

Lamb板の変位場より誘導される 周波数を考慮したはりの運動方程式

白木恒雄¹・真木有岳²

¹正会員 工博 東京理科大学教授 理工学部土木工学科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎2641)

²学生会員 東京理科大学理工学研究科土木工学専攻修士課程 (〒278-8510 千葉県野田市山崎2641)

Lambの板の波動伝播の弾性論解に含まれる変位場を基にして、充実長方形断面はりの運動方程式を誘導し、位相速度曲線の一致を確認した。この式に含まれる動的断面2次モーメントや断面積などの断面諸量と周波数の関係を調べた。無限長のはりあるいは板などの媒質を伝わる弾性波の第1次モードは、周波数無限大において等しくRayleigh表面波に収束する。この事実から、半無限体に対してもRayleigh表面波の動的断面2次半径を定義できることを示し、Poisson材料において、それが静的な断面2次半径の7割弱ほどの値に低減する事を証明した。さらに第2次以上のモードではこの動的断面2次半径は周波数無限大の極限で零となり、高次モードが媒質から消失する物理的事実とも対応することを証明した。

Key Words : Lamb plate, Rayleigh-Lamb equation, Timoshenko beams, radius of gyration of area, Rayleigh surface waves, phase velocity curves

1. まえがき

無限長はりの波動伝播問題は19世紀中頃以降のPochhammer¹⁾およびChree²⁾による円形充実断面をもつはりの3次元弾性論解が有名である。厳密な扱いの弾性理論は複雑かつ困難なため、円形断面棒のごとく断面境界の輪郭線の単純なものに解は限定されている。実際の数値計算による位相速度曲線は、20世紀に入り若干の紆余曲折を経てはじめて与えられた³⁾。これに対し、大胆な近似によるTimoshenkoはりの理論⁴⁾は単純明快であり、有限長、無限長に関わりなく、種々の荷重条件、境界条件に適用可能である。しかし、近似理論ゆえに、第1次モードの位相速度曲線のみ信頼される。

筆者らはTimoshenkoはりあるいはMindlin板の理論をもとに、これらを3次元弾性論解に近づける方法を模索してきた。すなわち、Timoshenkoはりの運動方程式中の断面2次半径を周波数の関数とすることで中周波数領域を、弾性係数を周波数の関数とすることで高周波数領域をPochhammer-Chree理論の位相速度曲線の結果と一致させた。また、Mindlin板の運動方程式も同様にして、Lamb板理論⁵⁾の結果と一致させた⁶⁾。しかし、それは位相速度曲線の形状を合わせるという数値的配慮のみであり、理論

的裏づけはなかった。

そもそも、Pochhammer-Chreeの3次元弾性論とTimoshenkoはりの近似理論は多くの点で異なっており、第1次モードが良く合うのは不思議なくらいである。3次元弾性論は断面輪郭線境界での無応力の条件を課するのに対し、Timoshenkoはりはそれを無視して代わりに断面力のつり合い条件を課している。3次元弾性論は三角関数型の反り変位および面内変位関数を採用するのに対し、Timoshenkoはりには線形の単位反り関数および一定値の面内変位関数を周波数のいかんにかかわらず採用する。

TimoshenkoはりあるいはMindlin板の理論を弾性論解に近づける筆者らの努力についてすでに述べた。本論文では、これとは逆に、弾性論解からTimoshenkoはり形の運動方程式を導くことを試みた。これにより、断面2次半径が周波数の増加とともにどのように変化してゆくかという課題に答えることが可能となる。具体的には、Lamb板の理論で扱う無限長の板の厳密な変位場を2次元はりの変位場と仮定した。この変位場のうち、軸方向反り変位の静的基底関数ははり高さ方向の1次関数であり、振動数の増加にともないじょじょに中立軸付近から減衰してゆく。たわみ変位の静的基底関数ははり高さ方向に一定値"1"をとる定数関数であり、振動数の増加

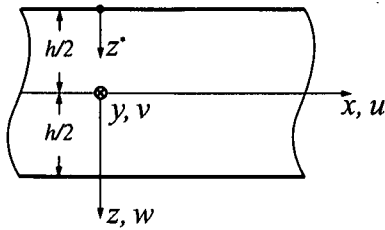


図-1 座標系

にともないじょじょに中立軸付近から減衰してゆく。そして、周波数無限大において、水平および鉛直変位の合成はRayleigh表面波状態となる。

この厳密な変位場にもつづはりの運動方程式から位相速度曲線を求め、Lamb板理論の位相速度曲線との一致を調べ、はりの運動方程式の正当性を確認した。はり、板などの構造形状に無関係に、高周波領域で媒質を伝わる位相速度の第1次モードはRayleigh表面波に近づくことから、半無限体であるにもかかわらず、Rayleigh表面波の動的断面2次半径なる概念を提案できる。本論文ではその閉じた解を求め、Poisson材料において、それが当初のはりの静的な断面2次半径の7割弱ほどの大きさに減少することを証明した。さらに、位相速度の第2次以上のモードの断面2次半径は零となることも確認した。これは、周波数無限大において、はりまたは板の表面にRayleigh波のみ残り、媒質の横波速度に収束する第2次以上の位相速度曲線群が最終的に消失する事実に対応している。

2. 構造系と座標系

一定の厚さ h の板あるいははりの中央面を通る互いに直角の座標を x 軸および y 軸とし、それらに直角な厚さ方向の座標 z を選ぶ。この x, y, z 軸を右手座標系とし、 z 軸は x 軸より時計まわりに垂直下向きにとっておく。同時に、板あるいははりの上縁端から下向きに z^* 軸もとっておく。そして、板あるいははり内部のある点 $P(x, y, z)$ の x, y, z 方向変位成分をそれぞれ順に u, v, w と表すものとする。

テンソル表記において、位置座標 x, y, z を順に x_1, x_2, x_3 と表してもいる。板あるいははりの上縁端から下向きの位置座標 z^* は、テンソル表記において x_3^* と表すものとする。また、変位量 u, v, w を順に u_1, u_2, u_3 と表している(図-1)。

3. 支配方程式の誘導

(1) 基礎条件式

微小変位理論におけるひずみと変位の関係は次のごとくなる。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

添え字の i および j はともに1から3までの値をもつ。

材料の特性値であるLame定数を λ および μ と表記するならば、弾性体の構成則は次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + \lambda\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\gamma} \\ \sigma_{22} &= \lambda\varepsilon_{\alpha\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

添え字 α, β, γ は1または3の値をもつ。また、 $\delta_{\alpha\beta}$ はKroneckerのデルタ記号である。この弾性体の構成則式(2)に式(1)を代入して、応力と変位の関係は次のごとく表せる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \mu(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + \lambda\delta_{\alpha\beta}u_{\gamma,\gamma} \\ \sigma_{22} &= \lambda u_{\alpha,\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

物体力の i 方向成分を f_i と表すならば、微小6面体要素の応力のつりあい条件は、次のごとく与えられる。

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho u_{i,tt} \quad (4)$$

ただし、 ρ は媒質の材料密度、 t は時間である。

つり合い条件の応力成分を変位で表現すると、Navierの方程式は

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu)u_{\beta,\beta\alpha} + \mu u_{\alpha,\beta\beta} + \rho f_\alpha &= \rho u_{\alpha,tt} \\ \mu u_{2,\beta\beta} + \rho f_2 &= \rho u_{2,tt} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

と表現される。

(2) Lamèポテンシャル

周知のごとく、Helmholtz分解により、変位成分 u_k はLamèポテンシャル ϕ および ψ を用いて

$$u_k = \phi_{,k} + e_{klm}\psi_{m,l} \quad (6)$$

と表せる。ここで扱う2次元問題では、 ϕ および ψ は x_1, x_3 および t のみの関数である。したがって

$$\left. \begin{aligned} u_\alpha &= \phi_{,\alpha} + e_{\alpha\beta}\psi_{,\beta} \\ u_2 &= \psi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

となる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} \psi(x_\alpha, t) &\equiv \psi_2(x_\alpha, t) \\ v(x_\alpha, t) &\equiv \frac{\partial \psi_3(x_\alpha, t)}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1(x_\alpha, t)}{\partial x_3} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

と定義した。また、 $e_{\alpha\beta}$ は2次元の交代記号である。式(7)を具体的に記すならば次のごとくなる。

$$u_1(x_\alpha, t) = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \quad (9)$$

$$u_2(x_\alpha, t) = v$$

$$u_3(x_\alpha, t) = \frac{\partial\phi}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \quad (10)$$

物体力も式(7)同様に次のごとく分解表示する。

$$\left. \begin{aligned} f_\alpha(x_\beta, t) &= f_{,\alpha} + e_{\alpha\beta} F_{,\beta}, \quad F \equiv F_2 \\ f_2(x_\beta, t) &= F_{3,1} - F_{1,3} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

変位の分解式(7)および物体力の分解式(11)を Navier の方程式(5)に代入すると、次のごとき3本の波動方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\phi + \frac{f}{c_1^2} &= \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \\ \nabla^2v + \frac{f_2}{c_2^2} &= \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2v}{\partial t^2} \\ \nabla^2\psi + \frac{F}{c_2^2} &= \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

上式中の c_α ($\alpha = 1, 2$) は Lamé 定数を用いて

$$c_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad c_2 = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2} \quad (13)$$

と定義される。この波動の伝播する媒質の縦波速度 c_1 を c_L と、横波速度 c_2 を c_T と表示することもある。

応力成分は変位の分解式(7)を式(3)に代入して

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \lambda \nabla^2\phi \delta_{\alpha\beta} + 2\mu\phi_{,\alpha\beta} \\ &\quad + \mu(e_{\alpha\beta}\psi_{,\beta\gamma} + e_{\beta\gamma}\psi_{,\alpha\gamma}) \\ \sigma_{22} &= \lambda \nabla^2\phi \\ \sigma_{\alpha 2} &= \mu v_{,\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

となる。具体的には

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda \nabla^2\phi + 2\mu\phi_{,11} + 2\mu\psi_{,13} \\ \sigma_{22} &= \lambda \nabla^2\phi \\ \sigma_{33} &= \lambda \nabla^2\phi + 2\mu\phi_{,33} - 2\mu\psi_{,13} \\ \sigma_{12} &= \mu v_{,1}, \quad \sigma_{23} = \mu v_{,3} \\ \sigma_{31} &= 2\mu\phi_{,13} + \mu(\psi_{,33} - \psi_{,11}) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

と表現できる。ここで ∇^2 は2次元の Laplace 演算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (16)$$

を意味する。

きわめて幅の狭い断面をもつはりでは $\sigma_{22} = 0$ とみなせ、平面応力状態にあると考えられる。そのような場合は、周知のごとく、Lamé 定数 λ を $2\mu\lambda/(\lambda+2\mu)$ と変換すればよい。

(3) 無限長板の曲げ波動

座標軸 x_1 方向に無限長の板の中央面に鉛直下向き(板厚方向)の座標を x_3 とする。板の厚さを h とすると、 $x_3 = \pm h/2$ は板表面の位置となる(図-1)。物体力の無い運動の場合、平面 x_1-x_3 における波動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\phi &= \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \\ \nabla^2\psi &= \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

となる。板表面の無応力の境界条件は式(15)より、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{33}(x_1, \pm h/2) &= \lambda \nabla^2\phi + 2\mu\phi_{,33} - 2\mu\psi_{,13} = 0 \\ \sigma_{31}(x_1, \pm h/2) &= 2\mu\phi_{,13} + \mu(\psi_{,33} - \psi_{,11}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

となる。

板の曲げ波動は板中央面に逆対称の変位成分をもつことから、ポテンシャル関数は次の形に設定できる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= A \sinh k\nu_1 x_3 \exp ik(x_1 - ct) \\ \psi &= B \cosh k\nu_2 x_3 \exp ik(x_1 - ct) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ただし、 A 、 B は任意の複素定数、 i は虚数の単位、 c は位相速度である。そして波数 k および位相速度の関数 ν_α は次のごとく定義した。

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \nu_\alpha = \left(1 - \frac{c^2}{c_\alpha^2} \right)^{1/2} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (20)$$

ここで、波数 k を定義する式の分母の λ は波長を意味しており、Lamé 定数ではない。

板表面無応力の境界条件式(18)にポテンシャル関数設定式(19)を代入整理して、マトリックス表示すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} (1 + \nu_2^2) \sinh k\nu_1 h/2 & -2i\nu_2 \sinh k\nu_2 h/2 \\ 2i\nu_1 \cosh k\nu_1 h/2 & (1 + \nu_2^2) \cosh k\nu_2 h/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

複素定数 A および B が非自明解をもつ条件より、上式左辺の係数マトリックスの行列式は零でなければならぬ。その結果、無限長板の曲げ波動伝播に関する Rayleigh-Lamb の周波数方程式

$$\frac{\tanh k\nu_1 h/2}{\tanh k\nu_2 h/2} = \frac{4\nu_1\nu_2}{(1 + \nu_2^2)^2} \quad (22)$$

を得る。さらに、式(21)を未知数 A および B に関する連立方程式として解けば、それらの比

$$\frac{B}{A} = \frac{1 + \nu_2^2 \sinh k\nu_1 h/2}{2i\nu_2 \sinh k\nu_2 h/2} \quad (23)$$

または

$$\frac{B}{A} = -\frac{2i\nu_1 \cosh k\nu_1 h/2}{1 + \nu_2^2 \cosh k\nu_2 h/2} \quad (24)$$

も与えられる。

変位式(9), (10)にポテンシャル関数の設定式(19)を代入し, 式(23)または(24)より複素定数 B を消去すると,

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -kA \sinh k\nu_1 \frac{h}{2} \cdot \sin k(x_1 - ct) \\ &\quad \times \left(\frac{\sinh k\nu_1 x_3}{\sinh k\nu_1 h/2} - \frac{1 + \nu_2^2}{2} \frac{\sinh k\nu_2 x_3}{\sinh k\nu_2 h/2} \right) \\ u_3 &= kA \cosh k\nu_1 \frac{h}{2} \cdot \cos k(x_1 - ct) \\ &\quad \times \left(\nu_1 \frac{\cosh k\nu_1 x_3}{\cosh k\nu_1 h/2} - \frac{2\nu_1}{1 + \nu_2^2} \frac{\cosh k\nu_2 x_3}{\cosh k\nu_2 h/2} \right) \end{aligned} \right\} (25)$$

と表せる。

同様に, 応力式(15)にポテンシャル関数の設定式(19)を代入し, 式(23)または(24)より複素定数 B を消去すると,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= -\mu k^2 A \sinh k\nu_1 \frac{h}{2} \cdot \cos k(x_1 - ct) \\ &\quad \times \left((1 + 2\nu_1^2 - \nu_2^2) \frac{\sinh k\nu_1 x_3}{\sinh k\nu_1 h/2} - (1 + \nu_2^2) \frac{\sinh k\nu_2 x_3}{\sinh k\nu_2 h/2} \right) \\ \sigma_{22} &= \mu k^2 (1 - 2\nu_1^2 + \nu_2^2) A \cos k(x_1 - ct) \\ &\quad \times \sinh k\nu_1 x_3 \\ \sigma_{33} &= \mu k^2 (1 + \nu_2^2) A \sinh k\nu_1 \frac{h}{2} \cdot \cos k(x_1 - ct) \\ &\quad \times \left(\frac{\sinh k\nu_1 x_3}{\sinh k\nu_1 h/2} - \frac{\sinh k\nu_2 x_3}{\sinh k\nu_2 h/2} \right) \\ \sigma_{31} &= -2\mu k^2 \nu_1 A \cosh k\nu_1 \frac{h}{2} \cdot \sin k(x_1 - ct) \\ &\quad \times \left(\frac{\cosh k\nu_1 x_3}{\cosh k\nu_1 h/2} - \frac{\cosh k\nu_2 x_3}{\cosh k\nu_2 h/2} \right) \end{aligned} \right\} (26)$$

と表せる。2次元弾性論の厳密解ゆえに, 上記の変位成分式(25)より求められるせん断ひずみ γ_{31} と応力のつり合いを満足するせん断応力 σ_{31} の間に Hooke 則が成立し, 普通のはり理論のごとき矛盾が存在しないことを確認できる。

(4) 周波数零の極限

無次元化周波数 $\bar{\gamma}$ および無次元化位相速度 \bar{c} を次のごとく定義しておく。

$$\bar{\gamma} \equiv k \frac{h}{2} = \frac{\pi h}{\lambda}, \quad \bar{c} = \frac{c}{c_2} \quad (27)$$

周波数の低い場合, すなわち板厚 h に比べて波長の長い場合, その周波数がさらに零に近づく極限の位相速度曲線の状況を考える。

最初に位相速度 c は媒質の横波速度 c_2 より小さい場合 ($0 < c < c_2$) を扱う。周波数方程式(22)中の2つの \tanh 関数の Taylor 展開を昇べきの順に2項まで採り整理すると, 方程式

$$\frac{c^2}{c_2^2} - \frac{1}{3} k^2 h^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) = 0 \quad (28)$$

となる。左辺第2項を右辺に移項して後, 両辺を平方に開くと, 方程式

$$\frac{c}{c_2} = \sqrt{\frac{1}{3} k h \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right)^{1/2}} \quad (29)$$

を得る。縦軸に無次元化速度 $\bar{c} = c/c_2$, 横軸に無次元化周波数 $\bar{\gamma} \equiv kh/2$ をとるならば, これは原点より斜めに立ち上がる直線の方程式⁷⁾となる。

このとき式(25)の軸方向変位および板厚方向変位の $kh \rightarrow 0$ の極限を求めると以下のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -kA \cdot k\nu_1 \frac{h}{2} \cdot \sin k(x_1 - ct) \cdot \left(\frac{1 - \nu_2^2}{h} \right) \cdot x_3 \\ u_3 &= kA \cdot 1 \cdot \cos k(x_1 - ct) \cdot \nu_1 \left(\frac{1 - \nu_2^2}{1 + \nu_2^2} \right) \cdot 1 \end{aligned} \right\} (30)$$

同様に, 式(26)の応力成分も $kh \rightarrow 0$ の極限を簡単に求めることができる。

次に位相速度 c が媒質の横波速度 c_2 より大きい場合 ($0 < c_2 < c$) を扱う。無次元化周波数 $\bar{\gamma} \equiv kh/2$ が零に近づくと, 位相速度 c は急激に増加する。その結果, 周波数方程式(22)中の位相速度の関数 ν_α ($\alpha = 1, 2$) は複素数となる。そこで

$$p_\alpha = \left(\frac{c^2}{c_\alpha^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (31)$$

と定義すると, 虚数の単位 i を用いて

$$p_\alpha = i \nu_\alpha \quad (\alpha = 1, 2) \quad (32)$$

の関係がある。そして, 周波数方程式は

$$\frac{\tan k p_1 h/2}{\tan k p_2 h/2} = -\frac{4 p_1 p_2}{(1 - p_2^2)^2} \quad (33)$$

と書き直せる。この式より, 無次元化周波数 $\bar{\gamma} \equiv kh/2$ が零に近づくとともに, 位相速度 c は無限大になることがわかる。その結果, 式左辺の分母は $\bar{\gamma} \rightarrow 0$ の極限において, $\tan k p_2 h/2 \rightarrow 0$ に, すなわち

$$k p_2 \frac{h}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (34)$$

に収束する。

ここで述べた一部はすでに Mindlin の論文⁷⁾あるいは Eringen *et al.* の著書⁵⁾などに与えられているが, 軸方向変位および板厚方向変位の関数の極限形状(式(30))を明確化する目的であえて記述した。

(5) 周波数無限大の極限

周波数の高い場合, すなわち板厚 h に比べて波長の

極端に短い場合を考察する. この場合は位相速度の範囲に応じて2種類の場合が考えられる. 位相速度 c が媒質の横波速度 c_2 より小さい場合, $\bar{\gamma} \equiv kh/2 \rightarrow \infty$ において, Rayleigh-Lamb の周波数方程式 (22) 左辺の関数は

$$\frac{\tanh k\nu_1 h/2}{\tanh k\nu_2 h/2} \rightarrow 1 \quad (35)$$

となり, その結果, 方程式は

$$1 = \frac{4\nu_1\nu_2}{(1+\nu_2^2)^2} \quad (36)$$

へと変化する. この方程式は周波数に関係しない, すなわち分散のない Rayleigh 波速度を与える式

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^2 - 4\left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^{1/2} = 0 \quad (37)$$

となる.

変位式 (25) および応力式 (26) の右辺は双曲線関数の商形式より構成されている. これら商形式のみ抜き出し, 双曲線関数を指数関数に直し, 整理すると次のごとく変形できる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sinh k\nu_\alpha x_3}{\sinh k\nu_\alpha h/2} &= \frac{e^{k\nu_\alpha x_3} - e^{-k\nu_\alpha x_3}}{e^{k\nu_\alpha h/2} - e^{-k\nu_\alpha h/2}} \\ &= -e^{-k\nu_\alpha (\frac{h}{2} + x_3)} \frac{1 - e^{2k\nu_\alpha x_3}}{1 - e^{-2k\nu_\alpha h/2}} \\ &= -e^{-k\nu_\alpha x_3} \frac{1 - e^{-2k\nu_\alpha (h/2 - x_3)}}{1 - e^{-2k\nu_\alpha h/2}} \\ \frac{\cosh k\nu_\alpha x_3}{\cosh k\nu_\alpha h/2} &= \frac{e^{k\nu_\alpha x_3} + e^{-k\nu_\alpha x_3}}{e^{k\nu_\alpha h/2} + e^{-k\nu_\alpha h/2}} \\ &= e^{-k\nu_\alpha (\frac{h}{2} + x_3)} \frac{1 + e^{2k\nu_\alpha x_3}}{1 + e^{-2k\nu_\alpha h/2}} \\ &= e^{-k\nu_\alpha x_3} \frac{1 + e^{-2k\nu_\alpha (h/2 - x_3)}}{1 + e^{-2k\nu_\alpha h/2}} \end{aligned} \right\} (38)$$

ただし, 板上表面を原点とする板厚下向き座標を x_3^* と名付けた. すなわち図-1より

$$x_3^* = \frac{h}{2} + x_3 \quad (39)$$

となっている.

周波数を無限大にする極限操作により, これらの商形式はそれぞれ次のごとくなる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sinh k\nu_\alpha x_3}{\sinh k\nu_\alpha h/2} &\rightarrow -e^{-k\nu_\alpha x_3^*} \quad (\bar{\gamma} \equiv kh/2 \rightarrow \infty) \\ \frac{\cosh k\nu_\alpha x_3}{\cosh k\nu_\alpha h/2} &\rightarrow e^{-k\nu_\alpha x_3^*} \quad (\bar{\gamma} \equiv kh/2 \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} (40)$$

そして, Rayleigh-Lamb 板の変位式 (25) および応力式 (26) は周波数無限大において次のごとく書き直せ

る.

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -C \sin k(x_1 - ct) \\ &\quad \times \left(e^{-k\nu_1 x_3^*} - \frac{1 + \nu_2^2}{2} e^{-k\nu_2 x_3^*} \right) \\ u_3 &= C \cos k(x_1 - ct) \\ &\quad \times \left(\nu_1 e^{-k\nu_1 x_3^*} - \frac{2\nu_1}{1 + \nu_2^2} e^{-k\nu_2 x_3^*} \right) \end{aligned} \right\} (41)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \mu k C \cos k(x_1 - ct) \\ &\quad \times \left(-(1 + 2\nu_1^2 - \nu_2^2) e^{-k\nu_1 x_3^*} + (1 + \nu_2^2) e^{-k\nu_2 x_3^*} \right) \\ \sigma_{22} &= -(1 - 2\nu_1^2 + \nu_2^2) \mu k C \cos k(x_1 - ct) e^{-k\nu_1 x_3^*} \\ \sigma_{33} &= (1 + \nu_2^2) \mu k C \cos k(x_1 - ct) \\ &\quad \times (e^{-k\nu_1 x_3^*} - e^{-k\nu_2 x_3^*}) \\ \sigma_{31} &= 2\nu_1 \mu k C \sin k(x_1 - ct) \\ &\quad \times (e^{-k\nu_1 x_3^*} - e^{-k\nu_2 x_3^*}) \end{aligned} \right\} (42)$$

ここで, 周波数無限大における位相速度の収束値を c_R と表記し, $\bar{\nu}_1 = (1 - c_R^2/c_1^2)^{1/2}$ と表記するならば

$$-C = \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} k A \sinh k \bar{\nu}_1 \frac{h}{2} = \lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} k A \cosh k \bar{\nu}_1 \frac{h}{2} \quad (43)$$

と書き直している. Poisson 比 $\nu = 1/4$ の場合, $c_R = 0.9194c_2$ となり, 上記の結果は次のごとくなる.

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -C \sin k(x_1 - c_R t) \\ &\quad \times (e^{-0.8475kx_3^*} - 0.5773e^{-0.3933kx_3^*}) \\ u_3 &= C \cos k(x_1 - c_R t) \\ &\quad \times (-0.8475e^{-0.8475kx_3^*} + 1.4679e^{-0.3933kx_3^*}) \\ \sigma_{11} &= \mu k C \cos k(x_1 - c_R t) \\ &\quad \times (-2.2817e^{-0.8475kx_3^*} + 1.1547e^{-0.3933kx_3^*}) \\ \sigma_{22} &= 0.2817 \mu k C \cos k(x_1 - c_R t) e^{-0.8475kx_3^*} \\ \sigma_{33} &= 1.1547 \mu k C \cos k(x_1 - c_R t) \\ &\quad \times (e^{-0.8475kx_3^*} - e^{-0.3933kx_3^*}) \\ \sigma_{31} &= 1.6950 \mu k C \sin k(x_1 - c_R t) \\ &\quad \times (e^{-0.8475kx_3^*} - e^{-0.3933kx_3^*}) \end{aligned} \right\} (44)$$

これは Poisson 材料 ($\nu = 1/4$) の Rayleigh 表面波の変位および応力の式⁵⁾となっている.

位相速度 c が媒質の横波速度 c_2 より大きい場合, 無次元化周波数 $\bar{\gamma} \equiv kh/2 \rightarrow \infty$ において, Rayleigh-Lamb の周波数方程式 (22) は

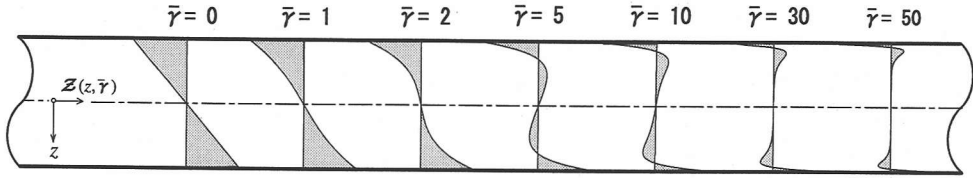
$$\frac{\tanh k\nu_1 h/2}{\tan k p_2 h/2} = -\frac{4\nu_1 p_2}{(1 - p_2^2)^2} \quad (45)$$

と表現され, 式中の ν_1 および p_2 に含まれる位相速度 c は媒質の横波速度 c_2 に上方から漸近する.

(6) 基底関数の設定

弾性論の厳密解の結果から, はりの理論を創り直

軸方向変位の基底関数



たわみ変位の基底関数

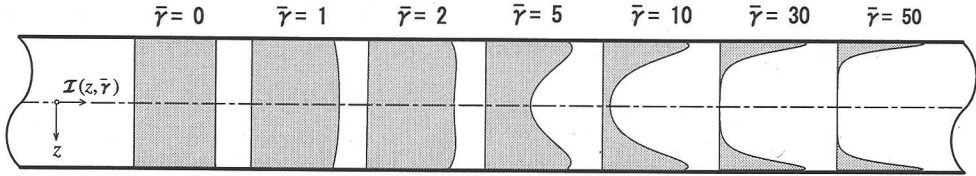


図-2 基底関数の分布形状

す。ここから座標系を $x-y-z$ 表示する。静的はりの理論では $x (\equiv x_1)$ 軸方向反り u の基底関数を $z (\equiv x_3)$ 、そしてたわみ変位 w の基底関数を 1 としている。動的はりの運動が静止した時点 ($\bar{\gamma} = 0$) でこれらの基底関数に一致するように、式(25)より変位関数を

$$\left. \begin{aligned} u(x, z, \bar{\gamma}) &= -Z(z, \bar{\gamma})\psi(x, \bar{\gamma}) \\ w(x, z, \bar{\gamma}) &= I(z, \bar{\gamma})W(x, \bar{\gamma}) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

とおく。これ以降の $\psi(x, \bar{\gamma})$ ははり断面の回転とする。これらの式は完全な変数分離形ではない。軸方向座標 x を独立変数とする未知関数および面内座標 z を独立変数とする基底関数ともに、周波数 $\bar{\gamma}$ の関数でもある。したがって、基底関数は周波数のみを独立変数とする任意のダミー関数を掛けることにより、自由に正規化できる。ここでは、式(30)を参考に基底関数を次のごとく設定した。

$$\left. \begin{aligned} Z(z, \bar{\gamma}) &= \frac{h}{2} \frac{2}{1-\nu_2^2} \left(\frac{\sinh k\nu_1 z}{\sinh k\nu_1 h/2} - \frac{1+\nu_2^2}{2} \frac{\sinh k\nu_2 z}{\sinh k\nu_2 h/2} \right) \\ I(z, \bar{\gamma}) &= \frac{1+\nu_2^2}{1-\nu_2^2} \left(-\frac{\cosh k\nu_1 z}{\cosh k\nu_1 h/2} + \frac{2}{1+\nu_2^2} \frac{\cosh k\nu_2 z}{\cosh k\nu_2 h/2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

周波数零の極限 ($\bar{\gamma} \equiv kh/2 \rightarrow 0$) は静止した場合を意味し、その時 $Z(z, \bar{\gamma}) \rightarrow z$ および $I(z, \bar{\gamma}) \rightarrow 1$ となり、この設定の正しいことを確認できる。周波数 $\bar{\gamma}$ の若干の値におけるこれら基底関数の分布形状を図-2に与える。無次元化周波数 $\bar{\gamma}$ の値が大きくなるにつれ、中立軸近辺は変位が無くなり、はり表面は Rayleigh 波状態に近づいてゆくのがわかる。

(7) はりのひずみと応力

変位の仮定式(46)をひずみ変位関係式(1)および構成則式(3)に代入すると、はりのひずみおよび応力成分が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx}(x, z, \bar{\gamma}) &= -Z(z, \bar{\gamma})\psi'(x, \bar{\gamma}) \\ \varepsilon_{zz}(x, z, \bar{\gamma}) &= \dot{I}(z, \bar{\gamma})W(x, \bar{\gamma}) \\ \gamma_{zx}(x, z, \bar{\gamma}) &= I(z, \bar{\gamma}) \frac{dW}{dx} - \dot{Z}(z, \bar{\gamma})\psi(x, \bar{\gamma}) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}(x, z, \bar{\gamma}) &= -\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} Z(z, \bar{\gamma})\psi'(x, \bar{\gamma}) \\ &\quad + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \dot{I}(z, \bar{\gamma})W(x, \bar{\gamma}) \\ \sigma_{zz}(x, z, \bar{\gamma}) &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \dot{I}(z, \bar{\gamma})W(x, \bar{\gamma}) \\ &\quad - \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} Z(z, \bar{\gamma})\psi'(x, \bar{\gamma}) \\ \tau_{zx}(x, z, \bar{\gamma}) &= G \left(I(z, \bar{\gamma}) \frac{dW}{dx} - \dot{Z}(z, \bar{\gamma})\psi(x, \bar{\gamma}) \right) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

上式中の記号 (') および (\dot{ }) は順に x および z による微分を意味する。

(8) 運動方程式と断面力

上記の変位、ひずみ、応力の成分を用いて、運動方程式を誘導し、断面力を定義する。Hamilton の原理は変分記号 δ を用いて

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U - V) dt = 0 \quad (50)$$

と表せる。ここで t_0 および t_1 は時間 t の最初と最後を意味する。この時間間隔における系の運動エネ

ルギー T 、ひずみエネルギー U および外力のポテンシャル V は以下のごとく表せる。

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dV \quad (51)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{ \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} \} dV \quad (52)$$

$$V = - \int_V (p_x u + p_z w) dV - \left(\sum P_x u + \sum P_z w \right) \quad (53)$$

変位の式(46)、ひずみの式(48)をHamiltonの原理に代入し、整理すると、断面力の関係式

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - q_{se} + \int_A p_x \mathcal{I} dA - \rho A^*(\bar{\gamma}) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (54)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q_{se} + \int_A p_x \mathcal{Z} dA + \rho I^*(\bar{\gamma}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (55)$$

を得る。はり断面の I および A をそれぞれ通常の静的断面2次モーメントおよび断面積とするならば、上式中の $I^*(\bar{\gamma})$ および $A^*(\bar{\gamma})$ はそれぞれ周波数の変化を考慮したはりの動的断面2次モーメントおよび断面積である。

境界条件は次のごとくなる。

$$\left[\delta W \left(Q - \sum P_x \mathcal{I} \right) \right]_0^l = 0 \quad (56)$$

$$\left[\delta \psi \left(M - \sum P_x \mathcal{Z} \right) \right]_0^l = 0 \quad (57)$$

上式中の断面力は次式で定義した。

$$M(x, \bar{\gamma}) = \int_A \sigma_{xx}(x, z, \bar{\gamma}) \mathcal{Z}(z, \bar{\gamma}) dA \quad (58)$$

$$q_{se}(x, \bar{\gamma}) = \int_A \sigma_{zz}(x, z, \bar{\gamma}) \dot{\mathcal{I}}(z, \bar{\gamma}) dA \quad (59)$$

$$Q(x, \bar{\gamma}) = \int_A \tau_{zx}(x, z, \bar{\gamma}) \mathcal{I}(z, \bar{\gamma}) dA \quad (60)$$

$$Q_{se}(x, \bar{\gamma}) = \int_A \tau_{zx}(x, z, \bar{\gamma}) \dot{\mathcal{Z}}(z, \bar{\gamma}) dA \quad (61)$$

断面力の定義式(58)~(61)に応力の式(49)を代入すると次のごとく表現できる。

$$M(x, \bar{\gamma}) = - \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} I^*(\bar{\gamma}) \psi'(x, \bar{\gamma}) + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} B^*(\bar{\gamma}) W(x, \bar{\gamma}) \quad (62)$$

$$q_{se}(x, \bar{\gamma}) = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} H^*(\bar{\gamma}) W(x, \bar{\gamma}) - \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} B^*(\bar{\gamma}) \psi'(x, \bar{\gamma}) \quad (63)$$

$$Q(x, \bar{\gamma}) = GA^*(\bar{\gamma}) \left(k_0(\bar{\gamma}) \frac{\partial W}{\partial x} - k_1(\bar{\gamma}) \psi(x, \bar{\gamma}) \right) \quad (64)$$

$$Q_{se}(x, \bar{\gamma}) = GA^*(\bar{\gamma}) \left(k_1(\bar{\gamma}) \frac{\partial W}{\partial x} - k_2(\bar{\gamma}) \psi(x, \bar{\gamma}) \right) \quad (65)$$

上式で用いたはりの断面諸量 $I^*(\bar{\gamma})$, $A^*(\bar{\gamma})$, $B^*(\bar{\gamma})$, $H^*(\bar{\gamma})$ および3種類のせん断係数 $k_0(\bar{\gamma})$, $k_1(\bar{\gamma})$, $k_2(\bar{\gamma})$ は次のごとく定義した。

$$\left. \begin{aligned} I^*(\bar{\gamma}) &= \int_A \mathcal{Z}(z, \bar{\gamma}) \mathcal{Z}(z, \bar{\gamma}) dA \\ A^*(\bar{\gamma}) &= \int_A \mathcal{I}(z, \bar{\gamma}) \mathcal{I}(z, \bar{\gamma}) dA \\ B^*(\bar{\gamma}) &= \int_A \dot{\mathcal{I}}(z, \bar{\gamma}) \mathcal{Z}(z, \bar{\gamma}) dA \\ H^*(\bar{\gamma}) &= \int_A \dot{\mathcal{I}}(z, \bar{\gamma}) \dot{\mathcal{I}}(z, \bar{\gamma}) dA \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

$$\left. \begin{aligned} k_0(\bar{\gamma}) &= \frac{1}{A^*(\bar{\gamma})} \int_A \mathcal{I}(z, \bar{\gamma}) \mathcal{I}(z, \bar{\gamma}) dA \equiv 1 \\ k_1(\bar{\gamma}) &= \frac{1}{A^*(\bar{\gamma})} \int_A \mathcal{I}(z, \bar{\gamma}) \dot{\mathcal{Z}}(z, \bar{\gamma}) dA \\ k_2(\bar{\gamma}) &= \frac{1}{A^*(\bar{\gamma})} \int_A \dot{\mathcal{Z}}(z, \bar{\gamma}) \dot{\mathcal{Z}}(z, \bar{\gamma}) dA \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

静的なはりの場合のごとく、反りの基底関数 $\mathcal{Z}(z, \bar{\gamma})$ とたわみの面内基底関数 $\mathcal{I}(z, \bar{\gamma})$ の間に微分関係があれば、3種類のせん断係数 $k_0(\bar{\gamma})$, $k_1(\bar{\gamma})$, $k_2(\bar{\gamma})$ はすべて等しく1となる。しかし、周波数の変化を考慮するため、式(47)にあるごとく、静止した場合 ($\bar{\gamma} = 0$) 以外、微分関係は存在しない。

$$\dot{\mathcal{Z}}(z, \bar{\gamma}) \neq \mathcal{I}(z, \bar{\gamma}) \quad (68)$$

となっている。

(9) 変位量の運動方程式

求められた運動方程式(54), (55)に断面力の式(62)~(65)を代入して、変位量による運動方程式

$$\left[GA^* \left(k_0 \frac{\partial W}{\partial x} - k_1 \psi \right) \right]' - \left[\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} H^* W - \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} B^* \psi' \right] + \int_A p_x \mathcal{I} dA - \rho A^*(\bar{\gamma}) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (69)$$

$$\left[\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} I^* \psi' - \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} B^* W \right]' + \left[GA^* \left(k_1 \frac{\partial W}{\partial x} - k_2 \psi \right) \right] - \int_A p_x \mathcal{Z} dA - \rho I^*(\bar{\gamma}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (70)$$

を得る。比較のためTimoshenkoはりの運動方程式をあげると次のごとくなる⁸⁾。

$$\left[G A k \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \right]' + \int_A p_x dA - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (71)$$

$$\left[E I \psi' \right]' + \left[G A k \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \right] - \int_A p_x z dA - \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (72)$$

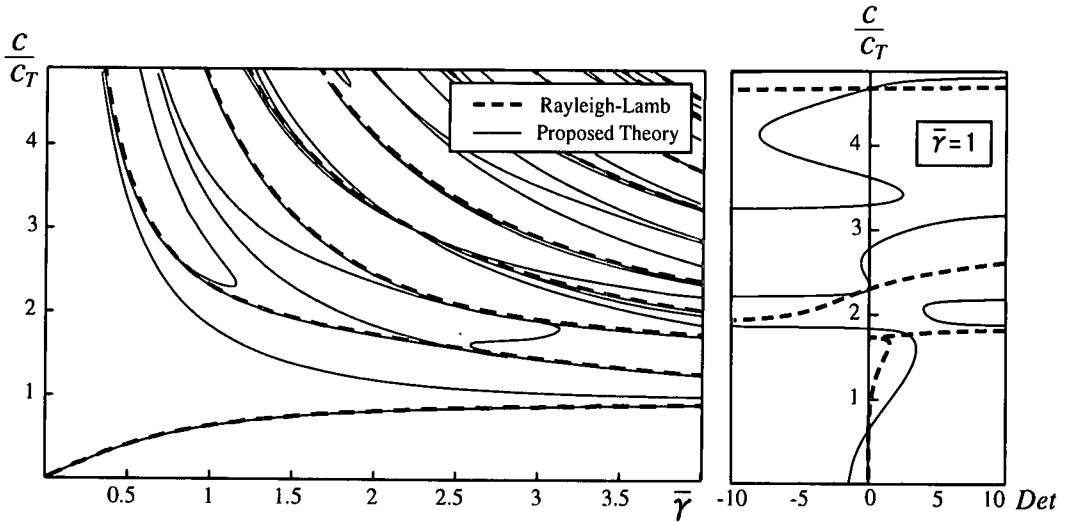


図 -3 長方形断面はりの位相速度曲線

ただし、周知のごとく、断面諸量は

$$I = \int_A z \cdot z dA \quad (73)$$

$$A = \int_A 1 \cdot 1 dA \quad (74)$$

$$R = \int_A S(z) \cdot S(z) dA \quad (75)$$

$$k = \frac{1}{A} \cdot I \cdot R^{-1} \cdot I \quad (76)$$

と定義してある。せん断抵抗 R の式 (75) 中の $S(z)$ は単位反り関数 z を積分して得られる単位せん断応力関数であり、 k はせん断修正係数⁹⁾である。

求められたはりの運動方程式 (69), (70) と Timoshenko の式 (71), (72) を比較した結果、本理論の式は次のごとく特徴づけられる。(1) 通常のはり理論の無視しているはりの垂直応力 σ_{zz} を考慮しているため、2つの部分項よりなる式 (69) の第2項 [...] が存在する。(2) 周波数 $\bar{\gamma}$ の大きさに依存する3種類のせん断係数 $k_0(\bar{\gamma})$, $k_1(\bar{\gamma})$, $k_2(\bar{\gamma})$ が存在する。(3) 通常のはり理論の無視している Poisson 比を正確に考慮しているため、式 (70) の第1項 [...] は2つの部分項よりなり、材料定数の表現がやや複雑となる。

定断面はりならば、上記の式 (69) および (70) は次のごとく書き直せる。

$$\begin{aligned} & \left(GA^* k_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} H^* - \rho A^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) W \\ & + \left(-GA^* k_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} B^* \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \\ & = - \int_A p_z I dA \quad (77) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(GA^* k_1 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} B^* \frac{\partial}{\partial x} \right) W \\ & + \left(-GA^* k_2 + \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} I^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho I^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi \\ & = \int_A p_x Z dA \quad (78) \end{aligned}$$

第1の式を $GA^* k_1$ で除し、第2式を x で1回微分してから EI^* で除す。さらにはり部材の縦波速度 c_0 、横波速度 c_{Qi} として位相速度を考慮したはりの断面2次半径 $r^*(\bar{\gamma})$ を、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} c_0^2 &= \frac{E}{\rho}, \quad c_{Qi}^2(\bar{\gamma}) = \frac{Gk_i(\bar{\gamma})}{\rho} \quad (i=0, 1, 2) \\ r^{*2}(\bar{\gamma}) &= \frac{I^*(\bar{\gamma})}{A^*(\bar{\gamma})} \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

と定義して、書き直すならば、次式となる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k_0}{k_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{c_0^2}{c_{Q1}^2} \frac{H^*}{A^*} - \frac{1}{c_{Q1}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) W \\ & + \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{c_0^2}{c_{Q1}^2} \frac{B^*}{A^*} \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \\ & = - \frac{\int_A p_x I dA}{GA^* k_1(\bar{\gamma})} \quad (80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{r^{*2}} \frac{c_{Q1}^2}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{1}{r^{*2}} \frac{B^*}{A^*} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) W \\ & + \left(-\frac{1}{r^{*2}} \frac{c_{Q2}^2}{c_0^2} + \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ & = \frac{\int_A p'_x Z dA}{EI^*(\bar{\gamma})} \quad (81) \end{aligned}$$

上式では3種類の部材横波速度が用いられた。この内、最初の c_{Q0} は媒質の3次元弾性体としての横波速度 c_2 ($\equiv c_T$) に等しい。そして c_{Q1} および c_{Q2} は部材断面形に依存する横波速度である。なお、部材を構成する媒質の縦波速度 c_1 および横波速度 c_2 はすでに式(13)に定義してある。

はりの横方向および軸方向分布荷重を受けない無限長はりの位相速度曲線を求めてみる。たわみ変位 $W(x, \bar{\gamma})$ およびはり断面の曲げ回転 $\psi(x, \bar{\gamma})$ を

$$\left. \begin{aligned} W(x, \bar{\gamma}) &= a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \\ \psi(x, \bar{\gamma}) &= b \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

と仮定する。ここで λ は波長であり、 c は位相速度、 a, b はそれぞれの変位成分の振幅である。運動方程式(77), (78)の右辺の荷重項を零とおいてから、この仮定式(82)を代入し、振幅と三角関数の積で括るならば、非自明解をもつ条件として次の特性方程式を得る。

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{k_0}{k_1} - \frac{c^2}{c_{Q1}^2} + \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{c_0^2}{c_{Q1}^2} \frac{H^*}{A^*} & \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \left(1 - \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{c_0^2}{c_{Q1}^2} \frac{B^*}{A^*}\right) \\ \frac{1}{r^{*2}} \frac{c_{Q1}^2}{c_0^2} \left(1 - \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{c_0^2}{c_{Q1}^2} \frac{B^*}{A^*}\right) & \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{c^2}{c_0^2} + \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{r^{*2}} \frac{c_{Q2}^2}{c_0^2} \end{array} \right| = 0 \quad (83)$$

この式において、 $k_0/k_1 \rightarrow 1$, $c_{Q\alpha} \rightarrow c_Q$, $B^* \rightarrow 0$, $H^* \rightarrow 0$, $r^*(\bar{\gamma}) \rightarrow r$, そして $(1-\nu)/(1+\nu)(1-2\nu) \rightarrow 1$ と書き直すならば、Timoshenko はりの位相速度方程式⁸⁾に形式的に一致する。

この位相速度 c に関する方程式より、充実長方形断面をもつ無限長はりの位相速度曲線を求め、Lamb 板理論と共に図示すると図-3左のごとくになった。Rayleigh-Lamb 理論の曲線(破線)と本理論の曲線(実線)は高次モードまで完全に一致している。ただし、本理論には余計な実線が存在するため、その原因を探ってみた。たとえば、無次元化周波数 $\bar{\gamma} = 1.0$ における無次元化位相速度 c/c_T と特性方程式(83)左辺の行列式の値 Det の関係を描くと図-3右のごとくになった。 c/c_T 軸を横切る位置が同図左側にプロットされている。Rayleigh-Lamb 理論の破線が単純に1回だけ c/c_T 軸を横切るのに対し、本理論の実線は2回以上横切っている。その1つはRayleigh-Lamb 方程式の破線と完全一致しているが、それ以外の横切る位置の値が余計な根となっている。2種類の \tanh 関数の簡単な和で表せる Rayleigh-Lamb 方程式に比べて、本理論の特性方程式(83)は位相速度 c を含む関数 $A^*(\bar{\gamma})$, $B^*(\bar{\gamma})$, $H^*(\bar{\gamma})$ の商および積の複雑な形となっている。そのため、何らかの有利化作用によ

り余計な根が発生すると思われる。

(10) Rayleigh 表面波の断面2次半径

板、はりのいかに関わらず、高周波数の極限 ($\bar{\gamma} \rightarrow \infty$) において、媒質を伝わる波は Rayleigh 表面波に収束することを(5)において確認した。この事実を用いて、半無限媒体であるにもかかわらず、それを伝播する Rayleigh 波の断面2次半径 r_R の閉じた解を決定できる。

式(66)に定義した動的断面2次モーメント $I^*(\bar{\gamma})$ および断面積 $A^*(\bar{\gamma})$ の定義式の右辺に基底関数式(47)を代入し、はり高さ方向に $-h/2$ から $+h/2$ まで積分する。第1次モードの場合、結局、単位幅の充実長方形断面において次のごとくなる。

$$I^*(\bar{\gamma}) = \left(\frac{h}{1-\nu_2^2}\right)^2 \left\{ \frac{-k\nu_1 h + \sinh k\nu_1 h}{2k\nu_1 \sinh^2 k\nu_1 h/2} + \frac{(1+\nu_2^2)^2 - k\nu_2 h + \sinh k\nu_2 h}{4 \cdot 2k\nu_2 \sinh^2 k\nu_2 h/2} \right. \\ \left. - \frac{\nu_1(1+\nu_2^2) \sinh k(\nu_1+\nu_2)h/2 - \sinh k(\nu_1-\nu_2)h/2}{k(\nu_1^2-\nu_2^2) \sinh k\nu_1 h/2 \cdot \sinh k\nu_2 h/2} + \frac{\nu_2(1+\nu_2^2) \sinh k(\nu_1+\nu_2)h/2 + \sinh k(\nu_1-\nu_2)h/2}{k(\nu_1^2-\nu_2^2) \sinh k\nu_1 h/2 \cdot \sinh k\nu_2 h/2} \right\} \quad (84)$$

$$A^*(\bar{\gamma}) = \left(\frac{1+\nu_2^2}{1-\nu_2^2}\right)^2 \left\{ \frac{k\nu_1 h + \sinh k\nu_1 h}{2k\nu_1 \cosh^2 k\nu_1 h/2} + \frac{4}{(1+\nu_2^2)^2} \frac{k\nu_2 h + \sinh k\nu_2 h}{2k\nu_2 \cosh^2 k\nu_2 h/2} \right. \\ \left. - \frac{4\nu_1}{k(1+\nu_2^2)(\nu_1^2-\nu_2^2)} \frac{\sinh k(\nu_1+\nu_2)h/2 + \sinh k(\nu_1-\nu_2)h/2}{\cosh k\nu_1 h/2 \cdot \cosh k\nu_2 h/2} + \frac{4\nu_2}{k(1+\nu_2^2)(\nu_1^2-\nu_2^2)} \frac{\sinh k(\nu_1+\nu_2)h/2 - \sinh k(\nu_1-\nu_2)h/2}{\cosh k\nu_1 h/2 \cdot \cosh k\nu_2 h/2} \right\} \quad (85)$$

この結果を静的な断面2次モーメント $I \equiv 1 \cdot h^3/12$ および断面積 $A \equiv 1 \cdot h$ でそれぞれ無次元化し、周波数 $\bar{\gamma}$ の関数として図-4(a)に示す。媒質は Poisson 材料 ($\nu = 1/4$) である。どちらの量も大きき1の値から傾き0の曲線(水平線)で出発し、周波数 $\bar{\gamma}$ の増

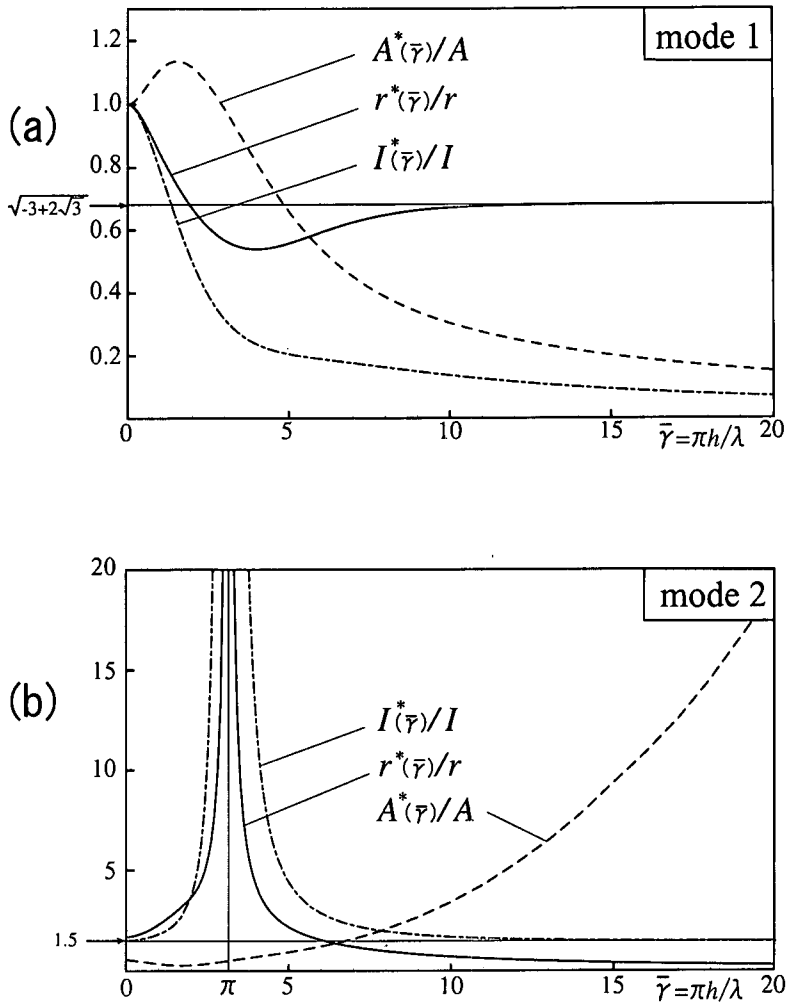


図 - 4 断面積 $A^*(\bar{\gamma})$ 、断面 2 次モーメント $I^*(\bar{\gamma})$ および断面 2 次半径 $r^*(\bar{\gamma})$ と周波数の関係 ($\nu = 1/4$)

加とともにじょじょに減少してゆく。周波数無限大の極限において、動的断面 2 次モーメント $I^*(\bar{\gamma})$ および断面積 $A^*(\bar{\gamma})$ は等しく零に漸近する。そのため、式 (79.c) で定義した動的断面 2 次半径 $r^*(\bar{\gamma})$ の極限は $0/0$ の不定形となるが、計算の結果、次のごとき有限値に収束する。

$$\lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{r^{*2}(\bar{\gamma})}{r^2} = 3 \frac{4\bar{\nu}_2(\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2) - 8\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2(1 + \bar{\nu}_2^2) + \bar{\nu}_1(\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2)(1 + \bar{\nu}_2^2)^2}{4\bar{\nu}_1(\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2) - 8\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2(1 + \bar{\nu}_2^2) + \bar{\nu}_2(\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2)(1 + \bar{\nu}_2^2)^2} \quad (86)$$

ただし、式 (20.b) を参考に

$$\bar{\nu}_\alpha = \left(1 - \frac{c_R^2}{c_\alpha^2}\right)^{1/2} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (87)$$

と定義した。 $\nu = 1/4$ となる Poisson 材料の場合、

$$\frac{c_1^2}{c_2^2} = 3, \quad \frac{c_R^2}{c_2^2} = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \frac{c_R^2}{c_1^2} = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

となるから、これらを式 (86)、(87) に代入して、

$$\bar{\nu}_1 = \frac{1}{3} \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \approx 0.847487$$

$$\bar{\nu}_2 = \sqrt{-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} \approx 0.393320$$

$$\lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{r^{*2}(\bar{\gamma})}{r^2} = -3 + 2\sqrt{3} \approx 0.464102$$

を得る。すなわち、動的断面 2 次半径は周波数の増とともに減少し、

$$\lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{r^*(\bar{\gamma})}{r} = \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}} \approx 0.681250$$

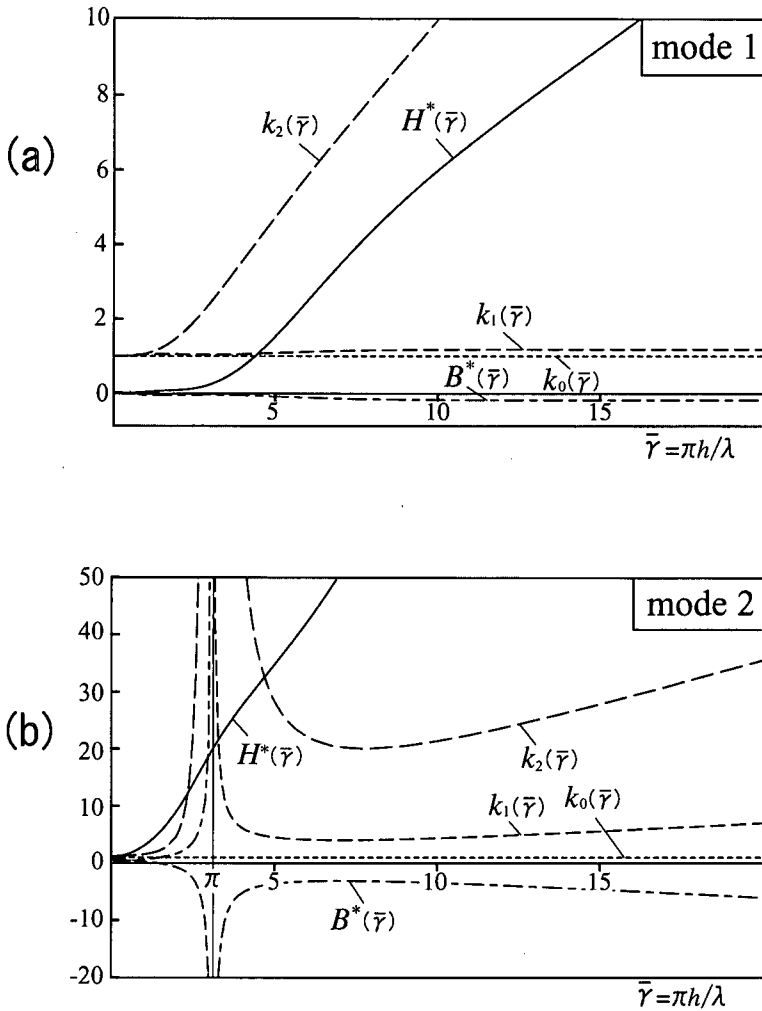


図 - 5 断面諸量 $B^*(\bar{\gamma})$, $H^*(\bar{\gamma})$ およびせん断修正係数 $k_0(\bar{\gamma})$, $k_1(\bar{\gamma})$, $k_2(\bar{\gamma})$ と周波数の関係 ($\nu = 1/4$)

より、最終的に静的場合の7割弱に低下する。

ここに得られた図の曲線形状は筆者らが Mindlin 板⁶⁾あるいは任意高次板理論¹⁰⁾において仮定した周波数とともに減衰する断面諸量の関数の妥当性を示している。

第2次以上のモードも同様の方法で断面諸量を計算できる。例として、第2次モードの場合のみ図-4(b)に示す。動的断面2次モーメント $I^*(\bar{\gamma})$ は周波数無限大において一定値に収束し、動的断面積 $A^*(\bar{\gamma})$ は周波数無限大において無限大に発散する。このため、動的断面2次半径 $r^*(\bar{\gamma})$ は周波数無限大において零に収束する。この挙動はすべての高次モードに共通している。結局、この事実は第1次モードのみ Rayleigh

表面波として残り、第2次以上の高次モードはすべて周波数無限大で消滅することを意味し、実際の現象を証明したことになる。

なお、はりの軸方向反りの基底関数 $Z(z, \bar{\gamma})$ は $\bar{\gamma} = \pi$ において分母が零になるため、そこで動的断面2次モーメント $I^*(\bar{\gamma})$ および動的断面2次半径 $r^*(\bar{\gamma})$ は無限大となるが、この位置で軸方向関数 $\psi(x, \bar{\gamma})$ は零に向かうため、軸方向変位 $u(x, z, \bar{\gamma})$ 自体は穏やかに変化し特異性を示すことはない。

参考のため、はりの他の断面諸量の関数 $B^*(\bar{\gamma})$, $H^*(\bar{\gamma})$ および3種類のせん断修正係数 $k_0(\bar{\gamma})$, $k_1(\bar{\gamma})$, $k_2(\bar{\gamma})$ の第1次および第2次モードにおける周波数変化の状況を図-5に与えた。

4. まとめ

弾性論厳密解である Lamb 板の周波数を考慮した変位場を基底関数としてはりの運動方程式を作成した。その正当性を Lamb 板と本理論の位相速度曲線の比較より確認した。同時に、はりの方程式に変換する過程で真の解の他に余計な解が混入することもわかった。

はりの運動方程式の係数となる動的断面 2 次モーメント、動的断面積、そしてこれらから計算される動的断面 2 次半径を求め、周波数とともにどのように変化するか調べた。その結果、次の事がわかった。(1) 第 1 次モードにおいて、動的断面 2 次モーメントと断面積は周波数無限大において、零に漸近する。しかし、それらの比の平方である動的断面 2 次半径は静的その 7 割弱ほどの一定値に収束する。そして、位相速度は周波数無限大において Rayleigh 表面波の伝播速度に収束する。

(2) 第 2 次以上の高次モードでは、周波数無限大において動的断面 2 次モーメントは零以外の一定値に収束するが、動的断面積は無限大に発散する。その結果、それらの比の平方である動的断面 2 次半径は零に漸近し、はりとしての実体を失う。

(3) これらより、高周波領域において、はり、板、半無限弾性体のいかにかわらず、Rayleigh 表面波のみ支配する物理現象の存在を確認できる。

本理論の断面形は Lamb 板状の充実長方形断面にとったが、これははり断面の一般性を損なうものではない。なぜなら、断面形のいかにかわらず、はりの静的な反りの基底関数は $Z(z, \bar{\gamma}) = z$ であり、面内たわみの基底関数は $I(z, \bar{\gamma}) = 1$ である。また、高周波領域では、断面形のいかにかわらず、これ

らの基底関数は Rayleigh 表面波状態となるからである。中周波領域に個々のはりの断面特性が発揮されると思われるが、本来、充実断面や断面変形の影響の少ないコンパクト断面では、中周波数領域の位相速度は周波数の変化の影響を受けにくい単調減少曲線となるからである。

参考文献

- 1) Pochhammer, L.: Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder, J. für Mat.(Crelle), Vol.81, pp.324-336, 1876.
- 2) Chree, C.: The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application, Trans. Camb. Phil. Soc., Vol.14, pp.250-369, 1889.
- 3) Abramson, H.N.: Flexural waves in elastic beams of circular cross section, The Journal of the Acoustical. Soc. of America, Vol.29, pp.42-46, 1957.
- 4) Timoshenko, S.P.: On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars, Phil. Mag., Series 6, Vol.41, pp.744-746, 1921.
- 5) Eringen, A.C. and Suhubi, E.S.: Elastodynamics, Vol.2, Academic Press, 1975.
- 6) 臼木 恒雄: 横波および Rayleigh 波の位相速度に収束する Mindlin 板の理論, 土木学会論文集, No.640/I-50, pp.39-48, 2000.
- 7) Mindlin, R.D.: Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, J. of Appl. Mech., Vol.18, pp.31-38, 1951.
- 8) Fung, Y.C.: Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, 1965.
ファン, Y. C.: 固体の力学/理論, 大橋義夫, 村上澄男 共訳, 培風館, 1970.
- 9) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.: Mechanics of Materials, Van Nostrand Reinhold, 1973.
- 10) 臼木恒雄, 真木有岳: 任意高次板曲げ理論における位相速度曲線群, 土木学会論文集, No.647/I-51, pp.97-110, 2000.

(2000. 2.14 受付)

BEAM EQUATIONS OF MOTION DERIVED FROM THE DISPLACEMENT FIELD OF LAMB PLATE THEORY

Tsuneo USUKI and Aritake MAKI

The equations of motion for a beam with solid rectangular cross-section are derived from the displacement field of Rayleigh-Lamb plate theory. Cross-sectional properties, such as the dynamic moment of inertia, cross-sectional area and the radius of gyration of the cross-section, are investigated as functions of frequency. It was found that as the elastic surface wave in any medium converges to the Rayleigh surface wave in the limiting case of infinite frequency, the dynamic radius of gyration for a half-infinite medium can be defined in spite of being unbounded. The dynamic radius of gyration for the first mode of phase velocity in a beam in the case of infinite frequency converges to 68% of static values. The same radii converge to zero for modes of phase velocity higher than the second. This result indicates that only the first mode of phase velocity of a flexural wave survives on the surface of a beam medium as a Rayleigh surface wave in the case of infinite frequency.