

不飽和土の応力～ひずみ関係式

本田道識¹・飯塚敦²・河井克之³・軽部大蔵⁴

¹正会員 工博 (株)日建設計 土木事務所(〒541-8528 大阪市中央区高麗橋 4-6-2)

²正会員 工博 神戸大学助教授 工学部建設学科(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

³正会員 工修 神戸大学助手 工学部建設学科(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

⁴正会員 工博 神戸大学大学院教授 自然科学研究科(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

本論文は不飽和粘性土の応力～ひずみ関係式を提案している。Jenningsら¹⁾が Bishop²⁾の有効応力式の適用限界を実験的に明らかにして以来、不飽和土に対してはサクシジョンの作用を独立に取り扱うことで定式化した構成モデルを用いて力学挙動を表現する試みがおこなわれている。本稿においては土塊内の間隙水分分布状態を反映させた応力成分を用いて力学挙動を表現しているモデルに対して塑性降伏条件と硬化パラメータに新たな概念を適用し、関連流動則にもとづいた応力～ひずみ関係式を定式化している。計算結果と三軸試験結果との比較は良い一致を示している。

Key Words: *unsaturated soil, constitutive equation, triaxial test*

1. まえがき

Terzaghi の有効応力原理をベースに Roscoe ら³⁾が飽和粘性土の構成式である Original Cam Clay Model を発表して 35 年以上が経過している。その後コンピュータの発達とともに有限要素法への適用が盛んに行われ、現在では実際の設計施工に頻繁に活用されている。

一方、不飽和粘性土に対しては、Bishop ら²⁾がサクシジョンを制御した三軸圧縮試験を行い、その破壊応力をもとに次の有効応力式を提案した。

$$\sigma' = \sigma - u_a + \chi(u_a - u_w) \quad (1.1)$$

ここに、 σ' :有効応力、 σ :全応力、 u_a :間隙空気圧、

u_w :間隙水圧、 χ :0~1 の値をとるパラメータ

Bishop らの研究は土塊内の間隙空気と間隙水の圧力差であるサクシジョンが不飽和土の力学挙動を支配する応力成分の一つであることを実験的に証明した点で画期的であった。しかしながら、Jennings ら¹⁾が直ちに指摘したように不飽和土はサクシジョンの増加過程のみならず減少過程にも塑性体積ひずみを生じる可能性を含んでおり、式(1.1)の有効応力式はこれに対応できない。その原因はサクシジョンが飽和土の構成モデルで用いられている有効応力とは異なる作用を土骨格構造に及ぼしているためであり、不飽和土の力学挙動を理論的に予測するためにはサクシジョンの作用を独立に取り扱った理論の枠

組みが必要とされる(軽部⁴⁾、Alonso ら⁵⁾、向後⁶⁾)。

本論文では土塊内の間隙水分分布状態に着目して不飽和土の挙動を表現している構成式^{7)~9)}に対して、応力～ひずみ関係式の誘導過程に新たな概念を導入し、関連流動則にもとづいた構成式を定式化している。得られた式による計算結果は実験結果とよい一致を示している。

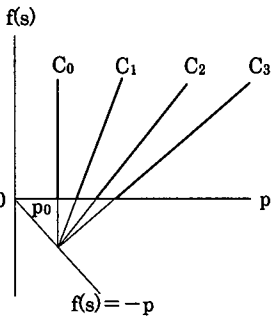
2. 既往の研究

軽部はダイレイタンス補正を行った三軸試験結果の破壊線から得られるp軸切片値をサクシジョン応力 $f(s)$ と定義し、これを土の骨格剛性を高める成分と解釈した。そして飽和土の $e \sim \log p$ 関係式の微分形に対して $f(s)$ を組み込むことで不飽和土の骨格剛性式を定義し(式(2.1))、その積分形から $p \sim f(s)$ 平面内における降伏線群の関数形を定式化した⁴⁾。得られた降伏線群によってサクシジョン低下によるコラプス現象が $f(s)$ の低下に伴う降伏線の拡大として表現される。

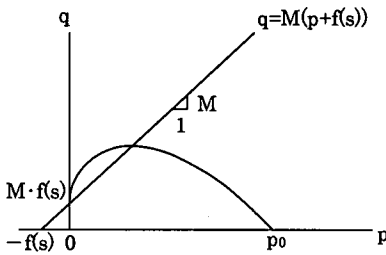
$$\frac{de}{dp} = \frac{0.434Cc}{p + f(s)} \quad (2.1)$$

ここに、 Cc :圧縮指数、 $f(s)$:サクシジョン応力

さらに Original Cam Clay Model のエネルギー釣合式



(a) $p \sim f(s)$ 平面の降伏線群
但し $C_i = \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} (e_v^p)_i$



(b) $p \sim q$ 平面の負荷曲面
図-1 軽部の降伏線群

のエネルギー消散項に $f(s)$ を組み込むことで $p \sim q$ 平面内での負荷曲面を得ており、締め固めカオリンを用いたストレスプローブ試験結果からその形状を検証した¹⁰⁾。

Alonso ら⁵⁾ はサクシジョンの関数として定義した圧縮指数を用いて任意のサクシジョンにおける $e \sim \log p$ 関係を定式化し、これをサクシジョンゼロにおける $e \sim \log p$ 関係式と結びつけることによって $p \sim s$ 平面内における降伏線 (LC 降伏線) の関数形を定式化した。サクシジョン低下による塑性体積ひずみは LC 降伏線の拡大で表現される。また、LC 降伏線とは別に p 軸と平行な降伏線 (SI 降伏線) を設定することで、サクシジョン増加時の塑性ひずみを表現した。そして $p \sim q$ 平面内においては破壊線の p 軸切片から得られる応力成分 p_s をサクシジョンの関数として定義し、修正 Cam Clay Model の p に加算して取り扱うことで降伏曲面を得た。

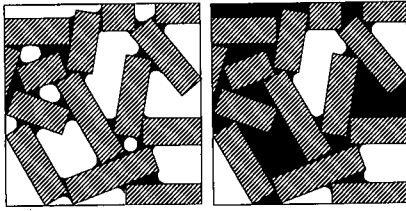
向後ら¹²⁾ は土塊内の水分の保持形態に着目し、サクシジョンの関数で定義した等価間隙圧を用いて不飽和土の有効応力を定義した。この有効応力を修正 Cam Clay Model に適用して降伏線を得ており、圧密過程に対しては Matyas and Radhakrishna¹¹⁾ が行った実験結果から状態面を $e \sim p \sim s^*$ (有効サクシジョン) 空間内に定義することで体積圧縮挙動を表現した。このモデルにおいてはサクシジョン増加に伴うひずみが有効応力の増加 (等価間隙圧の低下) に伴う圧縮挙動として表現されており、SI 降

伏線の定義が不明瞭な Alonso のモデルより予測能力は高い。

これら3者の構成モデルの比較において特徴づけられることは、サクシジョンによって発揮される応力成分の取り扱い方である。軽部らのモデルでは三軸試験結果における破壊線の p 軸切片値 $f(s)$ を土の骨格剛性を高める応力成分と解釈し、圧密時の骨格剛性式とエネルギー式の消散項に組み込むことで力学挙動を表現しているが、Alonso らと向後らのモデルではそれぞれ p_s と等価間隙圧を飽和土の構成式における有効応力に加算して取り扱い、圧密時に対しては圧縮指数をサクシジョンの関数として別途定式化することで不飽和土の力学挙動を表現している。3者のモデルは全てサクシジョンの値をせん断強度への寄与する応力成分 ($f(s)$, p_s , 等価間隙圧) に換算するためのパラメータを必要とするが、Alonso らと向後らのモデルはさらにサクシジョンの影響を圧縮指数もしくは状態面の形状に反映させるためのパラメータを必要とする。そのため実務に適用する際のパラメータ設定に多くの労力を要することとなるがサクシジョン増加時の圧縮ひずみを表現できる点でこの段階の軽部らの構成式より適用範囲が広い。

その後軽部らは不飽和供試体内の間隙水分分布状態を考察し、土粒子接点をとりまくメニスカス水が存在する部分と土粒子骨格間の隙間を埋めるバルク水が存在する部分とではサクシジョンの力学的作用が異なることに着目した (図-2(a),(b))¹³⁾。サクシジョンが増加した場合、図-2(a)のようなメニスカス水が存在する部分では粒子接点の接平面方向に対して垂直に力が作用するため骨格剛性が高められるが、(b)のようなバルク水が存在する部分では土粒子骨格を圧縮するように力が作用し、骨格剛性を高めると同時に粒子接点に局部せん断力を発生させるため、粒子間すべりが生じる可能性を含む。逆にサクシジョンが低下した場合、図-2(a)のような間隙水分分布状態では粒子接点のすべり抵抗成分が減少するため粒子間すべりが生じて非可逆ひずみが発生する可能性を含むが、(b)のような分布状態では骨格をゆるめるように力が作用するため粒子間すべりは生じない。

通常の不飽和土塊内においてはこれら2種類の分布状態が混在しているが、飽和状態で間隙水が全てバルク水の状態で存在し、サクシジョンの増加に伴って大きい空隙から徐々に空気が侵入してゆくことを考えれば、水分特性曲線の脱水過程のように飽和度が高い場合にバルク水が多く存在し、吸水過程のように飽和度が低い場合にメニスカス水が多く存在しているものと想定される。これまでの多くの実験において、スラリーから作成した供試体のように飽和度が高い状態でサクシジョン増加に伴う塑性圧縮が生じやすく、乾燥側の締め固め供試体のように飽和度が低い状態でサクシジョン低下に伴う塑性圧縮が



(a) メニスカス水 (b) バルク水
図-2 間隙水分布状態¹³⁾

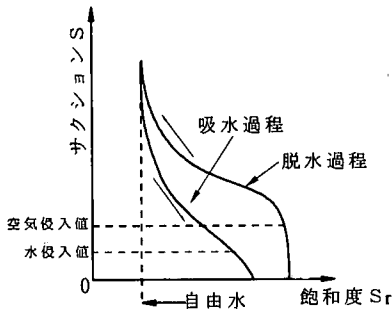


図-3 水分特性曲線の概念図

生じやすい結果が得られていることに着目すれば、このような挙動の違いは間隙水分布状態の違いによるものと解釈できる。そこでメニスカス水の部分で発揮される応力成分をメニスカス応力 p_m 、バルク水の部分で発揮される応力成分をバルク応力 p_b と定義し、 p_m にこれまで用いられてきた $f(s)$ と同様の骨格剛性を高める役割を与え、 p_b を飽和土における有効応力と同様に取り扱うことで理論の枠組みを再構築した。これにより従来通りサクシオン低下による塑性ひずみが p_m 低下に伴う降伏面の拡大で表現され、これに加えて、サクシオン増加による塑性ひずみが p_b の増加で表現される。

そして文献7)においてこれら2種類の応力成分を最乾燥水分線の概念を用いてサクシオンと飽和度の関数として定義しており、圧密過程⁸⁾およびせん断過程⁹⁾への適用を試みている。なお、せん断強度に寄与する応力成分には p_s がバルク応力 p_b とメニスカス応力 p_m の和で定義されており、サクシオンと飽和度の関数として表現されている。水分特性曲線から明らかなようにサクシオンと飽和度の関係はヒステリシスを示すため1対1でなく、あるサクシオンの値に対して飽和度は唯一定まらない。そのために加藤・本田¹⁴⁾が指摘しているように、ダイレイタンスの影響を取り除いたせん断強度においては飽和度が異なればサクシオンの値が同じであっても差が表れる。

このことは、Bishop の有効応力式におけるパラメータ α をサクシオンの作用する水断面積比と解釈した Skempton¹⁵⁾の説明を考慮した上で、Bishop らをはじめとする多くの三軸試験結果において飽和度との関係がサクシオンの値とは独立にほぼ1本の曲線で表現されていることに着目すれば容易に理解することができる。

Alonso らと向後のモデルにおいては破壊強度を表現するために用いられる応力成分 (p_s 及び等価間隙圧) がサクシオンのみの関数として定義されているが、水分特性曲線のヒステリシスの影響を応力成分の関数形に反映させない限り力学挙動の予測能力に限界を含むことになる。

本論文では土塊内の間隙水分布の違いによって生じる力学的挙動への影響に着目することで理論を構築している軽部の概念を用いて、応力～ひずみ関係式を導く際の塑性降伏条件および硬化パラメータに新たな概念を導入し、関連流動則にもとづいた応力～ひずみ関係式を提案している。また、これまで軸対称条件に限って展開されてきた議論を一般応力条件へ展開しており、得られた応力～ひずみ関係式を用いた計算結果と三軸試験結果との比較を試みている。

3. 不飽和土の構成式

(1) 塑性ポテンシャル関数および降伏関数

軽部⁷⁾によるエネルギー釣合式は次式で与えられる。

$$p' d\epsilon_v^p + q d\epsilon_s = M(p' + p_m) d\epsilon_s \quad (3.1)$$

ここに、 $p' = p + p_b$ 、 $p = p_T - u_a$ 、 p_b : バルク応力、

p_T : 全応力表示の平均主応力、

u_a : 間隙空気圧、

q : 偏差応力(軸対称条件においては $\sigma_1 - \sigma_3$)、

$d\epsilon_v^p$: 塑性体積ひずみ増分、

$d\epsilon_s$: せん断ひずみ増分

$$(\text{軸対称条件では } = (2/3)(d\epsilon_1 - d\epsilon_3)),$$

p_m : メニスカス応力、

M : 限界状態におけるせん断抵抗係数

式(3.1)に対して $p' \sim q$ 平面上で直交則(式(3.2))を適用し、 p_m 一定で積分することで塑性ポテンシャル関数が式(3.3)のように得られる。

$$\frac{dq}{dp'} \frac{d\epsilon_s^p}{d\epsilon_v^p} = -1 \quad (3.2)$$

$$g = \frac{1}{M} \eta' + \ln \frac{p'}{p_0'} = 0 \quad (3.3)$$

ここに、 $\eta' = (q - Mp_m) / p'$ 、

p_0' : $p_m = 0$ の状態での初期降伏応力

さらに関連流動則を適用することで降伏関数が得られる(式(3.4))。なお積分条件には粒子間力ベクトルにおけるメニスカス力の影響を考慮し($p', q = (p_0', Mp_m)$)を用いている。

$$f = \left(\frac{1}{M} \eta' + \ln \frac{p'}{p_0'} \right) - h = 0 \quad (3.4)$$

ここに、 h :硬化パラメータ

降伏関数の拡大を塑性ひずみに変換する硬化パラメータは、式(2.1)の骨格剛性式の積分形と本質的に等価な式(3.5)を $\eta' = 0$ (一定)の時の塑性体積ひずみ式に用いて式(3.6)で定義する。なお式(3.5)には関数 $f(s)$ のかわりにメニスカス応力 p_m が用いられているが、前述したように p_m は $f(s)$ と等価な応力成分である。式(3.5)においても同様に、土の骨格剛性を高めて圧縮量を低減するように作用する。

$$\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \frac{p' + \alpha p_m}{p_0' + \alpha p_m} \quad (3.5)$$

ここに、 λ, κ : 自然対数表示の圧縮指数, 膨潤指数

e_0 : 塑性体積ひずみゼロにおける間隙比,

α : p_m による圧縮量抑制効果を表現する

パラメータ ($0 \leq \alpha \leq 1$)

$$h = \ln \frac{p'}{p_0'} = \ln \left\{ \left(1 + \frac{\alpha p_m}{p_0'} \right) \cdot \exp \left(\frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} \varepsilon_v^p \right) - \frac{\alpha p_m}{p_0'} \right\} \quad (3.6)$$

なお、式(3.5)におけるパラメータ α は向後ら¹²⁾が紹介しているMaswosweの実験結果¹⁶⁾, Suriolら¹⁷⁾, 加藤¹⁸⁾等の実験結果において、ある応力増分に対する圧縮量がある応力をこえると飽和土より不飽和土の方が大きくなる傾向が見られているため、これを p_m による圧縮量抑制効果の違いと解釈して導入している。式(3.6)を式(3.4)に代入して ε_v^p に関して解くと次式が得られる。

$$\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \frac{p' \exp(\eta' / M) + \alpha p_m}{p_0' + \alpha p_m} \quad (3.7)$$

図-4に $p' \sim q \sim p_m$ 空間における降伏曲面を示す。

(2) 塑性降伏条件

不飽和土が塑性降伏に至る応力条件について、2球モデルを用いて考察する。図-5(a)は粒子間滑りを生じる直前の粒子間力ベクトルの状態を示しており、接平面法線方向に対する角度は ϕ_μ である。このときの応力状態を図-4の応力空間における $p_m = 0$ (飽和状態)の塑性降伏点と考える(点A)。ここで外力条件一定(p', q 一定)でメニスカス応力 p_m が増加した状態(点B)の粒子間力ベクトルを考察すると、メニスカスによって生じる圧縮力が、接平面の法線方向に作用するため合力ベクトルは滑りを生じさせる摩擦角 ϕ_μ より小さくなる(図-5(b))。ここで供試体にせん断力が与えられた場合の土の塑性変形メカニズムを粒子間力ベクトルの方向変化(ϕ の増大)による粒子間すべりと考え、圧密時に対しては圧縮力増加による土粒子自身の弾性変形で接平面が傾く(結果として ϕ が増大することによる粒子間すべりと考えると不飽和土の降伏関数を得るためには粒子間力ベクトルの傾きが ϕ_μ に至るために必要な $\Delta p'$ もしくは Δq を仮定する必要がある(図-5(c)(d)参照)。式(3.4)においては粒子間力ベクトルの傾きを ϕ_μ に至らせるせん断応力として $q = Mp_m$ を仮定し、これを降伏条件としている。

以上の議論は理想化された状態におけるものであるが、土の変形メカニズムを2球モデルを用いて解釈することは過去より何度もおこなわれてきており(例えば文献19))、せん断時の粒子接点角の変化に着目してストレスダイレイタンスー関係式を導出する試み(例えば文献20))や粒子間力ベクトルの方向変化だけでは説明しきれない圧密過程に対して、土粒子の弾性変形を考慮してメカニズムを解釈する試み²¹⁾等が例として挙げられる。今回用いた仮定の妥当性は実験結果と解析結果との比較を通じて後に確認する。

(3) 応力~ひずみ関係式

式(3.4)で定義した降伏関数から一般応力状態における応力~ひずみ式を導出する。

全ひずみ増分は塑性ひずみ増分と弾性ひずみ増分の和で与える。

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (3.8)$$

弾性ひずみ増分に関しては次式で定義する。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{\kappa}{3(1 + e_0)} \frac{1}{p' + \alpha p_m} \left\{ \dot{p}' \delta_{ij} + 9(1 + 2\nu)(1 + \nu) \dot{s}_{ij} \right\} \quad (3.9)$$

ここに、 ν : ポアソン比, $s_{ij} = \sigma_{ij}' - p' \delta_{ij}$

$\sigma_{ij}' = \sigma_{ij}^T - u_a \delta_{ij} + p_b \delta_{ij}$: 骨格応力テンソル

σ_{ij}^T : 全応力テンソル, δ_{ij} : クロネッカーデルタ

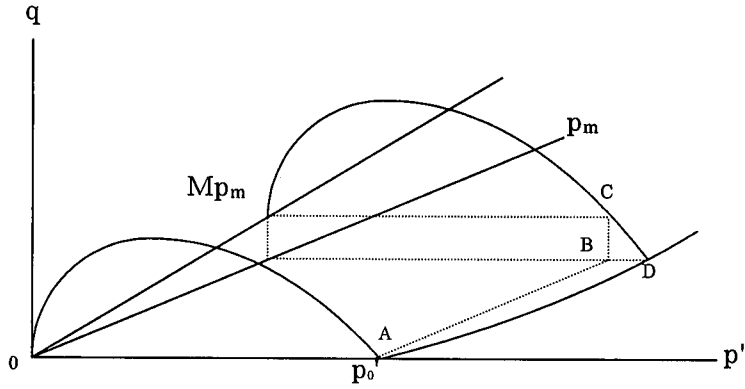


図-4 降伏曲面 ($\varepsilon_v^p = 0$)

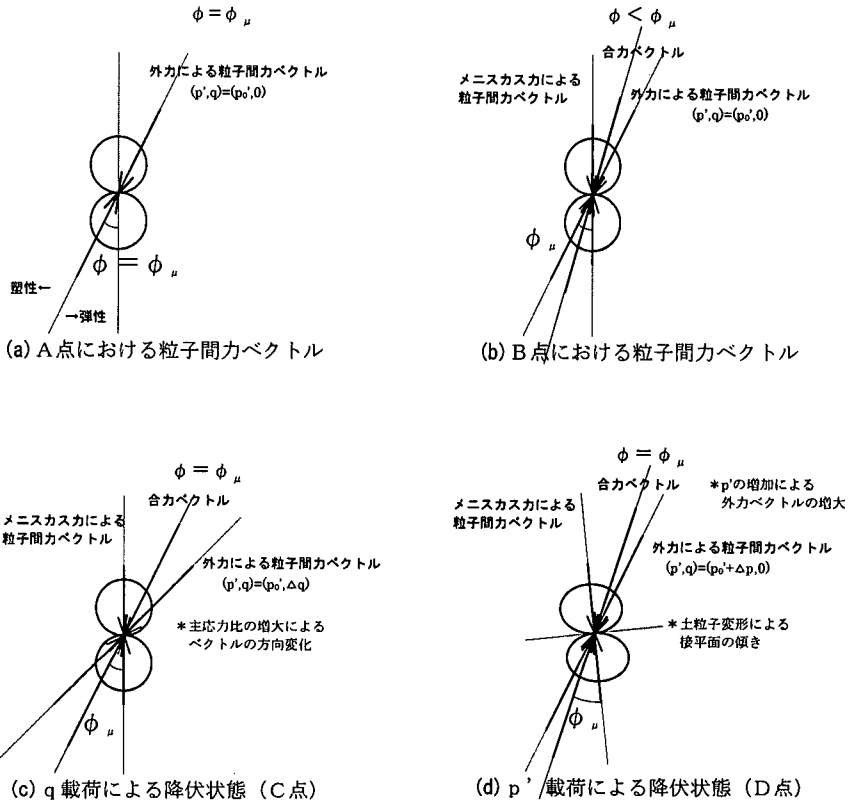


図-5 粒子間力ベクトルの概念図
(ϕ_μ : 粒子間滑りが生じる摩擦角)

塑性ひずみ増分は次の関連流動則で与える。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\Lambda > 0) \quad (3.10)$$

ここで Λ は非負の係数であるが以下の負荷条件式からその量を定義する。

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial p_m} \dot{p}_m + \frac{\partial f}{\partial h} \dot{h} = 0 \quad (3.11)$$

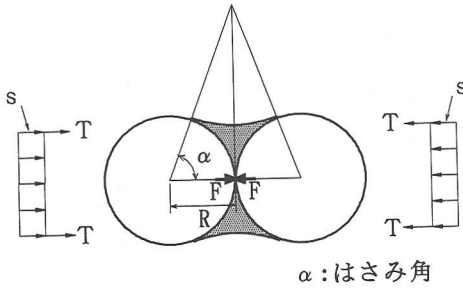


図-6 2球粒子モデル

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial \varepsilon_v^p}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \frac{\partial h}{\partial p_m} \dot{p}_m = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial \varepsilon_v^p}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} + \frac{\partial h}{\partial p_m} \dot{p}_m$$

であることから Λ は次式で得られる.

$$\Lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} \dot{\sigma}_{ij}'}{H} + \left(\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial h}{\partial p_m} \right) \dot{p}_m \quad (3.12)$$

ここに、 H : 塑性係数 $\left(= \frac{\partial f}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial \varepsilon_v^p}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} \right)$

塑性ひずみ増分～応力増分関係は次式で与えられる.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \frac{\left\{ \frac{1}{3}(M - \eta') \delta_{ij} + \frac{3s_{ij}}{2q} \right\} \left\{ \frac{1}{3}(M - \eta') \delta_{kl} + \frac{3s_{kl}}{2q} \right\} \dot{\sigma}_{kl}}{Mp'(M - \eta') \left\{ 1 + \frac{\alpha p_m / p'}{\exp(\eta' / M)} \right\}} - \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \frac{M \left\{ 1 + \frac{\alpha p'}{p_0' + \alpha p_m} \left(1 - \frac{p_0' / p'}{\exp(\eta' / M)} \right) \right\}}{(M - \eta') \left\{ 1 + \frac{\alpha p_m / p'}{\exp(\eta' / M)} \right\}} \dot{p}_m \quad (3.13)$$

ここに、 $q = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} s_{ij} s_{ij}$

4. サクシオン応力の定量化

これまで導出した構成モデルを用いて解析を行う場合、飽和土の Cam Clay Model で用いられるパラメータに加えてバルク応力とメニスカス応力を定量化するパラメータが必要となる. 軽部ら⁷⁾によりバルク応力 p_b とメニスカス応力 p_m は次の式(4.1)(4.2)で定義されており、飽和度とサクシオンおよび最乾燥水分線($s \sim S_{rd}$)を定式化することで算出される.

$$p_b = \frac{S_r - S_{rd}}{100 - S_{rd}} \times s \quad (4.1)$$

$$p_m = \frac{(100 - S_r)(S_{rd} - S_{r0})}{(100 - S_{r0})(100 - S_{rd})} \times s \quad (4.2)$$

ここに、 $s = u_a - u_w$: サクシオン

u_w : 間隙水圧, S_r : 飽和度,

S_{rd} : 最乾燥水分線の飽和度,

S_{r0} : 吸着水が占める飽和度

最乾燥水分線は土塊内の自由水がすべてメニスカス水で存在する状態のサクシオン～飽和度関係を表現する曲線であるが、本論文では飽和度が最乾燥水分線にあるとき($S_r = S_{rd}$)のメニスカス応力 p_m が2球粒子モデルから算出される粒子間力に比例することを仮定して式(4.3)から最乾燥水分線を導いた²²⁾.

$$p_m = \frac{S_{rd} - S_{r0}}{100 - S_{r0}} s = \frac{F}{\pi R^2} \beta \quad (4.3)$$

ここに、 F : 粒子接点に働く圧縮力

R : 粒子半径 (mm)

β : 土粒子骨格構造に依存する比例定数

2球粒子モデルの粒子間力には次式を用いた²¹⁾.

$$\frac{F}{\pi R^2} = \frac{T}{R} \left\{ 2 + \frac{3T}{2Rs} - \sqrt{\left(\frac{3T}{2Rs} \right)^2 + \frac{2T}{Rs}} \right\} \quad (4.4)$$

ここに、 T : 表面張力 (N/m)

式(4.3)に式(4.4)を代入して S_{rd} に関して解くことで最乾燥水分線の関数形が式(4.5)で得られる.

$$S_{rd} = \frac{100 - S_{r0}}{s} \frac{T}{R} \beta \left\{ 2 + \frac{3T}{2Rs} - \sqrt{\left(\frac{3T}{2Rs} \right)^2 + \frac{2T}{Rs}} \right\} + S_{r0} \quad (4.5)$$

ところで、サクシオンが水侵入値以下に低下した場合、多くの土粒子接点において隣り合うメニスカス水同士の間がなくなり、バルク水に変わってゆくが、式(4.5)の最乾燥水分線はそれを表現できない. そこで水侵入値以下に対しては式(4.5)から水侵入値において滑らかに移行するようにパラメータを設定した2次曲線(式(4.6))を用いることとした.

$$S_{rd} = (As^2 + Bs)(100 - S_{r0})\beta + S_{r0} \quad (4.6)$$

ここに、 $A = \left(\frac{1}{s_w} \right)^4 \left(\frac{T}{R} \right)^2 \left\{ -3 \cdot \left(k - \sqrt{k} - \frac{3}{4} \right) + 2s_w \frac{R}{T} \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{k}} \right] \right\}$

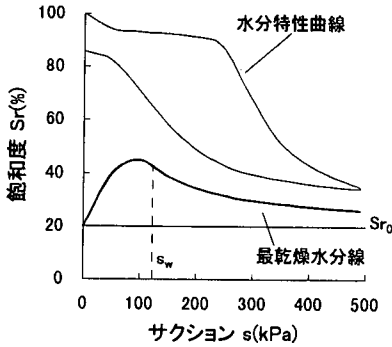


図-7 最乾燥水分線の計算例

$$B = \left(\frac{1}{s_w} \right)^3 \left(\frac{T}{R} \right)^2 \left\{ 4 \cdot \left(k - \sqrt{k} - \frac{3}{4} \right) - 2s_w \frac{R}{T} \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{k}} \right] \right\}$$

$$k = 2s_w \frac{R}{T} + \frac{9}{4}$$

s_w : 水分特性曲線における水侵入値

なお、比例定数 β に関しては土塊の任意断面積あたりに存在する土粒子部分の面積の割合で定義する。

$$\beta = \frac{A_s}{A_s + A_v} = \frac{1}{1 + e} \quad (4.7)$$

ここに、 A_s : 土粒子部分の断面積

A_v : 空隙部分の断面積

e : 間隙比 (文献²³⁾より $e = A_v/A_s$)

図-7 に最乾燥水分線の計算例を示す。

5. 実験結果との比較

以上に提案した理論式の計算結果と実験結果との比較を行う。ただし、今回比較に用いた実験の試料はせん断中に正のダイレイタンスを生じていることから、軽部らの提案式⁹⁾を参考にして式(5.1)を硬化パラメータ h の微分形に用いた。塑性係数 H は式(5.2)で与えられる。

$$\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}^p} = \left(\frac{M' - M}{M - \eta'} \frac{\langle \dot{\eta}' \rangle}{\dot{\eta}'} + 1 \right) \frac{\partial h_0}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \quad (5.1)$$

ここに、 M' : 破壊時におけるせん断抵抗係数

h_0 : 式(3.6)で与えられる硬化パラメータ

$$\langle \dot{\eta}' \rangle = \begin{cases} \dot{\eta}' \leq 0 \text{ のとき } 0 \\ \dot{\eta}' > 0 \text{ のとき } \dot{\eta}' \end{cases}$$

$$\text{但し } \eta' = (q - Mp_m) / p'$$

表-1 入力パラメータ

パラメータ	決定値	備考
λ	0.0459	圧密試験から決定
κ	0.0093	圧密試験から決定
M	1.333	せん断試験から決定
M'	図-8中に表記	せん断試験から決定
$S_{r0}(\%)$	$= G_s \cdot w_0 / e$	各状態の間隙比より決定
$w_0(\%)$	7.9	水分特性曲線より決定
$G_s(\text{g/cm}^3)$	2.7	比重試験から決定
$s_w(\text{kPa})$	122.5	水分特性曲線より決定
$R(\text{mm})$	0.0035	D_{50} の1/2
$T(\text{N/m})$	0.075	水の表面張力

表-2 せん断中の飽和度

	図-8(a)	図-8(b)
せん断開始時	47.0	40.0
体積最小点	47.1	40.4
ピーク時	44.4	38.1

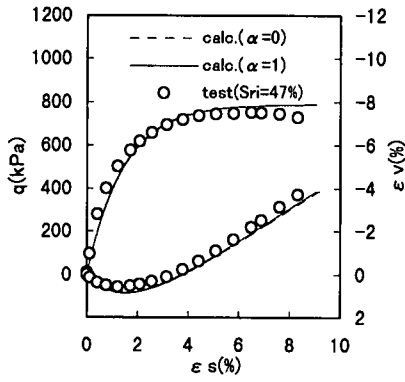
(単位: %)

$$H = - \left(\frac{M' - M}{M - \eta'} \frac{\langle \dot{\eta}' \rangle}{\dot{\eta}'} + 1 \right) \frac{\partial f}{\partial h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} \quad (5.2)$$

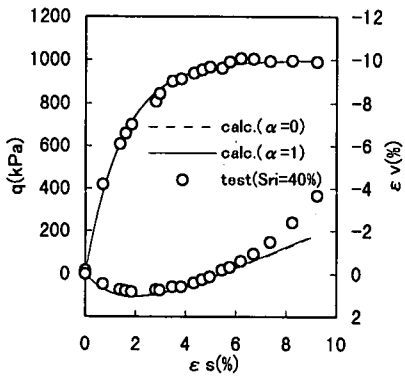
(1) せん断試験

試料は市販の No.5 クレイ ($w_L = 43.0\%$, $I_p = 13.4$) であり、飽和スラリーから圧密したブロックサンプルを切り出して供試体を作成した。供試体にサクシオンを与えて不飽和化し、サクシオン及び平均主応力 p を一定に保って三軸圧縮試験を行った⁹⁾。

解析に用いたパラメータを表-1に示す。なお、表-2には飽和度を示しているが、その変化が僅かであることから、バルク応力 p_b とメニスカス応力 p_m の計算にはせん断開始時の飽和度を用いている。実験結果と解析結果の比較を図-8に示す。図-8(a)と(b)はせん断中の平均主応力 p が異なっているが、実験結果をほぼ表現出来ている。また、今回のケースにおいてはパラメータ α の影響はほとんど生じていない。なお、 M' はせん断試験におけるピーク強度から決定されるパラメータであるが図-9に示すように拘束圧に相当する p' とメニスカス応力 p_m に依存する傾向が見られる。初期値境界値問題への適用を想定した場合、今回解析対象としたような拘束圧と p_m がほぼ一定の条件とは異なり、応力が様々な値に変化するため、拘束圧とメニスカス応力の影響を反映させたパラメータ設定が必要とされる。現段階においては何種類かの p' と p_m に対して試験を行った上で M' の特性を把握するしか方法が無いが図-9の結果から M' を定量化する方法の一つとして以下の関数形が考えられる。



(a) $p=294\text{kPa}, s=294\text{kPa}$
 $(M'=2.100, e_0=0.870, p_b=73\text{kPa}, p_m=15\text{kPa})$



(b) $p=490\text{kPa}, s=294\text{kPa}$
 $(M'=1.828, e_0=0.864, p_b=43\text{kPa}, p_m=17\text{kPa})$

図-8 セン断試験の計算結果

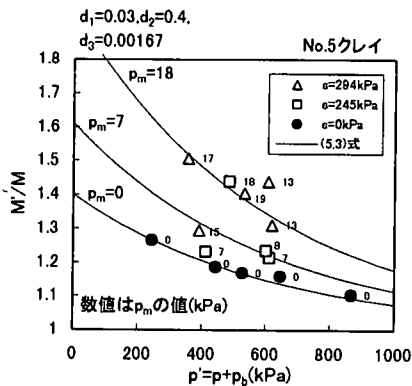


図-9 拘束圧と p_m が M' に与える影響
 (文献9) の三軸試験結果に式(5.3)の計算結果を加えて再整理

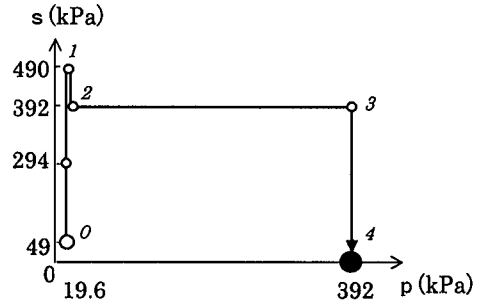
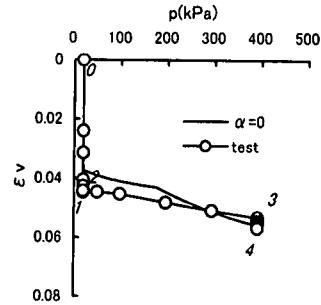
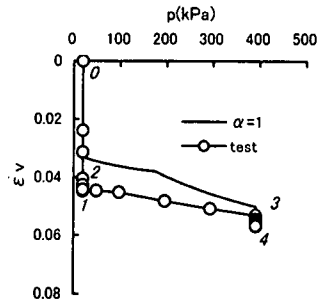


図-10 圧密試験の応力経路



(a) $\alpha=0$



(b) $\alpha=1$

図-11 圧密試験の計算結果 ($e_0=0.997$)

$$\frac{M'}{M} = \frac{d_1(p_m/p_a) + d_2}{\exp\{d_3(p'/p_a)\}} + 1 \quad (5.3)$$

ここに、 d_1, d_2, d_3 : 実験定数、 p_a : 1kPa (単位応力)

(2) サクション変化を含む圧密試験

(1)と同じ飽和供試体にサクション履歴を与えた後、拘束圧を与えてサクションを除荷する試験²⁴⁾を解析した。試験の応力経路を図-10に示す。バルク応力 p_b とメニスカス応力 p_m の計算には各応力段階の飽和度の値を用いている。なお、吸着水が占める飽和度分 S_0 は吸着水の質量が試験中一定と仮定して、試験の各段階において計算した。実験結果との比較を図-11(a)(b)に示す。当初飽和している供試体にサクションを作用させると塑性

圧縮挙動が起こっており(0→1), 逆に不飽和化が進んだ状態ではサクシオンをゆるめると僅かであるが圧縮が起こっている(3→4). このような挙動の違いは供試体内の間隙水分布の違いによって生じると考えられるが計算結果は実験結果をほぼ表現できている.

6. 結論

不飽和土塊内の間隙水によって発揮される2種類の応力成分(バルク応力 p_b とメニスカス応力 p_m)を用いて, 関連流動則による不飽和土の弾塑性構成モデルを導いた. 理論の枠組みは Original Cam Clay Model のエネルギー釣合式と圧密過程の骨格剛性式にバルク応力 p_b とメニスカス応力 p_m を組み込むことで構成されており, これらの応力成分は各状態におけるサクシオンと飽和度の値と最乾燥水分線の関数形を与えることで定量化される. 本論文においては三軸試験機を用いたせん断試験とサクシオン変化を含む圧密試験の結果に対して解析を行ったが両者は良い一致を示した.

今後の課題としては飽和度変化の予測手法の確立が挙げられる. これまで土の飽和度変化の予測には水分特性曲線が用いられており, サクシオンの関数として定式化されている. 今回引用したせん断試験結果では飽和度変化は僅かであったが, 飽和度が高い場合においてはサクシオンを一定に保っていても飽和度が大きく変化する場合がある(例えば文献9)). この原因として土骨格構造の変化が挙げられるが, 今後はサクシオンの値のみでなく土骨格構造の変化も視野に入れた水分特性曲線の定式化が望まれる.

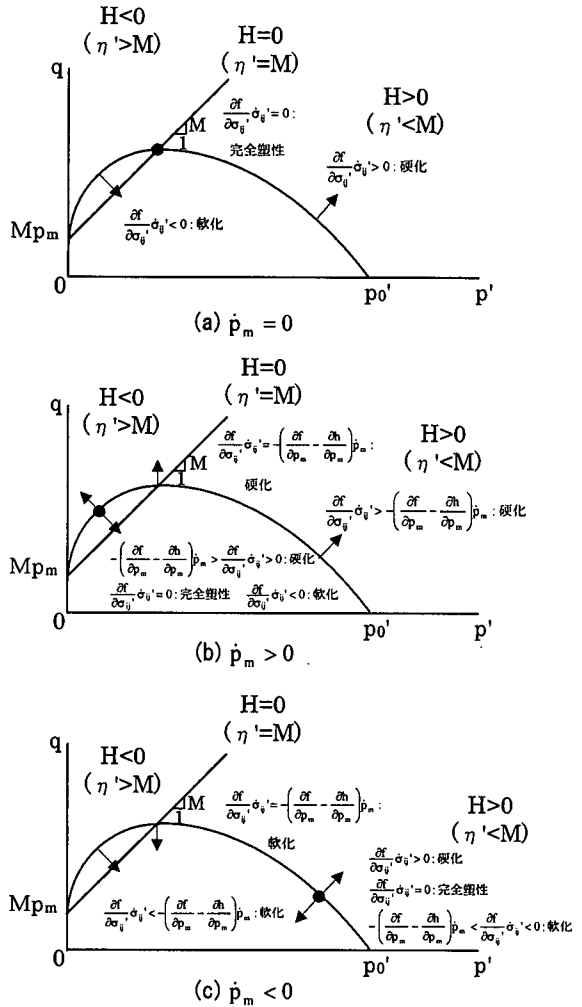
謝辞: 有益なご意見を頂きました神戸大学加藤正司助教授に末尾ながら謝意を表します.

付録-1 構成式の負荷条件

構成モデルの負荷条件について考察する. 定義により塑性ひずみが発生する条件($\dot{\epsilon}^p \neq 0$)は $\Lambda > 0$ であり, 橋口²⁵⁾にならって以下の分類により負荷条件をまとめる.

- $\dot{\sigma}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p > 0$ 硬化
- $\dot{\sigma}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0$ 完全塑性
- $\dot{\sigma}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p < 0$ 軟化

式(3.10)(3.12)より



付図-1.1 負荷条件(式(3.12))

※図中の矢印は降伏曲面の拡大, 縮小を表し, ●は降伏曲面の大きさが変化しない状態を表す.

$$\dot{\sigma}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^p} \dot{\sigma}_{ij}^p + \left(\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial h}{\partial p_m} \right) \dot{p}_m \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^p} \dot{\sigma}_{ij}^p \text{ であること, 式}$$

(3.5)(3.6)より

$$\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial h}{\partial p_m} = -\frac{1}{p'} - \frac{\alpha}{p_0' + (1 + \alpha)p_m} \left(1 - \frac{p_0'}{p' \exp(\eta'/M)} \right) < 0 \text{ であること}$$

から上述の条件は以下のようにまとめられる.

a) $H > 0$

$$\left(\text{塑性ひずみが発生する条件は } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^p} \dot{\sigma}_{ij}^p + \left(\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial h}{\partial p_m} \right) \dot{p}_m > 0 \right)$$

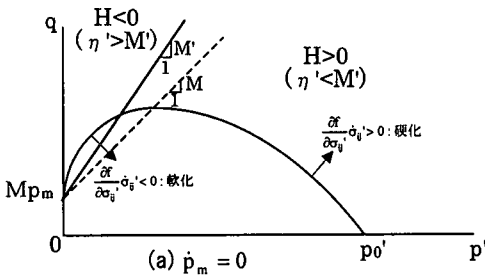
• 硬化

$$\dot{p}_m > 0 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^p} \dot{\sigma}_{ij}^p > - \left(\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial h}{\partial p_m} \right) \dot{p}_m$$

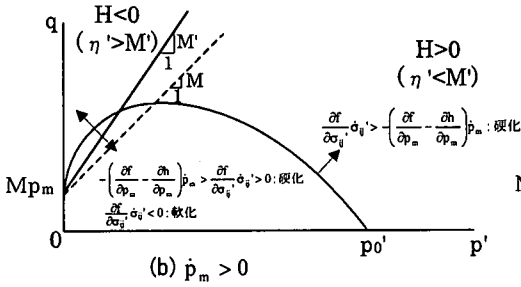
$$\dot{p}_m \leq 0 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^p} \dot{\sigma}_{ij}^p > 0$$

• 完全塑性

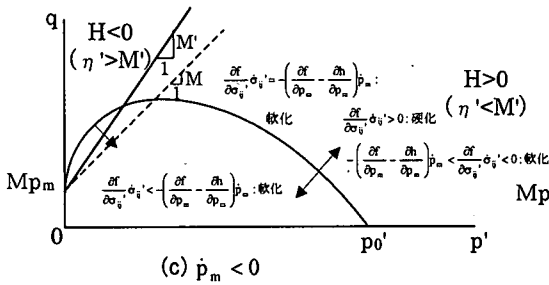
$$\dot{p}_m < 0 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^p} \dot{\sigma}_{ij}^p = 0$$



(a) $\dot{p}_m = 0$



(b) $\dot{p}_m > 0$

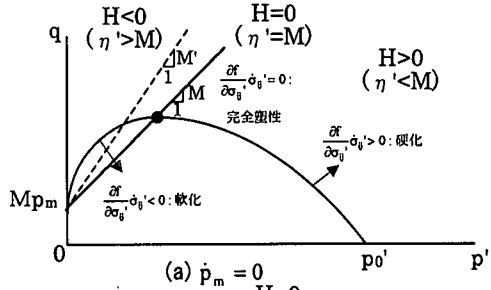


(c) $\dot{p}_m < 0$

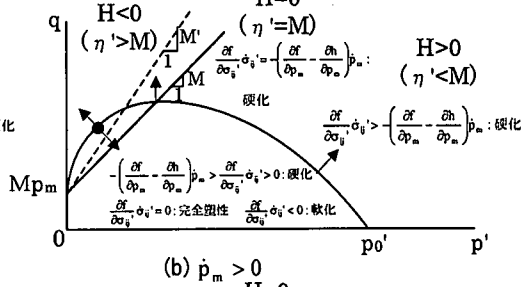
付図-1.2 負荷条件 ($\eta' > 0$)

(式(5.2)の塑性係数を用いた場合)

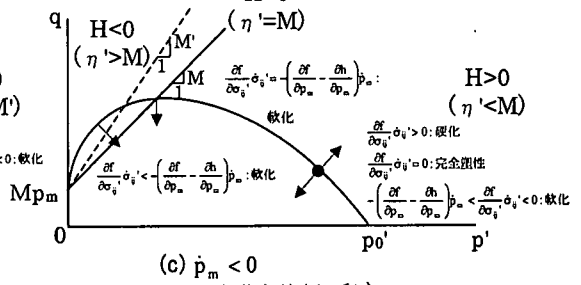
※図中の矢印は降伏曲面の拡大,縮小を表す。



(a) $\dot{p}_m = 0$



(b) $\dot{p}_m > 0$



(c) $\dot{p}_m < 0$

付図-1.3 負荷条件 ($\eta' \leq 0$)

(式(5.2)の塑性係数を用いた場合)

※図中の矢印は降伏曲面の拡大,縮小を表し,●は降伏曲面の大きさが変化しない状態を表す。

・軟化

$$\dot{p}_m < 0 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}' > - \left(\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial h}{\partial p_m} \right) \dot{p}_m$$

b) $H=0$

$$\left(\text{塑性ひずみが発生する条件は } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}' + \left(\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial h}{\partial p_m} \right) \dot{p}_m = 0 \right)$$

・硬化

$$\dot{p}_m > 0 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}' = - \left(\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial h}{\partial p_m} \right) \dot{p}_m > 0$$

・完全塑性

$$\dot{p}_m = 0 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}' = - \left(\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial h}{\partial p_m} \right) \dot{p}_m = 0$$

・軟化

$$\dot{p}_m < 0 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}' = - \left(\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial h}{\partial p_m} \right) \dot{p}_m < 0$$

c) $H < 0$

$$\left(\text{塑性ひずみが発生する条件は } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}' + \left(\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial h}{\partial p_m} \right) \dot{p}_m < 0 \right)$$

・硬化

$$\dot{p}_m > 0 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}' < - \left(\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial h}{\partial p_m} \right) \dot{p}_m$$

・完全塑性

$$\dot{p}_m > 0 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}' = 0$$

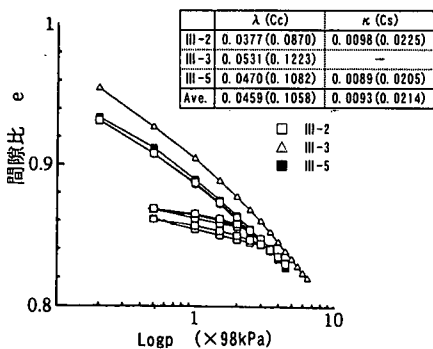
・軟化

$$\dot{p}_m \geq 0 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}' < 0$$

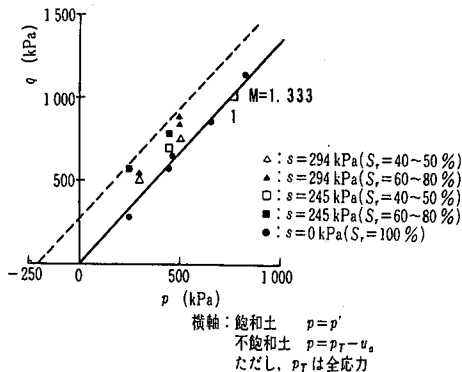
$$\dot{p}_m < 0 \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}' < - \left(\frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial h}{\partial p_m} \right) \dot{p}_m$$

\dot{p}_m の正負に注意して式(3.12)にもとづいた負荷条件を付図-1.1 にまとめる。図中(b)(c)の p_m が変化する条件のもとでは $H=0$ ($\eta'=0$) においても硬化および軟化を生じる。このことは降伏曲面の形状(図-4)が p_m の増加とともに拡大していることに着目することで理解できる。なお、塑性係数に式(5.2)を用いた場合、前述の a)~c)の議論は式(3.12)を用いた場合と同様に成立するが塑性係数の正負を示す範囲が若干異なる。 η' の正負に注意して付図-1.2,1.3 に示す。

付録-2 表-1におけるパラメータ設定根拠



付図-2.1 等方圧密試験結果²⁶⁾
(飽和状態のNo.5クレイ)



付図-2.2 三軸圧縮試験結果(体積最小点)¹⁴⁾

参考文献

- Jennings, J.E.B. and Burland, J.B. : Limitation to the use of effective stress in partly saturated soils, *Geotechnique*, Vol.12, No.2, pp.125-144, 1962.
- Bishop, A.W., Alpan, I., Blight, G.E. and Donald, I.B. : Factors controlling the strength of partly saturated cohesive soils, *Proc. Colorado Conference*, pp.503-532, 1960.
- Roscoe, K.H., Schofield, A.N. and Thurairajah, A. : Yielding of clays in state wetter than critical, *Geotechnique*, Vol.13, pp.211-240, 1963.
- Karube, D. : Basic stress-strain relations of unsaturated soil, *Proc. 8th Asian Conf. SMFE*, Vol.13, pp.49-52, 1987.
- Alonso, E.E., Gens, A. and Josa, A. : A constitutive model for partially saturated soils, *Geotechnique*, Vol.40, No.3, pp.405-430, 1990.
- 向後雄二 : 不飽和土の力学的挙動に対する弾塑性論的解釈と解析, 不飽和土の工学的性質研究の現状シンポジウム論文集, 土質工学会, pp.69-78, 1987.

- 軽部大蔵, 加藤正司, 浜田耕一, 本田道識 : 不飽和土の間隙水の状態と土塊の力学的挙動の関係について, 土木学会論文集, No.535/III-34, pp.83-92, 1996.
- 加藤正司, 軽部大蔵, 本田道識, 藤原照幸 : 不飽和土の圧縮特性に及ぼす間隙水分布の影響に関する研究, 土木学会論文集, No.554/III-37, pp.57-69, 1996.
- 軽部大蔵, 本田道識, 加藤正司, 鶴ヶ崎和博 : 不飽和土のせん断挙動と間隙水の状態の関係について, 土木学会論文集, No.575/III-40, pp.49-58, 1997.
- 軽部大蔵, 勝山潤一, 丹羽尚人 : 不飽和土の三軸圧縮状態における降伏関数, 土木学会論文集, No.406, pp.205-212, 1989.
- Matyas, E.L. and Radhakrishna, H.S. : Volume change characteristics of partially saturated soils, *Geotechnique*, Vol.18, No.4, pp.432-448, 1968.
- Kohgo, Y., Nakano, M. and Miyazaki, T. : Verification of the generalized elastoplastic model for unsaturated soils, *Soils and Foundations*, Vol.33, No.4, pp.64-75, 1993.
- 軽部大蔵, 加藤正司 : 不飽和土中の間隙水の分布模型, 不飽和地盤の調査・設計・施工に関する諸問題に関するシンポジウム発表論文集, 社団法人土質工学会, 不飽和地盤の安定性に関する研究委員会, pp.103-110, 1993.
- 加藤正司, 本田道識 : 粘性土地盤の強度定数に与える飽和度の影響, *Q&A, 土と基礎*, Vol.46, No.6, pp.39, 1998.
- Skempton, A.W. : Effective stress in soils, concrete and rocks, *Proc. Conf. Pore Pressure and Suction in Soils*, pp.4-16, 1960.
- Maswoswe, J. : Stress paths for a compacted soil during collapse due to wetting, *ph.D. Thesis, University of London*, pp.1-484, 1985.
- Suriol, J., Gens, A. and Alonso, E.E. : Behavior of compacted soils in suction controlled oedometer, *Proceedings of the second international conference on Unsaturated Soils*, pp.438-443, 1998.
- 加藤正司 : 締固めた粘性土の等方応力条件下におけるコラプス時の変形特性とコラプス後のせん断特性, 土木学会論文集, No.596/III-43, pp.271-282, 1998.
- 村山朔朗 : 土の力学挙動の理論, 技報堂出版, 1990.
- 松岡元 : *Deformation Characteristics of Soils*, 京都大学学位論文, 1973.
- 軽部大蔵 : 不飽和土の応力・ひずみ関係概説, 不飽和土の工学的性質, 土質工学会関西支部, pp.1-17, 1989.
- Honda, M., Kato, S. and Karube, D. : Mechanical behavior of the unsaturated soil on drying and wetting process under constant net stress, *Proceedings of the international symposium on problematic soils IS TOHOKU'98*, pp.649-652, 1998.
- 山口柏樹 : 土質力学(全改訂) 第2章 2.1 毛管作用, 技報堂出版, pp.33-36, 1984.
- 芦田渉 : 不飽和土の間隙水が与える力学的挙動への影響, 神戸大学修士論文, 1997.
- 橋口公一 : 最新弾塑性学, 朝倉書店, 1990.
- 本田道識 : 不飽和粘性土の力学挙動に与える間隙水分布の影響, 神戸大学修士論文, 1994.

(1999.9.14 受付)

STRESS-STRAIN RELATIONSHIP FOR UNSATURATED SOIL

Michinori HONDA, Atsushi IIZUKA, Katsuyuki KAWAI and Daizo KARUBE

The stress-strain relationship for unsaturated soil is discussed in this paper. Based on the Karube's theory, two types of the suction stress are used, and a new concept on the plastic yield condition and hardening parameter is proposed. The stresses used are called bulk stress p_b and meniscus stress p_m . Effects of pore water composition for mechanical behavior are presented by using two types of suction stress. As a result, constitutive model is derived by associated flow rule is proposed. Using the derived equations, triaxial compression test and consolidation test with suction change are simulated. The calculation results simulate two types of the test data well.