

底面境界層の構造を考慮した長波理論解と 海底摩擦による波高減衰に関する考察

正村憲史¹・藤間功司²・後藤智明³・飯田邦彦⁴・重村利幸⁵

¹正会員 修(工) 防衛大学校助手 建設環境工学科(〒239-8686 横須賀市走水1-10-20)

²正会員 工博 防衛大学校助教授 建設環境工学科

³正会員 工博 東海大学教授 工学部土木工学科

⁴正会員 工修 東海大学助教授 工学部土木工学科

⁵正会員 Dr.Eng. 防衛大学校教授 建設環境工学科

海底から水面までせん断力が作用していると仮定し、地形や海底摩擦による波高変化を考慮した線形長波理論に関する層流解および乱流解を求めた。そして、層流解の波高減衰率などを層流境界層理論の結果と比較し、水深が浅く周期が長い場合には境界層近似が適用できないことを示した。また、乱流解を用いて反射率を評価したところ、斜面反射率がイリバーレン数だけでなく斜面上の波の数や粗度高さによって変化することが分かった。さらに、長波の数値計算で広く用いられているマニングの式による底面せん断力が本理論解の結果と平均的に等しくなるための粗度係数 n を評価したところ、 n はほぼ粗度高さのみによって決まることが示された。

Key Words : long wave, bottom friction, wave boundary layer, Manning's law, reflection coefficient

1. はじめに

浅海域の波浪変形や底質移動において、海底摩擦は非常に重要な役割を果たす。そのため、波動運動に伴う海底摩擦に関しては、これまでにも多くの研究が行われてきた。例えば、土屋・井上¹⁾、岩垣ら²⁾、Kajiura³⁾、野田⁴⁾は、境界層方程式に基づき、水平床上の波による海底摩擦について調べている。これらの研究では、ポテンシャル層と境界層の運動を分離し、ポテンシャル理論から求められる流速を境界層外縁流速として境界層方程式を解く。そして、境界層内のエネルギー散逸が波エネルギーの減衰に等しいと見なして波高減衰率を求める。すなわち、波動境界層が水深に比べて薄く、短時間・短区間におけるエネルギー損失は小さいが、長い距離を伝播するとエネルギー減衰が無視できなくなるという考え方である。この仮定は、水深が比較的深く周期が短い波動に関しては妥当であり、得られた結果は良好な近似になり得る。しかし、水深が浅く周期が長くなり、境界層が水面付近まで発達する場合への適用性には問題がある。

また、Kajiura⁵⁾は長周期波を対象に、静水面まで発達した水平床上の振動流境界層(代表流速が場所によって変化しない)を考え、静水面でせん断力がゼロになるという境界条件のもとで解を導いた。最近、田中ら⁶⁾も同様の考え方のもとで解を導いている。田中らの摩擦係数は、ある程度水深が深く周期が短いと水深に依らず周期によって決まり、境界層近似理論に近い結果を

与える。また、水深が浅く周期が長いと摩擦係数が周期に依らず水深によって決まる、定常流に類似した性質を示す。すなわち、田中らの解は、境界層近似が適用できる通常の波動境界層から、定常流に近い準定常な波動境界層まで含む広い範囲に適用可能な有用な解であると解釈できる。しかし、境界層が水面まで達する場合、境界層近似理論のような方法で波高減衰率を求めることが理論的に不合理であるため、海底摩擦がどの程度の波高減衰をもたらすかを考察することは必ずしも容易でない。

このように多くの研究が行われているが、そのほとんどは水平床上の波を対象にしており、斜面のように、波高が変化する場合の海底摩擦について調べた研究は少ない。また、津波や高潮など長周期波に対しては、海底摩擦が特に重要であるにも関わらず、海底摩擦と波高減衰の関係が十分に理解されているとは言えない。

したがって、境界層が水面まで達していると仮定し、しかも水深変化や海底摩擦による波高変化を考慮し、それに見合う代表流速の変化を取り入れた理論解が得られれば、波高の変化する場での摩擦係数の設定方法や海底摩擦による波高減衰効果を考察する上で有用である。

ここでは、長周期波を対象として、せん断力項を加えた線形長波理論を考える。そして、波の進行に伴い代表流速が変化することを考慮した理論展開を行い、水面でせん断力がゼロになるという境界条件のもとで解を導く。その結果、任意地形に対して相似形の解が存

在し、田中らと同じ抵抗則が成立することが示される。得られた解から流速分布、せん断力分布、海底摩擦係数、平均流速と海底摩擦の位相差、波高減衰率などが直接評価できる。

次に、反射率を評価し、海底摩擦による反射率の変化について検討する。また、実用的な抵抗則としてマニンゲル則を用いた場合に、底面せん断力の平均値が本理論の乱流解と等しくなるための粗度係数 n を評価する。

なお、本理論では線形の方程式を使っているため、非線形性の強い場合には、正確な解析ができない。しかし、本理論解を使用した考察により、これまで経験に頼ってきた浅海域での摩擦係数の設定などに、物理的根拠のある基準が得られると期待できる。

2. 理論解

(1) 支配方程式と変数分離

非圧縮流体の二次元波動運動を考える。波高水深比と相対水深は小さいが、(渦)粘性項は無視できないと仮定すると、支配方程式は以下のように書ける。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h+z_0}^0 u dz = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_e \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2)$$

ただし、静水面上に x 軸、鉛直上向きに z 軸をとっている。 $u(x, z, t)$ は x 方向流速、 $h(x)$ は水深、 $\eta(x, t)$ は水位変動、 g は重力加速度、 $\nu_e(x, z)$ は動粘性係数あるいは渦動粘性係数である。また、 $z_0(x)$ は海底面上で流速がゼロになる高さを表し、層流ならゼロとする。

式(1),(2)から η を消去すると次式を得る。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-h+z_0}^0 u dz = \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \left(\nu_e \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3)$$

これが解くべき式で、境界条件は以下の通りである。

$$z = 0 \quad \text{において} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

$$z = -h + z_0 \quad \text{において} \quad u = 0 \quad (5)$$

ここで、 u として以下の形の解を想定する。

$$u(x, z, t) = F_1(x)G(x, z)e^{-i\omega t} \quad (6)$$

ただし、 ω は角周波数($= 2\pi/T$, T = 周期)である。上式を式(3)に代入すると、以下のように変形できる。

$$\frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_e \frac{\partial G}{\partial z} \right) - G = \frac{g}{\omega^2 F_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(F_1 \int_{-h+z_0}^0 G dz \right) \quad (7)$$

右辺は x だけの関数だから、これを $-A(x)$ とおく。

(2) G の解

a) 層流の場合

層流の場合、 $\nu_e = \nu$ (動粘性係数)、 $z_0 = 0$ とおく。このとき、 G の支配方程式は式(7)左辺から以下のように

書ける。

$$\frac{i\nu}{\omega} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - G = -A(x) \quad (8)$$

上式の解は、境界条件(4),(5)のもとで

$$G(x, z) = A(x) \{1 - \cos(p - p_h)/\cos p_h\} \quad (9)$$

と求められる。ここで、 p 、 p_h は次式で表される。

$$p = \alpha(z + h)e^{i\pi/4}, \quad p_h = \alpha h e^{i\pi/4}, \quad \alpha = \sqrt{\omega/\nu} \quad (10)$$

b) 亂流の場合

乱流の場合、Kajiura³⁾、田中ら⁶⁾と同様、

$$\nu_e = \kappa \hat{u}_*(z + h), \quad \hat{u}_* = \sqrt{\tau_b/\rho} \quad (11)$$

とおく。ただし、 $\kappa = 0.4$ である。 \hat{u}_* は摩擦速度、 τ_b は底面せん断力であり、記号 $\hat{\cdot}$ は最大値(絶対値)を意味する。 \hat{u}_* は x の関数である。

式(7)から、 G の支配方程式は以下のように書ける。

$$\frac{i\kappa \hat{u}_*}{\omega} \left\{ (z + h) \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \frac{\partial G}{\partial z} \right\} - G = -A(x) \quad (12)$$

境界条件(4),(5)を満たす上式の解は

$$G(x, z) = A(x) \left\{ 1 - \frac{J_0(q)N_1(q_h) - N_0(q)J_1(q_h)}{J_0(q_0)N_1(q_h) - N_0(q_0)J_1(q_h)} \right\} \quad (13)$$

である。ただし、 J_0 、 J_1 、 N_0 、 N_1 はベッセル関数、 q 、 q_h 、 q_0 は以下の通りである。

$$q = 2\sqrt{\beta(z + h)}e^{i\pi/4}, \quad q_h = 2\sqrt{\beta h}e^{i\pi/4}$$

$$q_0 = 2\sqrt{\beta z_0}e^{i\pi/4}, \quad \beta = \omega/(\kappa \hat{u}_*) \quad (14)$$

(3) F_1 の方程式と抵抗則

a) 層流の場合

次式により $F_2(x)$ を定義する。

$$hF_2(x) = F_1 \int_{-h+z_0}^0 G dz \quad (15)$$

すなわち、 $F_2(x)e^{-i\omega t}$ が断面平均流速 \bar{u} を表す。

層流に対する $G(x, z)$ は式(9)で与えられるから、

$$\int_{-h}^0 G dz = Ah R_L^{-2}, \quad R_L^{-2} = 1 - \frac{\tan p_h}{p_h} \quad (16)$$

である。したがって、層流に対する F_1 の支配方程式は、式(7)右辺から、以下のように表すことができる。

$$\frac{g}{\omega^2} \frac{\partial^2 (hF_2)}{\partial x^2} + R_L^{-2} F_2 = 0 \quad (17)$$

さて、 F_2 の解は $h(x)$ によって異なるが、得られた F_2 を使い、流速を

$$u = R_L^{-2} \{1 - \cos(p - p_h)/\cos p_h\} \bar{u} \quad (18)$$

$$\bar{u} = F_2(x) e^{-i\omega t} \quad (19)$$

と表すことができる。すなわち、せん断力分布は

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\nu}{h} R_L^{-2} p_h \frac{\sin(p - p_h)}{\cos p_h} \bar{u} \quad (20)$$

となる。ここで、

$$\tau_b/\rho = C \hat{u} \bar{u} \quad (21)$$

と摩擦係数 C を定義すれば、

$$C = -\{\nu/(h\hat{u})\}R_L^2 p_h \tan p_h \quad (22)$$

が得られる。ただし、 \hat{u} は断面平均流速の最大値である。

b) 亂流の場合

乱流に対する $G(x, z)$ は式(13)で与えられるから、

$$\int_{-h+z_0}^0 G dz = Ah R_T^{-2} \quad (23)$$

$$R_T^{-2} = 1 - \frac{z_0}{h} + \frac{2q_0 J_1(q_0) N_1(q_h) - N_0(q_0) J_1(q_h)}{q_h^2 J_0(q_0) N_1(q_h) - N_0(q_0) J_1(q_h)} \quad (24)$$

である。層流のときと同様、 $F_2(x)$ を式(15)で定義すると、 F_1 に関する支配方程式は以下のように変形できる。

$$\frac{g}{\omega^2} \frac{\partial^2 (h F_2)}{\partial z^2} + R_T^{-2} F_2 = 0 \quad (25)$$

すなわち、層流の方程式で R_L を R_T に置換えれば乱流の方程式になる。

乱流においても F_2 の解は $h(x)$ や $z_0(x)$ によって異なるが、得られた F_2 を使い、流速を

$$u = R_T^{-2} \left\{ 1 - \frac{J_0(q) N_1(q_h) - N_0(q) J_1(q_h)}{J_0(q_0) N_1(q_h) - N_0(q_0) J_1(q_h)} \right\} \bar{u} \quad (26)$$

と表すことができる。せん断力分布は次式で求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\rho} &= \kappa \hat{u}_*(z+h) \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= \kappa \hat{u}_* R_T^{-2} \frac{q}{2} \frac{J_1(q) N_1(q_h) - N_1(q) J_1(q_h)}{J_0(q_0) N_1(q_h) - N_0(q_0) J_1(q_h)} \bar{u} \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、底面せん断力と摩擦速度の関係 $\tau_b = \rho \hat{u}_*^2$ から

$$\frac{\hat{u}_*}{\hat{u}} = \kappa \left| R_T^{-2} \frac{q_0}{2} \frac{J_1(q_0) N_1(q_h) - N_1(q_0) J_1(q_h)}{J_0(q_0) N_1(q_h) - N_0(q_0) J_1(q_h)} \right| \quad (28)$$

なる式が得られる。この式から、 ω 、 h 、 z_0 、 \hat{u} から繰り返し計算により \hat{u}_* を求めることができる。層流と同じように式(21)で摩擦係数 C を定義すれば、式(28)から決まる \hat{u}_* を使い、 C が次式から求められる。

$$C = \kappa \frac{\hat{u}_*}{\hat{u}} R_T^{-2} \frac{q_0}{2} \frac{J_1(q_0) N_1(q_h) - N_1(q_0) J_1(q_h)}{J_0(q_0) N_1(q_h) - N_0(q_0) J_1(q_h)} \quad (29)$$

なお、式(29)に代わり、式(24)、(29)から得られる次式により C を求めてよい。

$$R_T^{-2} = \frac{1 + i C \hat{u}/(\omega h)}{1 - z_0/h} \quad (30)$$

以上の議論から明らかなように、式(1)、(2)のもとでは水深の変化と無関係に流速分布の相似解が存在し、抵抗則が海底形状の変化に依らない。また、本理論解で得られる流速の鉛直分布および抵抗則は、田中らの理論の結果と本質的に同じである。すなわち、水深が変化する場合でも、各場所・各瞬間ににおいて田中らの摩擦係数がそのまま使えると言える。

(4) 流速、せん断力および波形

a) 水平床層流の場合

水平床では R_L が一定である。このとき、式(17)の解は $e^{\pm i R_L k_0 x}$ の組み合わせで与えられる。ただし、 $k_0 =$

ω/\sqrt{gh} である。進行波を得るために $F_2 = u_0 e^{i R_L k_0 x}$ を採用すると、断面平均流速および流速分布は、

$$\bar{u} = u_0 e^{i(R_L k_0 x - \omega t)} \quad (31)$$

$$u = u_0 R_L^2 \{1 - \cos(p - p_h)/\cos p_h\} e^{i(R_L k_0 x - \omega t)} \quad (32)$$

と求められる。せん断力分布は次式で与えられる。

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu \alpha u_0 R_L^2 \frac{\sin(p - p_h)}{\cos p_h} e^{i(R_L k_0 x - \omega t + \frac{\pi}{4})} \quad (33)$$

波形は、式(1)から以下のように求められる。

$$\eta = \{hu_0/\sqrt{gh}\} R_L e^{i(R_L k_0 x - \omega t)} \quad (34)$$

すなわち、 $Re[R_L]$ は x 方向の波数の変化率を表し、 $Im[R_L]$ は x 方向の波高減衰率を表す。

b) 斜面層流の場合

斜面の場合、 $h = mx$ を式(17)に代入し、

$$\chi = 2k_1\sqrt{x}, k_1 = \omega/\sqrt{gm}, F_3(x) = \sqrt{x}F_2(x) \quad (35)$$

と変数変換を行うと、以下の支配方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\chi} \frac{\partial F_3}{\partial \chi} + (R_L^2 - \frac{1}{\chi^2}) F_3 = 0 \quad (36)$$

ここで、水深の変化が緩やかで R_L がほぼ一定と仮定できるなら、上式の解は $J_1(R_L \chi)$ と $N_1(R_L \chi)$ の組み合わせで与えられる。 F_3 として $J_1(R_L \chi)$ を採用した場合、断面平均流速、流速分布、せん断力分布、波形はそれぞれ以下のようにになる。

$$\bar{u} = u_0 \{J_1(R_L \chi)/\chi\} e^{-i\omega t} \quad (37)$$

$$u = u_0 R_L^2 \left\{ 1 - \frac{\cos(p - p_h)}{\cos p_h} \right\} \frac{J_1(R_L \chi)}{\chi} e^{-i\omega t} \quad (38)$$

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu \alpha u_0 R_L^2 \frac{\sin(p - p_h)}{\cos p_h} \frac{J_1(R_L \chi)}{\chi} e^{i(-\omega t + \frac{\pi}{4})} \quad (39)$$

$$\eta = -i \{mu_0/(2\omega)\} R_L J_0(R_L \chi) e^{-i\omega t} \quad (40)$$

c) 水平床乱流の場合

乱流の場合、水平床でも厳密には \hat{u}_* が x によって変化すると見なすべきである。しかし、近似的に \hat{u}_* が一定であると見なすと、 R_T が一定となり、式(25)の解は $e^{\pm i R_T k_0 x}$ の組み合わせで与えられる。層流解と同様、 $F_2 = u_0 e^{i R_T k_0 x}$ を採用すると、断面平均流速、流速分布、せん断力分布および波形は以下のようにになる。

$$\bar{u} = u_0 e^{i(R_T k_0 x - \omega t)} \quad (41)$$

$$u = u_0 R_T^{-2} \left\{ 1 - \frac{J_0(q) N_1(q_h) - N_0(q) J_1(q_h)}{J_0(q_0) N_1(q_h) - N_0(q_0) J_1(q_h)} \right\} e^{i(R_T k_0 x - \omega t)} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\rho} &= \kappa \hat{u}_* u_0 R_T^{-2} \sqrt{\beta(z+h)} \times \\ &\quad \frac{J_1(q) N_1(q_h) - N_1(q) J_1(q_h)}{J_0(q_0) N_1(q_h) - N_0(q_0) J_1(q_h)} e^{i(R_T k_0 x - \omega t + \frac{\pi}{4})} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\eta = \{hu_0/\sqrt{gh}\} R_T e^{i(R_T k_0 x - \omega t)} \quad (44)$$

d) 斜面乱流の場合

斜面層流と同様の変数変換を行うと、 R_T をほぼ一定と見なせる範囲内で、 F_3 の解として $J_1(R_T\chi)$ と $N_1(R_T\chi)$ が得られる。解として $J_1(R_T\chi)$ を採用すると、断面平均流速、流速分布、せん断力分布、底面せん断力、波形はそれぞれ以下のようにになる。

$$\bar{u} = u_0 \{J_1(R_T\chi)/\chi\} e^{-i\omega t} \quad (45)$$

$$u = u_0 R_T^2 \left\{ 1 - \frac{J_0(q)N_1(q_h) - N_0(q)J_1(q_h)}{J_0(q_0)N_1(q_h) - N_0(q_0)J_1(q_h)} \right\} \\ \times \{J_1(R_L\chi)/\chi\} e^{-i\omega t} \quad (46)$$

$$\frac{\tau}{\rho} = \kappa \hat{u}_* u_0 R_T^2 \sqrt{\beta(z+h)} \times \\ \frac{J_1(q)N_1(q_h) - N_1(q)J_1(q_h)}{J_0(q_0)N_1(q_h) - N_0(q_0)J_1(q_h)} \frac{J_1(R_L\chi)}{\chi} e^{i(-\omega t + \frac{\pi}{4})} \quad (47)$$

$$\eta = -i\{mu_0/(2\omega)\}R_T J_0(R_T\chi) e^{-i\omega t} \quad (48)$$

3. 理論解の基本的性質

本理論の抵抗則は田中らの理論と本質的に同じであるが、本理論展開では x 方向に波形が変化する解が得られるため、波数変化率や波高減衰率の考察が容易である。水平床層流解における波数変化率 $Re.[R_L]$ と波高減衰率 $Im.[R_L]$ を図-1に示す。 $\alpha h \rightarrow \infty$ のとき $R_L \rightarrow 1$ であり、本理論解は周期が短く水深が深い極限において摩擦を考慮しない線形長波理論の解と一致する。すなわち、周期が短く水深が深い場合は波高減衰や波数の変化が小さい。周期が長く水深が浅くなると、波高減衰が大きくなり、また波長が短くなる。 $\alpha h \rightarrow 0$ の極限では、 $R_L = \sqrt{3}(\alpha h)^{-1}e^{i\pi/4}$ に漸近する。

層流境界層近似では、波高を $H = H_0 e^{-\epsilon kx}$ と表すと、波高減衰率 ϵ は $\epsilon = k \sqrt{2\nu/\omega} / (\sinh 2kh + 2kh)$ となる¹⁾。この式を長波近似すると、 $\epsilon = \sqrt{2}/4(\alpha h)^{-1}$ を得る。この関係を図-1中に破線で描いてある。周期が短く水深が深い $\alpha h > 100$ の場合、本理論解の波高減衰率は境界層近似理論とほぼ同じ結果を与える。しかし、周期が長く水深が浅くなり、 $\alpha h < 10$ になると本理論解は境界層近似理論より大きな波高減衰率を与える。 $\alpha h \rightarrow 0$ の極限では、本理論解の波高減衰率は、最大で境界層近似理論の 3 倍以上である。

次に、底面せん断力 τ_b や波形 η を以下のように表す。

$$F = \hat{F} e^{i(Re.[R_L]k_0 x - \omega t + \varphi)} \quad (49)$$

このとき、 φ は物理量 F と断面平均流速との位相差を表す。ただし、 \hat{F} は F の最大値である。底面せん断力および波形と断面平均流速との位相差 φ を図-2に示す。図から、周期が短く水深が深い場合には波形と断面平均流速がほぼ同位相で、断面平均流速と底面せん断力との間に $\pi/4$ の位相差があることが分かる。これは境界層近似の結果と一致する。図から、やはり $\alpha h > 100$

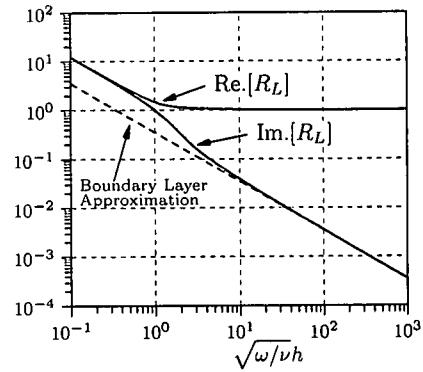


図-1 層流解の波数変化率と波高減衰率

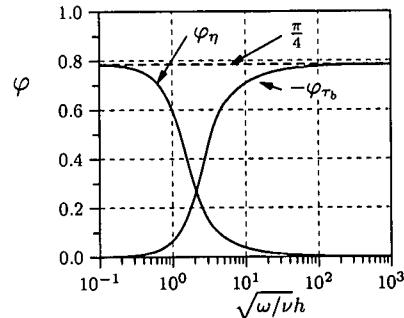


図-2 層流解の底面せん断力、波形と断面平均流速の位相差

では境界層理論は良好な近似になっている。一方、粘性の影響範囲が大きく、 $\alpha h > 10$ になると位相差に関しても境界層理論との差が大きくなる。なお、 $\alpha h \rightarrow 0$ では断面平均流速と底面せん断力は同位相になり、断面平均流速と波形の間に $\pi/4$ の位相差が生じる。

結局、境界層が薄い場合、境界層近似理論の結果は良好な近似となり得るが、周期が長くなり境界層が厚くなる場合、境界層近似理論は良好な近似とは言えず、波高減衰率を過小評価してしまうことが分かる。したがって、浅海域における長周期波の海底摩擦特性を検討するのに境界層近似を使うことは不合理であり、せん断力を水面まで考慮した本モデルを使う必要があると結論できる。

次に、乱流解のパラメータ R_T を図-3に、底面せん断力や波形と断面平均流速との位相差を図-4に示す。基本的に層流の場合と同様な形の曲線が得られている。ただし、層流の場合、津波の周期を考えると水深が数cm程度でないと大きな減衰が起こらないが、乱流の場合には水深数mから数十mでも大きな波高減衰が起こり得る。したがって、実用的には乱流解が重要である。

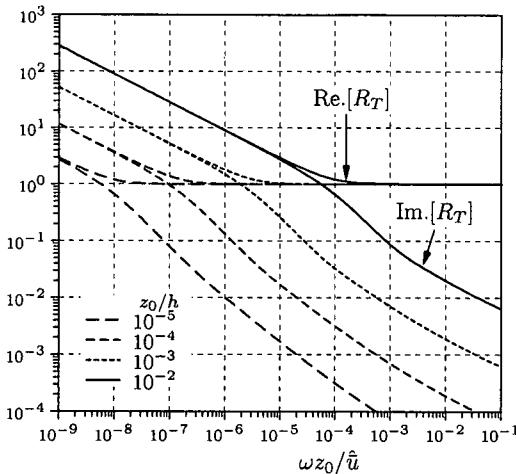


図-3 乱流解の波高減衰率と波数の変化

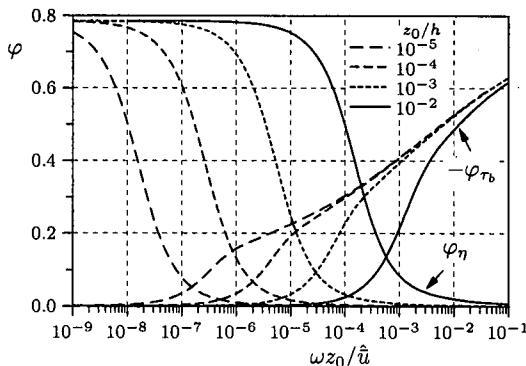


図-4 乱流解の底面せん断力、波形と断面平均流速の位相差

4. 水深が変化する場合の理論解の例

理論解析の例として、図-5に示す2通りの地形に対する乱流解を求める。図-5上段は沖側から波が入射し、岸側の浅瀬に乗り上げて進行していくステップ地形モデル、図-5下段は斜面上に鉛直壁が設置してあるモデルである。これらの地形に対しては、摩擦を考慮しない場合の理論解が容易に得られるため、摩擦の効果を考察するのに都合が良い。なお、摩擦を考慮しない理論解を求めるには、水平床上の解と斜面上の解を流量と水位が連続するように接続する方法と、以下に説明する本理論解析手法で \$R_T = 1\$ において解を求める方法があり、両者が一致することを確かめている。

本理論解析においては、式(25)の解を求める際に、

$$F_4 = hF_2, \quad F_5 = \partial(hF_2)/\partial x \quad (50)$$

とおき、式(25)を以下の連立方程式と見なして、Runge-Kutta法で数値的に解を求める。

$$\frac{\partial F_4}{\partial x} = F_5, \quad \frac{\partial F_5}{\partial x} = -\frac{\omega^2}{gh} R_T^2 F_4 \quad (51)$$

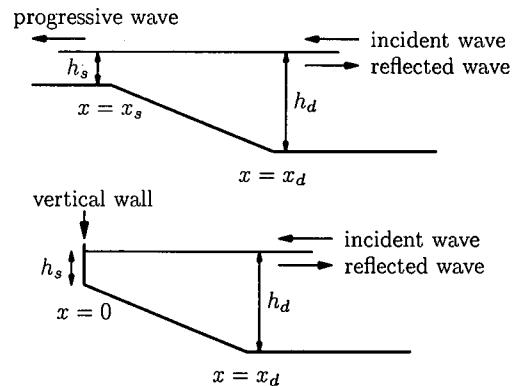


図-5 地形モデル

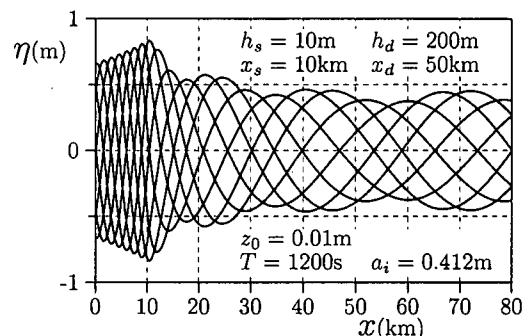


図-6 ステップ地形での空間波形の例

また、境界条件として、ステップ地形の場合は岸側の水平床で進行波解を、鉛直壁モデルの場合は鉛直壁で流速がゼロという条件を使い、沖側に向かって計算を進める。

求めた解から、断面平均流速と波形が次式によって計算できる。

$$\bar{u} = (F_4/h)e^{-i\omega t}, \quad \eta = -i(F_5/\omega)e^{-i\omega t} \quad (52)$$

また、沖側水平床での解を入射波と反射波の和で表すと、その地点での入射波の流速振幅 \$\hat{u}_i\$ と反射波の流速振幅 \$\hat{u}_r\$ が、次式で評価できる。

$$\hat{u}_i = \frac{1}{2} \left| \frac{F_4}{h} + \frac{F_5}{iR_T k_0 h} \right|, \quad \hat{u}_r = \frac{1}{2} \left| \frac{F_4}{h} - \frac{F_5}{iR_T k_0 h} \right| \quad (53)$$

同時に、入射波振幅 \$a_i\$ と反射波振幅 \$a_r\$ がそれぞれ次式から求められる。

$$a_i = \sqrt{h/g} \hat{R}_T \hat{u}_i, \quad a_r = \sqrt{h/g} \hat{R}_T \hat{u}_r \quad (54)$$

さて、ステップ地形における解の例を、図-6に示す。図は、\$T/8\$ 毎の波形変化を表している。図から、水深の深い場所では波高減衰が少なく部分重複波が形成されていること、斜面上で浅水変形し、波長が短くなり

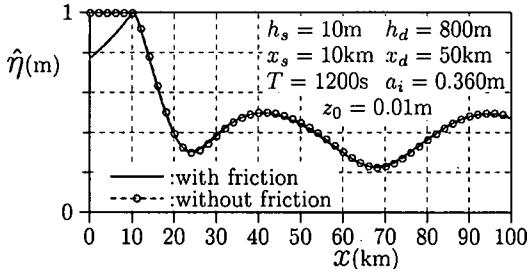


図-7 ステップ地形での最大水位の変化(1)

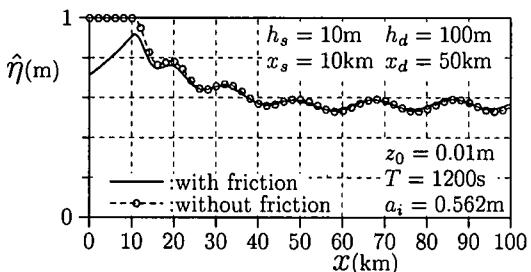


図-8 ステップ地形での最大水位の変化(2)

波高増幅していること、浅瀬で波高が急激に減衰していることなどが分かる。また、摩擦を考慮しない理論解との最大水位の比較を図-7,8に示す。図-7は沖側水深が深く斜面勾配が急なケースであり、斜面上の波の数が少ない。このケースでは斜面上でほとんど波高減衰していない。一方、図-8は沖側水深が浅く、斜面勾配が緩やかなケースで、斜面上の波の数が多い。この場合、斜面上で10%程度波高が減衰している。したがって、斜面勾配や斜面上の波の数などにより摩擦の影響の大きさが異なることが分かる。

鉛直壁モデルにおける、鉛直壁付近の波形に関して、本理論解と摩擦を考慮しない理論解との比較例を図-9,10に示す。図-9は $h_s = 1\text{m}$ 、図-10は $h_s = 0.3\text{m}$ としたケースである。摩擦を考慮しない解では水位が上昇するときと下降するときの波形が同じだが、摩擦の影響を考慮した本理論解では水位上昇時と下降時で波形が異なる。すなわち、 $x = 1 \sim 5\text{km}$ にある2番目の腹の部分に注目すると、波面が時間とともに前に出る、進行波的な様相を示す。また、 $x = 0 \sim 1\text{km}$ にある1番目の腹に注目すると、 $x = 0$ で位相が遅れ、水位上昇時に上に凸な波形、水位下降時に下に凸な波形が得られる。このような波形が得られるのが本理論の特徴である。特に図-10でその傾向が著しく、図-9では摩擦を考慮しない解との差が比較的小さい。

なお、粗度要素が粒径一様な砂粒の場合、 $z_0 = k/30$ (k は粗度高さ) 程度と考えられる。したがって、この場

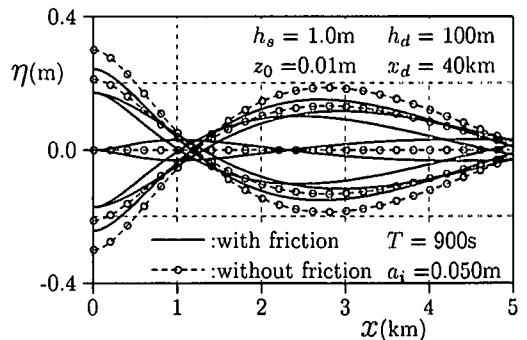


図-9 鉛直壁モデルでの先端波形の例(1)

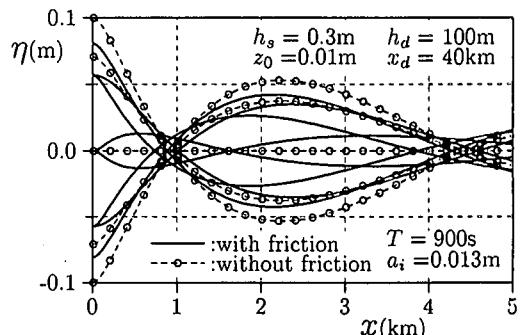


図-10 鉛直壁モデルでの先端波形の例(2)

合、 z_0/h は大きくても0.01程度と考えるのが妥当である。一方、粗度要素が尖った形状であれば、 z_0 が大きくなり、 $k_s/k = 10$ (k_s は等価砂粒粗度) ほどにもなるから、 $z_0/h = 0.1$ 程度まで取り得る。図-10は、 $x = 0$ で $z_0/h = 0.033$ だから、粗度要素がやや角張った場合への適応例と考えるべきであろう。また、図-9,10では、 $x = 0$ で $\hat{\eta}/h$ が約1/4である。したがって、 $x = 0$ 近傍では必ずしも非線形性が無視できるとは言えないが、 $\hat{\eta}/h$ が大きい領域は $x = 0$ 近傍の、波長に比べて非常に短い領域に限られる。したがって、ここで示したような大きなスケールでの波形の特徴や、波高変化などを考慮するのであれば、線形理論を適用することに大きな問題はないと考えられる。

長周期波における海底摩擦の影響を理論的に調べる方法として、運動の式に $\bar{u}_t + g\eta_x = -f\bar{u}$ と流速の1乗に比例する線形抵抗を導入する方法があるが、このモデルでは深海域と浅海域で海底摩擦力の大きさがそれほど違わないため、精度に問題がある。ここに示した例から明らかなように、本理論解では海底摩擦の寄与が深海域で小さく、浅水域で大きい傾向が顕著に表れている。また、図-5のような問題に対して、理論解析を使わず、Leap-Frog法などを用いた数値計算を行う場合、沖側境界において入射波を入射させ、同時に斜

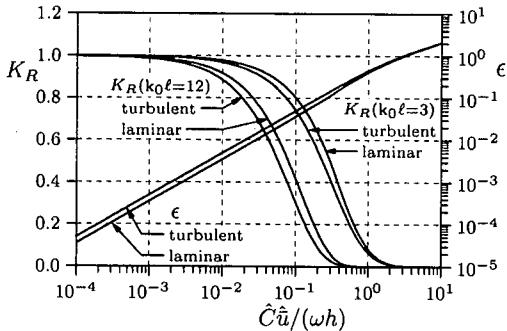


図-11 鉛直壁の反射率

面からの反射波を透過させる必要がある。本理論を使用すれば、そのような境界処理は不要であり、しかも正確な解を得ることが可能である。したがって、本理論解は海底摩擦による浅海域での波高減衰を考慮するのに有用であると言える。

5. 反射率に関する考察

摩擦を考慮しない線形長波の理論では、斜面においても反射率が 1 になる。しかし、本理論解では海底摩擦による波高減衰により、反射率が 1 より小さくなる。

まず、水平床端に鉛直壁が設置された場合を考える。層流の場合、式(31),(34)が水平上の厳密な進行波解である。乱流の場合、式(41),(44)は近似解だが、周期や z_0 等が現実的な値で、水平床上での 1 波長程度の伝播を考えるなら、式(25)の数値解と式(41),(44)の近似解は大差がないことが分かった。したがって、乱流の場合も $e^{-Im[R_T]k_0\ell}$ で減衰する解をもとに反射率を議論してもよい。

上記の解を用いると、壁から ℓ 離れた場所で測定する反射率 K_R は、鉛直壁で $\bar{u} = 0$ という条件から以下のように求められる。

$$K_R = e^{-Im[R_T]2k_0\ell} \quad (55)$$

ただし、層流なら R_T を R_L に変えればよい。反射率の一例を図-11に示す。反射率を $K_R = e^{-\epsilon 2k_0\ell}$ と表したときの ϵ も描いてある。摩擦係数 \hat{C} が小さいと $K_R \approx 1$ だが、 \hat{C} が大きいと K_R は小さくなる。また、 \hat{C} が同じでも、層流解では乱流解に比べて K_R がやや大きくなる。なお、乱流解では、 ϵ が z_0/h などに依らず、ほぼ $\hat{C}\bar{u}/(wh)$ のみによって決まる。これは、式(30)から、 R_T がほぼ $C\bar{u}/(wh)$ の関数と見なすことができることからも容易に理解できる。

次に、図-5下段のモデルに対する乱流解を使用し、斜面における反射率を評価する。 z_0 を 0.1mm から 3cm、 h_s を $10z_0$ から 10m、 h_d を 10m から 500m、 x_d を

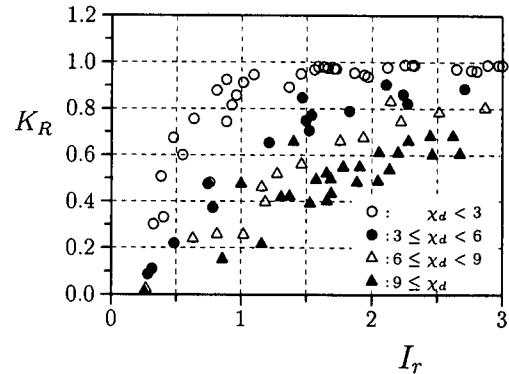


図-12 斜面の反射率 ($z_0 = 0.01\text{m}$, $h_s \leq 1\text{m}$ の場合)

1km から 50km、 T を 5 分から 25 分の範囲で変化させ、約 200 通りの解析を行い、 $x = x_d$ での a_r/a_i を反射率 K_R とした。図-12は、 $z_0 = 0.01\text{m}$ 、 $h_s \leq 1\text{m}$ の場合の解析結果である。図中の I_r は斜面の反射率を記述する際によく使われるイリバーレン数 ($m/\sqrt{H/L}$) であり、斜面方向の重力加速度と水粒子加速度の比に関連した量である。すなわち、水粒子の運動にとって、斜面勾配がどれだけ急であるかを表すパラメータと考えて良い。ただし、波形勾配は $x = x_d$ での入射波の値を使って評価した。また、 $\chi_d = 2k_1\sqrt{h_d/m}$ である。斜面上の乱流解(48)から分かる通り、 $\chi = 2k_1\sqrt{h/m}$ は $x = -h_s/m$ (斜面の延長線と静水面の交点) から x までの波の数に関係した量である。すなわち、 χ_d は波にとって斜面がどれだけ長いかを示すパラメータである。なお、 $x = -h_s/m$ から $x = 0$ までの波の数 $\chi_s = 2k_1\sqrt{h_s/m}$ を χ_d から引いた $\chi_d - \chi_s$ が本来の斜面上での波の数を表す。しかし、図-12では h_s が小さいケースを選んでいるので、 χ_d の大小が斜面上の波の数の大小を表すと考えて良い。

図から、 I_r が大きくなると反射率が増加し、 χ_d が大きくなると反射率が減少する明瞭な傾向が見られる。碎波によってエネルギーが失われる場合には反射率が I_r のみによって決まるが、海底摩擦によってエネルギーが失われる本理論では、斜面の長さを表すパラメータの影響が顕著に現れる。

さらに、 h_s が大きいと、図-9,10に示したように摩擦の影響が弱くなり、反射率が大きくなる。また、 z_0 を大きくすると斜面上での平均的な摩擦力が大きくなり 1 波長あたりの波高減衰率が増加するため、反射率が小さくなる。 z_0 の効果を表すパラメータとして、 $x = -h_s/m$ から 1 波長の場所での z_0/h に関連した量を考えると、 $\chi_0 = 2k_1\sqrt{z_0/m}$ が得られる。

そこで、 I_r 、 χ_d 、 χ_s 、 χ_0 の簡単な組み合わせを試行

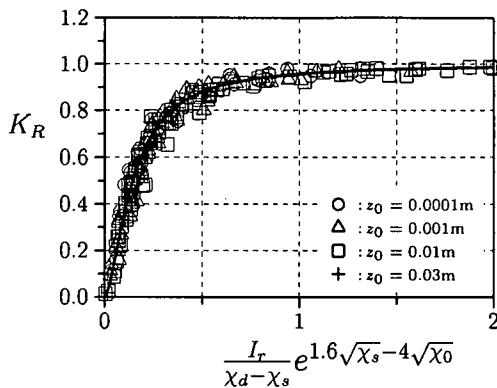


図-13 斜面の反射率(乱流解)

誤錯的に選んで検討したところ、図-13に示した経験的パラメータが、反射率の変化を比較的うまく表すことが分かった。図中の曲線は次式を表しており、ほぼ反射率の傾向を表していると言える。

$$K_R = B^{1.6} / (B^{1.6} + 0.045) \quad (56)$$

$$\begin{aligned} B &= \{I_r / (\chi_d - \chi_s)\} e^{1.6\sqrt{\chi_s} - 4\sqrt{\chi_0}} \\ &= \{I_r / (\chi_d - \chi_s)\} e^{4\sqrt{\chi_0}(\sqrt[4]{h_s/(39z_0)} - 1)} \end{aligned} \quad (57)$$

上式の指數関数部分が z_0 の効果と h_s の効果を表している。

6. 海底摩擦係数に関する考察

浅海域における実用的な抵抗則として、マニング則が広く使われている。その際、粗度係数を適当に与えれば良好な精度で津波の浸水域を予測できると言われている。しかし、粗度係数は経験的に決められているのが現状であり、粗度係数の設定が不適当だと物理的に不自然な計算結果が得られてしまうこともある。したがって、周期や水深、海底勾配、海底の粗度高さなどから適切な粗度係数を推定する手法があれば実用的に有用である。

ここでは、実用的に重要な乱流解を使い、浅海域における海底摩擦係数について考察する。浅海域での長周期波を対象にするのであれば、 \hat{u} は数 m/s 程度、周期 T は十分から十時間程度と見なしてよいであろう。 z_0 は海底の状態によって大きく異なると考えられるが、数 mm から数 cm 程度のオーダーとすると、 $\hat{u}/(\omega z_0)$ はほぼ $10^{4\sim 7}$ 程度のオーダーになる。また水深 h が数 m から数十 m 程度の領域を考えると、 $z_0/h = 10^{-(2\sim 4)}$ 程度である。

式(29)から求めた C の絶対値である \hat{C} を図-14に示す。図から分かる通り、 $\hat{u}/(\omega z_0) = 10^{4\sim 7}$ 、 $z_0/h =$

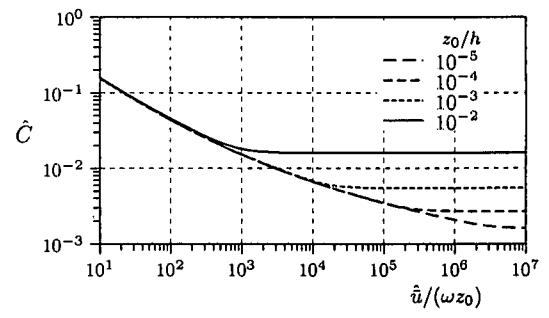


図-14 摩擦係数 \hat{C} (乱流解)

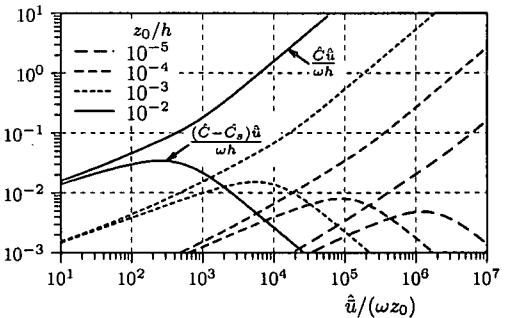


図-15 摩擦項と局所項の大きさの比較(乱流解)

$10^{-(2\sim 3)}$ 程度では、 $\hat{u}/(\omega z_0)$ による \hat{C} の変化はほとんど無視できる。しかし、田中らが指摘している通り、長波だからといって、常に摩擦係数が周期に依らないとは限らない。実際、 $z_0/h = 10^{-4}$ のときには、 $\hat{u}/(\omega z_0) = 10^4 \sim 2 \times 10^5$ の範囲で摩擦係数 \hat{C} が $\hat{u}/(\omega z_0)$ によって変化している。したがって、 \hat{C} が z_0/h だけで決まる見なしした準定常抵抗則を使用したとき、それがどの程度の誤差になるかを考察しておく。

式(2)を鉛直方向に積分し、運動方程式における摩擦項と局所項の大きさの比を取ると、

$$\frac{|\tau_b/\rho|}{\left| \int_{-h+z_0}^0 \partial u / \partial t dz \right|} = \frac{\hat{C} \hat{u}}{\omega h} \quad (58)$$

である。すなわち、 \hat{C} が z_0/h のみで決まる領域での \hat{C} の値を \hat{C}_s とおくと、 $(\hat{C} - \hat{C}_s) \hat{u} / (\omega h)$ が、 $\hat{C} = \hat{C}_s$ と見なししたときの摩擦項の誤差と局所項の大きさとの比を表す。図-15に、 $\hat{C} \hat{u} / (\omega h)$ および $(\hat{C} - \hat{C}_s) \hat{u} / (\omega h)$ を示す。なお、 \hat{C}_s は理論的に次式で与えられる。

$$\sqrt{\hat{C}_s} = \frac{\kappa(1 - z_0/h)}{\log h/z_0 - 3/2 + 2z_0/h - (z_0/h)^2/2} \quad (59)$$

図から、摩擦係数が $\hat{u}/(\omega z_0)$ によって変化する領域では運動方程式における摩擦項の役割が小さいため、摩擦係数を \hat{C}_s で近似しても、その誤差は $z_0/h = 10^{-2}$ の場合でも局所項の 4% 以下と、非常に小さいことが分かる。実現象のスケールにおいて \hat{C} が $\hat{u}/(\omega z_0)$ に

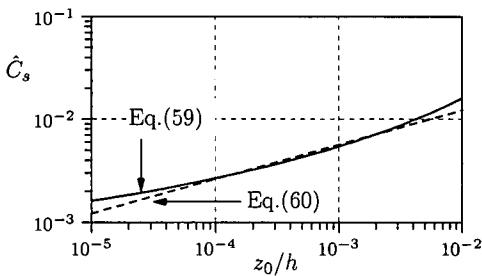


図-16 浅海域での摩擦係数 \hat{C}_s (乱流解)

よって変化する $z_0/h = 10^{-4}$ の場合には、誤差は局所項の 1% 以下である。もちろん、瞬間的な誤差が 1% 程度であっても、その状態が非常に長く継続すれば、影響が無視できるとは限らない。しかし、一般論としては、摩擦係数 \hat{C} が z_0/h だけで決まる見なし、 \hat{C}_s で近似してもそれほど大きな問題にならないと結論できる。

さて、 \hat{C}_s と z_0/h の関係を描いた図が図-16である。図中に破線で示したように、 $z_0/h = 10^{-(2 \sim 4)}$ の範囲で、 \hat{C}_s は簡単な次式でほぼ近似できる。

$$\hat{C}_s = 0.057(z_0/h)^{1/3} \quad (60)$$

実用的な摩擦係数としてマニング則を使うと、 $\tau_b/\rho = gn^2h^{-1/3}|\bar{u}|\bar{u}$ と表される。それに対し本理論では、 $\tau_b/\rho = C\bar{u}\bar{u}$ と表している。 $\bar{u} = \hat{u}e^{-i\omega t}$ とおくと、それぞれの場合の τ_b の半周期積分値がそれぞれ

$$\int \frac{\tau_b}{\rho} dt = \frac{\pi}{2\omega} \frac{gn^2}{h^{1/3}} \hat{u}^2, \quad \int \frac{\tau_b}{\rho} dt = \frac{2}{\omega} \hat{C} \hat{u}^2 \quad (61)$$

と求められる。したがって、マニング則を使い、せん断力が平均的に本理論解と同じ値を与えるようにするために、粗度係数を次式で与えればよい。

$$n = \sqrt{4/(\pi g)} h^{1/6} \hat{C}^{1/2} \quad (62)$$

浅海域での \hat{C} として近似式(60)を上式に代入すると、 n に対する h の寄与は無視できるほど小さく、 n はほぼ次式で評価できることが分かる。

$$n = 0.27 z_0^{1/6} / \sqrt{g} \quad (63)$$

さらに式(63)において、底質の等価砂粒粗度 k_s ($z_0 = k_s/30$) を使用すると、より実用的な式

$$n = 0.15 k_s^{1/6} / \sqrt{g} \quad (64)$$

が得られる。この式を使うと、 $k_s = 1\text{mm}$ で $n = 0.015$ 、 $k_s = 10\text{cm}$ で $n = 0.033$ という値が得られる。

したがって、 n の決定に周期や水深はほとんど影響しておらず、 n を粗度高さに関連したパラメータ z_0 または k_s だけで決めることが可能である。マニング則には、管水路や開水路の定常流において、経験的な係数 n が粗度高さのみによって決まるという優れた性質があることが知られている。長周期波に適用する場合でも同様の利点があることになる。しかも、式(64)はマ

ニング・ストリックラーの式 ($n = 0.13k_s^{1/6}/\sqrt{g}$) に非常に近いので、 n の値そのものも定常流と同程度である。また、図-4を見ると、周期が長く水深が小さいときには流速と底面せん断力の位相差も小さいので、浅海域の長周期波に対して、マニング則は表現が簡単な割に精度もよく、実用性に優れていると言える。

なお、本理論解は線形理論である。しかし、浅海域での長周期波の挙動には非線形性が無視できない。層流境界層における岩垣ら²⁾の検討では、非線形性を考慮すると波高減衰率が約 10% 増加する。したがって、実際の長波の数値計算では式(63),(64)の n よりやや大き目の値を与えるべきであり、式(63),(64)は適當な粗度係数 n の下限値を決めるものと解釈すべきであろう。

7. 結論

境界層近似を用い、底面から水面までせん断力が作用していると仮定した長波理論解を求めた。得られた理論解は、周期が短く水深が深い場合には境界層近似した結果と大差ないが、周期が長く水深が浅い場合には境界層近似より大きな波高減衰が生じる。

理論解を使用して、海底摩擦による反射率の変化を検討した。鉛直壁による反射率は海底摩擦係数が大きくなるに従って小さくなる。また斜面の場合、イリバーレン数だけでなく、斜面上の波の数や粗度などによっても反射率が変化することが分かった。また、様々なケースの反射率を表す経験式を作成した。

実用的な摩擦係数としてマニング則を使うとき、底面せん断力が本理論解の値と平均的に等しくなるように粗度係数 n を決定すると、 n は海底勾配や水深、周期の影響を受けず、粗度高さに関連したパラメータ z_0 または k_s だけで決まる。流速と底面せん断力との位相差も小さく、マニング則は表現が簡単な割に精度が高く、実用的であることが示された。 z_0 または k_s からマニングの粗度係数 n を決定するには、式(63)または(64)を使えばよい。

非線形性の影響を考慮すると、実際の長波の数値計算では式(63),(64)よりやや大き目の値を与えるべきだと思われるが、これまで経験に頼っていた n の設定方法に、物理的根拠のある基準を定めることができた。

謝辞： 本研究を進めるに当たり、岩手県立大学 首藤伸夫教授をはじめ東北水工研究会で有意義な助言をいただきました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 土屋義人、井上雅夫：海底摩擦による波高減衰の基礎的研究(1)、第8回海岸工学講演会講演集、pp.19-24、1961。

- 2) 岩垣雄一, 土屋義人, 陳活雄: 海底摩擦による波高減衰の基礎的研究(3)—層流境界層方程式の非線形項の影響について—, 第12回海岸工学講演会講演集, pp.41-49, 1965.
- 3) Kajiura, K.: A Model of the Bottom Boundary Layer in Water Waves, Bull. Earthq. Res. Inst., Vol.46, pp.75-123, 1968.
- 4) 野田英明: 波動による乱流境界層の発達, 第16回海岸工学講演会講演集, pp.23-27, 1969.
- 5) Kajiura, K.: On the Bottom Friction in an Oscillatory Current, Bull. Earthq. Res. Inst., Vol.42, pp.147-174, 1964.
- 6) 田中仁, アーマドサナ, 川村育男: 波動境界層の準定常性に関する理論および実験, 土木学会論文集, No.593/II-43, pp.155-164, 1998.

(2000.1.11 受付)

THEORETICAL SOLUTION OF LONG WAVE CONSIDERING THE STRUCTURE OF BOTTOM BOUNDARY LAYER AND EXAMINATIONS ON WAVE DECAY DUE TO SEA BOTTOM FRICTION

Kenji MASAMURA, Koji FUJIMA, Chiaki GOTO, Kunihiko IIDA
and Toshiyuki SHIGEMURA

The periodical solutions of linear long waves are obtained for the cases of both laminar and turbulent flow where the shear stress acts whole fluid domain. The solutions can take into account the variation of wave height due to the bottom topography and bottom friction. The decay modulus of wave height and so on obtained as the laminar flow solution are compared with those predicted by the laminar boundary layer theory, and it is shown that the boundary layer approximation cannot be applied to the case where the water depth is small and the wave period is long. By using the turbulent flow solution, the variation of reflection coefficient due to bottom friction is examined. The reflection coefficient is governed by not only the Iribarren number but also the number of waves on the slope and roughness height. The empirical roughness coefficient n is obtained by equating the bottom shear stress evaluated by Manning's friction formula to that evaluated by the present theory. It is concluded that the proper value of n is determined only by the bottom roughness.