土木学会論文集 No. 656／II-52, 183-192, 2000. 8

# 沿岸海水流動数値計算法の高度化のための Dual-σ 座標系の提案

灘岡和夫[1]・吉野忠和[2]・二瓶泰雄[3]

[1]フェロー会員　工博　東京工業大学教授　大学院情報理工学研究科情報環境学専攻（〒152-8552 目黒区大岡山 2-12-1）
[2]正会員　修（工）東京都建設局第五建設事務所補修課橋梁維持係
[3]正会員　博（工）東京理科大学講師　理工学部土木工学科

多くの沿岸海水流動計算法のベースとなるσ座標系を複雑地形場で密度の鉛直変化が大きい沿岸域に適用すると，そこでの水平拡散項や圧力勾配項に関する数値誤差が不可避的に大きくなることが指摘されている．そこで本研究では，これらのσ座標系の問題点を比較的簡便な計算アルゴリズムによって解消するために，新たに Dual-σ 座標系を提案した．これは，計算領域を密度変化の大きい上層と海底地形に接している下層に分けて，各層に対して別々のσ座標系を導入することにより，計算手法の高度化をはかろうとするものである．この Dual-σ 座標系の有効性を検証するために，いくつかの理想的な条件下における検証計算を実施したところ，本手法により，従来のσ座標系と比べて大幅に計算精度が向上することが確認された．

***Key Words:*** *dual-sigma coordinate, coastal ocean model, horizontal diffusion, horizontal pressure gradient*

## 1．はじめに

近年盛んに行われている沿岸海水流動シミュレーションに対して適用される座標系としては，一般的には，格子形状を矩形とするデカルト座標系と，海底面地形に沿うように定義されるσ座標系[1)]が挙げられる．このうち，デカルト座標系に関しては，格子形状を矩形としているため，海底面形状が不自然な階段形状に近似されることになるので，海底面近傍で過大な鉛直流速が生じてしまうことが知られている．一方，σ座標系は，複雑な海底面形状を忠実に表現し得る座標系であるので，底面境界条件を取り扱い易い形となっている．しかも，σ座標系では，複雑地形場における格子配置を，デカルト座標系と比べて，無駄を少なく設定することができるので，汎用的な海洋シミュレーションコード（例えば，POM：Princeton Ocean Model，Blumberg & Mellor[2)]）では，σ座標系が採用されることが一般的になっている．しかしながら，このσ座標系を，複雑な底面形状を有し密度の鉛直変化の大きい沿岸域にそのまま適用すると、そこでの水平拡散項や圧力勾配項における数値誤差が大きくなることが指摘されている（例えば，Haney[3)]，Stelling & Kester[4)]）．

そこで本研究では，従来の沿岸海水流動数値計算法に多く用いられているσ座標系の問題点を比較的簡単なアルゴリズムによって解消するために，新しいσ座標系である Dual-σ 座標系を提案することを試みた．以下では，まず，1）従来のσ座標系の問題点やそれに対する対応策を整理し，2）その問題点を改善するために，新しいσ座標系である Dual-σ 座標系を提案した．さらに，3）この Dual-σ 座標系の基本的な有効性を示すために，シンプルな条件下における検証計算を実施した．

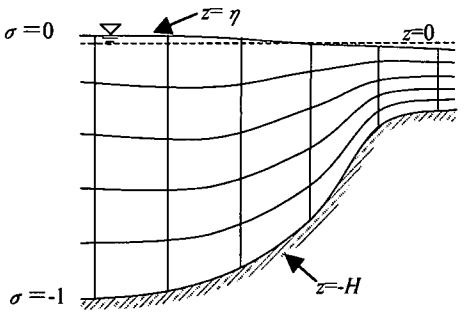
## 2．σ座標系の概要とその問題点

### （1）σ座標系の概要

もともと気象の分野で考案されたσ座標系[1)]は，**図－1** に示すように地形に沿って計算格子を設定するために，地形変化を正確に取扱うことができることから，最近では，海洋・沿岸海洋の分野においても頻繁に用いられている．このσ座標系では，デカルト座標系における $x, y, z$ 座標が，以下に定義される $x^*, y^*, \sigma$ 座標へと変換される．

$$x^* = x, \quad y^* = y, \quad \sigma = \frac{z-\eta}{D} \tag{1}$$

ここで，$D$ は全水深（$=H+\eta$，$H$：水深），$\eta$ は水




**図―1**　σ座標系の設定

位である．σ座標の定義に関しては，いくつかの種類が用いられているものの，ここでは，POMで採用されている定義に合わせて，水表面で$\sigma=0$，海底面で$\sigma=-1$となるように設定した．速度に関しても，デカルト座標系における$U,V,W$は，σ座標系では，以下のように$U^*,V^*,W^*$に変換される．

$$U^*=U,\quad V^*=V,$$

$$W^*=W+D\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}+U\frac{\partial\sigma}{\partial x}+V\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right) \tag{2}$$

また，任意の変数$\phi$の空間微分項に関しては，以下のような形に変換される．

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial x^*}+\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial\sigma}=\frac{\partial\phi}{\partial x^*}-\frac{1}{D}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sigma\frac{\partial D}{\partial x}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} \tag{3a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{1}{D}\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} \tag{3b}$$

なお，$y$方向微分は$x$方向のものと同じ形になるので，ここでは省略している．

このようなσ座標系では，海底地形を正確に表現できるだけでなく，海底地形もσ面の一つであることから，底面の運動学的境界条件を簡単に取扱うことができる，という利点がある．しかしながら，σ座標系を海底地形が急傾斜する領域に用いた場合，水平拡散項と水平圧力勾配項に関する計算精度が問題となることが指摘されている[3), 4)]．以下にその基本的な要因について示す．

### （2）水平拡散項に関する問題点

まず，デカルト座標系におけるブシネスク近似された基礎方程式をσ座標系に変換した場合，そこでの$x$方向運動方程式中の水平拡散項$F_x$は，以下のように記述される．

$$F_x\equiv D\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}-\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sigma\frac{\partial D}{\partial x}\right)\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial\sigma}$$

$$+D\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}-\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}+\sigma\frac{\partial D}{\partial y}\right)\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial\sigma} \tag{4a}$$

$$\tau_{xx}=2A_M\left[\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{D}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sigma\frac{\partial D}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial\sigma}\right] \tag{4b}$$

$$\tau_{yx}=A_M\left[\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{D}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}+\sigma\frac{\partial D}{\partial y}\right)\frac{\partial U}{\partial\sigma}+\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{1}{D}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sigma\frac{\partial D}{\partial x}\right)\frac{\partial V}{\partial\sigma}\right] \tag{4c}$$

ここで，式(4)中に全水深$D$が含まれているのは，基礎方程式を保存形で記述しているためであり，その基礎式の詳細に関しては**付録**を参照されたい．

式(4)を用いて記述される水平拡散項は，高次の項を含んだ形となっている．この高次項を考慮すると，表層エクマン層や底面境界層内において特に重要となる鉛直せん断応力の評価の際に，水平渦動粘性係数を含む形で記述されることになるため，見かけの鉛直渦動粘性係数が変化してしまう．したがって，表層・底層境界層における流速分布を，よく知られる境界層過程と異なる形で評価してしまうことがMellor & Blumberg[5)]によって指摘されている．このことを改善するために，彼らは，式(4)中の高次項を省略した次式の形で水平拡散項を評価するのが望ましいと述べている．

$$F_x\equiv\frac{\partial}{\partial x}(H\tau_{xx})+\frac{\partial}{\partial y}(H\tau_{yx}) \tag{5a}$$

$$\tau_{xx}=2A_M\frac{\partial U}{\partial x} \tag{5b}$$

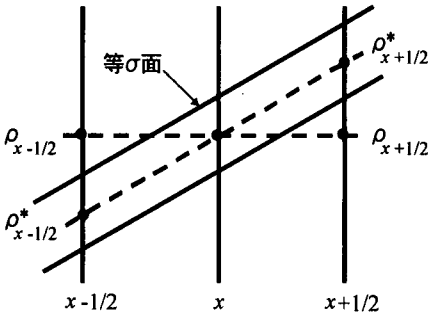
$$\tau_{yx}=A_M\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right) \tag{5c}$$

このような表記は，相対的に表層・底層境界層の影響を強く受ける水深の浅い沿岸域で特に必要となる．

しかしながら，式(5)を用いた場合には，本来存在すべき高次の項を省略しているので，水平拡散項の計算をした際に，人工的な鉛直拡散が生じてしまうことが指摘されている[6)]．この問題は，特に，海底面が傾斜しているところで顕著に見られ，沿岸流動シミュレーションでは，不可避的に生じてしまう数値計算上の問題である．

### （3）水平圧力勾配項に関する問題点

次に，σ座標系に基づく場合のもう一つの数値計算上の問題である水平方向の圧力勾配項の数値誤差要因について記述する．圧力勾配項は，σ座標系では，水位勾配項を除くと，次のような二つの項の和で表現される[5)]．




**図―2** hydrostatic consistency を満たさない場合の一例

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{gD^2}{\rho_0}\int_\sigma^0\frac{\partial\rho}{\partial x^*}d\sigma-\frac{gD}{\rho_0}\int_\sigma^0\sigma\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial\sigma}d\sigma \quad (6)$$

ここで，$P$：圧力，$\rho$：密度，$\rho_0$：基準密度，$g$：重力加速度である．上式の右辺第一項は，$\sigma$ 面上における密度勾配を，第二項は $\sigma$ 面が水平面より傾斜していることによる補正項に相当している．

このように表記される圧力勾配項に関わる誤差の形成過程を示すために，海底斜面上の領域において，等密度面が水平で鉛直密度勾配が大きい静止流体場に対して式(6)で表記される圧力勾配項を適用することを想定する．この場合，本来ならば，水平圧力勾配は 0 となるはずである．しかしながら，実際に式(6)を用いた場合には，等密度面が水平であることから式(6)の右辺第一項と第二項が各々有意な大きさの値を持つ形になるため，それらの差で計算される水平圧力勾配項の値には誤差が生じやすくなり，結果として，非現実的な圧力勾配の値を与えてしまうことになる．

このような数値誤差を低減するためには，計算格子の解像度を上げることが有効であるものと考えられるが，鉛直方向の格子解像度を単純に上げてしまうと，以下に示す "hydrostatic consistency" として知られる問題が別途生じてしまう[7), 8)]．これは，**図―2** に示すように，デカルト座標系における密度 $\rho$ の定義位置が，水平方向の隣接メッシュにおいて，$\sigma$ 座標系における密度 $\rho^*$ の定義位置と同じ格子内に存在しない場合，圧力勾配項の数値誤差が格段に大きくなるという問題である．この誤差の増大を回避するためには，$\rho$ と $\rho^*$ が同一計算格子内に存在するようにする必要があり，そのためには，以下に示すような条件式を満足させる必要がある．

$$\left|\frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial x}\right|\Delta x<\Delta\sigma \quad (7)$$

ここで，$\Delta x$，$\Delta\sigma$ はそれぞれ水平，鉛直方向の格子間隔である．したがって，鉛直方向の格子解像度を増加させること，すなわち $\Delta\sigma$ を細かくすることは，式(7)の条件からすると，かえって誤差を増大させる方向に働いてしまうことになる．

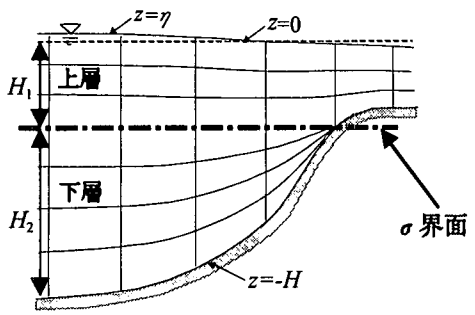
### （4）このような問題点に対する既往の対応策

以上のように，水平拡散項と圧力勾配項の数値誤差が発生してしまう原因は互いに異なるものの，これらの問題は，いずれも，密度勾配が急で海底地形が傾斜している領域において特に顕著に現れる．沿岸域は，一般的に複雑地形で密度変化も大きいので，従来の $\sigma$ 座標系をそのまま沿岸域に適用した場合には，上記の数値誤差が不可避的に生じてしまうことになる．このような問題に対する既往の対応策としては，$\sigma$ 座標系を用いるものの，そこでの水平圧力勾配項や水平拡散項の評価法を修正する手法と，$\sigma$ 座標系と異なる鉛直座標系を適用する手法，の 2 種類に大別される．

まず一つ目の対応策の中で代表的なものとしては，Stelling & Kester[4)]による手法（以下，"クリープ補正" と呼ぶ）が挙げられる．クリープ補正では，水平拡散項や圧力勾配項を計算する際に，傾斜している $\sigma$ 座標系の計算格子を水平方向に設定し直して，各々の項を見積っている．このクリープ補正を用いた場合の水平フラックスの数値精度は，シンプルな条件下におけるテスト計算を通じて，大幅に向上することが検証されている．また，実際の沿岸流動計算に対しても，クリープ補正の有効性はすでに報告されている[9)]．しかしながら，このクリープ補正の構成はかなり複雑であり，新たにプログラミングする労力が必要となるうえ，ここでの計算時間が従来の $\sigma$ 座標系の計算スキームと比較して大幅に増加することも指摘されている[10)]．

また，式(5a)～(5c)を用いずに水平拡散項の高次の項を一部残すことによって，水平拡散項の数値精度を改善する手法も提案されているものの（例えば，Huang & Spaulding[6)]），それは，Mellor & Blumberg[5)]が指摘する表層・底層境界層過程の取り扱いに関する問題を解決することにはなっていない．

一方，二つ目の対応策である従来の $\sigma$ 座標系とは異なる代表的な鉛直座標系としては，一般化された鉛直座標系である s 座標系[11)]が挙げられる．これは，$\sigma$ 座標系と同様に水表面・海底面を忠実に再現する一種の境界適合座標系であるが，いくつかのパラメータを用いることにより，鉛直座標位置を従来の $\sigma$ 座標系よりも任意に設定することが可能である．し




**図—3** Dual-σ座標系の定義

かしながら，s座標系は，その定義式中にσ座標系と同様に水深を含むことから，σ座標系が有する密度成層場における海底斜面上での数値誤差の問題を根本的に解決することにはなっていない．

以上のことからわかるように，表層・底層の境界層過程の表現精度に関する問題を回避しつつ，水平拡散項や圧力勾配項の数値精度を大幅に改善するとともに，しかも，もともとのσ座標系用のプログラムコードを大きく変更する必要がない簡便で合理的な手法というものはまだ存在しないといってよい．

## 3．Dual-σ座標系の提案

### (1) Dual-σ座標系の基本コンセプト

そこで，ここでは，以下に示す比較的簡単なアルゴリズムを導入して，これらの数値計算上の問題を解消することを試みる．

沿岸域では，河川からの淡水流入や日射の影響等により，多くの場合，密度変化が大きい領域は上層において形成される．したがって，上述したσ座標系の問題を解消するためには，上層においては計算格子をできるだけ水平に設定することが望ましい．一方，海底面に接する下層では，海底地形を正確かつ簡単に表現できるσ座標系の利点をそのまま活かすほうが良い．そこで，ここでは，**図—3**に概念的に示すように，上層と下層の間に座標系上の界面（以下，これをσ界面と呼ぶ）を設け，上層・下層それぞれに対して別々のσ座標系で表現する，というDual-σ座標系を新たに導入することを試みる．このように上層・下層に対して別々の座標系を導入することにより，一般的に密度変化の大きい上層の計算格子を海底面傾斜の幾何学的影響が及ばないようにすることが可能となり，しかも，複雑地形場に対して底面境界条件を簡便に取り扱えるというσ座標系の利点を保持できることになる．したがって，このDual-σ座標系は，沿岸海水流動計算法として極めて有効な手法となり得るものと期待できる．なお，このσ界面の設定は，後述するように，任意に行うことが可能であり，密度躍層界面とともに変化させることも原理的には可能である．

### (2) Dual-σ座標系の定義

このDual-σ座標系における上層の$\sigma_1$と下層の$\sigma_2$に関する定義式は，以下の通りである．

$$\sigma_1 = \frac{z-\eta}{D_1}, \quad -H_1 < z < \eta$$
$$\sigma_2 = \frac{z+H_1}{D_2}, \quad -(H_1+H_2) < z < -H_1 \tag{8}$$

ここで，$H_1$は上層における$z$=0からσ界面までの距離を，$H_2$は下層におけるσ界面から海底面までの距離を表しており，式(8)中の$\sigma_1, \sigma_2$は両方とも-1～0の範囲である．また，各層の厚さ$D_1$と$D_2$はそれぞれ以下のようになる．

$$D_1 = H_1 + \eta, \quad D_2 = H_2 \tag{9}$$

もとのデカルト座標系での海水流動に関する基礎方程式系をDual-σ座標系を用いて座標変換すると，上層と下層に対する基礎方程式系は，水平拡散項として高次項を省略した式(5)を適用する場合には，互いに同じ形で表現され，しかも，それらは，従来のσ座標系のものと同形になる．なお，ここでは，ベースとなる数値モデルとして，汎用的な海洋計算コードであるPOM[2)]を採用しているが，POMにおける基礎方程式系は，σ座標系で記述されたNavier-Stokes方程式と連続式，水温・塩分濃度の輸送方程式で構成されており，乱流モデルとしては水平渦動粘性係数及び水平拡散係数をSmagorinskyモデルにより，また鉛直渦動粘性係数及び鉛直拡散係数をMellor-Yamada[12)]のレベル2.5モデルの乱流クロージャーモデルにより，各々評価している（**付録**参照）．

なお，佐々木[13)]は窪地などの地形急変部を含む水域へのσ座標系の有効性を向上させるために，窪地がないとしたときの仮想的な海底面を境界面として，水面からその境界面までの層と，境界面から窪地底面までの層に対して，それぞれ従来のσ座標系を設定する方法を提案し，それをmulti-σ座標系と称している．multi-σ座標系での式形は，式(8)と同形となるが，境界面設定の考え方がDual-σ座標系でのσ界面のそれとかなり異なるので，座標系の内容としてはかなり違ったものとなっている．すなわち，multi-σ座標系では，窪地のように不連続的に変化する海底地形形状を幾何学的に合理的に取り扱うことを目的として，窪地がないとしたときの仮想的な面に固定

して境界面を設定している．しかし，このやり方では，当然ながら$\sigma$座標系の基本的な難点，すなわち，**2．**で記述したような密度成層条件下での海底斜面上における$\sigma$座標系の数値誤差は原理上改善されることにはならない．

### （3）計算プログラム上の主な追加点・変更点

上記のように，Dual-$\sigma$座標系での基礎方程式系は従来の$\sigma$座標系のものと同形になるが，プログラムコードを組む上においても，従来の$\sigma$座標系でのプログラムコードにわずかな追加・変更を加えるだけで済む．すなわち，式(8)のような二つの$\sigma$座標を用いると，プログラムコードが煩雑になってしまうように思われやすいが，実際には，いくつかの二重化を回避する変数を導入することにより，大部分において計算ループの二重化を回避することが可能となる．

以下では，Dual-$\sigma$座標系の定義に関するプログラムコードの追加点（下記のａ））と二重化を回避するために行った変更点（下記のｂ）～ｅ））を示す．それらに加えて，$\sigma$界面の導入に伴って計算ループの二重化を施すことが必要とされる部分（下記のｆ））についても記述する．

**ａ）Dual-$\sigma$座標系の定義に関する追加点**

上層と下層とで別々の$\sigma$の値が定義されているので，$\sigma$の値自体を計算初期に定義し，$\sigma$界面位置を表す変数を新たに導入する．なお，プログラム上頻繁に現れる$\sigma D_i$，$\Delta\sigma D_i$，$\sigma\Delta D_i$（ここで，$i$=1, 2）といった，実空間上における鉛直方向長さに相当する変数に関しては，$\sigma$の値を変更すれば，自動的に更新されるので，定義し直す必要はない．

**ｂ）上層・下層を判別する変数の導入**

上層と下層において使うべき変数が異なる場合（例えば，水位など），計算ループの二重化を避けるために，上層と下層を判別する変数を定義して，それをプログラム中に導入する．

**ｃ）海陸判定変数の３次元化**

POMでは，複雑な汀線形状に対して計算上簡便に取り扱うために，計算メッシュが海か陸かを判定する変数を設定している．この変数は，従来の$\sigma$座標系では，二次元で定義されているが，Dual-$\sigma$座標系では，**図―３**に示すように，上層で海メッシュ，下層で陸メッシュという場合もあり得る．このようなことに対応するために，この変数の定義を二次元から三次元へ変更することが必要となる．

**ｄ）海底面の検出**

上述したように，Dual-$\sigma$座標系では，海底面位置が下層の最下端メッシュだけではなく，$\sigma$界面上となる場合もあり得る．その場合，底面境界条件を設定する際には，各水平位置ごとに海底面を検出する必要がある．そこで，海底面となる鉛直方向の格子番号を表す変数を新たに導入することにより，計算プログラムの煩雑化を回避する．

**ｅ）$\sigma$界面上における変数の再定義**

ここでは，スタッガード格子を採用しているため，$\sigma$面上に定義位置がない変数（ここでは，鉛直方向流速以外の従属変数）は，水平・鉛直移流項や水平拡散項を計算する際に，上下の値から内挿する必要がある．$\sigma$座標系では，通常，鉛直方向に等間隔格子を設定しているので，単純平均操作により$\sigma$面上の値として算出することができるが，Dual-$\sigma$座標系では，上層と下層とで鉛直方向の格子間隔が異なるので，$\sigma$界面での値の算出には上・下層の層厚を考慮した形で線形内挿を行う必要がある．この計算ループにおける二重化を回避しようと思えば，このような内挿アルゴリズムを$\sigma$界面上だけではなく，全$\sigma$面上に関して行う形にすればよい．

**ｆ）二重化を行っている計算ループ**

POMでは，水平流速などの鉛直拡散項を計算する際に，計算時間を短縮するために，収束計算を行わずに，漸化式を用いたThomas法が適用されている．この鉛直拡散項に関する漸化式中に含まれる係数を計算する際に，$\sigma$界面での値を分離した形で算出する必要があり，計算ループを上層・下層に分けて二重化している．

このように，Dual-$\sigma$座標系による数値計算では，概念的には，計算領域を上・下層の二つの層に分割するものの，計算プログラム上では，その大部分を各層ごとに別々のプログラミングする必要はなく，一つの層としてまとめて取り扱うことが可能となる．このことから，Dual-$\sigma$座標系をベースとした流動計算プログラムを作成する際には，上記の付加点・変更点を考慮すれば，一層で構成されている通常の$\sigma$座標系のプログラムをほぼそのまま準用することが可能となる．したがって，Dual-$\sigma$座標系では，クリープ補正等に比べて，アルゴリズム上の簡便さにおいて有利である．このことに加えて，計算時間に関しても，従来の$\sigma$座標系を用いた場合とそれほど変わらないことが確認されている．

なお，実際にDual-$\sigma$座標系を用いて計算を行う際には$\sigma$界面の設定の仕方が重要となるが，本論文では，**図―３**に示すように水平方向に設定している．この場

合，σ界面が**図—3**のように海底面に達することがあり得るが，その場合には，σ界面より浅い領域は上層だけが存在し，従来のσ座標系と同様の取り扱いとなる．また，基礎方程式において，σ界面の変化は全て層厚$D_i$の変化に含まれる形で表わされているので，上記のようなσ界面の設定の仕方に加えて，例えば，密度躍層を追随するように時空間的に変化させることも，計算コードに変化を加えることなく行うことができる．また，鉛直方向速度のσ界面上での値に関しては，上・下層でのσ座標系の定義が異なるので，一見，特別な接続条件式を導入することが必要となるように思えるが，実際には，以下に示すようにシンプルな接続条件式となる．まず，Dual-σ座標系における各層の鉛直方向速度は，式(2)にならって以下のように与えられる．

$$W_1^* = W + D_1\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial t} + U\frac{\partial\sigma_1}{\partial x} + V\frac{\partial\sigma_1}{\partial y}\right) \quad (10a)$$

$$W_2^* = W + D_2\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial t} + U\frac{\partial\sigma_2}{\partial x} + V\frac{\partial\sigma_2}{\partial y}\right) \quad (10b)$$

σ界面上での $W$ が同じになることを用い，さらに，式(10a, b)に対して多少の式展開を行うと，最終的に，以下のようなσ界面上における上・下層の$W_i^*$に関する接続条件式が与えられる．

$$W_1^*\Big|_{\sigma_1=-1} = W_2^*\Big|_{\sigma_2=0} \quad (11)$$

## 4．Dual-σ座標系の有効性の検討

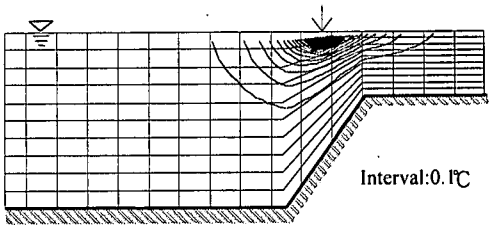
ここで示した Dual-σ座標系の有効性を検証するために，単純な条件下における水平拡散項と水平圧力勾配項の計算精度に関して，従来のσ座標系と本研究で新たに提案された Dual-σ座標系の計算結果に関する比較を行った．また，同様に実海域に近い条件下でも数値シミュレーションを実施したので，それらの結果を合わせて以下に示す．

### （1）水平拡散項

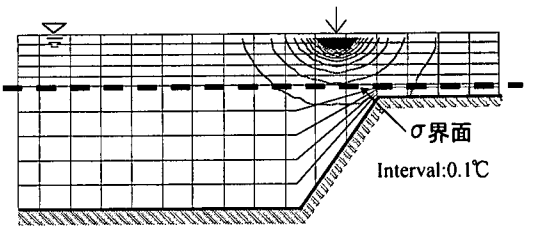
まず，水平拡散項の計算精度について検討するために，スカラー量（ここでは水温）の拡散シミュレーションを行った．ここでの計算条件としては，移流速度はないものとし，水平・鉛直渦拡散係数を時空間的に一定値として与えた．また，初期水温分布として空間的に一様に24度とし，計算開始直後より水面上のある一メッシュ（**図—4**中矢印）における水温を29度と固定してスカラー量の拡散シミュレーション（水温差による浮力効果を無視した単純な拡散計算）を実施した．

**表—1** スカラー量の拡散問題の計算条件

| | |
|---|---|
| 計算メッシュ数 | 水平 82，鉛直 10 |
| 水平解像度 | 800m |
| 水深 | 最大100m，最小40m |
| 海底勾配 | 0.00625 |
| 水平渦動粘性係数 | 100m²/s |
| 鉛直渦動粘性係数 | 0.001m²/s |
| 時間刻み | 200s |
| σ界面の位置 | 30m |




**(a)** 従来のσ座標系




**(b)** Dual-σ座標系

**図—4** スカラー量（水温）の拡散問題

計算領域としては，この水平拡散項の問題が傾斜面上で生じることが知られていることから，計算領域の一部に勾配 1/160 となる斜面を有するような2次元場を設定した．なお，その他の計算条件に関しては，**表—1**に示すとおりである．このような条件下で得られた，計算開始12日後における従来のσ座標系と Dual-σ座標系を用いた場合における計算結果を**図—4**に示す．この拡散問題では，物理的には拡散雲が海底面に達する前までは左右対称の拡散形状となるはずであるが，従来のσ座標系による計算結果では，斜面上において拡散形状が大きく歪んだ形となっている．それに対して，Dual-σ座標系による計算結果では，スカラー量が海底面に到達するまではきれいな左右対称の拡散状況が見られ，従来のσ座標系を用いた場合と比べて，計算結果が大幅に改善されていることが分かる．これは，Dual-σ座標系では，上層の計算格子がデカルト座標系と同様に水平面から傾いていないため，水平拡散項の見積もりが重要となる上層において，その評価が適切

に行われていることによるものと考えられる．

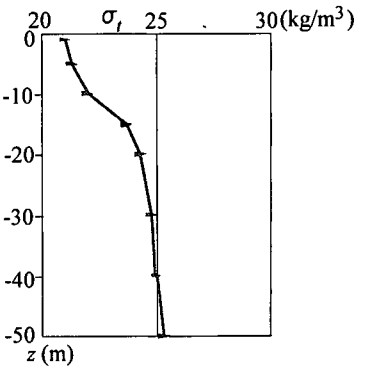
### （2）水平圧力勾配項

次に，圧力勾配項の精度向上を示す一例として，水平方向には一様で鉛直方向にのみ分布を持つ密度場における圧力勾配項（式(6)）の計算を行った．ここでの密度場としては，**図―5** に示されるように，第三管区海上保安部の水路部による東京湾での密度データ（1997年6月）を水平方向に平均して得られた連続成層場とした．また，先に述べたように，水平圧力勾配項は傾斜海底面上の領域で数値誤差を引き起こしやすいことから，計算領域内に一つの海底マウンドを設定した．具体的な計算条件は，**表―2** に示すとおりであり，ここでの $\sigma$ 界面の位置は，海底マウンドの上端と一致するようにしている．

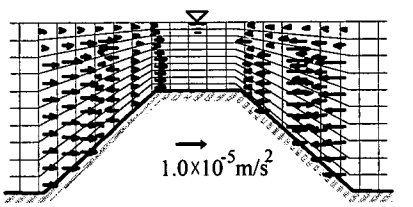
ここで得られた水平圧力勾配項に関する計算結果を**図―6** に示す．図中の矢印の大きさと向きは，計算結果から得られた圧力勾配の大きさとその符号に相当している．本条件では，水平方向に一様な密度場を想定しているので，水平圧力勾配は当然ゼロとなるはずであるが，従来の $\sigma$ 座標系では，斜面上の全ての領域において誤差が生じていることがわかる．これに対して，Dual-$\sigma$ 座標系では，$\sigma$ 界面の上層においては，計算格子が水平に設定されていることによって，当然ながら誤差は全く生じていない．さらに特筆すべきこととして，下層においても，従来の $\sigma$ 座標系と比較して，誤差がかなり小さくなっていることがわかる．従来の $\sigma$ 座標系では，海底地形の影響で計算格子が傾くことにより，密度変化の大きい上層で誤差が顕著になり，それが鉛直方向に蓄積されることで，本来密度変化の小さい下層においても大きな誤差が生じてしまっている．それに対して，Dual-$\sigma$ 座標系では，密度変化の大きい上層で全く誤差が生じないことから，上層での誤差の累積が下層に現われることがない．このようなことから，Dual-$\sigma$ 座標系では下層での誤差も低く抑えられるものと考えられる．

**表―2** 圧力勾配項計算の計算条件

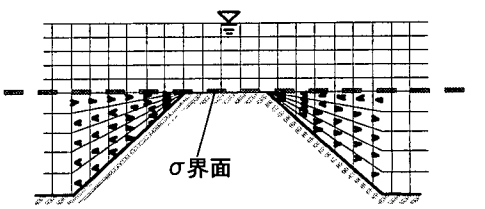
| | |
|---|---|
| 計算メッシュ数 | 水平 82，鉛直 10 |
| 水平解像度 | 800m |
| 水深 | 最大 100m，最小 40m |
| 海底勾配 | 0.00625 |
| $\sigma$ 界面の位置 | 40m |




**図―5** 圧力勾配項計算に用いた $\sigma_t$ 分布（50m 以下は一定）




(a) 従来の $\sigma$ 座標系




(b) Dual-$\sigma$ 座標系

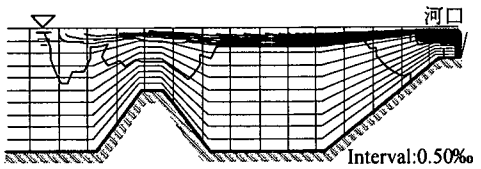
**図―6** 傾斜地形上での圧力勾配項の評価

### （3）実海域条件下での流動計算の一例

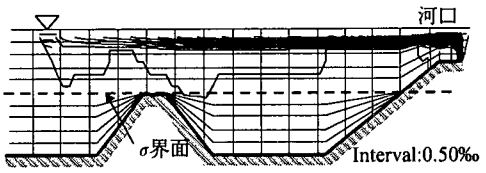
Dual-$\sigma$ 座標系を用いた実海域条件での流動シミュレーションの一例として，沿岸域でよく見られる河川プルームを想定した数値シミュレーションを行った．計算は，塩分濃度が 32‰で一様な場に 5‰の河川水を 0.2m$^3$/s で流入させることとした．なお，ここでの水温は，河川水を含めて全領域で一様である．ここでの水平・鉛直渦動粘性係数は，**3．（2）** で記述した，POM で標準的に使用されている乱流モデルを用いて評価している．具体的な計算条件は**表―3** に示すとおりであり，Dual-$\sigma$ 座標系における $\sigma$ 界面は，前節と同様に，流れ場中のマウンド部の上端に位置している．**図―7** は，計算開始から 20 時間後の塩分濃度コンター図を示している．なお，本条件では三次元流動計算を行っているが，ここでは，両ケースで顕著な違いが見られた，河川プルームの中心軸上における鉛直断面分布のみを図示する．これを見ると，従来の $\sigma$ 座標系では，河口部の斜面や海底マウンド付近など海底地形が変化している領域において，計算格子に沿うように河川プルームが進行

**表－3** 河川プルーム計算の計算条件

| | |
|---|---|
| 計算メッシュ数 | 82×58，鉛直 10 |
| 水平解像度 | 200m |
| 水深 | 最大 20m，最小 5m |
| 海底勾配 | 河口部：0.00375<br>マウンド部：0.00625 |
| 時間刻み | 50s |
| σ界面の位置 | 10m |




**(a)** 従来のσ座標系




**(b)** Dual-σ座標系

**図－7** 河川プルームを想定した計算
（計算開始 20 時間後の塩分濃度コンター）

しており，物理的に非現実的な計算結果となっている．それに対して Dual-σ座標系では，コンター間隔があまり変化せずに河川プルームがほぼ一定の厚さで進んでいることが分かる．このように，本研究で提案した Dual-σ座標系は，より実海域の状況に近い条件下においても，その基本的な有効性や妥当性が確認された．

## 5．結論

本研究で得られた主な結論は以下のとおりである．

(1)従来のσ座標系に基づく沿岸流動計算法における計算上の問題点を，比較的簡単なアルゴリズムによって解消するために，新たに Dual-σ座標系を導入して，沿岸海水流動数値計算法の高度化を図ることを試みた．この Dual-σ座標系では，計算領域を密度変化の大きい上層と海底面に接する下層とに分離して，各層に対して，別々のσ座標系を導入することとした．

(2)Dual-σ座標系の基本的な有効性を検討するために，幾つかの理想的な条件下での数値シミュレーションを行うことを試みた．その結果，Dual-σ座標系に基づく計算手法では，従来のσ座標系と比べて，水平拡散項や水平圧力勾配項に関する数値誤差を大幅に抑制できることが確認された．

なお，本研究では，この Dual-σ座標系に基づく計算法を理想的な条件下に適用した結果のみを示したが，既に本手法を東京湾などの実海域計算にも適用しており，それに関しては別途報告している[14]．また，Dual-σ座標系の計算精度をより正確に評価するために，今後，クリープ補正や s 座標系などといったσ座標系の問題点を改善するための既存手法と比較を行う必要がある．Dual-σ座標系に基づく POM のプログラムコードについては，その使用方法等も含めて，近日中に，東京工業大学情報環境学専攻灘岡研究室のホームページ上で公開する予定である．

**謝辞**：本研究を進めるにあたり，鹿島建設技術研究所田中昌宏氏，大成建設技術研究所上野成三氏には，POM やσ座標系に関して有益な助言を頂いた．また，運輸省港湾技術研究所日向博文氏（当時東京工業大学土木工学科助手）には，数値計算全般について数多くのアドバイスを頂いた．ここに記して感謝の意を表します．また，本研究の一部は，文部省科学研究費基盤研究(B)(1)（研究代表者：灘岡和夫，課題番号：10450181）の補助を受けて行われたものであることを付記する．

## 付録　σ座標系での基礎方程式系

ここでは，静水圧近似とブシネスク近似を仮定した準三次元の海水流動モデルのうち，σ座標系を用いる数値モデルの基礎方程式系をまとめて示すこととする．なお，以下では，簡便のために，σ座標系で用いられる添え字*を省略して記述する．

・連続式

$$\frac{\partial DU}{\partial x}+\frac{\partial DV}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial \sigma}+\frac{\partial D}{\partial t}=0 \qquad \text{(A1)}$$

・運動方程式（$x$ 方向）

$$\frac{\partial UD}{\partial t}+\frac{\partial U^2 D}{\partial x}+\frac{\partial UVD}{\partial y}+\frac{\partial UW}{\partial \sigma}-fVD+gD\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{gD^2}{\rho_0}\int_\sigma^0\left[\frac{\partial \rho'}{\partial x}-\frac{\sigma'}{D}\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial \rho'}{\partial \sigma'}\right]d\sigma' =\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_M}{D}\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right]+F_x \qquad \text{(A2)}$$

・運動方程式（$y$ 方向）

$$\frac{\partial VD}{\partial t}+\frac{\partial UVD}{\partial x}+\frac{\partial V^2D}{\partial y}+\frac{\partial VW}{\partial \sigma}+fUD+gD\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{gD^2}{\rho_0}\int_\sigma^0\left[\frac{\partial \rho'}{\partial y}-\frac{\sigma'}{D}\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial \rho'}{\partial \sigma'}\right]d\sigma' = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_M}{D}\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right]+F_y \tag{A3}$$

・運動方程式（$\sigma$ 方向）

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \sigma}=gD \tag{A4}$$

・水温 $T$ の輸送方程式

$$\frac{\partial TD}{\partial t}+\frac{\partial TUD}{\partial x}+\frac{\partial TVD}{\partial y}+\frac{\partial TW}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_H}{D}\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right]+F_T-\frac{\partial R}{\partial z} \tag{A5}$$

・塩分濃度 $S$ の輸送方程式

$$\frac{\partial SD}{\partial t}+\frac{\partial SUD}{\partial x}+\frac{\partial SVD}{\partial y}+\frac{\partial SW}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{K_H}{D}\frac{\partial S}{\partial \sigma}\right]+F_S \tag{A6}$$

ここで，$U$, $V$, $W$：$x$, $y$, $\sigma$ 方向流速，$f$：コリオリパラメータ，$\rho_0$：基準密度，$\rho'$：基準密度からの偏差分，$K_M$：鉛直渦動粘性係数，$K_H$：スカラー量（水温，塩分濃度）の鉛直渦動拡散係数である．

式(A2)，(A3)，(A5)，(A6)中の水平拡散項 $F_x$, $F_y$, $F_T$, $F_S$ は，次のように記述される．

$$F_x \equiv \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\left(\frac{1}{D}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial x}\right)\tau_{xx}\right]+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\left(\frac{1}{D}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial y}\right)\tau_{yx}\right] \tag{A7}$$

$$F_y \equiv \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\left(\frac{1}{D}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial x}\right)\tau_{xy}\right]+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\left(\frac{1}{D}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial y}\right)\tau_{yy}\right] \tag{A8}$$

$$F_\theta \equiv \frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\left(\frac{1}{D}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial x}\right)q_x\right]+\frac{\partial q_y}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\left(\frac{1}{D}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\sigma}{D}\frac{\partial D}{\partial y}\right)q_y\right] \tag{A9}$$

上式中の乱流拡散フラックスに関しては，以下のように与えられる．

$$\tau_{xx}=2A_M\left[\frac{\partial DU}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}+\sigma\frac{\partial D}{\partial x}\right)U\right] \tag{A10}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=A_M\left[\frac{\partial DU}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}+\sigma\frac{\partial D}{\partial y}\right)U+\frac{\partial DV}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}+\sigma\frac{\partial D}{\partial x}\right)V\right] \tag{A11}$$

$$\tau_{yy}=2A_M\left[\frac{\partial DV}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}+\sigma\frac{\partial D}{\partial y}\right)V\right] \tag{A12}$$

$$q_x=A_H\left[\frac{\partial D\theta}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}+\sigma\frac{\partial D}{\partial x}\right)\theta\right] \tag{A13}$$

$$q_y=A_H\left[\frac{\partial D\theta}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}+\sigma\frac{\partial D}{\partial y}\right)\theta\right] \tag{A14}$$

ここで，$A_M$，$A_H$ は，それぞれ運動量及びスカラー量に関する水平拡散係数であり，$\theta$ は $T$ もしくは $S$ に相当している．

本研究で Dual-$\sigma$ 座標系を導入する対象とした数値モデルである POM での基礎方程式系は，上記のうち，水平拡散項の高次項を省略した形になっている．すなわち，式（A7）～（A14）を以下のように置き換えた基礎方程式となっている．

$$F_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}(H\tau_{xx})+\frac{\partial}{\partial y}(H\tau_{yx}) \tag{A15}$$

$$F_y \equiv \frac{\partial}{\partial x}(H\tau_{xy})+\frac{\partial}{\partial y}(H\tau_{yy}) \tag{A16}$$

$$F_\theta \equiv \frac{\partial}{\partial x}(Hq_x)+\frac{\partial}{\partial y}(Hq_y) \tag{A17}$$

$$\tau_{xx}=2A_M\frac{\partial U}{\partial x} \tag{A18}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=A_M\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right) \tag{A19}$$

$$\tau_{yy}=2A_M\frac{\partial V}{\partial y} \tag{A20}$$

$$q_x \equiv A_H\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{A21}$$

$$q_y \equiv A_H\frac{\partial \theta}{\partial y} \tag{A22}$$

## 参考文献


1) Phillips, N. A.: A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting, *J. Meteor.*, Vol.14, pp.184-185, 1957.

2) Blumberg, A. F. and Mellor, G. L.: Diagnostic and prognostic numerical circulation studies of the South Atlantic Bight, *J. Geophys. Res.*, Vol.88, pp.4579-4592,

1983.
3) Haney, R. L.: On the pressure gradient force over steep topography in sigma coordinate ocean models, *J. Phys. Oceanography*, Vol.21, pp.610-619, 1991.
4) Stelling, G. S. and Van Kester, J. A. TH. M.: On the approximation of horizontal gradients in sigma co-ordinates for bathymetry with steep bottom slopes, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.18, pp.915-935, 1994.
5) Mellor, G. L. and Blumberg, A. F.: Modeling vertical and horizontal diffusivities with the sigma coordinate system, *Monthly Weather Review*, Vol.113, pp.1379-1383, 1985.
6) Huang, W. and Spaulding, M.: Modeling horizontal diffusion with sigma coordinate system, *J. Hydraulic Eng., ASCE*, Vol.122, No.6, pp.349-352, 1996.
7) Janjic, Z. I.: Pressure gradient force and advection scheme used for forecasting with steep and small scale topography, *Contrib. Atmos. Phys.*, Vol.50, pp.186-199, 1977.
8) Mesinger, F. : On the convergence and error problems of the calculation of the pressure gradient force in sigma coordinate models, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, Vol.19, pp.105-117, 1982.
9) 田中昌宏, Stelling, G. S. and Markus, A.: 東京湾の残差流のシミュレーションとそれが水質解析に及ぼす影響について, 海岸工学論文集, Vol.43, No.2, pp.1121-1125, 1996.
10)Slordal, L. H.: The pressure gradient force in sigma-co-ordinate ocean models, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.24, pp.987-1017, 1997.
11)Bleck, R.: Finite difference equations in generalized vertical coordinates Part 1:Total energy conservation, *Contrib. Atmos. Phys.*, Vol.51, pp.360-372, 1978.
12)Mellor, G.L. and Yamada, T.: Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems, *Rev. Geophys. Space Res.*, Vol.20, pp.851-875, 1982.
13)佐々木淳：東京湾湾奥水塊の湧昇現象と青潮への影響, 海岸工学論文集, Vol.44, No.2, 1997.
14)灘岡和夫, 吉野忠和, 二瓶泰雄：高度化した沿岸流動数値計算法を用いた原油流出シミュレーション, 海岸工学論文集, Vol.46, No.1, pp.461-465, 1999.

**(1999.8.11 受付)**

# DUAL-SIGMA COORDINATE SYSTEM FOR IMPROVEMENT OF COASTAL OCEAN MODEL

Kazuo NADAOKA, Tadakazu YOSHINO and Yasuo NIHEI

Sigma coordinate system employed in many coastal ocean models may have considerable errors in computing horizontal diffusion and horizontal pressure gradient in case of steep bottom slopes. In the present study, for more accurate calculation of coastal current and pollutant transport, a dual-sigma coordinate system is presented for a correct calculation of the horizontal diffusion and the horizontal pressure gradient without appreciable increase in computational load. This coordinate system, by introducing a horizontal interfacial plane, separates the flow field into the upper layer, where appreciable vertical variation in density may usually exist, and the lower layer on an uneven seabed; in each of which the sigma coordinate system is employed. This new coordinate system is applied to some simple cases to examine its fundamental validity and performance, demonstrating that the dual-sigma coordinate system may have much higher accuracy than the sigma coordinate system.