

複合材料と多結晶体の平均的性質

小山 茂¹・岩熊哲夫²・岩崎智昭³・小倉崇生⁴・三井康司⁵

¹正会員 博(工) 信州大学助手 工学部社会開発工学科 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1)

²正会員 PhD 東北大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

³学生会員 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻

⁴宮城県仙台東土木事務所 (〒985-0841 多賀城市鶴ヶ谷 1-4-1)

⁵フェロー会員 工博 信州大学教授 工学部社会開発工学科

複合材料の平均弾塑性挙動を予測する一方法の森・田中理論は弾性的場合には Hashin-Shtrikman の上下界と整合するが、空隙を含む材料の実験値がこの森・田中理論の解のひとつ、つまり Hashin-Shtrikman の上界付近に分布し、また周期分布を仮定した解も同じような予測値を与える。そこで森・田中理論を3種類の材料からなる複合材料に適用した上で母材の体積比率を零にすることによって、残る2種類の材料の平均挙動を予測する手法を提案した。その結果、提案した予測値が2材料の体積比率が極端な場合に、Hashin-Shtrikman の上下界のいずれかに近い値を予測することが明らかになり、具体的に実験値との比較を示した。

Key Words : average behavior, upper and lower bounds, Mori-Tanaka theory, composites, polycrystals

1. まえがき

構造材料の代表である鋼・コンクリートはそれぞれ多結晶体や複合材料である。また岩盤等も内部に亀裂や空隙を多数含む複合材料と考えてよい。その巨視的な挙動は微視的な挙動の平均として現れているはずだが、実際の設計等の構造解析の段階で、载荷に伴う微視的挙動の変化の影響を逐次把握し続けるのは困難である。ひとつの方法として均質化法や等価介在物法等を用いた数値解析によって巨視挙動をデータベース化すること(例えば¹)も考えられてはいるが、計算機能力に大きく依存した膨大な計算やデータが必要となる。

これに対して予め平均化した巨視的挙動をモデル化してしまう手法がいくつか提案されている。例えば混合体理論²が挙げられるが、この方法では介在物の形状等を考慮することができない。これに対して Eshelby の研究³を基礎にした森・田中の方法⁴は、Eshelby のテンソルを通して介在物の形状等を考慮できる。特に近年は新材料開発が必要となっており、例えばスマート材料等の開発では、以上のように微視的な観点から数値的に巨視的な挙動を把握する技術が求められている。

森・田中の方法は弾塑性挙動の把握⁵にも適用できるが、必ずしも実験値を良く予測するとは限らないことも分かっている。ただ弾性挙動の予測の場合には、もうひとつのアプローチとして Hashin と Shtrikman⁶がその挙動の上下界を求めている。この上下界は古典的な Voigt と Reuss の上下界を改善したものとして知られて

いる。ちなみに森・田中による解は、この上下界のいずれかを与えること⁵)も分かっている。しかしながら、2種類の材料の剛性差がかなり大きかったり、母材と介在物が同程度の体積比を有するような場合、あるいは多結晶体のように母材が存在しない場合には実用的でないのも事実である。

ところが、例えば空隙を含む材料の実験値^{7,8})は、空隙の体積比率に拘わらず Hashin-Shtrikman の上界付近、つまり森・田中の手法による解に近い範囲にばらついている。さらに興味深いことに、それは周期構造を仮定したときの解⁹)にも非常に近い。空隙を含む材料を対象とした場合の平均剛性の下界は空気の剛性程度、すなわちほとんど零であり、上下界の差が非常に大きくなるものの、実験値はその上界付近にばらついていることになる。このことは、Hashin-Shtrikman の上界と下界の間に何らかの優位性のようなものが存在し、介在物の体積比率が小さい場合には上下界の片方が「尤もらしい」値である可能性を示唆している。ここでは、この Hashin-Shtrikman の上下界の改善を検討したい。

さて森・田中の方法を3種類の材料でできた複合材料に適用するのは容易であるが、ある種の興味深い結果が得られることも容易に推測できる。ひとつは、計算上で母材と介在物の選び方と加える順番によって異なる平均剛性が得られる¹⁰)ことで、これはよく知られた特徴である。もうひとつは、母材に2種類の異なる材料を介在させた後にその母材の体積比率を零にとった極限での解

の性質である。それは Eshelby のテンソルを通して、実際には含まれていない架空の母材の剛性に依存した解になり、その平均剛性は唯一な解にはならない。この研究で明らかにするようにそれは Voigt と Reuss の上下界の間のいかなる値でも取り得る。このような材料は物理モデルとしては介在物のみが2つある材料で、全く意味が無いようにも思われるが、数値モデルとしては2種類の材料を母材・介在物という差別をせずに同格に扱っていることから、例えば2種類の材料の体積比率が同程度である場合や、多結晶体のようにそもそも母材の存在しない材料のひとつのモデルと考えてもおかしくないのではなかろうか。

そこでこの研究では3つの材料を扱う森・田中理論の範囲で、母材の体積比率を零にすることによって2相問題を解く手法を提案する。その際、母材として選ぶ材料特性をエネルギー的な考察によって選び、それによって得られる平均剛性等を「尤もらしい」ものとする。これによって、空隙を含む材料の実験値が Hashin-Shtrikman の上界近くに分布する特徴を考察する。

2. 3材料からなる複合材料の平均挙動

森・田中理論の手法は文献¹¹⁾にも詳しいので、ここでは母材に2種類の介在物が存在する複合材料の場合に特化し、その平均挙動を導く手法について概説しておく。

(1) 各材料の応力ひずみ関係

この場合、母材と2種類の介在物の応力ひずみ関係はそれぞれ

$$\sigma_M = C_M \epsilon_M, \quad \sigma_1 = C_1 \epsilon_1, \quad \sigma_2 = C_2 \epsilon_2 \quad (1)$$

と書けるものとする。ここに2種類の介在物をそれぞれ介在物1、介在物2とし、下添え字の1、2はそれぞれの介在物に対する諸量であることを示し、下添え字 M は母材の諸量であることを示している。

(2) 森・田中理論

複合材料の全体積を V 、介在物1、2の体積をそれぞれ V_1 、 V_2 とし、複合材料全体積中に占める介在物の体積比率を以下のように定義する。

$$f_1 \equiv \frac{V_1}{V}, \quad f_2 \equiv \frac{V_2}{V} \quad (2)$$

ここに $V = V_M + V_1 + V_2$ である。森・田中はここで、介在物が多数存在することによって母材部分に生じている平均的な応力ひずみ関係を

$$\langle \sigma \rangle_M = C_M \langle \epsilon \rangle_D \quad (3)$$

と表現した。ここに $\langle \cdot \rangle$ は、記号に挟まれた量の、記号に続く下添え字で示した領域での平均であることを表している。ここで注意すべき点は、 $\langle \epsilon \rangle_D$ が母材でのひずみ

の単純な平均ではなく、介在物が多数存在することを考慮するために導入された特殊な平均ひずみであることである。これに対し、各介在物内部の平均的な応力ひずみ関係は、式(1)の第2、3式の領域平均によって

$$\langle \sigma \rangle_1 = C_1 \langle \epsilon \rangle_1, \quad \langle \sigma \rangle_2 = C_2 \langle \epsilon \rangle_2 \quad (4)$$

と書くことができる。

式(2)の体積比率と以上の平均応力・ひずみの定義を用いて、3材料からなる複合材料全体の平均応力 $\bar{\sigma}$ と平均ひずみ $\bar{\epsilon}$ は

$$\bar{\sigma} \equiv f_1 \langle \sigma \rangle_1 + f_2 \langle \sigma \rangle_2 + (1 - f_1 - f_2) \langle \sigma \rangle_M \quad (5a)$$

$$\bar{\epsilon} \equiv f_1 \langle \epsilon \rangle_1 + f_2 \langle \epsilon \rangle_2 + (1 - f_1 - f_2) \langle \epsilon \rangle_D \quad (5b)$$

と定義できる。

各介在物内部における平均ひずみは、母材に存在するとした平均ひずみ $\langle \epsilon \rangle_D$ に乱れ成分 γ_i が加わったものと考えて

$$\langle \epsilon \rangle_i = \langle \epsilon \rangle_D + \gamma_i, \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

のように考えることができる。ここに下添え字 i の1、2はそれぞれ介在物1、2での量であることを表し、以下でも用いる。これを介在物内部の平均的な応力ひずみ関係式(4)に代入することにより

$$\langle \sigma \rangle_i = C_i \{ \langle \epsilon \rangle_D + \gamma_i \} \quad (7)$$

と表せる。

ここで等価介在物法を用いて、各介在物内部に eigen ひずみ ϵ_i^* を導入すると

$$\langle \sigma \rangle_i = C_M \{ \langle \epsilon \rangle_D + \gamma_i - \epsilon_i^* \} \quad (8)$$

となる。さらに Eshelby の解を用いると、乱れ成分 γ_i は

$$\gamma_i = S_i \epsilon_i^* \quad (9)$$

という関係にある。ここに S_i は Eshelby のテンソルと呼ばれ、等方弾性体中にある回転楕円体の介在物の場合には、その寸法比と母材のポアソン比で表される定数になる。この式(9)を式(7)に代入することにより

$$\langle \sigma \rangle_i = C_i \langle \epsilon \rangle_D + C_i S_i \epsilon_i^* \quad (10)$$

となり、同様に式(9)を式(8)に代入することによって

$$\langle \sigma \rangle_i = C_M \langle \epsilon \rangle_D + C_M (S_i - I) \epsilon_i^* \quad (11)$$

を得る。ここに I は単位テンソルである。この式(10)と式(11)を等置することによって ϵ_i^* が

$$\epsilon_i^* = \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} (C_M - C_i) \langle \epsilon \rangle_D \quad (12)$$

と得られる。さらにこの式(12)に式(3)を代入して

$$\epsilon_i^* = \{ C_M - (C_M - C_i) S_i \}^{-1} (C_M - C_i) C_M^{-1} \langle \sigma \rangle_M \quad (13)$$

という表現も示しておく。

次に式(5b)に式(6)を代入して整理すると

$$\bar{\epsilon} = \langle \epsilon \rangle_D + f_1 \gamma_1 + f_2 \gamma_2 \quad (14)$$

が得られる。これに式 (3) と式 (9) を代入して

$$\bar{\epsilon} = C_M^{-1} \langle \sigma \rangle_M + f_1 S_1 \epsilon_1^* + f_2 S_2 \epsilon_2^* \quad (15)$$

と表現できる。最後に式 (11) に式 (3) を代入して

$$\langle \sigma \rangle_i = \langle \sigma \rangle_M + C_M (S_i - I) \epsilon_i^* \quad (16)$$

という表現も示しておく。

以上の式 (5a), (13), (15), (16) を連立させ、複合材料全体の平均応力ひずみ関係 $\bar{\sigma} = \bar{C} \bar{\epsilon}$ から 3 材料からなる複合材料全体の巨視的平均剛性テンソルを求めると

$$\bar{C} = A B^{-1} \quad (17)$$

と書くことができる。ここに

$$\begin{aligned} A \equiv & C_M + f_1 C_M (S_1 - I) \{ C_M \\ & - (C_M - C_1) S_1 \}^{-1} (C_M - C_1) \\ & + f_2 C_M (S_2 - I) \{ C_M \\ & - (C_M - C_2) S_2 \}^{-1} (C_M - C_2) \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} B \equiv & I + f_1 S_1 \{ C_M \\ & - (C_M - C_1) S_1 \}^{-1} (C_M - C_1) \\ & + f_2 S_2 \{ C_M \\ & - (C_M - C_2) S_2 \}^{-1} (C_M - C_2) \end{aligned} \quad (18b)$$

である。

(3) 等方弾性体中に球形介在物が存在する場合

母材・介在物共に Hooke の等方弾性体であり、介在物形状が球形である場合の Eshelby のテンソルは

$$S_{ijkl} = \alpha \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \left\{ \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right\} \quad (19)$$

と表現できる。ここに δ_{ij} はクロネッカーのデルタで、 α, β はそれぞれ

$$\alpha \equiv \frac{1 + \nu_M}{3(1 - \nu_M)}, \quad \beta \equiv \frac{2(4 - 5\nu_M)}{15(1 - \nu_M)} \quad (20)$$

である。 ν_M は母材のポアソン比である。

この表現を用いて式 (17) から、平均体積弾性係数と平均せん断弾性係数は

$$\bar{\kappa} = \frac{A_\kappa}{B_\kappa}, \quad \bar{\mu} = \frac{A_\mu}{B_\mu} \quad (21)$$

と表現できる。ここに

$$\begin{aligned} A_\kappa \equiv & \kappa_M (1 - f_1 - f_2) \\ & + \frac{f_1 \kappa_M \kappa_1}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_1) \alpha} + \frac{f_2 \kappa_M \kappa_2}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_2) \alpha} \\ B_\kappa \equiv & 1 - f_1 - f_2 \\ & + \frac{f_1 \kappa_M}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_1) \alpha} + \frac{f_2 \kappa_M}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_2) \alpha} \\ A_\mu \equiv & \mu_M (1 - f_1 - f_2) \\ & + \frac{f_1 \mu_M \mu_1}{\mu_M - (\mu_M - \mu_1) \beta} + \frac{f_2 \mu_M \mu_2}{\mu_M - (\mu_M - \mu_2) \beta} \\ B_\mu \equiv & 1 - f_1 - f_2 \end{aligned}$$

$$+ \frac{f_1 \mu_M}{\mu_M - (\mu_M - \mu_1) \beta} + \frac{f_2 \mu_M}{\mu_M - (\mu_M - \mu_2) \beta}$$

と置いたが、 κ_M, μ_M は母材の体積弾性係数とせん断弾性係数であり、 κ_i, μ_i は介在物 i の体積弾性係数とせん断弾性係数である。

(4) 母材の体積比率を零にした場合

式 (21) を用いれば種々の 3 つの材料からなる複合材料の問題を解くことができる。そのとき 3 つの材料のうちどの材料を母材と「解釈する」かによって、複数の解¹⁰⁾が存在する。2 相問題の場合は、どちらを母材とみなすかによって Hashin-Shtrikman の上下界が得られるが、3 つの材料でできた複合材料の場合には明らかな上下界のようなものは得られない。しかし、ひとつの極限として $f_1 + f_2 = 1$ とした場合、すなわち母材として選んだ材料の体積比率を零にした極限の解には興味深い性質がある。母材の体積比率を零にするということは、介在物として選んだ 2 種類の材料のみでできた複合材料を対象としていることを意味するが、2 つの材料からなる森・田中理論の解とは異なり、この 2 者を同格に扱っていることになる。したがって複合材料だけではなく、母材の存在しない多結晶体も対象にできる可能性がある。

前節での定式化において、最終的に材料全体の平均剛性テンソルを求めるために連立させる 4 つの式のうち各材料の体積比率が関係してくるものは、複合材料全体の平均応力を表す式 (5a) と平均ひずみを表す式 (5b) のみである。しかしこの 2 つの式において母材の体積比率を零に採っても、式 (6) で表される母材と介在物との間の相互作用の考慮を通して $\langle \epsilon \rangle_D$ と $\langle \sigma \rangle_M$ が現れる。

母材の体積比率を零にした場合の複合材料全体の平均弾性係数は、式 (21) において $f_1 + f_2 = 1$ とすることにより、以下のようになる。

$$\bar{\kappa} = \frac{f_1 \kappa_M \kappa_1}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_1) \alpha} + \frac{f_2 \kappa_M \kappa_2}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_2) \alpha} \quad (22a)$$

$$\bar{\mu} = \frac{f_1 \mu_M \mu_1}{\mu_M - (\mu_M - \mu_1) \beta} + \frac{f_2 \mu_M \mu_2}{\mu_M - (\mu_M - \mu_2) \beta} \quad (22b)$$

この式から明らかなように、対象としている 2 種類の材料特性だけではなく、存在しないことになっている母材の特性も影響を及ぼしている。

具体的に母材の特性の選び方でどのような平均剛性が求まるのか、平均体積弾性係数を示す式 (22a) を用いて示しておく。ひとつの極限として、 $\kappa_M \rightarrow \infty$ を考えると、上式は

$$\bar{\kappa} = f_1 \kappa_1 + f_2 \kappa_2 \quad (23)$$

となり、Voigt の解に一致する。また一方、 $\kappa_M \rightarrow 0$ の

極限では

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{f_1}{\kappa_1} + \frac{f_2}{\kappa_2} \quad (24)$$

となり、Reuss の解に一致する。すなわち、ここで提案している方法で2種類の材料からなる複合材料の剛性予測をすると、母材の弾性定数の選び方によって Voigt と Reuss の上下界の間のどんな解でも求めることができることになる。

また式 (22a) において $\kappa_M = \kappa_1$, $\nu_M = \nu_1$ として整理すれば

$$\frac{\bar{\kappa}}{\kappa_1} = 1 - \frac{f_2 \left(1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)}{1 - f_1 \left(1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right) \alpha} \quad (25)$$

という解を得る。これは2相の弾性問題における Hashin-Shtrikman の上下界の片方に一致している。もう片方は $\kappa_M = \kappa_2$, $\nu_M = \nu_2$ と置くことによって得られる。

3. エネルギー原理を用いた平均挙動の予測

前節で示したように、3材料からなる複合材料の問題の極限として2種材料からなる複合材料の平均弾性を求める場合、存在しないはずの母材の弾性係数の選び方で古典的な上下界の間のいかなる値をも算出できた。これは母材と介在物および介在物同士の相互作用を eigen ひずみ等で考慮している定式化上で、等価介在物法上での適切な eigen ひずみをどのように選ぶかによって解が異なっていると解釈できる。したがってここでは、その相互作用等を最も適切に考慮できる eigen ひずみを求める規準として、結果的に平均化された複合材料の持つポテンシャルエネルギーが最小になるように eigen ひずみが決定されるという原理を仮定し、そうなるように架空の母材の剛性を求め、それをを用いて式 (21) から平均剛性を誘導することを考える。

ただポテンシャルエネルギーあるいは補ポテンシャルエネルギーが母材の剛性に関する変分問題として最小化問題を定義しているように見えるため、2次形式にはならないと思われる。しかし、実質的には平均化された複合材料の持つそれらエネルギーの eigen ひずみに関する2次形式になっていると考えれば、何らかの最小化問題が成立しそうである。しかもその場合は外力ポテンシャルは関係がなくなり、ひずみエネルギーあるいは補ひずみエネルギーの最小化問題として捉えればよい。

(1) 複合材料の持つひずみエネルギー

まず無限体に1個の介在物が領域 Ω を占める問題を対象とし、無限遠点で σ_{ij}^0 の応力あるいは平均的変位勾配 $u_{i,j}^0$ が与えられているものとする。この系のひずみエネ

ルギ W^* の表現は以下のような¹¹⁾になる。

$$W^* = \frac{1}{2} \int_D \sigma_{ij}^0 u_{i,j}^0 dD - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dD \quad (26)$$

ここに σ_{ij} は介在物 Ω 中の全応力と σ_{ij}^0 の差で、介在物の存在によって生じた応力変動分である。また ϵ_{ij}^* は介在物の特性を代表させる eigen ひずみである。

ところで森・田中理論ではその最大の特徴として、多数の介在物が存在することの効果を表 (3) の $\langle \epsilon \rangle_D$ で考慮している。しかも初めから平均場を扱っており、局所場を明示的には定義していない。したがって式 (26) の表現に直接この森・田中の定式化の対応する項を用いることができない。そこでここでは以下のような近似をする。

まず式 (26) 第2項の介在物中の寄与分については、式 (8) のような等価介在物の考え方に基づいて定式化したことを考慮し、式 (16) で与えられる介在物中の応力からそのすぐ外側の母材の応力を差し引いた成分、つまり

$$\sigma_{ij} \sim C_M (S_i - I) \epsilon_i^* \quad (27)$$

と置き、介在物が回転楕円体であることを前提として

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dD \sim \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 f_i \epsilon_i^* C_M (S_i - I) \epsilon_i^* \quad (28)$$

と書き表せるものと仮定した。また式 (26) 第1項については単純に

$$\frac{1}{2} \int_D \sigma_{ij}^0 u_{i,j}^0 dD \sim \frac{1}{2} \bar{\sigma} \bar{\epsilon} \quad (29)$$

と書き表せるものと仮定した。したがって最終的な W^* の近似表現 W は

$$W \equiv \frac{1}{2} \bar{\sigma} \bar{\epsilon} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 f_i \epsilon_i^* C_M (S_i - I) \epsilon_i^* \quad (30)$$

となる。

数値解析のためには、上式 (30) を例えば $\bar{\sigma}$ あるいは $\bar{\epsilon}$ で表現しておいた方が便利である。そうするには、式 (5a), (13), (16) を用いて煩雑な計算をすれば ϵ_i^* を $\bar{\sigma}$ で表現することができる。同様に、式 (13), (15) 等から ϵ_i^* を $\bar{\epsilon}$ で表現することができる。これによってひずみエネルギーを $\bar{\sigma}$ 、あるいは $\bar{\epsilon}$ のいずれかの汎関数として定義でき、それぞれが補ひずみエネルギー U^* 、あるいはひずみエネルギー U に相当している。

(2) 等方弾性体中に球形介在物が存在する場合

最も基本的な例として、等方弾性体の母材中に球形介在物が存在する複合材料を対象とする。前節での一般的なエネルギー表現を、一軸引張状態を想定して応力 $\sigma_{11} = \bar{\sigma}$ のみを無限遠点に作用させたと考えた場合、式 (30) から系全体の補ひずみエネルギー U^* は

$$U^* = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3\bar{\kappa}} + 2\frac{1}{2\bar{\mu}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\xi_{\kappa i}^* + 2\xi_{\mu i}^*) \right\} \frac{\bar{\sigma}^2}{3} \quad (31)$$

と書ける。ここに

$$\xi_{\kappa i}^* \equiv \frac{\frac{f_i}{3\kappa_M}(\alpha-1)\left\{\frac{\kappa_M - \kappa_i}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_i)\alpha}\right\}^2}{\left\{1 + \frac{f_1(\alpha-1)(\kappa_M - \kappa_1)}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_1)\alpha} + \frac{f_2(\alpha-1)(\kappa_M - \kappa_2)}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_2)\alpha}\right\}^2}$$

$$\xi_{\mu i}^* \equiv \frac{\frac{f_i}{2\mu_M}(\beta-1)\left\{\frac{\mu_M - \mu_i}{\mu_M - (\mu_M - \mu_i)\beta}\right\}^2}{\left\{1 + \frac{f_1(\beta-1)(\mu_M - \mu_1)}{\mu_M - (\mu_M - \mu_1)\beta} + \frac{f_2(\beta-1)(\mu_M - \mu_2)}{\mu_M - (\mu_M - \mu_2)\beta}\right\}^2}$$

と置いた。

一方無限遠点に $\bar{\epsilon}_{11} \equiv \bar{\epsilon}$ のみを与えたと考えた場合、式(30)からひずみエネルギー U は

$$U = \left\{ \frac{1}{2} (3\bar{\kappa} + 2(2\bar{\mu})) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\xi_{\kappa i} + 2\xi_{\mu i}) \right\} \frac{\bar{\epsilon}^2}{3} \quad (32)$$

と書ける。ここに

$$\xi_{\kappa i} \equiv \frac{3\kappa_M f_i (\alpha - 1) \left\{ \frac{\kappa_M - \kappa_i}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_i)\alpha} \right\}^2}{\left\{ 1 + \frac{f_1 \alpha (\kappa_M - \kappa_1)}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_1)\alpha} + \frac{f_2 \alpha (\kappa_M - \kappa_2)}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_2)\alpha} \right\}^2}$$

$$\xi_{\mu i} \equiv \frac{2\mu_M f_i (\beta - 1) \left\{ \frac{\mu_M - \mu_i}{\mu_M - (\mu_M - \mu_i)\beta} \right\}^2}{\left\{ 1 + \frac{f_1 \beta (\mu_M - \mu_1)}{\mu_M - (\mu_M - \mu_1)\beta} + \frac{f_2 \beta (\mu_M - \mu_2)}{\mu_M - (\mu_M - \mu_2)\beta} \right\}^2}$$

と置いた。

したがって補ひずみエネルギー U^* を最小にするように κ_M , μ_M , ν_M のうちの2つの量の組を求め、それを式(22)に代入することによって2種類の材料からなる複合材料の平均体積弾性係数と平均せん断弾性係数を求めることができる。同様に、ひずみエネルギー U を最小するように κ_M , μ_M , ν_M のうちの2つの量の組を求め、それを式(22)に代入することによっても平均体積弾性係数と平均せん断弾性係数を求めることができる。このようにして求めた平均体積弾性係数と平均せん断弾性係数から平均ヤング率を求める場合には、平均的にも等方性が成立すると考えて

$$\bar{E} = \frac{9\bar{\kappa}\bar{\mu}}{3\bar{\kappa} + \bar{\mu}} \quad (33)$$

という関係を用いればよい。

4. 平均弾性係数の解析例

(1) 剛性差が比較的小さい場合

実は平均化手法は、Hashin-Shtrikman もその適用に限界があるとしている。つまり剛性差が極端に大きい場合には相間の相互作用を適切に考慮できなかつたり、上下界があまりにも広く離れてしまう。ここでは安定して解が得られる範囲での例をまず示し、本提案による剛性予測値の特性をまず考察する。そのため材料定数が

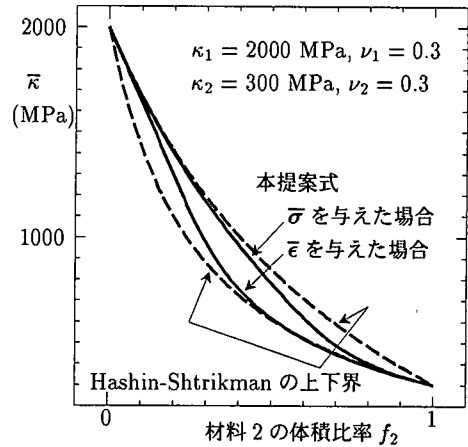


図-1 平均体積弾性係数の予測例

$\kappa_1 = 2000 \text{ MPa}$, $\nu_1 = 0.3$, $\kappa_2 = 300 \text{ MPa}$, $\nu_2 = 0.3$ の場合を対象とし、前節の予測式から得られる結果のうち平均体積弾性係数を図-1に示した。平均せん断弾性係数や平均ヤング率も全く同じ特性を示す。

図-1で明らかなように、本提案による平均体積弾性係数はHashin-Shtrikmanの上下界の中間に横たわる。しかし、 $\bar{\sigma}$ を与えた場合と $\bar{\epsilon}$ を与えた場合とで異なる結果が得られている。元々の森・田中理論は応力を与えようとする変形を与えようとするアプローチによらず同じ解が得られるが、それとは対照的な結果になっている。これはひずみエネルギーを近似したことによるものと予想されるが、今後の検討課題である。この2つの解はあたかも上下界のように見えているが、上方の解が応力を与えた場合で下方の解が変形を与えた場合に対応しており、いわゆる古典論としてのVoigt, Reussの考え方とは逆の性質になっていることも考慮すると、上下界といった性質を持っているとは考え難い。

ただ特に材料2の体積比率が非常に小さい範囲では、2つのアプローチによる解がいずれもHashin-Shtrikmanの上界に近付いているのは興味深い。同様に材料2の体積比率が非常に大きい範囲においては逆に下界に両者が漸近している。この場合のHashin-Shtrikmanの上界は剛な材料1の方を母材にした場合であり、 f_2 が小さい範囲では当然材料1を母材とみなす方が合理的であろう。また周期構造を仮定して得られる平均剛性⁹⁾もこの上界に近い解を与える。そういう意味でここで提案した予測値が、2つの方法共に2相問題の上界に漸近しているのは、それ程奇異ではない。また、まえがきでも述べたように実験値が上界に近いと報告されているが、それを裏付ける傾向をここで示したと考えている。この例の場合、材料2の体積比率が小さい場合には上界の方が下

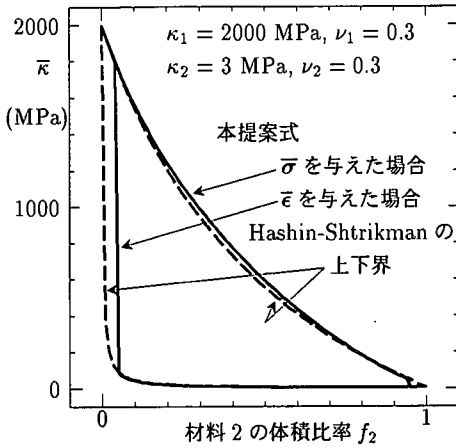


図-2 大きい剛性差の場合の平均体積弾性係数

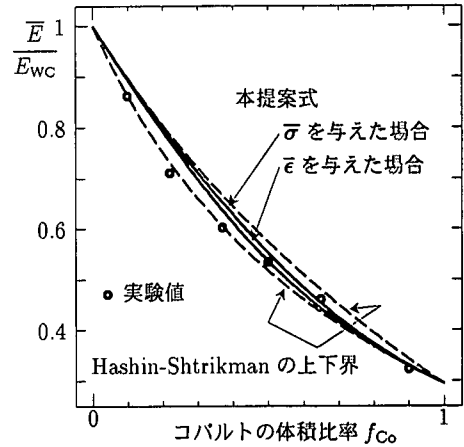


図-3 炭化タングステンとコバルトの複合材料の平均ヤング率

界より優位性を有していると考えられる。材料2の体積比率が大きい場合にはその逆になる。

ちなみに、ひずみエネルギーを最小にするような架空材料である母材の剛性は、材料1と材料2の剛性の中間の値を採り、材料1、2共にポアソン比が0.3であることから、その母材のポアソン比もほぼ0.3のままであった。しかしエネルギー評価において、ここで用いたような一軸引張状態ではなく、等方圧力（体積変形）のみを与えた場合には、エネルギー最小化で得られる母材のポアソン比が $-1 < \nu_M < 0.5$ の範囲内には無かったりするという不都合も生じた。またせん断応力（せん断変形）だけを与えた状態を想定した場合にも、2材料共にポアソン比が0.3であるにも拘わらず ν_M が0.4等のようにかけ離れたり、 f_2 がほぼ零であるのに κ_M が κ_1 と大きく異なる値になるようなこともあった。これもエネルギーの近似表現が原因ではないかと考えられる。

(2) 剛性差が大きくなった場合

次に2つの材料の剛性差を大きくした場合を考察する。例として、材料定数を $\kappa_1 = 2000 \text{ MPa}$, $\nu_1 = 0.3$, $\kappa_2 = 3 \text{ MPa}$, $\nu_2 = 0.3$ とした。その得られた平均体積弾性係数を図-2に示した。せん断弾性係数等についても全く同じ傾向を示している。この場合も材料2の体積比 f_2 が極めて小さい場合と1に非常に近い場合には、 $\bar{\sigma}$ を与えるアプローチと $\bar{\epsilon}$ を与えるアプローチの両方がほぼ同じ結果を与え、それが f_2 が小さい場合には Hashin-Shtrikman の上界に、1に近い場合は下界に漸近するのは前節で対象とした材料の場合と同じである。

しかし、 $\bar{\sigma}$ を与えた本アプローチが Hashin-Shtrikman の上界より若干大きい値を予測している。これは、 W を最小にする κ_M が材料1の体積弾性係数 2000 MPa より大きくなってしまっているからである。これも、用い

たひずみエネルギー表現の近似に原因があると考えられる。しかも、 f_2 が0あるいは1に非常に近い場合以外の範囲では、2つのアプローチの解はそれぞれ Hashin-Shtrikman の上下界に近くなっている。また、 f_2 が0あるいは1付近で本提案の解には急変が生じてしまう。Hashin-Shtrikman の手法にも限界がある⁶⁾とされているが、このように、本提案式がこの程度の剛性差の場合には Hashin-Shtrikman の上下界を改善しないことが明らかである。

ただ、剛性の差が大きい場合でも、 f_2 が0に近い場合には Hashin-Shtrikman の上界が、1に近い場合にはその下界が平均剛性としては尤もらしいのではないかと予想される。

(3) 実験値との比較

最後に実験値との比較を行う。まず Hashin と Shtrikman も用いた例であるが、2つの材料の剛性差が比較的小さい材料の場合で、炭化タングステンとコバルトの複合材料¹²⁾である。その平均ヤング率の結果を、炭化タングステンのヤング率で除した値を用いて図-3に示した。

図示したように上下界も本提案式もほぼ同じ値を予測しており、どのアプローチが最良であるかは明確でなく、また実験値の誤差やばらつきも大きいのではないかと予想される。しかし実験値は、コバルトの体積比によらずほぼ Hashin-Shtrikman の下界付近に存在する。すなわち f_{c0} が1に近い範囲では本研究の主張を裏付けるものであるが、それでもそれ程明確な実験値との整合は見られなかった。ただし、ここでは平均化されたものも局所的にも等方弾性を仮定した上で、さらに球状の形状によって等方性を保持するようにしているため、それによる実験値との差も考えられることは付け加えておきたい。

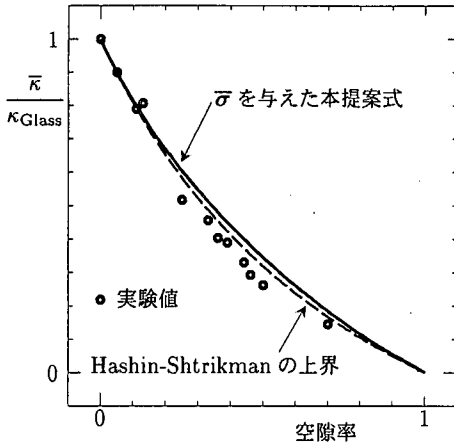


図-4 多孔質なガラスの平均体積弾性係数

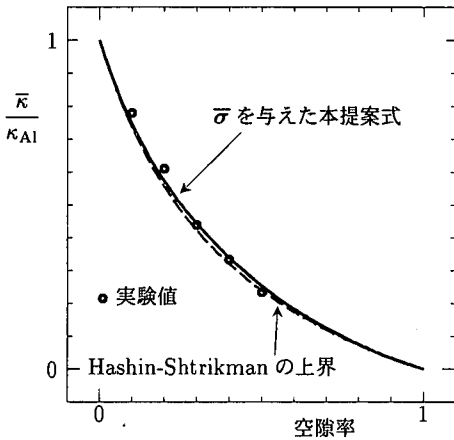


図-5 多孔質なアルミニウムの平均体積弾性係数

次に多孔質なガラス⁷⁾について解析を行った結果の平均体積弾性係数をガラスの体積弾性係数で除した値を用いて図-4に示した。これは、空隙の体積弾性係数とせん断弾性係数を共に零とした場合の結果であるが、空気の体積弾性係数に零以外の小さい値を用いても、結果にはほとんど変化はなかった。この場合のHashin-Shtrikmanの下界は零であり、本提案式で $\bar{\sigma}$ を与えた場合の結果もやはり零になるので、この図にはHashin-Shtrikmanの上界と本提案式で $\bar{\sigma}$ を与えた場合の結果のみを示した。この2つの材料の剛性の差は非常に大きいため、本アプローチの解はHashin-Shtrikmanの上界をやはり若干上回ってはいるが、実験値からそれ程離れない特性を示していることは確認できた。

最後の例も剛性の差が大きいものであるが、多孔質なアルミニウム⁸⁾について実験値と比較した。その結果の

平均体積弾性係数をアルミニウムの体積弾性係数で除した値で図-5に示した。この場合もガラスの場合とほぼ同様の結果を得る。

5. 結論

複合材料の平均挙動を予測する手法として森・田中理論を3つの材料からなる複合材料に適用し、その母材の体積比率を零にすることによって、2相問題の例えばHashin-Shtrikmanによる上下界の改善を試みた。平均剛性はその存在しない母材の特性に影響されるが、その特性については、得られる複合材料が持つ[補]ひずみエネルギーの最小原理から決定した。その結果次のような知見を得た。

- ひずみエネルギーを用いるか補ひずみエネルギーを用いるかによって、2種類の異なる平均弾性係数を算出するが、それはいずれもHashin-Shtrikmanの上下界の中間の値になる。
- 2つの材料の剛性差がHashin-Shtrikmanの上下界の適用範囲と言われている程度小さい場合は、介在物の体積比率が非常に小さいか1に非常に近い場合に、本提案の予測値はHashin-Shtrikmanの上下界のどちらか片方に近い値を示した。つまり、体積比率が極端な場合には、上下界のどちらかが優位性を有していることを示唆している。
- 3つの材料からなる複合材料で母材を無くする極限を取ったことから、残る2種類の材料を差別しない扱いになっており、相互作用をより適切に考慮していることが予測される。また同様の理由で、もともと母材の存在しない多結晶体にも本提案は適用可能である。
- ここでは球形の場合のみについて議論したが、本提案は、混合体理論とは異なり2種類の材料の形状も考慮できる。
- 剛性差が大きい場合には、本提案の解はHashin-Shtrikmanの解とほぼ重なり、その上下界の改善にはならなかったり、Hashin-Shtrikmanの上下界よりも外側の値を予測する等、適用範囲があることが明らかになった。その原因のひとつはエネルギー表現の近似と考えられる。
- 空隙を含むガラスやアルミニウムの実験値は、実は2種類の材料の剛性差が非常に大きいため本提案式も適用範囲とは考え難いが、その一つのアプローチによる解は2相問題の上界に近い値を示し、実験値に近い値を予測した。
- 弾塑性体にも適用は容易であるが、解析的に解ける範囲は限られている上に、文献⁵⁾の結果に比べて特筆すべき成果は得られていない。またこの場合は、

母材の弾塑性をどう与えるかによって、さらに複雑な解になる可能性が多く、そのエネルギー評価等も含めて今後の検討課題と考えている。

参考文献

- 1) 亀田敏弘：等価介在物法を応用した逆解析による地盤材料物性の取得方法，第49回理論応用力学講演会講演論文集，NCTAM 2000，pp.103-104，2000.
- 2) Omine, K., Ochiai, H. and Yoshida, N.: Estimation of in-situ strength of cement-treated soils based on a two-phase mixture model, *Soils and Foundations*, Vol.38, No.4, pp.17-29, 1998.
- 3) Eshelby, J. D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A241, pp.376-396, 1957.
- 4) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Act. Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- 5) 岩熊哲夫, 堀 宗朗, 森 勉, 村外志夫：複合材料の平均的な硬化係数と延性の評価，構造工学論文集，Vol.37A, pp.435-442, 1991.
- 6) Hashin, Z. and Shtrikman S.: A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.11, pp.127-140, 1963.
- 7) Walsh, J. B., Brace, W. F. and England, A. W.: Effect of porosity on compressibility of glass, *Journal of the American Ceramic Society*, Vol.48, No.12, pp.605-608, 1965.
- 8) Coble, R. L. and Kingery, W. D.: Effect of porosity on physical properties of sintered alumina, *Journal of the American Ceramic Society*, Vol.39, No.11, pp.377-385, 1956.
- 9) Nemat-Nasser, S., Iwakuma, T. and Hejazi, M.: On composites with periodic structure, *Mechanics of Materials*, Vol.1, pp.239-267, 1982.
- 10) 小倉崇生, 岩熊哲夫, 中沢正利：3相から成る複合材料の平均弾性の予測，土木学会東北支部技術研究発表会講演概要集，pp.90-91, 1999.
- 11) Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ, 1982.
- 12) Nishimatsu, C. and Gurland, J.: Experimental survey of the deformation of the hard-ductile two-phase alloy system WC-Co, *Transaction of the American Society for Metals*, Vol.52, pp.469-484, 1960.

(2000. 4. 12 受付)

AVERAGE CHARACTERISTICS OF COMPOSITES AND POLYCRYSTALS

Shigeru KOYAMA, Tetsuo IWAKUMA, Tomoaki IWASAKI, Takao OGURA and Yasushi MITSUI

An averaging method, Mori and Tanaka's theory, predicts the upper and lower bounds by Hashin and Shtrikman by exchanging material properties of the matrix and inclusion. However experimental results of porous media are very close to the upper bounds, and are also consistent with a numerical result of a body with periodic micro-structures. Here we propose a new approach using Mori and Tanaka's theory in which two materials are included into the matrix but the volume fraction of the matrix material is taken to be zero as a limit. Results show that either upper or lower bound by Hashin and Shtrikman is a probable estimate when the volume fraction of one material is very small.