成可能な回復水準のレベルに求まると考える．式(11)に示すように補修投資には固定費用が存在するため，補修投資の回数を減少させることにより期待総費用を低減することができる．したがって，補修投資はインパルス制御として離散的な時刻においてのみ行使される．固定費用が存在しない場合，補修投資が連続的になされることとなり，通常の連続的な最適制御問題に帰着する．

いま，管理主体は現在価値に割り引いた期待総費用の最小化を試みると考える．すなわち，管理主体が最小化を試みる汎関数を

$$J(V) = E_V\left[\cdot\int_0^\infty c(z(t))\exp(-\alpha t)ds(t) + \sum_{i\geq 1} f(z(\theta_i^-), Z(\theta_i))\exp(-\alpha\theta_i)\right] \tag{13}$$

と定義する．ただし，α は瞬間的割引率であり，$V = \{\theta_i, Z(\theta_i)|\theta_i \geq 0, i\geq 1\}$ はインパルス制御変数を表す．いま，インパルス制御 V が与えられれば，施設の各時刻における機能水準 $z(t)$ の時間的な推移過程が式(9c)で記述できることに着目しよう．式(13)の積分は，ある機能水準のサンプル経路上で定義される伊藤積分であり，平均収束の意味で定義される．また，記号 E_V はインパルス制御 V が与えられた下で，サンプル経路 $z(t)$ 上で定義される総費用の現在価値を式(9c)で定義されるサンプル経路の確率分布に基づいて期待値をとるような条件付き期待値操作を表している．したがって，施設管理者が解くべき問題 (PO) は

$$\left.\begin{array}{l} \min_V\{J(V)\} \\ \text{subject to} \\ eqs.(1a) \quad \text{and} \quad (8a) \\ s(0) = s_0 \quad \text{and} \quad z(0) = z_0 \end{array}\right\} \tag{14}$$

と表現される．この問題は通常の最適制御問題とは異なり，離散的な時刻のみに瞬間的な制御を実施する最適インパルス制御問題となっている．

4．最適補修投資ルールの性質

（1）従来の研究の概要

最適インパルス制御では，システムの状態が離散的な瞬間的時刻におけるジャンプ（インパルス）で制御される．本研究で定式化した最適インパルス制御問題では，インパルス時刻（「いつ補修投資を実施するか」）とインパルスの強さ（「補修投資の水準をどの程度にするか」）が制御変数となる．最適制御が測度ゼロの離散的時点のみで行われる最適インパルス制御に関しては，ファイナンス工学における optimal stopping 問題や American option 問題の分野で研究[14)-17)]が進展している．これらの問題では，Dirichlet 条件と smooth pasting (Neumann) 条件付き偏微分方程式からなる自由境界問題として最適制御条件を表現できることが知られている[18)-21)]．本研究で対象としている最適補修問題も，通常の optimal stopping 問題と同様の数学的構造を持っており，既存の自由境界値問題と同様の解法を適用することが可能である．さらに，本研究では，施設需要が定常的な確率過程で表現されるような累積需要過程(1a)を持つ最適インパルス制御問題を対象としており，不確実性下における在庫制御問題における解法を適用することができる[5),6),21),22),23)]．すなわち，最適補修ルールは伝統的な在庫問題と同様に境界条件，smooth pasting 条件の下で常微分方程式を解くという簡単な問題に帰着される．すなわち，常微分方程式の解を求めることにより，各時点におけるルーティン的な観測結果に基づいて補修投資を行うべきか否かを決定するための簡便な補修投資ルールを導出できる．

（2）最適インパルス制御

時刻 t の機能水準を $z(t) = z$ と表そう．最適値関数 $\Phi(z)$ を時刻 t から最適インパルス制御を行使することで達成可能な最小期待総費用により定義しよう．時刻 t の現在価値で評価した最適値関数は

$$\Phi(z) = \min_V E\left[\int_t^\infty c(z(u))\exp\{-\alpha(u-t)\}ds(u) + \sum_{i\geq i_t+1} f(z(\theta_i^-), Z(\theta_i))\exp\{-\alpha(\theta_i - t)\}\right] \tag{15}$$

と定式化できる．ただし，$u \geq t$ は時刻，i_t は初期時点から時刻 t までに補修投資を行った回数を表す．したがって，任意の $i \geq i_t+1$ に対して $\theta_i \geq t$ が成立する．最適補修問題を最適インパルス制御問題として定式化した場合，重要な意思決定問題は，その時点における施設の機能水準 $z(t)$ に関する情報の下で，「いま，すぐに補修投資を実施すべきか？　実施する場合，投資水準をどの程度実施すべきか？」，あるいは「補修投資を将来に見送るべきか？」を決定する問題として定式化できる．

いま，時刻tにおいて施設の機能水準がzであり，最適値関数$\Phi(z)$が既知であると仮定しよう．この時，施設管理者は1）いま，すぐに補修投資を行う場合，2）補修投資を見送る場合という2つのシナリオを考える．

a）補修投資を行う場合

時刻tに補修投資を行った場合，施設の機能水準はzからZにジャンプする．将来時点にわたって最適補修投資（最適インパルス制御）が実施されるとしよう．この時，施設の回復水準Zの下で達成される最適値関数は$\Phi(Z)$と表せる．一方，施設の補修費用は$f(z,Z)$であり，補修投資がもたらす期待総費用は$f(z,Z)+\Phi(Z)$と表せる．したがって，時刻tに補修投資を実施した場合，最適な回復水準Z^*は

$$Z^* = \arg\min_{Z}\{f(z,Z)+\Phi(Z)\} \tag{16}$$

で定義される．ここに，記号argは期待総費用$f(z,Z)+\Phi(Z)$の最小値を与える回復水準Zを意味している．いま，水準z^*において補修投資を行うことが最適な場合，$\Phi(z^*)=f(z^*,Z^*)+\Phi(Z^*)$が成立する．ここに，$\Phi(z^*)$は水準$z^*$における最適値関数である．最適値関数は期待総費用の最小値を表していることより，一般的に

$$\Phi(z)-\min_{Z}\{f(z,Z)+\Phi(Z)\}\leq 0 \tag{17}$$

が成立する．時刻tにおいて補修投資が行われるのは，その時刻に回復水準Z^*の補修投資を行うことにより，期待総費用が最小化される時，その時のみである．すなわち，時刻tに最適補修投資が実施される場合にのみ式(17)が等号で成立する．一方，式(17)が不等式で成立する場合，補修投資は実施されない．

b）補修投資を行わない場合

時刻tにおいて補修投資を見送り，微小期間$[t,t+dt]$がそのまま経過したとしよう．式(1a),(8a)に従ってシステムの状態が推移し，時刻$t+dt$において施設の機能水準が$z(t+dt)$に到達したと考えよう．さらに，時刻$t+dt$以降，最適インパルス制御を実施した場合，時刻$t+dt$時点で評価した最適値関数は$\Phi(z(t+dt))$と表される．この時，このような戦略に従った場合に得られる時刻tで評価した期待総費用$\Phi^\circ(z)$は微小期間$[t,t+dt]$の間の可変的費用の現在価値と時刻$t+dt$以降に要する最適期待費用の現在価値の和

$$\Phi^\circ(z)=E\left[\int_t^{t+dt}c(z(u))\exp\{-\alpha(u-t)\}ds(u)\right.$$
$$\left.+\exp(-\alpha dt)\Phi(z(t+dt))\right] \tag{18}$$

で表される．最適値関数$\Phi(z)$が時刻tにおける期待総費用の最小値を表していることより

$$\Phi(z)\leq\Phi^\circ(z) \tag{19}$$

が成立する．時刻tで補修投資を見送ることが最適であれば，式(19)が等号で成立する．一方，時刻tにおいて補修投資を行うことが最適であれば，補修投資を見送ったことによる期待総費用$\Phi^\circ(z)$は最適期待費用$\Phi(z)$より大きな値をとる．したがって，最適補修投資過程においては，不等式(17),(19)のうち，どちらか一方が必ず等号で成り立たなければならない．

（3）最適化条件

不等式(17),(19)のいずれか一方のみが常に等号で成立するような戦略が最適補修投資戦略となる．このような補修投資戦略の最適条件を具体的に求めてみよう．最適値関数$\Phi(z)$の2回連続微分可能性を仮定しよう（**付録I**参照）．式(18)の右辺をdtに関してTaylor展開し，伊藤の公式を用いれば，

$$E[\Phi(z(t+dt))]=\Phi(z)-(\rho\beta+\delta)z\frac{d\Phi}{dz}dt$$
$$+\frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2+\gamma^2)z^2\frac{d^2\Phi}{dz^2}dt+o(dt) \tag{20}$$

を得る（**付録II**参照）．ここで，$o(dt)$は高次の微小項である．式(20)を用いると，式(19)は次式で表される．

$$\Phi(z)\leq c(z)\beta dt+\exp(-\alpha dt)\Big[\Phi(z)-(\rho\beta+\delta)z\frac{d\Phi}{dz}dt$$
$$+\frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2+\gamma^2)z^2\frac{d^2\Phi}{dz^2}dt\Big]+o(dt) \tag{21}$$

両辺をdtで割り，$\lim_{dt\to0}$の極限をとると式(21)は

$$\Psi\Phi+c(z)\beta\geq 0 \tag{22}$$

となる（**付録II**参照）．ここで，Ψは微分演算子であり，

$$\Psi=-(\rho\beta+\delta)z\frac{d}{dz}+\frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2+\gamma^2)z^2\frac{d^2}{dz^2}-\alpha \tag{23}$$

である．最適投資戦略は式(17),(19)のいずれか一方が等号で成立することより，補修投資戦略の最適性条件を

$$\min\{\Psi\Phi+c(z)\beta,\Xi\Phi-\Phi\}=0 \tag{24}$$

と表現することができる．ここに，

$$\Xi\Phi=\min_{Z}\{f(z,Z)+\Phi(Z)\} \tag{25}$$

である．式(24)に示す最適化条件は，形式的に準変分不等式[24]として表現されている．

（4）最適補修ルール

現在の施設の機能水準が$\hat{z}$の水準にあることが観察されたとしよう．さらに，最適値関数$\Phi(z)$の形式が判っていると仮定する．この時，観察値$\hat{z}$の下で「補修投資を行うべきか否か．実施する場合どの程度の投資水準か」を決定するルールを考える．ここで，継続集合$\mathcal{C}$を

$$\mathcal{C}=\left\{z|\Phi(z)<\min_{Z}\{f(z,Z)+\Phi(Z)\}\right\} \tag{26}$$

と定義する．継続集合$\mathcal{C}$は補修投資を見送ることが最適となる機能水準の集合であり，式(10),(12)より，

$$\mathcal{C}=\{z|z>z^*\} \tag{27}$$

と定義できる．観察値$\hat{z}$がz^*より小さい時，直ちに補修投資が行われる．z^*は補修投資が必要となる最大の機

能水準であり臨界機能水準と呼ぶ．任意の$z \in (0, z^*]$に対して，最適値関数は

$$\Phi(z) = \min_Z \{f(z,Z) + \Phi(Z)\} \tag{28}$$

と定義される．時刻tにおいて，状態変数の観測値$\hat{z}$が観察された場合，補修投資を行うべきか否かはルール$\Im$

$$\Im = \begin{cases} 直ちにZ^*(\hat{z})まで機能を回復する & \hat{z} \le z^* \\ 補修投資を見送る & \hat{z} > z^* \end{cases}$$

で決定される．ただし，$Z^*(\hat{z}) = \arg\min_Z\{f(\hat{z}, Z) + \Phi(Z)\}$である．初期時点において状態変数の実現値$\hat{z}(0)$が$\hat{z}(0) > z^*$を満足していたとしよう．時間の経過とともに$z(t)$の値が経路$z(t)$に沿って減少していく．いま，機能水準$z(t)$が臨界機能水準$z^*$に到達する時刻を$\theta_1$と表す．この時刻$\theta_1$が最初のインパルス時刻であり，その時点に回復水準$Z^*$の補修投資を行うことにより最適補修を実現することができる．最適値関数Φに関する情報が用意されていれば，システムの状態$\hat{z}$を観測することにより，補修ルール$\Im$に基づいて補修投資を行うべきかどうかを判定することができる．

（5）求解の方針

施設の機能水準zが継続集合$\mathcal{C}$の内部にある場合，式(24)において，

$$\Psi\Phi + c(z)\beta = 0 \tag{29}$$

が成立する．式(24)は通常のsmooth pasting条件の下における自由境界値問題の解法により解くことができる．式(29)は状態変数値zに対して定義されており，時刻tは明示的には含まれていない．式(29)をzを独立変数とする２階の非斉次常微分方程式と考えることができる．式(29)の一般解を$\Phi^*(z)$と表そう．補修投資関数$f(z,Z)$はZに関して連続微分可能かつ強凸関数である．$c(z)$が連続微分可能な凸減少関数であり，式(15)より所与の投資戦略Vの下で$\Phi^*(z)$が$z \in [z^*, \infty)$に関して連続微分可能な凸減少関数であることが保証される（**付録I**参照）．したがって，臨界的機能水準z^*における最適な回復水準Z^*は１階の最適化条件

$$\frac{\partial f(z^*, Z^*)}{\partial Z} + \frac{d\Phi^*(Z^*)}{dZ} = 0 \tag{30}$$

を満足する．一方，臨界的機能水準z^*において式(28)が成立することより

$$\Phi^*(z^*) = f(z^*, Z^*) + \Phi^*(Z^*) \tag{31}$$

が成立する．最適値関数が機能水準z^*において連続微分可能であるためのsmooth-pastingの条件[19),25)]より

$$\frac{d\Phi^*(z^*)}{dz} = \frac{\partial f(z^*, Z^*)}{\partial z} \tag{32}$$

が成立する（**付録III**参照）．上式の左辺は点z^*の右側における微係数を，右辺は左側における微係数を表している．すなわち，常微分方程式(29)を境界条件(30),(31),(32)の下で解くことにより，最適値関数$\Phi^*(z)$の積分定数と(z^*, Z^*)を同時に求めることができる．なお，補修投資関数$f(z,Z)$が凸関数ではないので，境界条件(30)-(32)の下における準変分不等式(24)の解の一意性は保証できない（**付録I**参照）．

5．数値計算事例

（1）関数の特定化

補修投資ルールを求める問題は非斉次常微分方程式(29)の解を求める問題に帰着する．具体的に微分方程式(29)を解くことにより，最適補修投資戦略(z^*, Z^*)を求めてみよう．そこで，可変的費用関数$c(z)$，補修投資費用関数$f(z,Z)$の形式を

$$c(z) = a_1 z^{a_2} \tag{33a}$$

$$f(z,Z) = b_1 z^{b_2} + b_3 Z^{b_4} + \kappa \tag{33b}$$

と特定化する．ただし，$a_1 > 0, a_2 < 0, b_1 < 0, 0 < b_2 < 1, b_3 > 0, b_4 > 1, \kappa > 0$はパラメータ，$\kappa$は補修投資の固定費用である．

（2）(z^*, Z^*)の導出

非斉次微分方程式(29)に対応する斉次微分方程式$\Psi\Phi = 0$を定義しよう．斉次微分方程式は具体的に

$$-(\rho\beta + \delta)z\frac{d\Phi}{dz} + \frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2 + \gamma^2)z^2\frac{d^2\Phi}{dz^2} - \alpha\Phi = 0 \tag{34}$$

と表せる．この常微分方程式の一般解を$\Phi(z) = Az^\eta$と表そう．式(34)に代入することにより

$$-(\rho\beta + \delta)\eta + \frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2 + \gamma^2)\eta(\eta - 1) - \alpha = 0 \tag{35}$$

が成立する．ここで，上式の左辺を$\Gamma(\eta) = -(\rho\beta + \delta)\eta + \frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2 + \gamma^2)\eta(\eta - 1) - \alpha$と定義しよう．$\rho\beta + \delta > 0, \alpha > 0$が成立することより，２次方程式$\Gamma(\eta) = 0$は２つの実根$\eta_1, \eta_2$ $(\eta_1 > \eta_2)$

$$\eta_1 = \frac{f + \{f^2 + 8\alpha(\gamma^2 + \rho^2\sigma^2)\}^{\frac{1}{2}}}{2(\gamma^2 + \rho^2\sigma^2)} \tag{36a}$$

$$\eta_2 = \frac{f - \{f^2 + 8\alpha(\gamma^2 + \rho^2\sigma^2)\}^{\frac{1}{2}}}{2(\gamma^2 + \rho^2\sigma^2)} \tag{36b}$$

を持つ．ただし，$f = 2\delta + \gamma^2 + 2\beta\rho + \rho^2\sigma^2$である．$\Gamma(0) = -\alpha < 0, \Gamma(1) = -\rho\beta - \gamma - \alpha < 0$が成立するため２つの実根は$\eta_1 > 1, \eta_2 < 0$を満足する．非斉次微分方程式$\Psi\Phi + c(z)\beta = 0$の特殊解を$Kz^{a_2}$と仮定しよう．特殊解を非斉次微分方程式(29)に代入すれば，

$$K = \frac{\beta a_1}{\alpha + (\rho\beta + \delta)a_2 - \frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2 + \gamma^2)a_2(a_2 - 1)} \tag{37}$$

を得る．上式の分母は２次凹関数であり２根$\eta_1 > \eta_2$で挟まれる区間(η_2, η_1)で正の値をとる．$K > 0$が保証されるためには$0 > a_2 > \eta_2$が成立しなければならない．

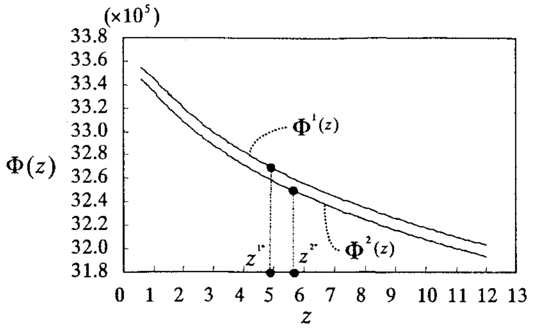

図-3　2つの最適値関数

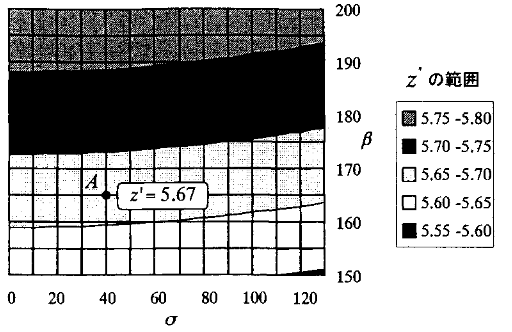

図-4 (a):$z^* - (\beta, \sigma)$ 管理図

非斉次微分方程式(29)の解は継続集合$\mathcal{C}$の内部において定義され，その一般型を

$$\Phi(z) = A_1 z^{\eta_1} + A_2 z^{\eta_2} + K z^{a_2} \tag{38}$$

と表すことができる．A_1, A_2は未知のパラメータである．最適値関数$\Phi(z)$がzに関して単調減少関数であり$\lim_{z\to\infty}\Phi(z) = 0$が成立するためには$A_1 = 0$でなければならない．境界条件(30),(31),(32)よりz^*, Z^*, A_2は非線形連立方程式

$$A_2\eta_2(Z^*)^{\eta_2-1} + Ka_2(Z^*)^{a_2-1} + b_3b_4(Z^*)^{b_4-1} = 0 \tag{39}$$

$$A_2(z^*)^{\eta_2} + K(z^*)^{a_2} = A_2(Z^*)^{\eta_2} + K(Z^*)^{a_2} + b_1(z^*)^{b_2} + b_3(Z^*)^{b_4} + \kappa \tag{40}$$

$$A_2\eta_2(z^*)^{\eta_2-1} + Ka_2(z^*)^{a_2-1} = b_1b_2(z^*)^{b_2-1} \tag{41}$$

を解くことにより求めることができる．なお，前述したように，最適化条件(25)を満足する解の一意性が保証できないので，非線形連立方程式(39)-(41)を満足する解が唯一である保証はない．しかし，複数の解が存在しても最適値関数(38)のパラメータ$\eta_2 < 0, a_2 < 0$は変化せずA_2のみが変化する．$\lim_{z\to\infty}\Phi(z) = 0$が成立するため，複数の最適値関数が存在したとしても，互いに上下方向にシフトするだけで交わることはない．したがって，次節に述べるような理由により，任意のzに対して下方に位置する最適値関数を最適解として選択すればいい．

（3）最適値関数の導出

最適補修ルールを求めるためには，劣化過程のパラメータ値ρ, δ, γと費用関数のパラメータ値$a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, \kappa$を観測する必要がある．費用関数が特定化ができれば，(β, σ)の値に対して，非線形連立方程式(39)-(41)を解くことにより最適補修戦略と最適値関数を同時に求めることができる．パラメータ値の推計問題は具体的な土木構造物を対象とした実証研究に委ねたいが，ここではたとえば費用関数のパラメータの値を$a_1 = 65$, $a_2 = -0.05$, $b_1 = -500$, $b_2 = 0.5$, $b_3 = 20$, $b_4 = 2.1, \kappa = 500$に設定しよう．さらに，割引率を$\alpha = 0.0033$に，劣化過程のパラメータを$\rho = 2.25 \times 10^{-4}, \gamma = 0.03, \delta = 0.015$に設定する．たとえば，$\beta = 175, \sigma = 50$の時，非線形連立方程式は2つの解

戦略1　$(z^{1^*}, Z^{1^*}, A_2^1) = (4.983, 5.512, -1.621 \times 10^7)$

戦略2　$(z^{2^*}, Z^{2^*}, A_2^2) = (5.705, 11.263, -1.624 \times 10^7)$

を持つ．これら2つの解は異なる補修投資戦略を意味しており，上付添字は投資戦略の番号を表している．それぞれの投資戦略に対応する最適値関数を図-3に図示している．最適値関数はA_2の値のみが異なり戦略1の最適値関数$\Phi^1(z)$は戦略2の最適値関数$\Phi^2(z)$より上方に位置する．いま，機能水準がz^{2^*}にあると考えよう．この時点で戦略1を採用した（補修投資を見送る）場合，期待総費用は$\Phi^1(z^{2^*})$となる．したがって，$\Phi^1(z^{2^*}) > \Phi^2(z^{2^*}) = f(z^{2^*}, Z^{2^*}) + \Phi^2(Z^{2^*})$が成立し，戦略2を採用する（補修投資を行う）方が期待総費用が小さくなるので，戦略2が選択される．

（4）$(z^*, Z^*) - (\beta, \sigma)$管理図の提案

最適補修ルール$\mathfrak{I}^*$は補修投資のタイミングを決定する臨界的な機能水準z^*と回復水準Z^*の組み合わせ(z^*, Z^*)により定義できる．施設をとりまく環境が異なれば，最適補修ルールは異なる．いま，施設の劣化メカニズムのパラメータρ, δ, γを与件と考えよう．この時，最適補修ルール(z^*, Z^*)は需要の変動過程を規定する確定的需要βと需要の分散σ^2に依存して決定される．このような施設需要のパラメータ(β, σ)と臨界的機能水準z^*の関係を図-4 (a)に示すような$z^* - (\beta, \sigma)$管理図として表現しよう．一方，Z^*と(β, σ)の関係は図-4 (b)のような$Z^* - (\beta, \sigma)$管理図として表現できる．これら2つの図により，施設需要のパラメータ(β, σ)に応じて

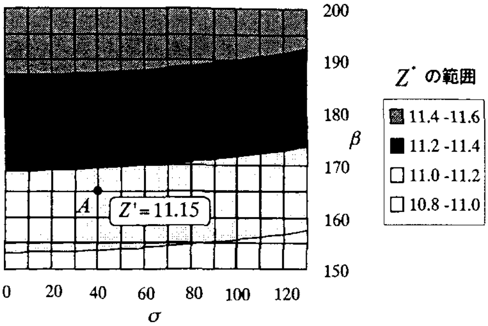

図- 4 (b):$Z^* - (\beta, \sigma)$ 管理図

管理図の作成にあたっては5.（3）の数値計算事例のパラメータを利用している.

最適補修ルール (z^*, Z^*) が求まる. **図- 4 (a), 4 (b)** をまとめて $(z^*, Z^*) - (\beta, \sigma)$ 管理図と呼ぼう. **図- 4 (a)** の等高線は同一の臨界的機能水準 z^* と対応するような施設需要のパラメータ (β, σ) の組み合わせを, **図- 4 (b)** の等高線は同一の回復水準 Z^* と対応するような施設需要のパラメータ (β, σ) の組み合わせを表している. このような管理図があらかじめ計算されていれば, 施設が置かれている需要環境と対応した最適な補修投資戦略を容易に読みとれることができる. たとえば, 図中の点 A は需要条件 $(\beta', \sigma') = (165, 40)$ に置かれている施設を表しているが, この施設の機能水準が $z' = 5.67$ であることが観測された時に, 施設の機能水準を $Z' = 11.15$ まで回復することにより最適補修投資を実施することができる. β の値が大きくなるほど各時刻の総可変的費用が増加する. したがって, **図- 4 (a)** に示すように, 将来時点で生じる総可変的費用の増加を抑制するために臨界的機能水準 z^*, 最適回復水準 Z^* が増加する. **図- 4 (b)** において $\sigma = 0$ の場合は需要リスクが存在しない場合と対応している. 分散 σ が大きくなるほど z^*, Z^* の値は小さくなる. 本論文では需要がある平均値の周りに定常的に変動するような需要環境をとりあげている. そのため, **図- 4 (a),(b)** に示すように, 需要の平均値 β の方が分散 σ の変化より, 補修ルール (z^*, Z^*) に及ぼす感度が大きい結果となっている. しかし, 施設需要の変動過程のタイプが異なれば, パラメータの値が補修投資戦略に及ぼす影響は多様に異なる. （4）で考察するように, プロトタイプモデルを多方面に拡張し, パラメータの感度に関する知見を積み重ねることが必要である.

一方, (z^*, Z^*) は構造物の劣化プロセスにも依存している. そこで, **図- 5 (a)**, **図- 5 (b)** はそれぞれ $\beta = 175$, $\sigma = 50$ とした場合の δ と投資戦略 (z^*, Z^*) の関係を, γ と (z^*, Z^*) の関係を示している. **図- 5 (a)** では $\gamma = 0.03$ に, **図- 5 (b)** では $\delta = 0.015$ に設定した場合の計算結果を示している. **図- 5 (a)** に示すように, 平均劣化率 δ が大きくなると, 更新投資の機会が大きくなるため, 更新投資費用の増加を抑制するためにより小さな z^*, Z^* を設定する必要性が生じる. **図- 5 (b)** において $\gamma = 0$ の場合は劣化過程にリスクのない場合と対応している. 劣化率の変動 γ が大きくなるほど, z^*, Z^* はより小さい値となっている. 特に, γ が大きくなるほど, 最適回復水準 Z^* が低下する. 需要変動も含めて劣化過程により大きなリスクが含まれるほど, リスクを無視した投資戦略（$\sigma = 0, \gamma = 0$ の場合に対応する）は過大な補修投資をもたらす結果となる. なお, 以上の結果は本計算事例にのみ該当する事項である. 投資関数 $f(z, Z)$ の非凸性に起因して, パラメータ $\beta, \sigma, \delta, \gamma$ が増加した場合, z, Z が増加するか減少するかを定性的に判定することは不可能である. 個々のパラメータ値に対して最適補修戦略を具体的に求めて判断することが必要である.

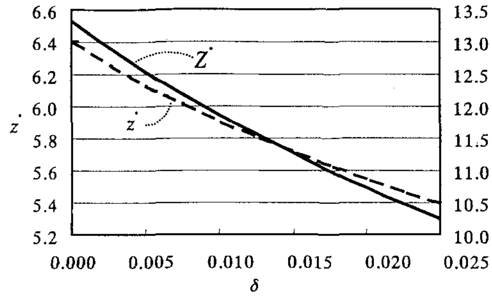

図- 5 (a) δ と (z^*, Z^*) の関係

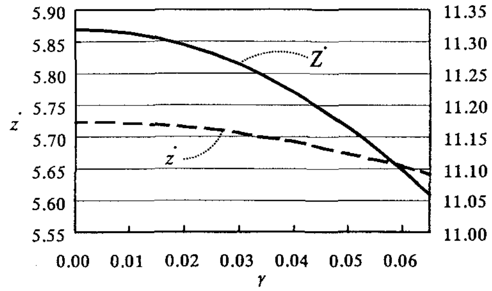

図- 5 (b) γ と (z^*, Z^*) の関係

（5）モデルの拡張可能性

最適補修問題 (PO) はいわば補修問題のプロトタイプというべきものである. 土木施設の補修投資の内容は極めて多様であり, 土木施設の特性や需要変動過程に応じた補修投資戦略を求める必要がある. 補修問題

の定式化が異なれば，そこから導出される最適補修ルールも異なる．本研究で定式化した最適補修モデルは，若干の修正を行うことにより，多くの現実の最適補修問題に適用可能である．モデルの拡張可能性をすべて網羅することは不可能であるが，いくつかのモデルの拡張方向について以下に簡単にとりまとめる．

本研究でとりあげた最適補修モデルの直接的な拡張としては，1）補修費用関数の特定化，2）可変的費用関数の特定化，3）期待総費用の定式化，4）需要変動と劣化過程の定式化の変更等が考えられる．まず，補修費用関数の変更が最も容易である．補修費用関数の形式を変化させても非斉次微分方程式 (29) の一般解，特殊解の形式は変化しない．境界条件 (39)-(41) を変更し，それらを満足する z^*, Z^* を求めればいい．つぎに，可変的費用関数を変更しても，斉次方程式 (34) は変更を受けない．本研究で提案した方法論をそのまま採用することが可能である．しかし，非斉次方程式 (29) の特殊解を解析的に求めることが困難となり，数値解析手法を用いて特殊解を求める必要が生じる．期待総費用の定義を変更した場合も，汎関数の中に累積需要 $s(t)$ が明示的に現れない限り，非斉次方程式 (29) の第２項を変更することにより対処できる．その結果，特殊解の形式が変更されることになる．汎関数の中に需要水準が含まれる場合（たとえば，施設の機能水準が施設需要に影響を及ぼす場合には），最適値関数 Φ に機能水準 z と累積需要 s が同時に含まれる．その結果，最適投資ルールは最適値関数を Taylor 展開して求まる偏微分方程式を解く問題に帰着される．偏微分方程式の数値解法が重要な研究課題となる．

4）の問題に対処するためには，最適補修モデルの制約条件を変更することが必要である．本研究では３．（２）で述べたように，各時刻の施設需要を累積需要の変化 (1a) で定義し，離散化した各期の施設需要が定常過程に従って変動するようなモデル化を試みた．この場合，ドリフト β，拡散係数 σ が時間と状態変数に依存するような修正を行うことにより様々な確率過程を考えることができる．一方，施設サービスを多くの人が同時に瞬間的に消費できる場合，瞬間的な施設需要を状態変数と考えたようなモデル化が必要となる．この場合，瞬間的需要の変動過程を a）トレンド等を有する確率過程，例えばドリフトが時間に依存する場合，b）ランダムウォーク成分を有するような非定常過程，例えば幾何学的ブラウン運動，平均回帰過程 (mean-reverting process) としてモデル化することが可能である．また，本研究では施設の劣化過程が幾何学的ブラウン運動に従うことを想定していた．施設によっては，劣化過程をポワソン過程として表現した方が妥当な場合もあるだろう．これらのモデル化の方法を組み合わせることにより，施設の機能水準の劣化過程に関する多様な表現が可能となる．現実の劣化過程は土木施設のタイプやそれが置かれている環境によって多様に異なるので，対象とする土木施設の特徴，環境を考慮した確率過程の同定が重要な課題となる．このように劣化過程の表現方法の変更により，多くの場合最適値関数は施設需要と機能水準の関数となり，2）と同様に最適投資ルールは継続集合内部で成立する偏微分方程式を数値的に解くことにより求めることができる．しかし，施設需要が非定常に変動する場合，将来時点で容量拡大（施設廃棄）の問題が生じる可能性があるため，容量拡大と補修投資を同時決定するような更新・補修モデルを考える必要があろう．なお，土木構造物によっては回復水準 Z^* や補修投資費用が一定値となる場合も多い．補修戦略に分割不可能性が存在する場合，smooth-pasting 条件 (32) を適用できない．この場合，劣微分を用いた準変分不等式の解法[26]や，最適値関数値をモンテカルロシミュレーションにより求める技法を適用することが必要となる．このように最適補修問題の特性に応じて，最適補修投資戦略を求める方法が多様に異なる．いずれの場合にも，最適補修問題は本研究で提案した最適インパルス制御問題として定式化でき，その意味で本論文では最適補修投資モデルのプロトタイプを提示しえたものと考える．

６．おわりに

本研究では，施設需要と劣化過程に不確実な変動が含まれるような土木施設の最適補修戦略を求める問題をとりあげた．具体的には，期待総費用を最小にするような補修投資の最適なタイミングと投資水準を決定する問題を最適インパルス制御問題として定式化し，最適補修戦略が最適インパルス制御過程として表現されることを示した．その結果，最適補修ルールが「補修投資を直ちに実行すべきかどうか」,「補修するとすればどの程度の機能回復が必要か」を判定するための $(z^*, Z^*) - (\beta, \sigma)$ 管理図として表現できることを示した．この管理図を予め準備しておけば，ルーティン的に観測できる施設の機能水準，需要水準という局所的な情報に基づいて最適な補修投資を実行できる．今後，個々の土木施設を対象とした $(z^*, Z^*) - (\beta, \sigma)$ 管理図を作成することにより，実用性の高い最適補修ルールを開発することが可能となろう．

本研究で提案した補修投資ルールの考え方は多方面への拡張が可能である．モデルの直接的な拡張可能性に関しては５．（５）で考察したが，それ以外にも社会資本の補修・更新投資戦略にアプローチする上で以下のような重要な研究課題が残されている．第１に，本研究

では施設利用の蓄積により施設機能が劣化していくような社会資本の補修問題をとりあげた．社会資本の補修問題には多様な種類が考えられる．たとえば，利水施設等は施設劣化がサービス供給量の低下を招くだろう．このような施設には，本研究とは異なる最適補修モデルを定式化する必要がある．第2に，本研究では施設が無限期間にわたり繰り返し利用される場合を想定していた．土木施設の中には将来時点における施設の廃棄が予め決定されている（あるいは，廃棄時期は不確定であるが，廃棄されることが確定している）場合も少なくない．この場合，廃棄時期までに補修投資を実施すべきかどうかが大きな問題となろう．この場合，終端時刻が確定的（不確定的）に与えられた最適インパルス制御問題を解くことが必要となる．第3に，力学的強度が劣化する構造物の更新投資の問題を取り上げる必要がある．この問題は上で述べたような第2の課題や構造物の性能設計の問題とも深く関連している．今後は構造物の耐用年数や更新投資の可能性も含めた性能設計の方法論を開発する必要がある．第4に，施設需要の変動過程と施設機能の劣化過程を非定常確率過程として同定する方法論の開発が不可欠である．この種の経験分析の蓄積が，本研究で提案した補修投資ルールの実用化のために不可欠であると考える．

付録I　最適値関数Φの性質

一般に，準変分不等式問題では費用関数 $f(z,Z)$ の代わりに関数 $f(Z-z)$ が用いられる．この場合，準変分不等式(24)はPerthameによる楕円型準変分不等式の特殊形となり，Perthameの定理(参考文献[27]定理1，p.239)より2回連続微分可能な唯一解（最適値関数）が存在することが保証される．すなわち，$c(z)$ が2回連続微分可能，任意の $|z|>0$ に対して $(\rho^2\sigma^2+\gamma^2)z^2>0$ かつ2回連続微分可能，$\alpha>0$. かつ，補修費用関数 $f(Z-z)$ が仮定(12)を満足する場合，問題 PO はPerthameの条件を満足し，準変分不等式(24)には2回連続微分可能な一意解が存在し，最適値関数 $\Phi(z)$ に一致する[28]．土木施設の場合，補修費用が機能水準の差（$Z-z$）のみに依存するとは考えにくい．そこで，本研究ではより一般的な費用関数 $f(z,Z)$ を用いているが，その結果準変分不等問題は非凸となり一意解が保証されない．しかし，$c(z)$ が仮定(10)を満足するとき，任意の z^*,Z^* を与件とした場合，任意の $z\in[z^*,\infty)$ に対して $\Phi(z)$ は2回連続微分可能である[28]．しかし，最適値関数 $\Phi(z)$ が点 z^* において常に2回連続微分可能性になるとは限らない．連続微分可能でない場合，smooth-pasting条件の代わりに，劣微分を用いた解(viscosity solution)[26]を適用する必要がある．劣微分を用いた解法は本研究の域を越えており，別の機会に議論したい．

付録II　微分演算子Ψの導出

最初のimpulse制御が実施されるまでの区間を考える．確率過程(8a)に(1a)を代入することにより，施設の劣化過程を累積需要の変化過程を含んだ形で書き直す．

$$\begin{aligned} dz(t) = &-(\rho\beta+\delta)z(t)dt-\rho\sigma z(t)dW_1(t) \\ &-\gamma z(t)dW_2(t) \end{aligned} \tag{42}$$

ここで，$dt^2,dW_1(t)dt,dW_2(t)dt$ が微小であり

$$\begin{aligned} (dz)^2 = &\rho^2\sigma^2z(t)^2(dW_1(t))^2+\gamma^2z(t)^2(dW_2(t))^2 \\ &+2\rho\sigma\gamma z^2dW_1(t)dW_2(t) \end{aligned} \tag{43}$$

と表せる．伊藤過程では $(dW_1(t))^2,(dW_2(t))^2$ は無視できない．差分 dz,dt に対して $\Phi(z(t+dt))$ を展開し，微小項 $dt^2,dtdW_1(t),dtdW_2(t)$，3次以上の微小項を無視すれば

$$\begin{aligned} &\Phi(z(t+dt))-\Phi(z(t))=\frac{d\Phi}{dz}(dz)+\frac{1}{2}\frac{d^2\Phi}{dz^2}(dz)^2+o(dt) \\ &=-\{(\rho\beta+\delta)zdt+\rho\sigma zdW_1+\gamma zdW_2\}\frac{d\Phi}{dz} \\ &+\frac{z^2}{2}\{\rho^2\sigma^2(dW_1)^2+\gamma^2(dW_2)^2+2\rho\sigma\gamma dW_1dW_2\}\frac{d^2\Phi}{dz^2} \\ &+o(dt) \end{aligned}$$

伊藤過程の定義より $E[dW_1]=0$, $E[dW_2]=0$, $E[(dW_1)^2]=dt$, $E[(dW_2)^2]=dt$ であり，また dW_1 と dW_2 は互いに独立であるから $E[dW_1dW_2]=0$ である．ゆえに

$$\begin{aligned} E[\Phi(z(t+dt))] = &\Phi(z(t))-(\rho\beta+\delta)z\frac{d\Phi}{dz}dt+\frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2 \\ &+\gamma^2)z^2\frac{d^2\Phi}{dz^2}dt+o(dt) \end{aligned}$$

となり式(20)を得る．Φ° を dt に関してTaylor展開すれば

$$\begin{aligned} \Phi^\circ &\approx E[c(z(t))ds(t)+\exp(-\alpha dt)\Phi(z(t+dt))] \\ &=c(z)\beta dt+\exp(-\alpha dt)\Big\{\Phi-(\rho\beta+\delta)z\frac{d\Phi}{dz}dt \\ &+\frac{1}{2}(\rho^2\sigma^2+\gamma^2)z^2\frac{d^2\Phi}{dz^2}dt+o(dt)\Big\} \end{aligned} \tag{44}$$

となる．ただし，時刻 t における機能水準の値 $z(t)$ は既知であるから，$E[c(z(t))ds(t)]dt=c(z(t))E[ds(t)]=c(z(t))\beta dt$ である．式(44)を式(19)に代入して式(21)を得る．式(44)の大括弧の中の第1項を不等式 $\Phi\le\Phi^\circ$ の左辺に移行し，両辺を dt で割ることにより

$$\frac{\{1-\exp(-\alpha dt)\}\Phi}{dt}\le\exp(-\alpha dt)[\Psi\Phi+c(z)\beta+\frac{o(dt)}{dt}]$$

を得る．ここで，$\lim_{dt\to0}o(dt)/dt=0$ である．上式の $dt\to0$ の極限をとる．上式の左辺は

$$\lim_{dt\to0}\frac{1-\exp(-\alpha dt)}{dt}\Phi$$

$$= \lim_{dt\to 0} -\frac{-\exp(-\alpha dt)-\exp(-0)}{dt}\Phi = \alpha\Phi \quad (45)$$

となる．また，$\lim_{dt\to 0}\exp(-\alpha dt)=1$ より

$$\Psi\Phi + c(z)\beta \geq 0 \quad (46)$$

が成立する．ゆえに，式 (22) を得る．

付録III　Smooth-pastingの条件

$f(z,Z)$ が z に関して連続微分であり，$\Phi^*(z)$ も z に関して連続微分可能であるとしよう．任意の $z \in [z^*,\infty)$ に対して $\Phi(z)$ が定義される．z が上から z^* に近づいた時の最適値関数を $\Phi^+(z^*)=\lim_{z\to z^{*+}}\Phi(z)$ と表そう．一方，最適値関数は任意の $z\in(0,z^*)$ に対して式 (28) で定義される．いま，z が下から z^* に近づいた時の極限値を $\Phi^-(z^*)=\lim_{z\to z^{*-}} f(z^*,Z^*(z))+\Phi(Z^*(z))$ と表そう．ただし，$Z^*(z^*)=\lim_{z\to z^{*-}}\arg\min_Z\{f(z,Z)+\Phi(Z)\}$ である．Smooth-pasting の条件は点 z^* において $\Phi^+(z)$ と $\Phi^-(z)$ の微係数が一致するための条件である．ここで，点 z^* で $d\Phi^-(z)/dz$ を評価しよう．Z^* が z の関数であることより

$$\frac{d\Phi^-(z)}{dz} = \frac{\partial f(z,Z)}{\partial z} + \frac{\partial f(z,Z)}{\partial Z}\frac{dZ}{dz} + \frac{d\Phi(Z)}{dZ}\frac{dZ}{dz}$$

を得る．ここで，式 (30) より $-d\Phi(Z)/dZ = \partial f(z,Z)/\partial Z$ を上式に代入すれば式 (32) を得る．

参考文献

1) 例えば, Heyman, D.P. and Sobel, M.J.(eds.): *Stochastic Models*, Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 2, North-Holland, 1990.
2) 例えば，三根久，河合一：信頼性・保全性の数理，朝倉書店，1982.
3) Scarf, H.: The optimality of (S,s) policies in the dynamic inventory problem, In: Arrow, K. J., Karlin, S., and Suppes, P. (eds.): *Mathematical Methods in the Social Sciences,* pp. 196-202, Stanford University Press, 1960.
4) Constantinides, G. and Richard, S.: Existence of optimal simple policies for discounted-cost inventory and cash management in continuous time, *Operations Research*, Vol. 26, pp. 620-636, 1978.
5) Sulem, A.: A solvable one-dimensional model of a diffusion inventory system, *Mathematical Operations Research*, Vol. 11, pp. 125-133, 1986.
6) Sulem, A.: Quasi-variational inequalities and impulse control, In: Sheshinski, E. and Weiss, Y. (eds.): *Optimal Pricing, Inflation, and the Cost of Price Adjustment,* pp. 57-95, MIT Press, 1993.
7) 三和雅史：軌道保守施策の長期的最適化法,土木計画学研究・講演集,No.21(2), pp357-360,1998.
8) 堤昌文,樗木武：道路の維持管理に関する計画学的考察,土木計画学研究講演集, No.18(2), pp.405-408, 1995.
9) 黒田勝彦,内田敬：土木構造物の補修・更新モデル,土木計画学研究・講演集, No.11, pp.117-124, 1988.
10) 深井俊英：道路施設の補修と取替の判定に関するシステム論的考察,土木計画学研究・講演集, No.5, pp.27-32, 1982.
11) 内田弘,召田紀雄：地方道における長期補修計画の立案,土木学会論文集,No. 597/IV-40, pp21-31, 1998.
12) たとえば，Baxter, M. and Rennie, A.: *Funancial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing,* Cambridge University Press, 1996.
13) Øksendal, B.: *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 5th ed., Springer-Verlag, 1998, 谷口説男訳，確率微分方程式，シュプリンガー・フェアラーク東京，1999.
14) Samuelson, P.A.: Rational theory of warrant pricing, *Industrial Management Review*, Vol. 6, pp.13-31, 1965.
15) McKean, Jr, H.P.: Appendix: a free boundary problem for the heat equation arising from a problem of mathematical economics, *Industrial Management Review*, Vol. 6, pp.32-39, 1965.
16) Merton, R.C.: Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, pp. 141-183, 1973.
17) Merton, R.C.: *Continuous-Time Finance*, Basil Blackwell, 1990
18) van Moerbeke, P.L.J.: On optimal stopping and free boundary problems, *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 60, pp.101-148, 1976.
19) Dumans, B.: Super contact and related optimality conditions, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 15, pp. 675-685, 1991.
20) Dixit, A.: A simplified treatment of the theory of optimal regulation of Brownian motion, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 15, pp.653-673, 1991. Reprinted In: Sheshinski, E. and Weiss, Y. (eds.): *Optimal Pricing, Inflation, and the Cost of Price Adjustment*, pp.97-114, MIT press, 1993.
21) Dixit, A. and Pindyck, R. S.: *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1993.
22) Harrison, J.M. and Taksar, M. I.: Instantaneous control of Brownian motion, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 8, pp.439-453, 1983.
23) Harrison, J.M., Sellke, T.M. and Taylor, A. J.: Impulse control of Brownian motion, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 8, pp.454-466, 1983.
24) Bensoussan, A. and Lions, J. L.: *Impulse Control and Quasi-Variational Inequalities*, Gauthier-Villars, 1984.
25) Dixit, A.: *The Art of Smooth Pasting*, Harwood Academic Pulishers, 1993.
26) Crandall, M.G., Ishii, H., and Lions, P. L.: User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bulletin of American Mathematic Society*, Vol. 27, pp.1-67, 1992.
27) Perthame, B.: Inéquations quasi-variationnelles et équations de Hamiton-Jacobi-Bellman dans R^n, *Annals Faculté des Science Toulouse*, Vol. 5, pp.237-157, 1983.
28) Perthame, B.: Continuous and impulsive control of quasi-variational inequalities, *Nonlinear Analysis*, TMA, 8, pp.1227-1239, 1984.

(1999. 10. 18　受付)

THE OPTIMAL REPAIRING RULES UNDER UNCERTAINTY

Morimitsu KURINO, Kiyoshi KOBAYASHI and Haruhiko WATANABE

This paper focuses upon the optimal repairing policies of public facilities under demand uncertainty. An optimal impulse control model is formulated to determine the optimal sequence of impulse timing and intensities to minimize the present values of expected costs. The optimal repairing rules can be formulated as a set of adaptive rules by which whether repair should be carried out or not can be judged based upon the routinely observed data on functional deterioration levels of the facilities. A numerical example illustrates how adaptive rules can be calculated in a given demand environment.