

Differential Quadrature 法を用いた 扇形 Mindlin 板の振動解析

水澤富作¹ ・ 近藤八重²

¹ 正会員 工博 大同工業大学 教授 建設工学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

² 正会員 大同工業大学 非常勤講師 建設工学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

最近、偏微分方程式を数値的に解く方法として Differential Quadrature 法が提案され、理工学分野の多くの問題に適用されている。この方法は、任意の導関数を解析領域に設けられた離散点での関数値の重み付き線形和で表し、境界条件を含めた支配方程式を代数方程式に変換して解く数値解析法である。また、適用範囲や解析精度を高めるために、重み係数行列の計算法や境界条件の導入法などを含めて、現在でも活発に研究が進められている。本研究では、扇形 Mindlin 板の振動解析への半解析的な Differential Quadrature 法の適用性について検討を行い、本手法の収束性や精度などの数値安定性について示している。また扇形 Mindlin 板の振動特性に与える幅厚比、半径比や中心角などの影響について解析を行っている。

Key Words: annular sector Mindlin plate, differential quadrature method, vibration, semi-analytical method

1. まえがき

扇形板は、曲線スラブ、曲線デッキや種々の構造要素として用いられており、その振動特性を知ることは、設計上重要な課題である。横せん断変形や回転慣性などの影響を考慮した扇形厚板の振動問題は¹⁾、Mindlin 板理論や 3 次元弾性理論に基づく Rayleigh-Ritz 法^{2), 3)}、スプライン要素法^{4), 5), 6)} や有限要素法^{7), 8)} などのエネルギー変分法を用いて解析されている。一方、半径方向の 2 辺が単純支持された扇形 Mindlin 板では、Levy 法とベッセル関数を適用した解析解が Kobayashi ら⁹⁾ や McGree ら¹⁰⁾ により求められている。扇形 Mindlin 板の自由振動に関する支配方程式は、たわみと 2 つの回転角からなる 3 元連立偏微分方程式で与えられる。

最近、複雑な偏微分方程式を数値的に解く解法として、1971 年に Bellman and Casti¹¹⁾ により提案された Differential Quadrature 法 (DQ 法) が広く理工学分野の問題に適用されている¹²⁾。DQ 法は、補間多項式を用いて関数の微分係数 (導関数) を領域に設けた全ての離散点での関数値の重み付き線形和として表し、支配方程式と境界条件式を線形代数方程式に置き換えて解く数値解析法であり、また補間多項式と選点法を一般化した手法であると考えられている。

その後、Quan and Chang¹³⁾ や Shu and Richards¹⁴⁾ は、高次導関数の重み係数行列を求める漸化式を提案し

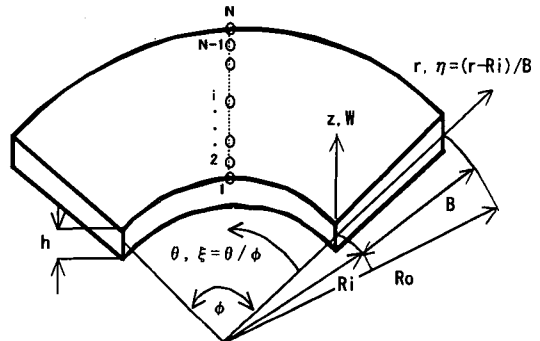


図-1 扇形 Mindlin 板と極座標系

ている。DQ法の解析精度は、Lagrange 多項式などの補間多項式から求められる重み係数行列の計算精度、解析領域に設ける離散点の取り方や境界条件の導入方法に依存している¹²⁾。DQ法の構造解析への適用は、比較的新しく、1988 年に Bert らによる薄板の研究¹⁵⁾ が挙げられる。最近では、任意の幾何形状や不連続領域を有する板を離散化するために、座標変換を適用した DQ 法¹⁶⁾ や解析領域を要素に分割する DQ 要素法^{17), 18)} も提案されている。

DQ法は、有限要素法などのエネルギー法と比較して、数値積分公式を用いず、直接微分方程式を解くことができる。また各離散点で定義される物理量が変位のみであるので、有限要素法と比較して、比較的少ない未知数で

問題が解け、PCなどの小型計算機向きの数値解析法である。しかしながら、DQ法の解の収束性や精度に与える離散点の分布法や離散点の数の影響については、さほど明確にされていないように思われる。また、DQ法を用いた長方形板に関する研究^{1,2)}と比較して、他の幾何形状を有する薄板や厚板への適用例が少ないので、DQ法の扇形板や斜板への適用性についても検討が必要であると考えられる。

本文では、円周方向にFourier級数展開し、半径方向にDQ法を適用した半解析的なDifferential Quadrature法を提案し、また半径方向の2辺が単純支持され、他の2つの円弧辺が任意の境界条件を持つ扇形Mindlin板の振動解析への適用について検討を行っている。本手法の収束性や精度に与える離散点の分布法などの影響について検討を行い、また扇形厚板の振動特性に与える幅厚比、半径比や中心角などの影響について明らかにしている。

2. Differential Quadrature法による定式化

ここでは、半径方向の2辺が単純支持され、他の2つの円弧辺で任意の境界条件を持つ扇形Mindlin板の3元連立偏微分方程式で表される振動方程式を数値的に解くために、円周方向にFourier級数展開し、また半径方向にDQ法を適用した半解析的なDQ法の定式化について示す。

(1) DQ法

DQ法では、座標 η を変数にもつ関数 $Y(\eta)$ の離散点での r 階の導関数は、図-1に示す解析領域に設けた全ての離散点での関数値の重み付き線形和として、次式で表される。

$$d^{(r)}Y(\eta_j)/d\eta^r = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(r)} Y_j ; j, i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

ここで、 $A_{ij}^{(r)}$ は r 階の導関数の重み係数行列であり、 $Y_j = Y(\eta_j)$ 、 N は η 軸方向に設けられた離散点の数である。1階の重み係数行列はLagrange補間多項式 $\Pi(\eta)$ を用いれば、次式で与えられる。

$$A_{ik}^{(1)} = \frac{\Pi(\eta_i)}{(\eta_i - \eta_k)\Pi'(\eta_k)} ; k \neq i, i, k = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

ここで、

$$\Pi(\eta_i) = \prod_{v=1, v \neq i}^N (\eta_i - \eta_v), \Pi'(\eta_k) = \prod_{v=1, v \neq k}^N (\eta_k - \eta_v) ; i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

また、 r 階の重み係数行列は、次式で与えられる漸化式を用いれば^{1,4)}、式(2)で求めた $A_{ik}^{(1)}$ より、次式で表される。すなわち、 $2 \leq r \leq (N-1)$ に対して、

$$A_{ik}^{(r)} = r \left[A_{ii}^{(r-1)} A_{ik}^{(1)} - \frac{A_{ik}^{(r-1)}}{(\eta_i - \eta_k)} \right] ; k \neq i, i, k = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

また、 $1 \leq r \leq (N-1)$ に対して、重み係数行列の対角要素は、

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{v=1, v \neq i}^N A_{iv}^{(r)} ; i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

(2) 扇形Mindlin板の支配方程式

横せん断変形と回転慣性の影響を考慮したMindlin板理論では¹⁰⁾、任意の点 (θ, r, z) の変位は、それぞれ独立した3つの変位関数を用いて、次式で仮定される。

$$\begin{aligned} u_r &= z \varphi_r(\theta, r, t) \\ u_\theta &= z \varphi_\theta(\theta, r, t) \\ w &= w(\theta, r, t) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 u_r, u_θ, w は、それぞれ r, θ と z 方向の変位であり、また φ_r と φ_θ は、それぞれ θ 軸と r 軸回りの回転角である。

図-1に示すような一様厚さで、等方性の扇形Mindlin板の自由振動方程式は、次式のように3元連立偏微分方程式で与えられる¹⁰⁾。

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta) - Q_r = \left(\frac{\rho h^3}{12} \right) \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial t^2} \quad (7a)$$

$$\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} M_{r\theta} - Q_\theta = \left(\frac{\rho h^3}{12} \right) \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} \quad (7b)$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} Q_r = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (7c)$$

ここで、曲げモーメントとせん断力は、

$$M_r = D \left[\frac{\partial \varphi_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \left(\varphi_r + \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \quad (8a)$$

$$M_\theta = D \left[\frac{1}{r} \left(\varphi_r + \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right] \quad (8b)$$

$$M_{r\theta} = \frac{1-\nu}{2} D \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} - \varphi_\theta \right) + \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r} \right] \quad (8c)$$

$$Q_r = \kappa G h \left(\varphi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (8d)$$

$$Q_\theta = \kappa G h \left(\varphi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (8e)$$

で表される。ただし、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 、 ρ は密度、 ν はポアソン比、 h は板厚、 κ はせん断修正係数である。また、 E はヤング係数、 G はせん断弾性係数である。

式の定式化には、次の無次元極座標系を用いる。

$$\xi = \theta/\phi, \quad \eta = (r - Ri)/B \quad (9)$$

ここで、 $B = Ri(\lambda - 1)$ は扇形板の幅、 $\lambda = Ro/Ri$ は半径比、 ϕ は中心角、 r は半径であり、また Ri と Ro は、それぞれ扇形板の内径と外径を示す。

次に、扇形板の自由振動は調和振動するので、無次元極座標系を用いて式(7a)・(7c)を書き換えれば、それぞれ次式ようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{2-\nu}{2} \frac{1}{R^2 \phi} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{R \phi} \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{R^2} \varphi_\theta + \\ & \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \eta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R^2 \phi^2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \xi^2} \\ & - \frac{\kappa G h B^2}{D} (\varphi_\theta + \frac{1}{BR \phi} \frac{\partial W'}{\partial \xi}) + \frac{\rho h^3 B^2}{12 D} \omega^2 \varphi_\theta = 0 \quad (10a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial \eta^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \eta} - \frac{3-\nu}{2 R^2 \phi} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \xi} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial \eta \partial \xi} \\ & + \frac{1-\nu}{2 R^2 \phi^2} \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial \xi^2} - \frac{1}{R^2} \varphi_r - \frac{\kappa G h B^2}{D} (\varphi_r + \frac{h}{B} \frac{\partial W'}{\partial \eta}) \\ & + \frac{\rho h^3 \omega^2 B^2}{12 D} \varphi_r = 0 \quad (10b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa G B^4}{D h} \left(\frac{h}{B} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \eta} + \left(\frac{h}{B} \right)^2 \frac{\partial^2 W'}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R \phi} \frac{h}{B} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \xi} \right. \\ & \left. + \frac{1}{R^2 \phi} \left(\frac{h}{B} \right)^2 \frac{\partial^2 W'}{\partial \xi^2} + \frac{1}{R} \frac{h}{B} \varphi_r + \frac{1}{R} \left(\frac{h}{B} \right)^2 \frac{\partial W'}{\partial \eta} \right) \\ & + \frac{\rho h \omega^2 B^4}{D} W' = 0 \quad (10c) \end{aligned}$$

ここで、 $W' = w/h, R = (\eta + 1)/(\lambda - 1)$ 、また ω は円振動である。

半径方向の2つの直線辺が単純支持された扇形 Mindlin 板では、Levy を適用すると、変位関数は直交固有関数を用いて次式で表される。

$$\begin{aligned} \varphi_\eta(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^M Y(\eta) \sin m \pi \xi \\ \varphi_\xi(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^M X(\eta) \cos m \pi \xi \\ W'(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^M W(\eta) \sin m \pi \xi \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 M は級数の項数である。

したがって、式(11)を式(10a)～式(10c)へ代入すると、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa G h B^2}{D} \left(\frac{h}{B} \right) \left(\frac{m \pi}{R \phi} \right) W(\eta) + \left[\left(\frac{m \pi}{R \phi} \right)^2 + \frac{\kappa G h B^2}{D} \right] X(\eta) \\ & - \frac{1-\nu}{2 R} \frac{dX(\eta)}{d\eta} - \frac{1-\nu}{2} \frac{d^{(2)}X(\eta)}{d\eta^2} - \frac{1}{R} \left(\frac{m \pi}{R \phi} \right) Y(\eta) \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{m \pi}{R \phi} \right) \frac{dY(\eta)}{d\eta} = \frac{\rho h^3 \omega^2 B^2}{12 D} X(\eta) \quad (12a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa G h B^2}{D} \left(\frac{h}{B} \right) W(\eta) - \frac{3-\nu}{R} \left(\frac{m \pi}{R \phi} \right) X(\eta) + \frac{1+\nu}{2} (m \pi) \frac{dX(\eta)}{d\eta} \\ & + \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m \pi}{R \phi} \right)^2 + \frac{1}{R^2} + \frac{\kappa G h B^2}{D} \right] Y(\eta) \\ & - \frac{1}{R} \frac{dY(\eta)}{d\eta} - \frac{d^{(2)}Y(\eta)}{d\eta^2} = \frac{\rho h^3 \omega^2 B^2}{12 D} Y(\eta) \quad (12b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 6\kappa(1-\nu) \left(\frac{B}{h} \right)^2 \left(\frac{m \pi}{R \phi} \right)^2 W(\eta) - 6\kappa(1-\nu) \left(\frac{B}{h} \right)^2 \frac{1}{R} \frac{dW(\eta)}{d\eta} \\ & - 6\kappa(1-\nu) \left(\frac{B}{h} \right)^2 \frac{d^{(2)}W(\eta)}{d\eta^2} + 6\kappa(1-\nu) \left(\frac{B}{h} \right)^3 \left(\frac{m \pi}{R \phi} \right) X(\eta) \\ & - 6\kappa(1-\nu) \left(\frac{B}{h} \right)^3 \frac{1}{R} Y(\eta) - 6\kappa(1-\nu) \left(\frac{B}{h} \right)^3 \frac{dY(\eta)}{d\eta} = \frac{\rho h \omega^2 B^4}{D} W(\eta) \quad (12c) \end{aligned}$$

したがって、DQ法を用いて、式(12)を書き換えると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa G h B^2}{D} \left(\frac{h}{B} \right) \left(\frac{m \pi}{R \phi} \right) W_i + \left[\left(\frac{m \pi}{R \phi} \right)^2 + \frac{\kappa G h B^2}{D} \right] X_i \\ & - \frac{1-\nu}{2 R} \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} X_j - \frac{1-\nu}{2} \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} X_j - \frac{1}{R} \left(\frac{m \pi}{R \phi} \right) Y_j \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{m \pi}{R \phi} \right) \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} Y_j = \frac{\rho h^3 \omega^2 B^2}{12 D} X_i \quad (13a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa G h B^2}{D} \left(\frac{h}{B} \right) W_i - \frac{3-\nu}{R} \left(\frac{m \pi}{R \phi} \right) X_i + \frac{1+\nu}{2} (m \pi) \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} X_j \\ & + \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m \pi}{R \phi} \right)^2 + \frac{1}{R^2} + \frac{\kappa G h B^2}{D} \right] Y_i \\ & - \frac{1}{R} \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} Y_j - \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} Y_j = \frac{\rho h^3 \omega^2 B^2}{12 D} Y_i \quad (13b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 6\kappa(1-\nu) \left(\frac{B}{h} \right)^2 \left(\frac{m \pi}{R \phi} \right)^2 W_i - 6\kappa(1-\nu) \left(\frac{B}{h} \right)^2 \frac{1}{R} \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} W_j \\ & - 6\kappa(1-\nu) \left(\frac{B}{h} \right)^2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} W_j + 6\kappa(1-\nu) \left(\frac{B}{h} \right)^3 \left(\frac{m \pi}{R \phi} \right) X_i \\ & - 6\kappa(1-\nu) \left(\frac{B}{h} \right)^3 \frac{1}{R} Y_i - 6\kappa(1-\nu) \left(\frac{B}{h} \right)^3 \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} Y_j \\ & = \frac{\rho h \omega^2 B^4}{D} W_i \quad (13c) \end{aligned}$$

ただし、 $i = 2, 3, \dots, N-1$ である。

次に、2つの円弧辺で与えられる境界条件は、各辺で3つの条件式で定義される。

(a) 固定辺 (C)

$$W = 0, \varphi_\theta = 0, \varphi_r = 0 \quad (14a)$$

(b) 単純支持 (SまたはSS)

単純支持は、ハードタイプ (S) とソフトタイプ (SS) の2に分けられ、それぞれ次式で表される。

・ ハードタイプの単純支持 (S)

$$W = 0, \varphi_\theta = 0, M_r = 0 \quad (14b)$$

∴ ソフトタイプの単純支持 (SS)

$$W = 0, M_{r\theta} = 0, M_r = 0 \quad (14c)$$

(c) 自由辺 (F)

$$M_r = 0, M_{r\theta} = 0, Q_r = 0 \quad (14d)$$

したがって、 $\eta = 0 (i = 1)$ における境界条件は、DQ法を用いて表示すると、固定辺は、

$$W_1 = 0, X_1 = 1, Y_1 = 0 \quad (15a)$$

になる。また、ハードタイプの単純支持は、

$$\begin{aligned} W_1 &= 0, \\ X_1 &= 0, \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\sum_{j=1}^N A_{1j}^{(i)} X_j + (\nu/R) \{Y_1 - (m\pi/\phi) X_1\} = 0$$

になる。自由辺は、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N A_{1j}^{(i)} X_j + (\nu/R) \{Y_1 - (m\pi/\phi) X_1\} &= 0, \\ \sum_{j=1}^N A_{1j}^{(i)} X_j + (1/R) \{(m\pi/\phi) Y_1 - X_1\} &= 0, \end{aligned} \quad (15c)$$

$$Y_1 + (h/B) \sum_{j=1}^N A_{1j}^{(i)} W_j = 0$$

で表される。同様にして、 $\eta = 1 (i = N)$ の境界条件式も DQ法で容易に表せる。

DQ法で表した式 (13a-13c) と境界条件式は、次式のような $3N$ の線形代数方程式で表される。ただし、境界条件式に対応する $\{W, X, Y, W_N, X_N, Y_N\}$ を、 $\{w_b\}$ で表している。

$$\begin{bmatrix} [K_{bb}] & [K_{bd}] \\ [K_{db}] & [K_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_b\} \\ \{w_d\} \end{Bmatrix} = n^2 \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{w_d\} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

ここで、 $\{w_d\} = \{W_2 X_2 Y_2 W_3 X_3 Y_3 \dots W_{N-1} X_{N-1} Y_{N-1}\}$ である。式 (16) を 2 つに分けて表示すれば、

$$[K_{bb}] \{w_b\} + [K_{bd}] \{w_d\} = \{0\} \quad (17)$$

$$[K_{db}] \{w_b\} + [K_{dd}] \{w_d\} = n^2 [I] \{w_d\} \quad (18)$$

になる。ただし、 $[I]$ は単位行列である。したがって、

$$\begin{aligned} \text{式(17)を}\{w_b\}\text{について解くと、} \\ \{w_b\} = -[K_{bb}]^{-1} [K_{bd}] \{w_d\} \end{aligned} \quad (19)$$

になるので、式(18)に代入すると、次のように表される。

$$([K_{dd}] - [K_{db}] [K_{bb}]^{-1} [K_{bd}]) \{w_d\} = n^2 [I] \{w_d\} \quad (20)$$

式(20)のカッコ内を $[K]$ とおくと、

$$([K] - n^2 [I]) \{w_d\} = 0 \quad (21)$$

で表わされる。ここで $\eta^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h/D}$ 、 $[K]$ は $3(N$

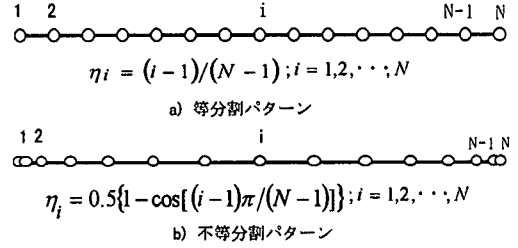


図-2 離散点の分割パターン

−2)の実非対称行列になる。したがって、固有関数の直交性より、各級数ごとに式 (21) の固有値計算を行えば、振動数と固有ベクトルが求められる。

ただし、半径方向の2辺が単純支持以外の境界条件を持つ場合には、式 (11) で示した固有関数の直交性が成り立たなくなるので、固有関数の連成項を含めた固有値計算が必要になる。

3. 数値計算例および考察

ここでは、2つの半径方向の直線辺が単純支持された扇形 Mindlin 板の振動解析への半解析的な DQ法の適用性について示す。また、扇形 Mindlin 板の振動特性に与える幅厚比、半径比や中心角などの影響について示す。相対する2つの円弧辺の境界条件は C-F のように表し、それぞれ2つの円弧辺 ($\eta = 0, 1$) がそれぞれ固定辺(C)と自由辺(F)に相当している。以下に示す数値計算例では、ポアソン比 ν は 0.3 と仮定し、また κ は 5/6 を用いる。

はじめに、本手法の収束性について示す。

DQ法では、離散点の取り方が解の収束性や精度に影響を及ぼすので、以下のような方法で離散点の位置を決めている¹²⁾。

- 1) 均等に離散点を取る方法 (等分割パターン)
- 2) Shifted Chebyshev 多項式の零点を離散点にとる方法 (不等分割パターン)

図-2には、半径方向に設ける離散点の値を求める式が示してある¹²⁾。

図-3には、相対する2つの円弧辺が自由である扇形板の1次の振動数パラメータ、 $n_1^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h/D}$ の収束性に与える離散点の分割パターンの影響が示してある。ここで、 $B/h = 20$ 、中心角 $\phi = 60^\circ$ 、半径比 $R_o/R_i = 2.0$ に仮定している。また、離散点の数 N は 7 から 23 まで変化させている。これより、等分割パターンの収束性は不安定であり、 N の増大とともに急激に悪くなっている。これは、等分点を持つ Lagrange 多項式より重み係数行列を求めているので、補間多項式の次数を増大させると、解の収束は周期的な振動を伴う不安定な性状を示すからである。一方、不等分割パターンを用いると、安定した

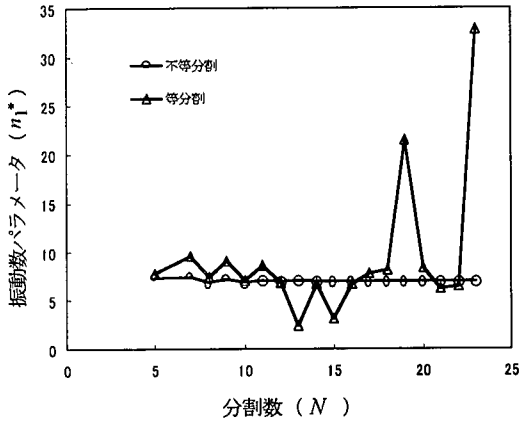


図-3 扇形 Mindlin 板の 1 次振動数パラメータに与える分割法の影響; $F\cdot F, \phi = 60^\circ, B/h = 2.0, R_o/R_i = 4.0$

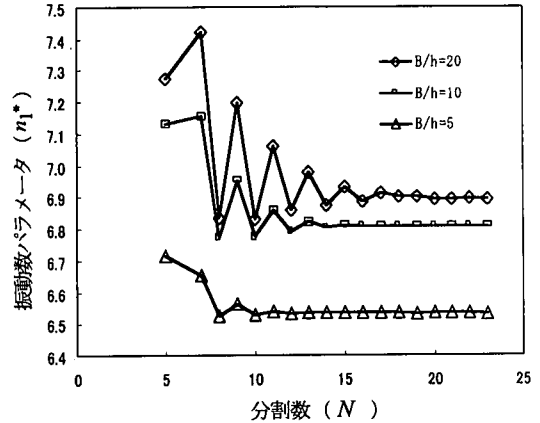


図-5 扇形 Mindlin 板の 1 次振動数パラメータの収束性に与える B/h の影響; $F\cdot F, \phi = 60^\circ, R_o/R_i = 4.0$

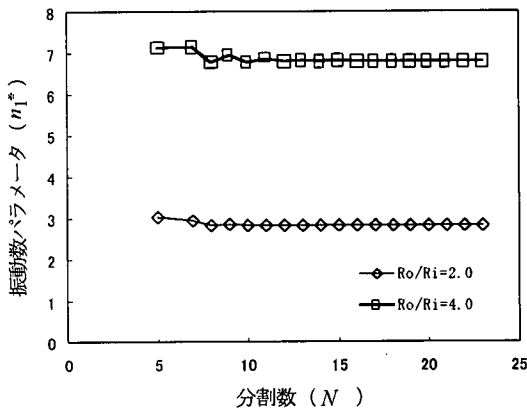


図-4 扇形 Mindlin 板の 1 次振動数パラメータの収束性に与える R_o/R_i の影響; $F\cdot F, \phi = 60^\circ, B/h = 10$

収束状態が得られている。DQ法は、選点法を一般化した手法であるので、離散点を直交多項式の根に取れば、数値安定性を高められる。

また、他の境界条件を有する場合についても検討を行って見たが、同様な結果が得られている。

したがって、以後の数値計算では、離散点の分割は、Shifted Chebyshev 多項式の零点を離散点に取った不等分割を用いる。

図-4 は、2つの円弧辺が自由である扇形 Mindlin 板 ($F\cdot F$) の振動数パラメータ、 $n_1^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h/D}$ の収束性に与える半径比 R_o/R_i の影響を示している。ここで、 $\phi = 60^\circ$ 、 $B/h = 10$ に仮定し、また R_o/R_i は 2.0 と 4.0 に変化させている。これより、自由の境界条件を持つ扇形板の振動数パラメータの収束性は、半径比が大きくなると、周期的な性状が顕著に見られるが、離散点の数を増大させると安定した収束性が得られる。また、図-5 には、先に示した扇形 Mindlin 板の振動数パラメータの収束性

表-1 2つの円弧辺が固定された扇形 Mindlin 板の振動数パラメータ $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h/D}$ の収束性に与える離散点の数の影響; $C\cdot C, \phi = 60^\circ, R_o/R_i = 2.0$

N	B/h	modes				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
		(1-1)	(2-1)	(3-1)	(1-2)	(2-2)
7	10	22.868	31.067	46.339	57.016	64.891
9		22.870	31.046	46.277	55.510	63.676
11		22.870	31.046	46.277	55.507	63.677
13		22.870	31.046	46.277	55.506	63.677
15		22.870	31.046	46.277	55.506	63.678
17		22.870	31.046	46.277	55.507	63.678
19		22.869	31.045	46.277	55.507	63.678
21		22.869	31.045	46.277	55.507	63.677
23		22.870	31.046	46.277	55.505	63.678
		SSM ⁴⁾	22.869	31.046	46.277	55.507
		(1-1)	(2-1)	(3-1)	(1-2)	(2-2)
7	100	25.114	34.550	52.066	68.217	77.452
9		24.676	33.869	51.405	64.568	74.974
11		24.707	33.864	51.396	64.674	74.952
13		24.612	33.867	51.405	64.676	74.339
15		24.730	33.872	51.396	64.674	74.953
17		24.555	33.937	51.406	64.502	74.817
19		23.220	33.822	51.397	64.635	74.984
21		24.758	33.810	51.396	64.585	74.953
23		24.912	33.856	51.368	64.573	74.955
		SSM ⁴⁾	24.711	33.864	51.367	64.671

($i-j$): i, j はそれぞれ θ 方向と r 方向のモード次数

に与える幅厚比 B/h の影響が示してある。ここで、 B/h は 5, 10, 20 としている。これより、 B/h が大きくなると、周期的な収束性が顕著に見られるが、離散点の数を 17 以上に取れば、ほぼ一定値に収束してくる。

表-1 には、相対する 2つの円弧辺が固定された扇形板の振動数パラメータ、 $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h/D}$ の収束性に与える離散点の数 N の影響が示してある。ここで、 $\phi = 60^\circ$ 、 $R_o/R_i = 2.0$ に仮定している。 B/h は 10 と 100 としている。また、比較のために、スプライン帯板法 (SSM) を用いた水澤らの結果⁴⁾ も示してある。これより、 N を増大すると、高次の振動数パラメータまで、安定した収束性が示され、また SSM の解とよく一致した結果が得られ

表-2 扇形 Mindlin 板の振動数パラメータに与える単純支持タイプの影響: $\phi = 60^\circ, R_o/R_i = 2.0, N = 15$

B/h	B.C. Types	Modes						
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th
100	S	14.088	25.856	43.926	44.782	57.128	69.58	79.267
	SS	14.997	25.655	43.649	44.609	56.923	69.299	78.489
10	S	13.637	24.713	40.843	41.506	52.032	62.254	69.933
	SS	13.361	24.235	40.504	40.963	51.139	61.559	68.837
5	S	12.745	22.121	34.649	35.176	42.809	49.965	55.148
	SS	12.287	21.435	34.205	34.498	41.769	49.206	54.043

S: ハードタイプの単純支持, SS: ソフトタイプの単純支持

表-3 扇形 Mindlin 板の振動数パラメータ $n^* = \alpha B^2 \sqrt{\rho h/D}$ に与える幅厚比と境界条件の影響: $\phi = 60^\circ, R_o/R_i = 2.0, N = 15$

Boundary Condition	B/h	modes					
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
C-C	100	24.730	33.872	51.396	64.674	74.953	76.331
		(24.711)	(33.864)	(51.397)	(64.671)	(74.953)	(76.461)
	20	24.216	33.084	49.944	61.994	71.567	73.476
		(24.216)	(33.083)	(49.944)	(61.994)	(71.568)	(73.476)
	10	22.870	31.046	46.277	55.506	63.678	66.592
		(22.869)	(31.046)	(46.277)	(55.507)	(63.678)	(66.592)
5	19.225	25.921	37.603	41.832	47.898	51.819	
	(19.226)	(25.921)	(37.603)	(41.832)	(47.898)	(51.819)	
S-S	100	14.088	25.856	43.926	44.782	57.128	69.580
		(13.986)	(25.847)	(43.967)	(44.713)	(57.102)	(69.507)
	20	13.907	25.554	43.130	43.852	55.709	67.468
		(13.898)	(25.554)	(43.130)	(43.852)	(55.708)	(67.468)
	10	13.637	24.713	40.843	41.506	52.032	62.254
		(13.637)	(24.713)	(40.843)	(41.506)	(52.032)	(62.254)
5	12.745	22.121	34.649	35.176	42.809	49.965	
	(12.746)	(22.121)	(34.649)	(35.176)	(42.809)	(49.965)	
F-F	100	2.8910	11.827	11.939	25.580	28.927	30.392
		(2.8550)	(11.757)	(11.849)	(25.485)	(28.838)	(31.098)
	20	2.8479	11.673	11.718	25.120	28.397	30.393
		(2.8433)	(11.654)	(11.692)	(25.091)	(28.374)	(30.407)
	10	2.8240	11.407	11.433	24.187	27.252	29.019
		(2.8232)	(11.406)	(11.431)	(24.185)	(27.25)	(29.019)
5	2.7639	10.596	10.743	21.592	24.043	25.392	
	(2.7636)	(10.596)	(10.743)	(21.592)	(24.043)	(25.392)	
F-C	100	11.437	26.805	30.638	48.628	48.965	69.141
		(11.442)	(26.972)	(30.703)	(48.681)	(49.001)	(69.209)
	20	11.071	26.458	30.048	46.938	47.780	66.859
		(11.312)	(26.578)	(29.933)	(47.192)	(47.793)	(66.497)
	10	11.030	25.486	28.269	43.798	44.625	60.266
		(11.03)	(25.486)	(28.269)	(43.797)	(44.625)	(60.266)
5	10.187	22.309	23.955	35.708	36.716	46.709	
	(10.187)	(22.309)	(23.955)	(35.708)	(36.716)	(46.709)	

() はスプライン帯板法による数値解⁴⁾

ている。幅厚比が大きくなると、Lagrange 多項式より重み係数行列を求めているので、周期的な収束状態が示されるが、SSM の値と比較して、1%以内の精度で一致した結果が得られている。

表-2 は、周辺単純支持された扇形 Mindlin 板の振動数パラメータに与えるハードタイプの単純支持(式 14b)とソフトタイプの単純支持(式 14c)の相異を示している。ここで、 $\phi = 60^\circ, R_o/R_i = 2.0$ に仮定し、また B/h を 100, 10, 5 に変化させている。これより、両者にはさほど大きな差が見られないが、ハードタイプの単純支持 (S) はソフトタイプの単純支持 (SS) と比較して、 B/h に関係なく 1 ~ 3% 程度大きな値が示されている。

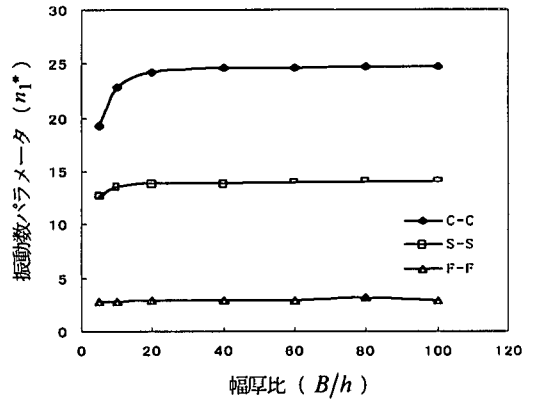


図-6 扇形 Mindlin 板の 1 次振動数パラメータの収束性に与える B/h の影響: $\phi = 60^\circ, R_o/R_i = 2.0$

表-4 扇形 Mindlin 板の振動数パラメータに与える半径比の影響: $C-C, N = 15$

Ro/Ri	ϕ	B/h	Modes					
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
1.0	30°	100	25.936	39.844	66.012	66.030	80.505	103.37
		20	25.406	38.831	63.255	63.837	76.738	98.513
	10	23.973	36.294	56.595	58.455	68.035	87.456	
		5	20.130	30.063	42.630	46.427	50.964	65.748
	45°	100	23.844	29.216	39.844	63.495	69.638	55.988
		20	23.373	28.578	38.831	54.311	60.915	66.626
10	22.114	26.895	36.294	50.146	54.611	59.460		
	5	18.633	22.520	30.063	40.498	41.165	44.740	
1.5	60°	100	23.155	25.936	31.343	39.844	62.633	66.012
		20	22.720	25.406	30.639	38.831	49.977	60.112
	10	21.521	23.973	28.794	36.294	53.930	56.595	
		5	18.170	20.130	24.073	30.063	40.664	42.630
	90°	100	22.696	23.844	25.936	29.216	33.751	39.844
		20	22.720	23.373	25.406	28.578	33.034	38.831
10	21.120	22.114	23.973	26.895	30.997	36.294		
	5	17.862	18.633	20.130	22.520	25.857	30.063	
2.0	30°	100	33.872	74.953	76.331	121.51	134.85	143.33
		20	33.084	71.567	73.476	114.40	125.19	134.40
	10	31.046	63.678	66.592	99.204	105.45	115.39	
		5	25.921	47.898	51.819	72.112	73.290	82.581
	45°	100	26.869	44.684	67.244	76.331	86.420	118.78
		20	26.303	43.487	64.389	73.476	82.222	112.37
10	24.789	40.513	57.548	66.592	72.722	98.267		
	5	20.801	33.311	43.360	51.819	54.396	69.402	
4.0	60°	100	24.730	33.872	51.396	64.674	74.953	76.331
		20	24.216	33.084	49.944	61.994	71.567	73.476
	10	22.870	31.046	46.277	55.506	63.678	66.592	
		5	19.225	25.921	37.603	41.832	47.898	51.819
	90°	100	23.314	26.869	33.872	44.684	58.876	62.879
		20	22.867	26.303	33.084	43.487	57.143	60.328
10	21.640	24.789	31.046	40.513	52.602	54.091		
	5	18.241	20.801	25.921	33.311	42.165	40.771	
8.0	30°	100	64.240	116.69	170.40	181.94	259.66	263.47
		20	62.074	110.08	157.52	166.97	232.42	233.94
	10	56.733	95.837	132.13	138.41	185.41	184.85	
		5	44.719	69.801	91.793	94.725	121.63	120.24
	45°	100	40.170	84.593	94.375	146.10	158.25	170.40
		20	39.177	80.586	90.065	135.20	147.11	157.52
10	36.655	71.555	79.976	113.68	124.36	132.13		
	5	30.369	53.864	60.067	79.235	87.045	91.793	
16.0	60°	100	31.373	64.240	73.755	111.63	116.69	134.28
		20	30.755	62.074	70.409	105.58	110.08	124.61
	10	28.915	56.733	62.763	92.403	95.837	105.11	
		5	24.298	44.719	47.510	67.912	69.801	73.414
	90°	100	25.815	40.170	64.240	66.506	84.593	94.375
		20	25.214	39.177	62.074	63.641	80.586	90.065
10	23.740	36.655	56.733	56.853	71.555	79.976		
	5	19.955	30.369	42.963	44.719	53.864	60.067	

表-5 大きな中心角を持つ扇形Mindlin板の振動数

パラメータ ; $C-C, B/h=2.5, N=15$

$\phi^{(O)}$	Ro/Ri=2.0	Ro/Ri=5.0	Ro/Ri=10.0
120	12.324 (1-1)	13.203 (1-1)	14.149 (1-1)
	13.275 (2-1)	18.248 (2-1)	21.130 (2-1)
	15.203 (3-1)	24.756 (3-1)	27.583 (1-2)
	18.038 (4-1)	26.066 (1-2)	28.718 (3-1)
	21.487 (5-1)	31.354 (2-2)	35.489 (2-2)
	24.701 (1-2)	31.452 (4-1)	36.306 (4-1)
	25.277 (6-1)	38.124 (5-1)	41.741 (1-3)
	25.756 (2-2)	38.288 (3-2)	43.826 (5-1)
	27.491 (3-2)	40.223 (1-3)	43.887 (3-2)
	29.229 (7-1)	44.725 (2-3)	46.424 (1-4)
150	12.230 (1-1)	12.613 (1-1)	13.107 (1-1)
	12.786 (2-1)	15.908 (2-1)	18.160 (2-1)
	13.924 (3-1)	20.791 (3-1)	24.155 (3-1)
	15.706 (4-1)	25.363 (1-2)	26.313 (1-2)
	18.038 (5-1)	26.093 (4-1)	30.239 (4-1)
	20.763 (6-1)	28.938 (2-2)	32.157 (2-2)
	23.734 (7-1)	31.452 (5-1)	36.306 (5-1)
	24.573 (1-2)	36.794 (6-1)	38.861 (3-2)
	25.250 (2-2)	39.660 (1-3)	40.601 (1-3)
	26.370 (3-2)	39.736 (4-2)	42.329 (6-1)
180	12.181 (1-1)	12.313 (1-1)	12.542 (1-1)
	12.544 (2-1)	14.552 (2-1)	16.269 (2-1)
	13.275 (3-1)	18.248 (3-1)	21.130 (3-1)
	14.449 (4-1)	22.541 (4-1)	25.576 (1-2)
	16.060 (5-1)	24.974 (1-2)	26.182 (4-1)
	18.038 (6-1)	26.985 (5-1)	30.024 (2-2)
	20.288 (7-1)	27.532 (2-2)	31.252 (5-1)
	22.723 (8-1)	31.354 (3-2)	35.489 (3-2)
	24.504 (1-2)	31.452 (6-1)	36.306 (6-1)
	24.975 (2-2)	35.898 (4-2)	39.953 (1-3)
210	12.153 (1-1)	12.143 (1-1)	12.209 (1-1)
	12.408 (2-1)	13.728 (2-1)	15.011 (2-1)
	12.910 (3-1)	16.546 (3-1)	18.999 (3-1)
	13.722 (4-1)	20.052 (4-1)	23.289 (4-1)
	14.867 (5-1)	23.805 (5-1)	25.114 (1-2)
	16.323 (6-1)	24.738 (1-2)	27.631 (5-1)
	18.038 (7-1)	26.651 (2-2)	28.588 (2-2)
	19.953 (8-1)	27.623 (6-1)	31.976 (6-1)
	22.013 (9-1)	29.595 (3-2)	33.098 (3-2)
	24.172 (10-1)	31.452 (7-1)	36.306 (7-1)
270	12.123 (1-1)	11.967 (1-1)	11.856 (1-1)
	12.269 (2-1)	12.854 (2-1)	13.544 (2-1)
	12.544 (3-1)	14.552 (3-1)	16.269 (3-1)
	12.984 (4-1)	16.912 (4-1)	19.469 (4-1)
	13.615 (5-1)	19.645 (5-1)	22.808 (5-1)
	14.449 (6-1)	22.541 (6-1)	24.591 (1-2)
	15.478 (7-1)	24.477 (1-2)	26.182 (6-1)
	16.683 (8-1)	25.498 (7-1)	26.855 (2-2)
	18.038 (9-1)	25.658 (2-2)	29.563 (7-1)
	19.513 (10-1)	27.532 (3-2)	30.024 (3-2)

(i-j): i, jはそれぞれ θ 方向とr方向のモード次数

次にDQ法の解析精度について示す。

表-3には、2つの円弧辺で任意の境界条件を有する扇形厚板の振動数パラメータ, $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h / D}$ の精比較が示してある。ここで、中心角 ϕ は 60° , $R_o/R_i=2.0$, $N=15$ に仮定し、 B/h は5~100まで変化させている。比較のために、スプライン帯板法(SSM)を用いた水澤

表-6 大きな中心角を持つ扇形Mindlin板の振動数

パラメータ ; $C-C, B/h=5.0, N=15$

$\phi^{(O)}$	Ro/Ri=2.0	Ro/Ri=5.0	Ro/Ri=10.0
120	17.933 (1-1)	18.921 (1-1)	19.947 (1-1)
	19.225 (2-1)	26.272 (2-1)	31.203 (2-1)
	21.835 (3-1)	37.253 (3-1)	43.772 (1-2)
	25.921 (4-1)	41.916 (1-2)	44.564 (3-1)
	31.294 (5-1)	49.256 (4-1)	57.438 (2-2)
	37.603 (6-1)	50.053 (2-2)	58.514 (4-1)
	40.407 (1-2)	61.672 (5-1)	70.585 (1-3)
	41.832 (2-2)	62.418 (3-2)	72.800 (5-1)
	44.307 (3-2)	68.344 (1-3)	73.330 (3-2)
	44.523 (7-1)	76.030 (2-3)	84.812 (2-3)
150	17.797 (1-1)	18.200 (1-1)	18.557 (1-1)
	18.571 (2-1)	22.656 (2-1)	26.196 (2-1)
	20.094 (3-1)	30.445 (3-1)	36.449 (3-1)
	22.535 (4-1)	39.606 (4-1)	41.921 (1-2)
	25.921 (5-1)	40.982 (1-2)	47.317 (4-1)
	30.132 (6-1)	46.132 (2-2)	51.387 (2-2)
	34.990 (7-1)	49.256 (5-1)	58.514 (5-1)
	40.313 (8-1)	54.669 (3-2)	63.746 (3-2)
	40.240 (1-2)	59.165 (6-1)	68.654 (1-3)
	41.141 (2-2)	67.432 (1-3)	69.924 (6-1)
180	17.726 (1-1)	17.851 (1-1)	17.887 (1-1)
	18.241 (2-1)	20.709 (2-1)	23.134 (2-1)
	19.225 (3-1)	26.272 (3-1)	31.203 (3-1)
	20.801 (4-1)	33.413 (4-1)	40.026 (4-1)
	23.036 (5-1)	40.487 (1-2)	40.923 (1-2)
	25.921 (6-1)	41.190 (5-1)	47.694 (2-2)
	29.380 (7-1)	43.997 (2-2)	49.164 (5-1)
	33.311 (8-1)	49.256 (6-1)	57.438 (3-2)
	37.603 (9-1)	50.053 (3-2)	58.514 (6-1)
	40.150 (1-2)	57.500 (7-1)	67.593 (1-3)
210	17.683 (1-1)	17.658 (1-1)	17.531 (1-1)
	(17.684)		
	18.051 (2-1)	19.596 (2-1)	21.199 (2-1)
	18.738 (3-1)	23.614 (3-1)	27.590 (3-1)
	19.823 (4-1)	29.212 (4-1)	34.934 (4-1)
	21.371 (5-1)	35.593 (5-1)	40.330 (1-2)
	23.409 (6-1)	40.193 (1-2)	42.611 (5-1)
	25.921 (7-1)	42.328 (6-1)	45.338 (2-2)
	28.855 (8-1)	42.726 (2-2)	50.488 (6-1)
	32.146 (9-1)	47.169 (3-2)	53.071 (3-2)
35.725 (10-1)	49.256 (7-1)	58.514 (7-1)	
270	17.638 (1-1)	17.464 (1-1)	17.196 (1-1)
	(17.638)		
	17.853 (2-1)	18.490 (2-1)	19.118 (2-1)
	18.241 (3-1)	20.709 (3-1)	23.134 (3-1)
	18.837 (4-1)	24.175 (4-1)	28.379 (4-1)
	19.680 (5-1)	28.539 (5-1)	34.097 (5-1)
	20.801 (6-1)	33.413 (6-1)	39.694 (1-2)
	22.217 (7-1)	38.556 (7-1)	40.026 (6-1)
	23.928 (8-1)	39.876 (1-2)	42.692 (2-2)
	25.921 (9-1)	41.368 (2-2)	46.091 (7-1)
28.169 (10-1)	43.854 (8-1)	47.694 (3-2)	

()の値はMcGeeらの解析解¹⁾

らの数値解⁴⁾が示してある。これより、幅厚比や境界条件に関係なくよく一致した結果が得られている。また、 $N=15$ の場合の未知数を比較すると、SSMの54に対して、DQ法では33になるので、比較的少ない未知数で精度の高い結果が得られている。

図-6は、扇形Mindlin板($R_o/R_i=2.0, \phi=60^\circ$)の

表-7 大きな中心角を持つ扇形Mindlin板の振動数

パラメータ: C-C, B/h=10.0, N=15

ϕ (°)	Ro/Ri=2.0	Ro/Ri=5.0	Ro/Ri=10.0
120	21.243 (1-1)	22.532 (1-1)	23.528 (1-1)
	22.870 (2-1)	31.328 (2-1)	37.831 (2-1)
	26.042 (3-1)	46.108 (3-1)	56.885 (3-1)
	31.046 (4-1)	55.479 (1-2)	57.337 (1-2)
	37.871 (5-1)	63.587 (4-1)	76.666 (2-2)
	46.277 (6-1)	66.064 (2-2)	78.091 (4-1)
	53.605 (1-2)	82.677 (5-1)	100.95 (5-1)
	55.506 (2-2)	84.282 (3-2)	100.33 (1-3)
	55.947 (7-1)	97.949 (1-3)	102.12 (3-2)
	58.818 (3-2)	103.02 (6-1)	121.86 (2-3)
150	21.066 (1-1)	21.707 (1-1)	22.040 (1-1)
	22.057 (2-1)	26.871 (2-1)	31.136 (2-1)
	23.931 (3-1)	36.759 (3-1)	45.143 (3-1)
	26.891 (4-1)	49.446 (4-1)	55.164 (1-2)
	31.046 (5-1)	54.352 (1-2)	60.974 (4-1)
	36.370 (6-1)	60.797 (2-2)	67.596 (2-2)
	42.745 (7-1)	63.587 (5-1)	78.091 (5-1)
	50.011 (8-1)	72.613 (3-2)	86.569 (3-2)
	53.381 (1-2)	78.749 (6-1)	96.263 (6-1)
	54.585 (2-2)	88.515 (4-2)	97.863 (1-3)
180	20.972 (1-1)	21.301 (1-1)	21.359 (1-1)
	21.640 (2-1)	24.579 (2-1)	27.263 (2-1)
	22.870 (3-1)	31.328 (3-1)	37.831 (3-1)
	24.789 (4-1)	40.772 (4-1)	50.259 (4-1)
	27.500 (5-1)	51.720 (5-1)	54.070 (1-2)
	31.046 (6-1)	53.761 (1-2)	62.403 (2-2)
	35.406 (7-1)	58.057 (2-2)	63.745 (5-1)
	40.513 (8-1)	63.587 (6-1)	76.666 (3-2)
	46.277 (9-1)	66.064 (3-2)	78.091 (6-1)
	52.602 (10-1)	76.160 (7-1)	93.169 (7-1)
210	20.916 (1-1)	21.074 (1-1)	21.007 (1-1)
	21.397 (2-1)	23.301 (2-1)	24.949 (2-1)
	22.265 (3-1)	28.027 (3-1)	32.964 (3-1)
	23.601 (4-1)	35.126 (4-1)	43.005 (4-1)
	25.480 (5-1)	43.783 (5-1)	53.448 (1-2)
	27.955 (6-1)	53.366 (6-1)	54.016 (5-1)
	31.046 (7-1)	53.413 (1-2)	59.292 (2-2)
	34.736 (8-1)	56.472 (2-2)	65.745 (6-1)
	38.983 (9-1)	62.162 (3-2)	70.061 (3-2)
	43.733 (10-1)	63.587 (7-1)	78.091 (7-1)
270	20.855 (1-1)	20.837 (1-1)	20.678 (1-1)
	21.139 (2-1)	22.040 (2-1)	22.630 (2-1)
	21.640 (3-1)	24.579 (3-1)	27.263 (3-1)
	22.389 (4-1)	28.711 (4-1)	34.012 (4-1)
	23.427 (5-1)	34.244 (5-1)	41.834 (5-1)
	24.789 (6-1)	40.772 (6-1)	50.259 (6-1)
	26.505 (7-1)	47.951 (7-1)	52.805 (1-2)
	28.589 (8-1)	53.039 (1-2)	56.049 (2-2)
	31.046 (9-1)	54.816 (2-2)	59.147 (7-1)
	33.866 (10-1)	55.588 (8-1)	62.403 (3-2)

1 次の振動数パラメータに与える幅厚比 B/h の影響を示している。ここで、境界条件は C-C, S-S, F-F の 3 種類を仮定し、 B/h は 5 から 100 まで変化させている。これより、 B/h が 2.0 より小さくなると、横せん断変形と回転慣性の影響が大きく現れてくる。また、境界辺の拘束が大きいほど、 B/h の影響が大きく現れてくる。

表-4 には、円弧辺が固定された扇形厚板の振動数パラメータ、 $n^* = \alpha B^2 \sqrt{\rho h/D}$ に与える半径比、中心角と幅厚比の影響が示してある。ここで、 ϕ は 30° から 90° 、 R_o/R_i は 1.5 から 4.0 にとり、 B/h は 5, 10, 20 と仮定している。

また、表-5、表-6、表-7 には、それぞれ B/h が 2.5, 5.0 と 10.0 に仮定した中心角の大きな扇形 Mindlin 板 (C-C) の振動数パラメータが示してある。ここで、中心角 ϕ は、 120° から 270° まで変化させ、また R_o/R_i は 2.0, 5.0, 10.0 である。表-6 には、比較のために、解析的手法を用いて求められた McGee らの結果¹⁰⁾ も示してあるが、両手法による値は、よく一致した結果を示している。また、大きな中心角を持つ扇形板では、円周方向の振動モードが卓越してくるが、半径比を 5 より大きくすると、高次モードに半径方向の振動モードが現れてくる。

4. あとがき

本文では、円周方向に Fourier 級数展開し、また半径方向に DQ 法を適用した半解析的な Differential Quadrature 法を提案し、半径方向の 2 辺が単純支持された扇形 Mindlin 板の振動解析への適用について検討を行った。本文で得られた主な結果をまとめると、以下のようになる。

1) 3 元連立微分方程式で与えられる扇形 Mindlin 板の自由振動方程式と与えられた境界条件は、DQ法を用いれば、容易に連立一次元方程式に置きかえられる。また、Mindlin 板理論で定式化される 3 つの境界条件が各境界辺で厳密に導入できる。

2) DQ法の数値安定性は、重み係数行列の計算法と離散点の設け方に関係する。Lagrange 多項式と不等分割を用いた DQ法を用いれば、扇形 Mindlin 板の振動数パラメータは、安定した収束性を示す。しかしながら、自由辺を含む問題では、収束性が悪くなるので、離散点の数をある程度大きくとる必要がある。

3) DQ法で求めた値は、他の解析解や数値解と比較して、幅厚比、半径比にかかわらず、よく一致した結果が得られている。

4) 扇形 Mindlin 板の振動数パラメータに与えるハードタイプの単純支持(式 14b)とソフトタイプの単純支持(式 14c)の相異は小さいが、ハードタイプの単純支持はソフトタイプの単純支持と比較して、 B/h に関係なく 1~3% 程度大きな値が示される。

5) DQ法を用いれば、従来あまり研究されていない大きな中心角を持つ扇形 Mindlin 板の振動解析ができる。大きな中心角を持つ扇形板では、円周方向の振動モードが卓越してくるが、半径比を 5 より大きくすると、高次モードに半径方向の振動モードが現れてくる。

今後、DQ法の基本式である重み係数行列はLagrange補間多項式から求めているが、DQ公式の数値安定性を高めるために、スプライン関数の適用について検討して行きたい。また、運動方程式の時刻歴積分法へのDQ法の適用や高階の微分方程式で与えられる偏心補剛板の構造解析へのDQ法の適用についても検討して行きたい。

最後に、数値計算には、大同工業大学情報処理センターを利用して頂きました。

参考文献

- 1) Kobayashi, H., Ishikawa, K. and Furuichi, T.: A survey of literature on bending, buckling and dynamics of sectorial plates. *Mem. Fac. Eng., Osaka City Univ.*, Vol. 33, pp. 115-136, 1992.
- 2) Xiang, Y., Liew, K.M. and Kitipornchai, S.: Transverse vibration of thick annular sector plates. *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 119, pp. 1579-1599, 1993.
- 3) Liew, R.M., Kitipornchai, S. and Xiang, Y.: Vibration of annular sector Mindlin plates with internal radial line and circumferential arc supports. *J. Sound and Vibr.*, Vol. 183, pp. 401-419, 1995.
- 4) Mizusawa, T., Kito, H. and Kajita, T.: Vibration of annular sector Mindlin plates by the spline strip method. *Comput. and Struct.*, Vol. 53, pp. 1205-1215, 1994.
- 5) 高木信治, 水澤富作: Spline Prism 法を用いた扇形厚板の三次元解析について, 構造工学論文集, Vol. 40A, pp. 1-12, 1994.
- 6) 水澤富作, 加藤秀一: Spline 要素法を用いた変厚扇形 Mindlin 板の振動解析について, 構造工学論文集, Vol. 45A, pp. 1-8, 1999.
- 7) Bapu Rao, M.N., Guruswamy, P. and Sampath Kumaran, K.S.: Finite element analysis of thick annular and sector plates. *International Journal of Nuclear Engineering and Design*, Vol. 41, pp. 247-255, 1977.
- 8) Guruswamy, P. and Yang, T.Y.: A sector element for dynamic analysis of thick plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 62, pp. 505-516, 1979.
- 9) Kobayashi, H., Sonoda, K. and Nishikawa, T.: Effect of shear deformation on dynamic response of curved bridge to moving loads. *Proc. Of Inter. Sympo. On Geomech., Bridges and Structures*, 1987.
- 10) McGee, O.G., Huang, C.S. and Leissa, A.W.: Comprehensive exact solutions for free vibrations of thick annular sectorial plates with simply supported radial edges. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 37, pp. 537-566, 1995.
- 11) Bellman, R.E. and Casti, J.: Differential quadrature and long-term integration. *J. Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, pp. 235-238, 1971.
- 12) Bert, C.W. and Malik, M.: Differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 49, pp. 1-28, 1996.
- 13) Shu, C. and Richards, B.E.: Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 15, pp. 791-798, 1992.
- 14) Quan, J.R. and Chang, C.T.: New insights in solving distributed system equations by the quadrature method-I Analysis. *Comp. Chemical Engng*, Vol. 13, pp. 779-788, 1989.
- 15) Bert, C.W., Jang, S.K. and Striz, A.G.: Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components. *AIAA J.*, Vol. 26, pp. 612-618, 1988.
- 16) Liew, K.M. and Ha, J.-B.: Bending solution for thick plates with quadrature boundary. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 124, pp. 9-17, 1998.
- 17) Striz, A.G., Chen, W. and Bert, C.W.: Static analysis of structures by the quadrature element method(QEM). *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 31, pp. 2807-2818, 1994.
- 18) Chen, W., Striz, A.G. and Bert, C.W.: Free vibration of high-accuracy plate elements by the quadrature element method. *J. Sound and Vibr.*, Vol. 202, pp. 689-702, 1977.
- 19) Mindlin, R.D.: Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 73, pp. 31-38, 1951.

(2000. 2. 4 受付)

VIBRATION OF ANNULAR SECTOR MINDLIN PLATES BY THE DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD

Tomisaku MIZUSAWA and Yae KONDO

The differential quadrature method(DQM) is a numerical method of which has been successfully employed in a variety of problems in engineering and physical sciences. The DQM is accomplished by expressing at each grid point, the calculus operator value of a function at any discrete point as the weighted linear sum of the values of the function at all the discrete points.

This paper presents an application of the semi-analytical differential quadrature method to analyze vibration of annular sector Mindlin plates with two opposite radial edges simply supported. The convergence and accuracy of the present method are demonstrated to be compared with those obtained by other numerical methods. Good accuracy is obtained. The effects of sector angles and simple supported models on the frequencies of annular sector Mindlin plates are analyzed for the different radii ratios and ratios of width to thickness.