

# 平面ひずみ非排水圧縮条件下における供試体寸法比の変化が正規圧密粘土の分岐荷重に及ぼす影響

志比利秀<sup>1</sup>・矢富盟祥<sup>2</sup>・亀井健史<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 博(工) 島根大学助手 総合理工学部地球資源環境学科 (〒690-8504 松江市西川津町 1060)

<sup>2</sup>正会員 Ph. D. 金沢大学教授 工学部土木建設工学科 (〒920-8667 金沢市小立野 2 丁目 40-20)

<sup>3</sup>正会員 工博 島根大学助教授 総合理工学部地球資源環境学科 (〒690-8504 松江市西川津町 1060)

本研究では、正規圧密粘土供試体を平面ひずみ非排水圧縮せん断した場合に観察される様々な非均一な変形挙動を、分岐という概念に基づいて解析的に明らかにすることを試みている。粘土の構成式には、有限変形共軸・非共軸 Cam-clay モデルを用いた。その際、分岐時の供試体寸法比と初期の供試体寸法比の関係を導出することにより、供試体寸法比の変化を考慮した分岐解析を行なった。また、分岐解析結果を用いて、分岐時の供試体内の最大せん断ひずみ分布を求めた。その結果、分岐解析に供試体寸法比の変化を考慮した場合、平面ひずみ対称バルジ型の変形の発生が説明できることが解析的に示された。また、分岐解析結果から得られる最大せん断ひずみ分布からすべり面の初期発生位置、およびその形態を考察した。

**Key Words:** bifurcation, Cam-clay model, non-coaxial, slip surface, plane strain condition

## 1. はじめに

正規圧密粘土供試体を非排水条件下で圧縮せん断した場合、載荷軸応力の小さい範囲においては、供試体は均一な変形を続ける。しかし、最大応力に近づくにつれ、棒の座屈や、樽型に膨らむような、いわゆる非均一な変形が現われる場合がある。このような非均一な変形が生じる最大応力近傍においては、供試体内にせん断ひずみの局所化が観察される。その結果、最終的に一つのすべり面が形成され、供試体は破壊に至る。

これまでに平面ひずみ条件下での分岐解析(分岐荷重・分岐モード解析)がいくつか行なわれている。Hill and Hutchinson<sup>1)</sup> は非圧縮性弾塑性体を仮定し、一軸引張試験における均一な変位場から非均一な変位場への分岐問題に対して定式化し、支配方程式を分類することにより、分岐条件式の解析解を与えている。また、Young<sup>2)</sup> は同様の手法<sup>1)</sup> を用いて非圧縮性弾塑性体の一軸圧縮試験における分岐条件式を導いている。さらに、圧縮性弾塑性体に対する分岐解析結果としては、Chau and Rudnicki<sup>3)</sup> が伸張および圧縮試験を対象に、Bardet<sup>4)</sup> が圧縮試験を対象に

解析を行なっている。

一方、有限変形非共軸 Cam-clay モデル<sup>5)</sup> を用いた分岐解析では、円柱供試体<sup>6)</sup>・<sup>7)</sup> や中空円筒供試体<sup>8)</sup> を対象とした解析や、有限要素法への適用の利便性を考え、平面ひずみ条件下で側圧を死荷重と仮定した解析結果<sup>9)</sup> などが報告されている。

しかしながら、これらの分岐解析の研究では、試験開始時においては未知な分岐時の供試体寸法比(分岐時においては既知な値)を用いて分岐解析が行われており、試験開始時においても既知な値である初期の供試体寸法比と分岐荷重の関係が考察されていない。土の強度・変形特性は、試験時の供試体寸法が試験結果に大きな影響を及ぼすことが多くの研究者によって報告されている<sup>10)~13)</sup>。したがって、初期の供試体寸法比と分岐荷重の関係を定量的に評価することが重要となる。

また、飽和粘土の様々な変形挙動を追跡するためにはあらかじめ初期不整を導入した供試体に対して有限要素法を用いた解析も報告されている<sup>14)</sup>・<sup>15)</sup>。

本研究では、まず、各点で非排水条件を仮定した平面ひずみ条件下において、共軸および非共軸 Cam-clay モデル<sup>5)</sup> を用いた長方形断面の直方体供試

体を側圧一定条件の下で圧縮せん断した場合について分岐解析を行ない、分岐時の供試体寸法比を用いた分岐荷重の解析解を示す。なお、同様な問題に対して、著者の一人である矢富ら<sup>16)・17)</sup>が考察を行っている。しかし、それらの内容は概要のみであるので、ここで、その詳細を述べ、分岐解の分類、整理を行なう。その後、試験開始時から分岐時まで供試体内で完全非排水状態を仮定できる場合（分岐後は、変形および応力ともに非均一な状態となるため、供試体内の間隙水圧にばらつきが生じ、完全非排水状態が満足されなくなる可能性がある）において、分岐時の供試体寸法比と初期の供試体寸法比の関係を導出する。その結果を用いて、供試体寸法比の変化を考慮した分岐解析を行ない、分岐時の供試体寸法比を用いた分岐解析との比較検討を行なう。また、軸ひずみと分岐荷重の関係を考察し、非均一変形が生じ得る軸ひずみを調べている。最後に分岐解析結果から得られる速度場より、最大せん断ひずみの分布を求め、すべり面の初期発生位置や形態を考察する。

## 2. 有限変形 Cam-clay モデル<sup>5)</sup>

粘土は等方応力条件下においても塑性変形を示す材料であり、このような粘土の力学的挙動を記述できる構成式を Roscoe *et al.*<sup>18)</sup> は微小変形理論と弾塑性理論に基づいて誘導した。この構成式は、粘土の圧密・せん断挙動を統一的に表現する画期的なものであり、Cam-clay モデルと呼ばれる。このモデルは、これまでの多くの力学的実験から、正規～過圧密比の小さい粘土の優れた応力-ひずみモデルであることが広く一般に認められている。

Yatomi *et al.*<sup>5)</sup> は、せん断帯の生成とその進展を考察するために微小変形における Cam-clay モデルを有限変形に拡張した。次にせん断変形をより発生し易くするため、形式的に Rudnicki and Rice<sup>19)</sup> の理論に従い、非共軸 Cam-clay モデルを考えた。

本研究では、有限変形理論<sup>20)</sup>を用いることから、正規圧密粘土の構成式として、有限変形に拡張された Cam-clay モデルを用いる。以下、本研究で必要となる部分を Yatomi *et al.*<sup>5)</sup> の中から再掲する。

まず、全コーシー応力  $T$ 、有効 Cauchy 応力  $T'$  と間隙水圧  $u$  の間に次式で与えられる有効応力の原理を仮定する。

$$T' = T + uI \quad (1)$$

このとき、Cam-clay モデルに用いられたパラメータ

平均有効主応力  $p'$  と一般化された偏差応力  $q$  は、それぞれ次式で定義される。

$$p' = -\frac{1}{3} \text{tr} T', \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} S \cdot S} \quad (2)$$

ここで、 $S$  は有効 Cauchy 応力  $T'$  の偏差成分である。なお、本研究では、全応力  $\sigma$ 、平均有効主応力  $p'$ 、間隙水圧  $u$  および体積ひずみ  $v$  は、土質力学の慣例に従い圧縮側および収縮側を正とするが、それら以外の物理量は、一般の有限変形理論で定義されるように、引張り側および伸張側を正とする。

土のような摩擦性材料の場合、平均有効主応力が大きいほど、せん断強さが大きくなるので、本研究のような均一多軸条件下での分岐荷重は、軸応力や主応力差ではなく、応力比  $q/p' (= \eta)$  が物理的に最も合理的な分岐荷重の定義であると考えられる。したがって、本研究では、分岐時の応力比  $\eta_f$  をもって「分岐荷重」と呼ぶ。

まず、物体の運動  $x = x(X, t)$  を考えると、物質点  $X$  での変形勾配は、 $F = \partial x / \partial X$  ( $\det F > 0$ ) である。このとき、 $L = \dot{F}F^{-1} = \partial \dot{x} / \partial x$  は速度勾配であり（以後、上付きの“ $\cdot$ ”は、物質時間微分を表す）、 $D = (L + L^T)/2$  は変形速度、 $W = (L - L^T)/2$  はスピンである。このとき、変形速度  $D$  が弾性部分  $D^e$  と塑性部分  $D^p$  の和で表されると考え、その弾性部分に対して次式で示されるフックの法則を仮定する。

$$\dot{T}'_{ij} = \{(\bar{K} - \frac{2}{3}\bar{G})\delta_{ij}\delta_{kk} + \bar{G}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\} D'_{kl} \quad (3)$$

ここで、 $\dot{T}'_{ij} = \dot{T}'_{ij} - W_{ik}T'_{kj} + T'_{ik}W_{kj}$  は有効 Cauchy 応力の共回転速度であり、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。また、 $\bar{K}$  と  $\bar{G}$  は、それぞれ体積弾性係数とせん断弾性係数を表しており、次式で表される。

$$\bar{K} = \bar{K}_0 p', \quad \bar{G} = \bar{G}_0 p' \quad (4)$$

ここで、 $\bar{K}_0 = (1+e)/\kappa$ 、 $\bar{G}_0 = \{3(1-2\nu)\bar{K}_0\}/\{2(1+\nu)\}$  であり、 $e$  は間隙比、 $\kappa$  は自然対数表示による膨潤指数、 $\nu$  はポアソン比を表す。

次に変形速度の塑性部分について考える。微小変形における Cam-clay モデルの降伏関数<sup>18)</sup>と同様に、有限変形 Cam-clay モデルの降伏関数  $f$  は次式のように表される。

$$f = \frac{\lambda - \kappa}{1+e} \ln \frac{p'}{p'_0} + D \frac{q}{p'} - v^p \quad (5)$$

ここで、 $\lambda$  は自然対数表示による圧縮指数、 $p'_0$  は先行圧密応力、 $v^p$  は塑性体積ひずみを表す。また、 $D = (\lambda - \kappa)/\{M(1+e)\}$ <sup>21)</sup> はダイレイタンス係数であ

り、 $M$ は限界状態における応力比である。この降伏関数  $f$  に関連流れ則を適用すると変形速度の塑性部分として次式が得られる。

$$D_{ij}^p \begin{cases} = \lambda N_{ij} & (f = 0, \text{および } N_{ij} \dot{T}'_{ij} > 0) \\ = 0 & (f < 0, \text{あるいは } N_{ij} \dot{T}'_{ij} \leq 0) \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $\lambda$ は比例定数であり、 $\beta = M - \eta$ とすると、 $N_{ij}$ は次式で表される。

$$N_{ij} = \frac{D}{p'} \left( \frac{3}{2\eta} \frac{S_{ij}}{p'} - \frac{1}{3} \beta \delta_{ij} \right) \quad (7)$$

最終的に有限変形共軸 Cam-clay モデル（以下、共軸モデルと呼ぶ）の構成式は次式で与えられる。

$$\dot{T}'_{ij} = \left\{ \left( \bar{K} - \frac{2}{3} \bar{G} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \bar{G} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{\bar{G} + \bar{K} \bar{\beta}^2 + h} \left( \frac{\bar{G}}{\bar{\tau}} S_{ij} - \bar{K} \bar{\beta} \delta_{ij} \right) \left( \frac{\bar{G}}{\bar{\tau}} S_{kl} - \bar{K} \bar{\beta} \delta_{kl} \right) \right\} D_{kl} \quad (8)$$

ここで、 $\bar{\beta} = \beta / \sqrt{3}$ 、 $\bar{\tau} = \sqrt{S_{ij} S_{ij} / 2}$ である。また、 $h$ は硬化係数を表しており、次式で表される。

$$h = \frac{\bar{\beta}}{\sqrt{3} D} p' \quad (9)$$

式(8)で表現される Cam-clay モデルが共軸モデルと呼ばれる理由は、塑性変形速度テンソルの偏差成分の主軸方向と有効 Cauchy 応力の偏差成分の主軸方向が一致する（共軸）からである。

有限変形非共軸 Cam-clay モデルは Rudnicki and Rice<sup>19)</sup>の理論に従い、偏差塑性ひずみに非共軸項を付加することにより導かれる。その結果、有効 Cauchy 応力の偏差成分の主軸方向と塑性変形速度テンソルの偏差成分の主軸方向が一致しなくなる（非共軸）。最終的に、有限変形非共軸 Cam-clay モデル（以下、非共軸モデルと呼ぶ）の構成式は、式(8)において物質パラメータを以下のように置き換えることによって与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{G} &\rightarrow \frac{h_1 \bar{G}}{h_1 + \bar{G}}, & \bar{K} &\rightarrow \frac{(h_1 - h) \bar{K}}{h_1 - h - \bar{\beta}^2 \bar{K}}, \\ \bar{\beta} &\rightarrow \frac{h_1 \bar{\beta}}{h_1 - h}, & h &\rightarrow \frac{h_1 h}{h_1 - h} \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、 $h_1$ は第2硬化係数と呼ばれ、式(9)の硬化係数と同様の形で次式のように仮定される。

$$h_1 = \frac{\bar{\beta}}{\sqrt{3} A} p' (> 0) \quad (11)$$

ここで、 $A$ は非共軸パラメータと呼ばれ、 $A = 0$ のと

き共軸モデルを表し、 $A > 0$ のとき非共軸モデルを表す。

現在まで、非共軸性を詳細に検討した実験例はほとんど見られないが、中空ねじり試験に基づいた非共軸性の存在の指摘、あるいはその必要性を示した研究が、最近行われている<sup>3)~6), 9)</sup>。なお、本研究でも上記の  $h_1$ は、Yatomi *et al.*<sup>5)</sup>の表現を適用した。

間隙水圧の連続式は、透水係数を  $k$ 、水の密度を  $\gamma_w$ で表し、全水頭が位置水頭を無視できると仮定して水圧水頭  $u / \gamma_w$ のみで表されるなら、次式で与えられる。

$$\text{tr}(\mathbf{D}) = k \Delta u / \gamma_w \quad (12)$$

ここで、 $\Delta$ は微分演算子ラブラシアンである。

正規圧密粘性土では、非排水せん断強度が排水せん断強度より小さいので、本研究では、より危険な状態（設計においては安全側）となる非排水変形状態を考える。また、透水係数の低い粘性土地盤での盛土は、きわめてゆっくり载荷を行わないかぎり、地盤内の間隙水は基本的に動かない、すなわち、非排水状態で変形すると仮定しても良い<sup>22)</sup>。したがって、各点において非排水となる条件は、

$$\text{tr}(\mathbf{D}) = 0 \quad (13)$$

と書き表される。したがって、非排水条件下では、式(8)の構成式は次式のように書き換えられる。

$$\dot{T}'_{ij} = 2 \bar{G} D_{ij} - \frac{1}{\bar{G} + \bar{K} \bar{\beta}^2 + h} \left( \frac{\bar{G}}{\bar{\tau}} S_{kl} D_{kl} \right) \left( \frac{\bar{G}}{\bar{\tau}} S_{ij} - \bar{K} \bar{\beta} \delta_{ij} \right) \quad (14)$$

本研究では、平面ひずみ条件下での非排水変形を対象としているので、式(13)、(14)は以下のように変形できる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}'_{11} - \dot{T}'_{22} &= 2 \mu^* (D_{11} - D_{22}) \\ \dot{T}'_{12} &= 2 \mu D_{12} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{11} + D_{22} &= 0 \\ D_{33} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\mu^* = \frac{\bar{h} \bar{G}}{\bar{h} + \bar{G}}, \quad \mu = \frac{h_1 \bar{G}}{h_1 + \bar{G}} \quad (17)$$

ここで、 $\mu^*$ 、 $\mu$ はそれぞれ45°せん断におけるせん断係数と単純せん断係数であり、 $\bar{h}$ は $\bar{K} \bar{\beta}^2 + h$ で表される。なお、 $\mu^*$ は非共軸パラメータ  $A$ に無関係であり、 $\mu$ は  $A$ の単調減少関数となっている。したがって、非共軸モデルは、共軸モデルより単純せん断変形を生じやすい構成関係となる。

最終的に、均一変形状態から分岐瞬間までの有限変形 Cam-clay モデルの構成関係は、式(15)、(17)

で表される。また、速度場  $v$  は各点において非排水条件となる式(16) (すなわち、 $D_{11}+D_{22}=v_{1,1}+v_{2,2}=0$ ) を満足するように、 $v$  の成分は流れ関数  $\psi$  を用いて次式のように与える。

$$v_1 = \psi_{,2}, \quad v_2 = -\psi_{,1} \quad (18)$$

このとき、式(15)の構成式は、流れ関数  $\psi$  を用いることにより、次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{11} - \dot{T}'_{22} &= 4\mu^* \psi_{,12} \\ 2\dot{T}'_{12} &= (2\mu - \bar{q})\psi_{,22} - (2\mu + \bar{q})\psi_{,11} \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $\bar{q} (= \sigma'_2 - \sigma'_1 = 2q/\sqrt{3})$  は軸差応力である。

### 3. 分岐条件式

本研究では、正規圧密粘土を平面ひずみ条件下で非排水圧縮せん断した場合を考える。初期の供試体の寸法は、幅  $2B_0$ 、高さ  $2H_0$  とする。また、図-1 に示すように境界条件は、供試体の両側面では圧力(流体圧)を一定とし、上下端面では変位制御により圧縮し、摩擦はないものと仮定する。更に、本研究では、均一な変形状態から非均一な変形状態への分岐現象を考えている。したがって、分岐が発生する瞬間(時刻  $t = t$ ) まで、供試体は均一な変形を続け、分岐が発生する瞬間には図-1 に示すような幅  $2B$ 、高さ  $2H$  の供試体に変形しているものと仮定する。

まず、準静的で物体力がない場合、増分釣合式は次式で与えられる。

$$\text{div} \dot{S}_i = 0 \quad (20)$$

ここで、 $\dot{S}_i (= \dot{T} + T(\text{tr} D) - T L^T)$  は全公称応力速度である。有効応力の原理、非排水条件、および分岐が発生する瞬間まで供試体内の各状態量が均一であることを考慮して上式を指標表示すると、増分釣合式は次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{1,1} + \dot{T}'_{2,2} - \dot{u}_1 &= 0 \\ \dot{T}'_{2,1} + \dot{T}'_{2,2} - \dot{u}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

また、載荷条件は、前述したように、供試体の両側面 ( $x_1 = \pm B$ ) では一定圧力を与え、上下端面 ( $x_2 = \pm H$ ) では変位制御 ( $v_2 = \mp v_{20}$ ) により圧縮し、摩擦は働かないものと仮定すると、境界条件は次式のように書き表せる。

$$\begin{cases} (\dot{s}_i)_1 = \sigma_1 L_{11}, & (\dot{s}_i)_2 = \sigma_1 L_{12}, & \text{on } x_1 = \pm B \\ (\dot{s}_i)_1 = 0, & v_2 = \mp v_{20}, & \text{on } x_2 = \pm H \end{cases} \quad (22)$$

ここで、 $\dot{s}_i (= \dot{S}_i n)$  は全公称表面力速度であり、 $n$  は

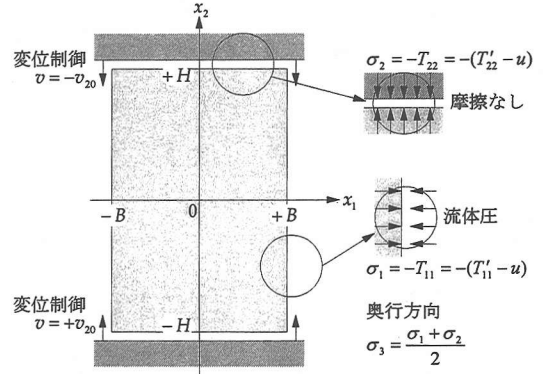


図-1 分岐時の供試体概形

考えている面の単位法線ベクトルである。また、 $\sigma_1$  は、図-1 に示すとおり、側面に働く圧力である。なお、間隙水圧の境界条件は、式(13)の中に含まれており、不要となる。

分岐が発生する瞬間まで、長方形断面供試体は載荷軸方向に圧縮力を受けることによって、均一な変形を続ける。その過程では、分岐時の圧縮力の増大に対しても均一な変形は、可能な解の一つとなる。したがって、供試体の分岐は、分岐時の圧縮力の増大に伴って非均一な変形を示す解が存在する場合に発生する。一方、構成式を増分釣合式に代入することにより導かれる速度に関する支配方程式が速度に関して線形関係となっているので、速度解を重ね合わせることが可能となる。その結果、供試体の各点で塑性負荷状態にある変形は、非均一な速度解に、各点が負荷状態になるような均一な速度解を重ね合わせることにより得られる。以上のことより、式(22)で与えられる境界条件の解は、以下に示す境界条件の解の和となる。

均一境界条件：

$$\begin{cases} \dot{T}'_{11} = 0, & \dot{T}'_{12} = 0, & \text{on } x_1 = \pm B \\ \dot{T}'_{21} = 0, & v_2 = \mp v_{20}, & \text{on } x_2 = \pm H \end{cases} \quad (23)$$

非均一境界条件：

$$\begin{cases} \dot{T}'_{11} = \dot{u}, & \dot{T}'_{12} = -\bar{q} L_{12}, & \text{on } x_1 = \pm B \\ \dot{T}'_{21} = 0, & v_2 = 0, & \text{on } x_2 = \pm H \end{cases} \quad (24)$$

式(23)は供試体内の各点で変形が均一(一様圧縮変形)となる境界条件であり、その解( $D_{11} = -D_{22} = v_{20}/H$ ,  $D_{12} = W_{12} = 0$ )は自明である。したがって、供試体内の各点において非均一な変形が発生し得るなら、式(24)の境界条件から非均一な変形を表す解が得られる。以後、特にことわりがないかぎり、式(24)のみを境界条件と呼ぶこととする。

式(21)の増分釣合式から、間隙水圧  $u$  の項を消去

表-1 各領域の判別条件,  $V(x_1)$ の一般解, および分岐条件式( $A_1, A_2$ : 未定定数,  $a = 2\mu + \bar{q}$ ,  $b = -(4\mu^* - 2\mu)$ ,  $c = 2\mu - \bar{q}$ )

	判別条件	$\rho$ と $P, Q$ および $P, Q$ と $a, b, c$ の関係		$V(x_1)$ の一般解	分岐条件式
EC 領域	$b^2 - ac < 0$	$\rho = P \pm iQ, -(P \pm iQ)$ $P^2 - Q^2 = \frac{b}{a}$ $P^2 + Q^2 = \sqrt{\frac{c}{a}}$	対称 モード	$\Re[(A_1 + iA_2)\sin\{(P + iQ)k_m x_1\}]$	$\frac{Q \sin(2Pk_m B)}{P \sinh(2Qk_m B)} = \frac{(a-c)\sqrt{a-2(a-b)\sqrt{c}}}{(a-c)\sqrt{a+2(a-b)\sqrt{c}}}$
			非対称 モード	$\Re[(A_1 + iA_2)\cos\{(P + iQ)k_m x_1\}]$	$\frac{Q \sin(2Pk_m B)}{P \sinh(2Qk_m B)} = -\frac{(a-c)\sqrt{a-2(a-b)\sqrt{c}}}{(a-c)\sqrt{a+2(a-b)\sqrt{c}}}$
EI 領域	$b^2 - ac > 0,$ $\frac{b}{a} < 0,$ $2\mu >  \bar{q} $	$\rho = \pm iP, \pm iQ$ $P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}$ $P^2 + Q^2 = -\frac{2b}{a}$	対称 モード	$A_1 \sin(Pk_m x_1) + A_2 \sin(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tanh(Qk_m B)}{Q \tanh(Pk_m B)} = \frac{(1 + P^2)^2}{(1 + Q^2)^2}$
			非対称 モード	$A_1 \cos(Pk_m x_1) + A_2 \cos(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tanh(Pk_m B)}{Q \tanh(Qk_m B)} = \frac{(1 + P^2)^2}{(1 + Q^2)^2}$
H 領域	$b^2 - ac > 0,$ $\frac{b}{a} > 0,$ $2\mu >  \bar{q} $	$\rho = \pm P, \pm Q$ $P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}$ $P^2 + Q^2 = \frac{2b}{a}$	対称 モード	$A_1 \sinh(Pk_m x_1) + A_2 \sinh(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tan(Qk_m B)}{Q \tan(Pk_m B)} = \frac{(1 - P^2)^2}{(1 - Q^2)^2}$
			非対称 モード	$A_1 \cosh(Pk_m x_1) + A_2 \cosh(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tan(Pk_m B)}{Q \tan(Qk_m B)} = \frac{(1 - P^2)^2}{(1 - Q^2)^2}$
P 領域	$2\mu <  \bar{q} $	$\rho = \pm P, \pm iQ$ $P^2 - Q^2 = \frac{2b}{a}$ $P^2 + Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}$	対称 モード	$A_1 \sin(Pk_m x_1) + A_2 \sinh(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tanh(Qk_m B)}{Q \tan(Pk_m B)} = \frac{(1 - P^2)^2}{(1 + Q^2)^2}$
			非対称 モード	$A_1 \cos(Pk_m x_1) + A_2 \cosh(Qk_m x_1)$	$\frac{P \tan(Pk_m B)}{Q \tanh(Qk_m B)} = \frac{(1 - P^2)^2}{(1 + Q^2)^2}$

し, 式(19)で与えられる流れ関数 $\psi$ を用いた構成式を代入することにより, 次式に示す流れ関数 $\psi$ の支配方程式が得られる.

$$a\psi_{,1111} - 2b\psi_{,1122} + c\psi_{,2222} = 0 \quad (25)$$

ここで,  $a, b$ , および $c$ は次式のように置いた.

$$a = 2\mu + \bar{q}, \quad b = -(4\mu^* - 2\mu), \quad c = 2\mu - \bar{q} \quad (26)$$

一方, 式(24)の境界条件は, 式(19)を代入することにより, 流れ関数 $\psi$ を用いて次式のように書き換えられる.

$$\left. \begin{aligned} a\psi_{,111} - (2b - a)\psi_{,122} &= 0 \\ \psi_{,11} - \psi_{,22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a \neq 0) \quad \text{on } x_1 = \pm B \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{,1} &= 0 \\ \psi_{,22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (c \neq 0) \\ (a \neq 0) \end{aligned} \quad \text{on } x_2 = \pm H \quad (28)$$

式(15), 式(16), 式(21), および式(22)は, 正規圧密粘土(圧縮性弾塑性体)が各点非排水条件の下で, 平面ひずみ圧縮せん断(二軸圧縮試験; 側面では圧力一定)をされる場合に導かれる式である. しかしながら, 式(21)と式(24)に流れ関数 $\psi$ を代入することにより得られる式(25), 式(27), および式(28)は, 非圧縮弾塑性体において, 側面荷重を0とした

単純な一軸引張試験<sup>1)</sup>, および一軸圧縮試験<sup>2)</sup>から得られた式と同様の型となる. そこで, 以下の分岐条件式の誘導は, 彼らの方法<sup>1), 2)</sup>に基づいて行った.

まず, 式(28)で示される上下面の境界条件を考慮し, 流れ関数 $\psi$ を次式のように仮定する.

$$\psi = V(x_1) \cos(k_m x_2), \quad (k_m = \frac{m\pi}{2H}) \quad (29)$$

ここで,  $m(m=1, 2, \dots)$ は変形モードであり,  $m$ が偶数の場合は $x_2$ 座標の原点を $H/m$ だけ移動させる必要がある. また, 式(29)の形で仮定した流れ関数 $\psi$ は, 式(25)を供試体内の各点で満足する必要があるから,  $V(x_1)$ は次式で示される支配方程式を満足する必要がある.

$$(aD^4 + 2bk_m^2 D^2 + ck_m^4)V(x_1) = 0 \quad (30)$$

ここで,  $D$ は $x_1$ に関する微分演算子であり, その右肩の数字はその微分回数を表している.  $V(x_1)$ がそれぞれ, 対称モードの場合には $\sin(\rho k_m x_1)$ , 非対称モードの場合には $\cos(\rho k_m x_1)$ により表現できると仮定すると, 上記の $V(x_1)$ に関する支配方程式は,

表-2 本解析に用いた土質定数<sup>5)・23)</sup>

$\lambda$	=	0.231
$\kappa$	=	0.042
$\nu$	=	0.333
$e$	=	1.5
$M$	=	1.43
$A$	=	0.01(0)*

\*共軸モデルの場合は  $A=0$ , 非共軸モデルの場合は  $A=0.01$ .

$$a\rho^4 - 2b\rho^2 + c = 0 \quad (31)$$

で示される  $\rho$  に関する 4 次方程式の実数解の個数によりに分類され, 実数解の存在個数が 0, 2, および 4 に対応して, それぞれ, 楕円領域 (E), 放物領域 (P), および双曲領域 (H) と呼ぶ<sup>1)</sup>. また, 楕円領域はさらに 2 つの領域に分類され, 4 つの異なる複素数解の場合を (EC) と, 4 つの異なる虚数解の場合を (EI) と呼ぶこととする<sup>2)</sup>. このとき, 各領域の判別条件,  $V(x_1)$  の一般解および分岐条件式等を表-1 に整理して示す. 分岐条件式は, 流れ関数  $\psi$ , および  $V(x_1)$  の一般解を代入した側面の境界条件において, 未定定数  $A_1, A_2$  の非自明な解が存在する条件 ( $A_1, A_2$  の係数行列の行列式が 0 となる条件) として得られる. なお, 各領域の分岐条件式は, 分岐時の供試体寸法比  $H/B$ , 分岐荷重  $\eta$  と変形モード  $m$  の陰関数となっている.

#### 4. 応力比と軸ひずみおよび供試体寸法比

表-1 の分岐条件式より, 分岐時の供試体寸法比  $H/B$  が与えられれば, 各変形モード  $m$  に対する分岐荷重  $\eta$  を求めることができる. しかしながら, 試験開始時においては, 初期の供試体寸法比  $H_0/B_0$  は与えるものであり既知な値であるが, 分岐時の供試体寸法比は未知な値であり, 一般には両者の関係は決まらない. したがって, これまで報告されている分岐解析では, 試験開始時には未知であるが分岐時には既知となる分岐時の供試体寸法比と分岐荷重  $\eta$  の考察が行なわれていた<sup>1)~4), 6)~9)</sup>. しかし, 後述するように, 分岐瞬間まで各点非排水条件を仮定できる場合には, 分岐時の供試体寸法比  $H/B$  は, 初期供試体寸法比  $H_0/B_0$  と分岐時の応力比 (分岐荷重)  $\eta$  の関数として導くことができる. したがって, 分岐荷重と供試体寸法比の関係を, 分岐現象を考える上でより明確な分岐荷重と初期の供試体寸法比の関係として考察することが可能になる.

初期 ( $t=0$ ) の供試体高さが  $H_0$ , ある時刻 ( $t=t$ ) の高さが  $H$  のとき, そのときの工学軸ひずみ (以下, 軸ひずみと呼ぶ)  $\varepsilon_a$  (収縮側を正) は,

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \frac{H_0 - H}{H_0} = 1 - \exp\left\{\ln \frac{H}{H_0}\right\} = 1 - \exp\left\{\int_0^t \frac{\dot{H}}{H} dt\right\} \\ &= 1 - \exp\left\{\int_0^t D_{22} dt\right\} \end{aligned} \quad (32)$$

と書き表せる. 一方, 式(2)の物質時間微分をとり,  $T'_{11} > T'_{22}$  を考慮して式(13), 式(14)を用いることにより, 次式が得られる.

$$\dot{p}' = -\frac{\tilde{G}\tilde{K}\tilde{\beta}}{\tilde{G}+\tilde{h}}(D_{11}-D_{22}), \quad \dot{q} = \frac{\sqrt{3}\tilde{G}\tilde{h}}{\tilde{G}+\tilde{h}}(D_{11}-D_{22}) \quad (33)$$

上式を用いると, 応力比  $\eta$  の物質時間微分は, 次式のように書き表せる.

$$\dot{\eta} = \frac{\sqrt{3}\tilde{h} + \eta\tilde{K}\tilde{\beta}}{\tilde{G} + \tilde{h}} \tilde{G}_0 (D_{11} - D_{22}) \quad (34)$$

$t=0$  のとき,  $q=0$ ,  $p'=p'_0$  を考慮に入れ,  $t=0$  から  $t=t$  まで上式を積分すると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \int_0^t (D_{11} - D_{22}) dt &= \frac{-\sqrt{3}}{(1 + DM\tilde{K}_0)\tilde{G}_0} \\ &\times \left\{ D\tilde{G}_0 \ln \frac{M-\eta}{M} - \frac{\eta}{3} + \frac{D\tilde{K}_0}{6} (\eta^2 - 2M\eta) \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

式(16)の非排水条件を考慮し, 上式を式(32)に代入すると, 時刻  $t=t$  の軸ひずみ  $\varepsilon_a$  は,

$$\varepsilon_a = 1 - \exp\left[ \frac{\sqrt{3}\left\{ D\tilde{G}_0 \ln \frac{M-\eta}{M} - \frac{\eta}{3} + \frac{D\tilde{K}_0}{6} (\eta^2 - 2M\eta) \right\}}{2(1 + DM\tilde{K}_0)\tilde{G}_0} \right] \quad (36)$$

と得られ, 最終的に応力比  $\eta$  の関数となる. 一方, 分岐時の供試体の高さ  $2H$  と幅  $2B$  は, 非排水条件を考慮に入れると, それぞれ  $2H = 2(1-\varepsilon_a)H_0$ ,  $2B = 2B_0(1-\varepsilon_a)$  となるので, 分岐時の供試体寸法比は,

$$\frac{H}{B} = (1-\varepsilon_a)^2 \frac{H_0}{B_0} \quad (37)$$

と表すことができる. 軸ひずみ  $\varepsilon_a$  が応力比  $\eta$  の関数であるから, 分岐時の供試体寸法比  $H/B$  は分岐荷重  $\eta$  と初期の供試体寸法比  $H_0/B_0$  が与えられると求まる. なお,  $H/B$  は,  $\eta=0$  のときに  $H_0/B_0$ ,  $\eta=M$  のときに 0 となる  $\eta$  に関する単調減少関数となっている.

#### 5. 供試体の分岐荷重の解析結果と考察

本研究に用いた梅田層粘土の土質定数<sup>23)</sup>を表-2

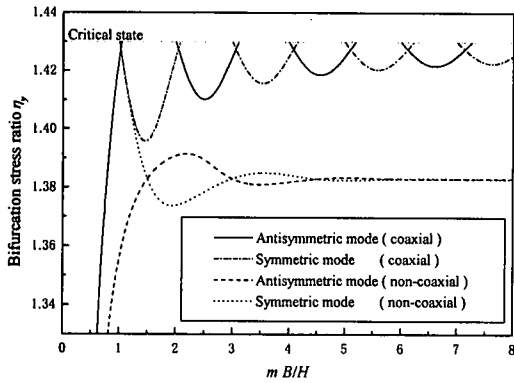


図-2 分岐荷重 $\eta_y$ と分岐時の供試体寸法比 $H/B$ 及び変形モード $m$ の関係

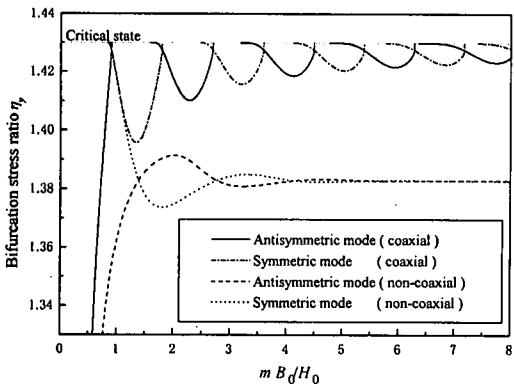


図-3 分岐荷重 $\eta_y$ と初期の供試体寸法比 $H_0/B_0$ 及び変形モード $m$ の関係

に示す。なお、非共軸パラメータ $A$ の値が取りうる範囲および分岐解析に及ぼす影響に関しては現在検討中であるが、本研究においてはYatomi *et al.*<sup>5)</sup>の考察を基に $A$ の値を仮定した。以下に、表-1の楕円型、双曲型、放物型の全領域において、分岐解析を行なった結果を示す。なお、限界状態における応力比以下の範囲で、最初に分岐が発生する可能性がある最小の応力比を分岐荷重として採用している。

図-2に分岐荷重 $\eta_y$ と分岐時の供試体寸法比 $H/B$ 及び変形モード $m$ の関係を、図-3には分岐荷重 $\eta_y$ と初期の供試体寸法比 $H_0/B_0$ 及び変形モード $m$ の関係を示す。図中、縦軸は分岐荷重 $\eta_y$ 、横軸は変形モード $m$ と $B/H$ (あるいは $B_0/H_0$ )の積である。したがって、横軸の値は、変形モード $m$ が増大するにつれ、あるいは供試体寸法比( $H/B$ あるいは $H_0/B_0$ )が減少するにつれ、増大する。

共軸モデルの場合には、 $mB/H$ (あるいは $mB_0/H_0$ )が増大するにつれ、分岐荷重は区分的に増減を繰り返してゆく。さらにその極小値は次第に増大してゆきながら限界状態における応力比に漸近する傾向にある。また、供試体寸法比と変形モードの関係によ

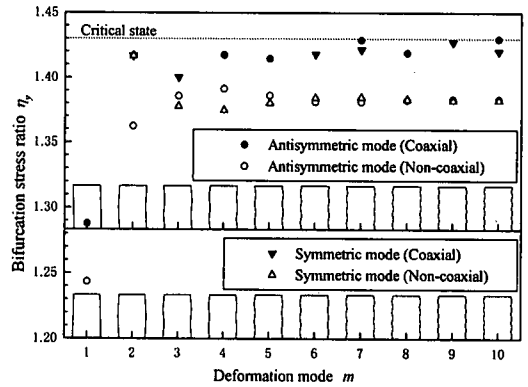


図-4 分岐荷重 $\eta_y$ と変形モード $m$ の関係 ( $H_0/B_0=2$ )

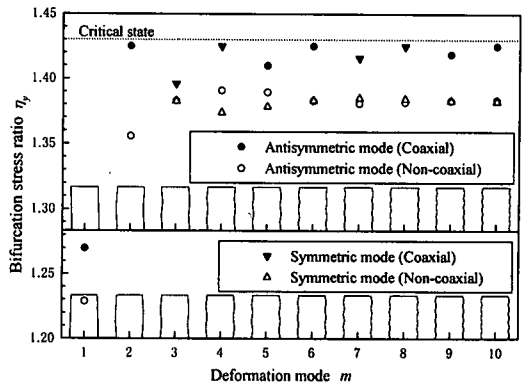


図-5 分岐荷重 $\eta_y$ と変形モード $m$ の関係 ( $H/B=2$ )

っては、対称・非対称モードに関わらず分岐荷重が存在なくなる領域が周期的に発生している。この周期性は、共軸モデルの場合には、分岐荷重が供試体寸法比の影響を過敏に受けることを示す。

非共軸モデルの場合には、分岐荷重は、 $mB/H$ (あるいは $mB_0/H_0$ )が約1.5~2.5の範囲で、非対称モードの場合は最大値に、対称モードの場合は最小値にそれぞれ一度だけ達する。一方、 $mB/H$ (あるいは $mB_0/H_0$ )が約2.5を超える範囲においては、非共軸モデルの分岐荷重は、共軸モデルの場合にみられる供試体寸法比による顕著な周期性を示さず、共軸モデルの場合より小さなある一定値(約1.38)となる。したがって、非共軸モデルの場合には、共軸モデルに比べて供試体寸法比が分岐荷重に及ぼす影響は小さく、より分岐が発生し易いことがわかる。また、実験の際に、ほぼ同一の分岐荷重でしばしば観察されるような、種々の変形モードや種々の変形モードが重ね合わされた変形モード、変形モードの飛び移り現象等<sup>24)</sup>が生じ易いことも説明できる。

また、図-3から、初期の供試体寸法比 $H_0/B_0$ の減少(すなわち、 $mB_0/H_0$ の増大)にともない分岐荷重

が一般に増大することがわかる。このことは、亀井・常田<sup>10)</sup>の一軸圧縮強度 $q_u$ は初期の供試体寸法比 $H_0/B_0$ の減少とともに増加するという報告と一致する。

以上の結果は、供試体寸法比によらない一般的な場合の結果である。このとき、分岐荷重と $mB/H$ の関係を示す図-2と分岐荷重と $mB_0/H_0$ の関係を示す図-3には、微妙な違いが存在する。そこで、違いをより具体的にわかり易く考察するために、以後、土質試験においてしばしば用いられる初期の供試体寸法比 $H_0/B_0=2$ <sup>25)</sup>の供試体に対して、分岐荷重や分岐時の変形などを詳細に検討する。

図-4は、初期の供試体寸法比 $H_0/B_0=2$ とした場合の分岐荷重 $\eta_y$ と変形モード $m(m=1\sim 10)$ の関係を示している。また、参考のために、分岐時の供試体寸法比 $H/B=2$ とした場合の上記関係を図-5に示す。なお、わかり易くするため、図中に各変形モード概形を合わせて表示してある。

この図より、共軸モデルの場合には、ある限られた変形モードの分岐荷重しか存在しないことが明確にわかる。例えば、図-4に示す $H_0/B_0=2$ の場合には、 $m=2,3,6,7,9,10$ の対称モード、および $m=1,4,5,7,8,10$ の非対称モードの分岐荷重のみが存在している。また、図-5の $H/B=2$ の場合には、 $m=3,4,7,8$ の対称モード、および $m=1,2,5,6,9,10$ の非対称モードの分岐荷重のみが存在している。

一方、非共軸モデルの場合には、 $H_0/B_0=2$ の場合には、 $m=1$ の対称モードを除くすべての変形モードの分岐荷重が存在する(図-4)。また、 $H/B=2$ の場合には、 $m=1,2$ の対称モードを除くすべての変形モードの分岐荷重が存在する(図-5)。

特に、共軸および非共軸モデルどちらの場合も、図-5の分岐時の供試体寸法比 $H/B=2$ の場合においては、実際の供試体寸法比でしばしば観察される $m=2$ の平面ひずみ対称バルジ型の変形モードの分岐荷重が存在しない。一方、図-4の初期の供試体寸法比 $H_0/B_0=2$ の場合においては、この $m=2$ の平面ひずみ対称バルジ型の変形モードの分岐荷重( $\eta_y=1.42$ )が存在することが明確にわかる。このことより、一般に行われているように、分岐時の供試体寸法比を仮定して変形モードと分岐荷重を考察する場合は十分注意する必要があることがわかる。

次に、図-6に $H_0/B_0=2$ の場合の共軸モデルの分岐荷重と軸ひずみの関係を示す。対称モードの場合には、軸ひずみが4.0~6.0%の範囲に分岐点が分散している。また、非対称モードの場合には、1次変形モード(座屈型)の分岐点は、軸ひずみが2.9%付近で達するが、その他の変形モードの分岐点は軸ひず

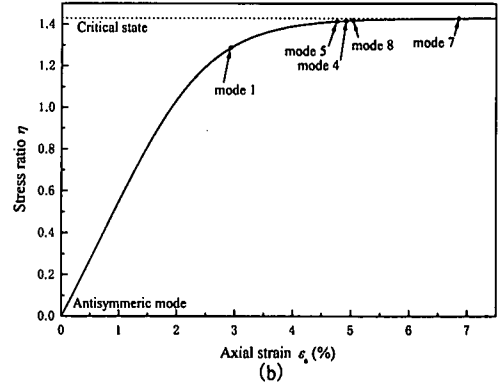
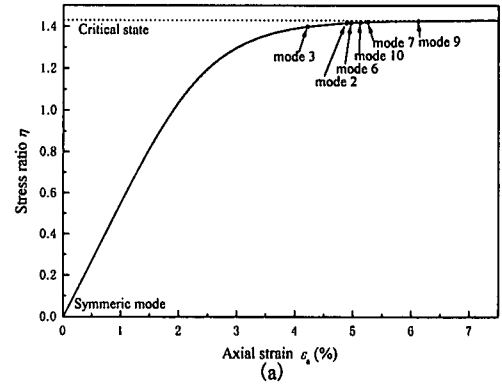


図-6 分岐荷重 $\eta_y$ と軸ひずみ $\epsilon_x$ の関係(共軸モデル)  
(a)対称モード(b)非対称モード

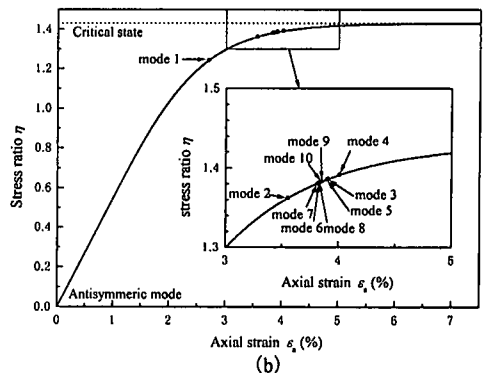
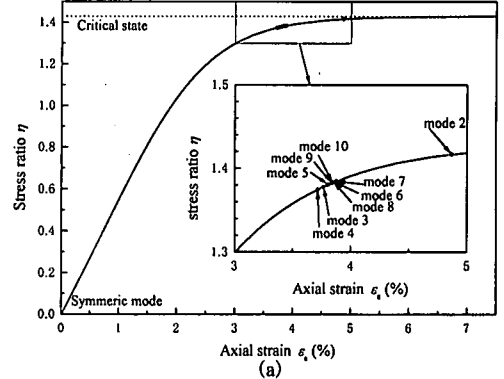
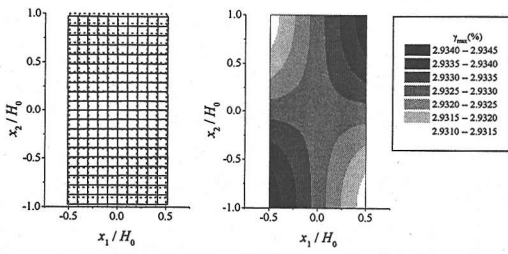
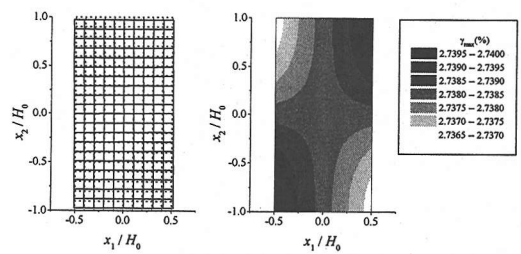


図-7 分岐荷重 $\eta_y$ と軸ひずみ $\epsilon_x$ の関係(非共軸モデル)  
(a)対称モード(b)非対称モード

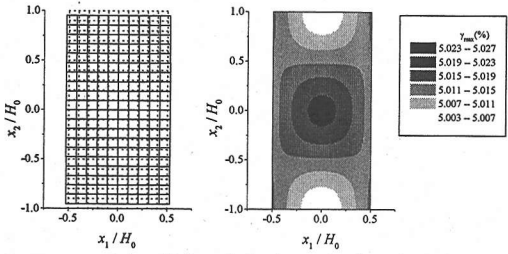




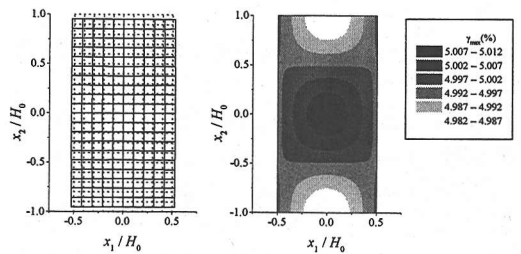
(a) 非対称1次変形モード ( $m=1$ )



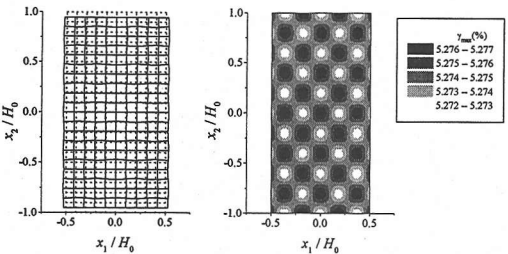
(a) 非対称1次変形モード ( $m=1$ )



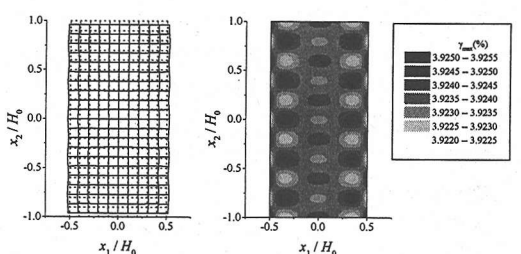
(b) 対称2次変形モード ( $m=2$ )



(b) 対称2次変形モード ( $m=2$ )



(c) 対称10次変形モード ( $m=10$ )



(c) 対称10次変形モード ( $m=10$ )

図-8 分岐時変形概形および最大せん断ひずみの分布 (共軸モデル)

図-9 分岐時変形概形および最大せん断ひずみの分布 (非共軸モデル)

みが4.5~7.0%の範囲に分散している。

一方、非共軸モデルの分岐荷重と軸ひずみの関係は、図-7に示す通りとなる。非対称1次変形モード(座屈型)の場合、軸ひずみが2.7%付近で分岐点に達するが、その他の対称・非対称変形モード(対称2次変形モードの4.9%付近を除く)の場合には、分岐点は3.5~4.0%の範囲に集中していることがわかる。したがって、分岐荷重の場合と同様に、軸ひずみの場合も、分岐点は共軸モデルの場合では分散し、非共軸モデルの場合は比較的狭い範囲に集中しており、かつ、共軸モデルより小さな軸ひずみで分岐することが示された。

## 6. 最大せん断ひずみ

初期において長さ $l_0$ の部分がある時刻 $t=t$ に $l$ になり、その直後 $t=t+\Delta t$ に $l+\Delta l$ になったと仮定すると、時刻 $t=t+\Delta t$ における主対数軸ひずみは、

$$\varepsilon_L|_{t+\Delta t} = \ln \frac{l+\Delta l}{l_0} = \ln \frac{l}{l_0} + \ln \left(1 + \frac{\Delta l}{l}\right) \quad (38)$$

となる(伸張側を正)。上式において、 $|\Delta l/l| \ll 1$ なら $\ln(1+x) \approx x$ であるから、 $|\Delta l/l| \ll 1$ のとき、主対数軸ひずみは次式で近似できる。

$$\varepsilon_L|_{t+\Delta t} \approx \ln \frac{l}{l_0} + \frac{\Delta l}{l} \quad (39)$$

したがって、分岐直後 $t=t+\Delta t$ の主対数軸ひずみは、分岐直前、時刻 $t=t$ の一樣主対数軸ひずみ $\varepsilon_{Lij}$ と変形速度を用いて表すと、次式で与えられる。

$$(\varepsilon_L)_{ij}|_{t+\Delta t} \approx (\varepsilon_L)_{ij}|_t + D_{ij}\Delta t \quad (i: \text{no sum}) \quad (40)$$

また、分岐直前のせん断ひずみ $(\varepsilon_{ij})_{ij}|_t$  ( $i \neq j$ )は0であるから、分岐直後の対数せん断ひずみは次式となる。

$$(\varepsilon_{ij})_{ij}|_{t+\Delta t} \approx D_{ij}\Delta t \quad (i \neq j) \quad (41)$$

工学ひずみ $\varepsilon_{ij}$  (圧縮側を正) は、対数ひずみ $(\varepsilon_{ij})_j$  を用いると $\varepsilon_{ij} = 1 - \exp\{-(\varepsilon_{ij})_j\}$ と表される。そこで、このとき、分岐直後の工学ひずみの主値を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  ( $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ )と置くと、最大せん断ひずみ $\gamma_{max}$ は次式で表せる。

$$\gamma_{max} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \quad (42)$$

以後、上式を分岐時の最大せん断ひずみと呼ぶ。

## 7. 最大せん断ひずみの解析結果および考察

平面ひずみ条件下で非排水圧縮せん断を受ける有限変形 Cam-clay モデルを用いた長方形断面供試体 (初期供試体寸法比  $H_0/B_0 = 2$ ) の分岐時の最大せん断ひずみ $\gamma_{max}$  の分布を式(42)より求め、各変形モードにおけるすべり面の発生位置について考察する。なお、分岐瞬間までは各状態量 (応力, 間隙水圧等) が均一であると仮定したが分岐後においては、不均一な状態となっている。供試体内において間隙水圧の大きさにばらつきが生じると式(12)は式(13)とはならず、体積変化を生じることとなる。したがって、分岐後においては供試体内で間隙水の移動が生じる可能性がある。

本研究では、上記の「最大せん断ひずみが最大となる点がすべり面が最も発生しやすい位置」と仮定して議論する。図-8に共軸モデルの場合の、図-9には非共軸モデルの場合の、分岐時の変形概形(点線で初期の供試体概形)と分岐時の最大せん断ひずみ $\gamma_{max}$ の分布を示す。なお、変形図は、生じた変形を明瞭にするため、 $m=2$  の場合は非均一変形量を10倍、その他の変形モードでは非均一変形量を100倍している。また、それぞれの変形モードに応じ、 $\gamma_{max}$ の分布をわかり易くするため、同一の濃度でも、異なる $\gamma_{max}$ の範囲となっている。

図-8(a), 図-9(a)は、非対称1次変形モード(座屈型)の変形概形および最大せん断ひずみの分布を示している。供試体の上端部は左側へ、下端部は右側へと張り出すような変形が生じるとき、供試体内の最大せん断ひずみは、供試体の上端部右側および下端部左側で大きくなる。したがって、すべり面は上端部右側および下端部左側付近から発生し始め、この2点を結ぶようにすべり面が進展していくものと考えられる。なお、この場合には、最大せん断ひずみの分布に、共軸および非共軸モデルによる大きな違いはなかった。

対称2次変形モード(平面ひずみ対称バルジ型)の変形概形および最大せん断ひずみの分布を図

-8(b), 図-9(b)に示す。共軸および非共軸モデルとも、中央部が膨らむような変形が生じる場合には、供試体内の最大せん断ひずみは、供試体の中央部で非常に大きくなり、供試体の四隅でも少し大きくなる傾向がある。したがって、すべり面は供試体中央付近から発生し始め、供試体の四隅へと進展していくものと推定できる。

図-8(c), 図-9(c)は、対称10次変形モードの変形概形および最大せん断ひずみの分布である。供試体の表面が周期的に波打つような変形が発生するとき、供試体内の最大せん断ひずみは、共軸および非共軸モデルの違いにより、異なった分布を示す。共軸モデルの場合では、供試体内全体に最大せん断ひずみが最大となる点が周期的に観察される。一方、非共軸モデルの場合では、その最大となる点は供試体側面近傍に集中して周期的に観察される。このことは、非共軸モデルの場合、周期的なすべり面群が供試体の側面より発生することを示す。

また、非共軸モデルの場合には、前述したように、ほとんどの変形モードにおいて分岐荷重の大きさがほぼ一定であることから、種々の変形モードが重ね合わされた変形モードや、変形モードの飛び移り現象が生じ易くなっている。したがって、すべり面の形態が別の形態へと変化することが予想される。なお、以上の最大せん断ひずみの分布、すべり面の発生位置・形態は、当然同一物質であっても、供試体寸法比に依存する。

## 8. 結論

本研究では、まず、有限変形共軸および非共軸 Cam-clay モデルが各点非排水条件の下で平面ひずみ圧縮せん断される場合について分岐解析を行なっている。なお、境界条件は上下端面で摩擦が働かず、両側面では圧力(流体圧)が与えられた場合を考えている。このとき、境界条件の一般性にもかかわらず、増分釣合式から間隙水圧を消去し、流れ関数 $\psi$ を導入することにより得られた速度場を支配する方程式と非均一境界条件式は、非圧縮性弾塑性体において、側面荷重を0とした非常に単純な一軸引張試験<sup>1)</sup>および一軸圧縮試験<sup>2)</sup>から得られた式と同様の型となることがわかった。

その分岐解析から得られた主要な結論を以下に列記する。

(1) 共軸 Cam-clay モデルの場合には、分岐荷重が供試体寸法比の影響を過敏に受けるが、非共軸 Cam-clay モデルの場合には、共軸モデルに比べて供

試体寸法比が分岐荷重に及ぼす影響は小さく、かつ分岐荷重が小さいことから、より分岐が発生し易いことが示された。

(2)  $mB/H$  (あるいは  $mB_0/H_0$ ) が約 2.5 を超える範囲においては、非共軸 Cam-clay モデルの分岐荷重は共軸 Cam-clay モデルの分岐荷重より小さなある一定値 (約 1.38) となり、実験の際にほぼ同一の分岐荷重でしばしば観察される、種々の変形モードや種々の変形モードが重ね合わされた変形モード、変形モードの飛び移り現象が生じ易いことがわかった。

(3) 初期供試体寸法比  $H_0/B_0=2$  の供試体の場合では、分岐解析に供試体寸法比の変化を考慮することにより、平面ひずみ対称バルジ型の変形が発生する可能性を説明できることが解析的に示された。

(4) 初期供試体寸法比  $H_0/B_0=2$  の供試体の場合において、共軸モデルの分岐点は軸ひずみが 4.0~7.0% の範囲に分散しているが、非共軸モデルの分岐点は軸ひずみが 3.5~4.0% の範囲に集中しており、共軸モデルより小さな軸ひずみで供試体の分岐現象が発生することが定量的に示された。

(5) 初期供試体寸法比  $H_0/B_0=2$  の供試体の場合において、分岐解析結果から分岐時の最大せん断ひずみの分布を示した。その分布より、すべり面の初期発生位置、および形状が説明できることを示した。

なお、(1)~(3) は分岐時の供試体寸法比  $H/B$  を仮定した、および初期供試体寸法比  $H_0/B_0$  を与えた解析から得られた結果であり、(4)、(5) は初期供試体寸法比  $H_0/B_0$  を与えた解析から得られた結果である。

## 参考文献

- 1) Hill, R. and Hutchinson, W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, Vol.23, pp.239-264, 1975.
- 2) Young, N. J. B.: Bifurcation phenomena in the plane compression test, *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, Vol.24, pp.77-91, 1976.
- 3) Chau, K. T. and Rudnicki, W.: Bifurcations of compressible pressure-sensitive materials in plane strain tension and compression, *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, Vol.38, pp.875-898, 1990.
- 4) Bardet, J. P.: Analytical solutions for the plane-strain bifurcation of compressible solids, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.58, pp.651-657, 1991.
- 5) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A., and Sano, I.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial CAM-CLAY model, *Soils and foundations*, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.
- 6) 志比利秀, 矢富盟祥: 有限変形非共軸 Cam-clay モデルによる円柱供試体の軸対称分岐解析, 構造工学論文集, Vol.43A, pp.413-421, 1997.
- 7) Yatomi, C. and Shibi, T.: Antisymmetric bifurcation analysis in a circular cylinder of a non-coaxial Cam-clay model, *Proceedings of the International Symposium Deformation and Progressive Failure in Geomechanics*, Nagoya, pp.9-14, 1997.
- 8) 志比利秀, 矢富盟祥: 有限変形非共軸 Cam-clay モデルによる中空円柱供試体の非軸対称分岐解析, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.1, pp.537-546, 1998.
- 9) 斎藤武久, 矢富盟祥, 石田啓, 志比利秀: 死荷重側方境界条件下における平面ひずみ非排水試験の分岐解析, 地盤の破壊とひずみの局所化に関するシンポジウム論文集, pp.105-110, 1994.
- 10) 亀井健史, 常田亮: 一軸圧縮強度・変形特性に及ぼす供試体寸法の影響, 土木学会論文集, No.436/III-16, pp.131-134, 1991.
- 11) Goto, S. and Tatsuoka, F.: Effect of end conditions on triaxial compressive strength for cohesionless soil, advanced triaxial testing of soil and rock, ASTM, STP, No.977, pp.692-705, 1980.
- 12) 福島伸二, 望月美登志, 香川和夫, 石井武美: 砂の低拘束圧領域における超大型三軸圧縮試験, 土質工学会論文報告集, Vol.29, No.1, pp.187-194, 1989.
- 13) Ikeda, K. and Goto, S.: Imperfection sensitivity for size effect of granular materials, *Soils and Foundations*, vol.33, No.2, pp.157-170, 1993.
- 14) Asaoka, A. and Noda, T.: Imperfection-sensitive bifurcation of cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries, *Soils and Foundations*, Vol.35, No.1 pp.83-100, 1995.
- 15) 小林一三, 飯塚敦, 太田秀樹: 正規粘土供試体せん断時における局所変形の遷移, 土木学会論文集, No.617/III-46, pp.1-18, 1999.
- 16) 矢富盟祥: 弾塑性体の平面ひずみ圧縮試験における分岐解析, 工学に現われる偏微分方程式の数値解析に関するシンポジウム概要集, 京都大学数理解析研究所, 1993.
- 17) 加藤泰寛, 矢富盟祥, 石田啓: 平面ひずみ非排水試験の分岐解析とすべり面の発生機構, 土木学会第 48 回 年次学術講演会講演概要集 III 部, pp.32-33, 1993.
- 18) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A.: Yielding of clays in states wetter than critical, *Géotechnique*, Vol.13, pp.211-240, 1963.
- 19) Rudnicki, J. W. and Rice, J. R.: Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, Vol.23, pp.371-394, 1975.

- 20) 例えば, 土木学会編: 土木工学ハンドブック, 技報堂出版, pp.220-233, 1989.
- 21) Ohta, H.: Analysis of deformations of soils based on the theory of plasticity and its application to settlement of embankments, *Doctor Engineering Thesis*, Kyoto Univ., 1971.
- 22) Ladd, C. C. and Lambe, F. W.: The strength of undisturbed clay determined from undrained tests, Laboratory shear testing of soils, ASTM, STP, No.361, pp.342-371, 1963.
- 23) Sekiguchi, H.: Rheological characteristics of clays, *Proceedings of 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Tokyo, Vol.1, pp.289-292, 1977.
- 24) 例えば, 小高猛司, 浅岡顕, 鈴木健爾: 初期不整を有する砂供試体のせん断特性と破壊形態, 土木学会第49回年次学術講演会講演概要集第III部, pp.306-307, 1994.
- 25) 例えば, 土質工学会編: 土の試験実習書(第二回改訂版), pp.133-158, 1991.

(1999. 12. 16 受付)

## INFLUENCES OF ASPECT RATIO ON THE BIFURCATION ANALYSIS FOR A NORMALLY CONSOLIDATED CLAY UNDER THE PLANE STRAIN UNDRAINED COMPRESSION LOADINGS

Toshihide SHIBI, Chikayoshi YATOMI and Takeshi KAMEI

This paper examines the influences of the aspect ratio on the bifurcation analysis for a non-coaxial and a coaxial Cam-clay model of normally consolidated clays during undrained shear under plane strain condition. The bifurcation analyses are carried out considering the difference between the aspect ratio at the onset of bifurcation and the initial aspect ratio.

As a result, we show the existence of the symmetric bulging mode, which is often observed in the experiment. We also examine the sites where the slip surfaces first occur and the patterns of the slip surfaces by judging from the distributions of maximum shear strain