

開水路凹部のせん断混合層における 乱流構造のウェーブレット解析

神田 徹¹・宮本仁志²・楳野 渉³

¹正会員 工博 神戸大学教授 工学部建設学科 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

²正会員 修士(工学) 神戸大学助手 工学部建設学科 (同上)

³正会員 学士(工学) 島根県 (〒690-8501 松江市殿町1)

開水路凹部の主流一凹部境界における混合層流れを対象として、ウェーブレット変換を用いた流れの解析を行った。まず、PIVにより計測した瞬時の流速分布に対して連続ウェーブレット変換を施し、大規模渦の空間スケール・移流速度・発生周期など流れの特性を明らかにした。また、流速時系列に同変換を適用することにより大規模渦の周波数特性を抽出し、これらの結果から渦の空間スケールへ周期の関係を定量的に評価した。次に、多重解像度近似によって分解した流速時系列を用いて周波数階層別の流下・鉛直方向の運動エネルギー成分を算出し、それらの階層を大規模渦の周波数帯を含む3つの帶域に分類した。適用結果から、ウェーブレット変換は大規模渦など乱流の組織的な構造を解析する手法として有効であることが確認できた。

Key Words : wavelet transform, large-scale vortex, turbulent mixing layer, open-channel, concave bed

1. 序 論

近年の河川整備においては、水環境の保全・創造という観点からの改修工法が積極的に取り入れられつつあり、生態系や景観などを考慮した河道設計を行うとともに、その維持・管理に対しても検討を加えることが必要となっている。このための水理設計の特徴のひとつは、平均化された水理量だけではなく、流れの時間的・空間的な変動特性が重要となることである。具体的には、瀬と淵、わんど等の断面変化部や多様な河道形状において、流れの場所的変化や乱流特性を的確に予想することが、河川環境面からも洪水・土砂制御の面からも要求される。

筆者らは、このような河道断面変化部での流れの挙動を解明することを目指して研究を進めているが、その流況特性は未だ解明されていない部分が多い。そこで、本研究では、極めて単純な断面変化部(凹部)における開水路流れを対象として、その凹部での乱流をウェーブレット変換を用いて解析することにより、新たな視点から流れの挙動を考究する。

開水路凹部流れに関しては、近年では、筆者ら¹⁾が Particle Image Velocimetry(PIV) と Large Eddy

Simulation(LES)を用いた乱流解析を、櫛津・山本²⁾がレーザー流速計、PIV、LES を用いた乱流構造の研究を行っている。それらの研究では、特に主流一凹部境界のせん断混合層(以下、「凹部混合層」と略記)に発生する大規模渦の挙動について興味ある知見が示されている。しかしながら、この大規模渦など乱流の組織構造については、時間・空間の特性スケールや流れ内部での動力学的機構が未だよく整理されておらず、流れの挙動解明に課題が残されている。

本研究で用いるウェーブレット変換³⁾は、1980年代初頭に登場し、その数学的な基礎理論が体系化されてきた比較的新しい応用数学である。この変換の特徴は、マザーウェーブレットと呼ばれる関数を拡大・縮小および移動させて変換に用いることによって、信号に含まれる局所的な変動特性を表現できることである。このことは、凹部混合層における大規模渦など流れの局所的な組織構造を解析するのに、かなり有効なものと考えられる。波数・周波数など変動の特性を調べるために従来用いられているフーリエ変換では、変換前の関数の分布情報(例えば、周波数解析を行った場合の局所的な時間軸情報)が

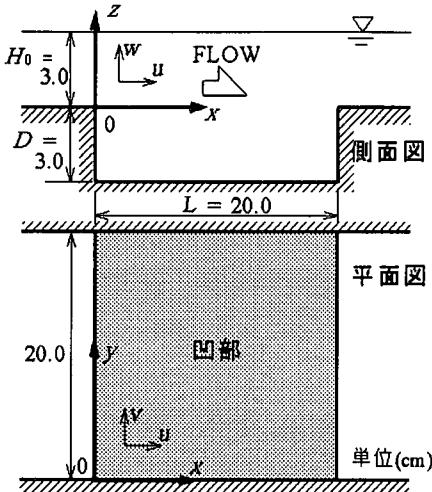


図-1 対象とする開水路凹部の模式図

表-1 実験条件

流量 : Q (cm ³ /sec)	758
流入水深 : H_0 (cm)	3.0
流入部での断面平均流速 : U_0 (cm/sec)	12.6
Reynolds 数 : $Re = U_0 H_0 / \nu$	3800
Froude 数 : $Fr = U_0 / (g H_0)^{1/2}$	0.23
凹部形状比 : $\eta = L / D$	6.67

失われるため、このような解析は不可能である。

流体力学・乱流研究の分野においては、Farge⁴⁾が、連続ウェーブレット変換・離散ウェーブレット変換の特徴および流れの解析への適用性・方向性について優れたレビューを行っている。そこでは、ウェーブレット変換は Tennekes と Lumley の渦モデル⁵⁾を想起させ、渦の時空間的変動様相を解析する上で有効な手法であることが述べられている。また、Liandrat と Moret-Bailly⁶⁾は、乱流組織構造の解析手法として従来用いられてきた VITA 法 (variable interval time averaging) とウェーブレット変換の性能比較を行い、信号の多重スケール分解が可能であるウェーブレット変換の優位性を示している。航空・機械など流体工学の分野においても、噴流、後流を対象としてウェーブレット変換を用いた乱流の組織構造の解析が行われている^{7)~10)}。

本文の主要な論点は、(1)連続ウェーブレット変換を用いた大規模渦の挙動特性の抽出、(2)多重解像度近似(多重解像度解析)による流下・鉛直方向の運動エネルギー成分の階層構造解析、である。これらによって凹部混合層での乱流特性を明らかにするとともに、ウェーブレット変換の適用性を検討する。

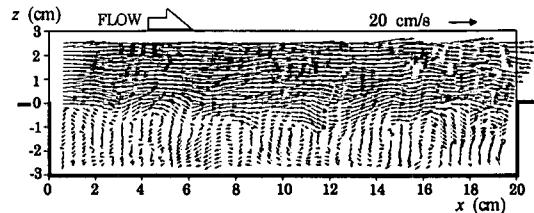


図-2 瞬間流速ベクトルの一例

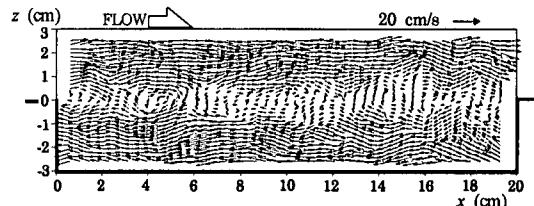


図-3 凹部内の x-方向平均流速で動く移動座標をもとにした瞬間流速ベクトル

2. 対象とする開水路凹部における流れ

図-1に示すように、直線開水路に凹部を設け、瞬時の面的な流速をPIV¹¹⁾により計測した。実験条件を表-1に示す。PIVの計測断面は凹部の鉛直中央($y=10\text{cm}$)であり、画像のサンプリング周波数は60Hz、可視化画像の空間分解能(1pixel)は約0.42mm、計測時間は約33秒間(2000画像)である。

本研究で用いたPIVの特徴は、非接触・多点同時の計測が可能であり、瞬時に移り変わる流れの全体像を定量的に把握できることである。一方、序論で述べた研究^{4), 6)~10)}などにおいてウェーブレット解析で取扱っている実験値は、筆者らの知る限り、高々数点でレーザー流速計など点計測手法によって得られた時系列データである。本研究で対象とするような乱流の大規模な組織構造を解析する場合、乱流の時空間変化を面的に捉えられるPIVの優位性は明らかである。その場合、PIVの時空間分解能(60Hz, 0.42mm)を超える計測精度は期待できないが、それより大きなスケールの変動成分は解析対象になる。また、可視化画像のパターンマッチングによって流速値を得るPIVの計測原理に起因して、上述の時空間分解能付近で計測値にノイズ(サブピクセル内の変位に関する誤差)を含むが、ウェーブレット変換は信号の局所的な変動特性を条件抽出できるので、大規模な組織構造を主な解析対象とする本研究においては、問題はないものと考える。

図-2にPIVによる瞬間流速ベクトルの計測結果の一例を、図-3に凹部内のx-方向平均流速(6.04 cm/sec)で移動する座標をもとにした瞬間流速ベク

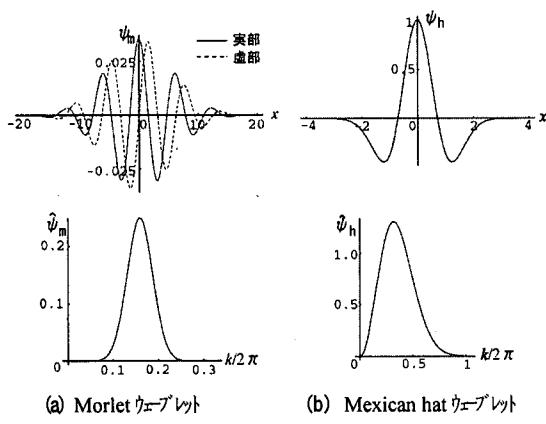


図-4 マザーウェーブレット

トル(図-2に対応)を示す。凹部混合層において流速ベクトルは激しく変動しており、自由せん断流れが形成されている。また、図-3より、凹部混合層の流れの中に組織的な渦(長さスケールが2~6cm程度)の存在が認められる。本文では、この組織的な渦構造を含む凹部混合層流れに焦点を当てる。そこで、計測した流速ベクトルのうち、主流-凹部境界($y=10\text{cm}$, $z=0$)での x 軸, z 軸方向の流速成分 u, w を用いてウェーブレット解析を行う。

3. ウェーブレット変換の理論

以下に、本解析で用いたウェーブレット変換の概要を記す。なお、本研究では流速の x -方向のみの変化および流速時系列を解析対象とするので、一次元ウェーブレット変換(独立変数を x で代表する)について説明する。

(1) マザーウェーブレット

ウェーブレット変換に用いる関数は、マザーウェーブレットと呼ばれる。これは、フーリエ変換における三角関数に対応するものである。マザーウェーブレット $\psi(x)$ には様々な関数があり、特定の関数を指すものではない。式(1)に示すアドミッシブル条件(不等式)を満たす関数であれば、その関数は $\psi(x)$ として定義でき、連続ウェーブレット変換に用いることができる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(k)|^2 \frac{dk}{|k|} < \infty \quad (1)$$

ここに、 k は波数、 $\hat{\psi}(k)$ は $\psi(x)$ のフーリエ変換である。さらに、 $\psi(x)$ が可積分関数であれば、式(1)

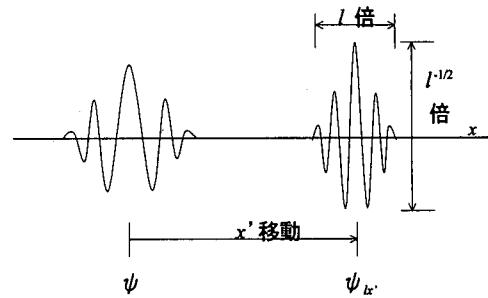


図-5 ウェーブレットの拡大縮小、移動の概念図

は次式に変形できる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \quad \text{or} \quad \hat{\psi}(k=0) = 0 \quad (2)$$

上式は $\psi(x)$ の分布が振動的であることを意味する。

本研究で用いたマザーウェーブレット $\psi(x)$ および対応する $\hat{\psi}(k)$ を図-4に示す。図-4(a)は、複素数ウェーブレットの一つであるMorletウェーブレット $\psi_m(x)$ (式(3))、 $\hat{\psi}_m(k)$ であり、図-4(b)は、実数ウェーブレットのMexican hatウェーブレット $\psi_h(x)$ (式(4))、 $\hat{\psi}_h(k)$ である。

$$\psi_m(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} \exp(-x^2/\sigma^2) \exp(-ix) \quad (3)$$

$$\psi_h(x) = (1 - 2x^2) \exp(-x^2) \quad (4)$$

ここに、式(3)中の σ は分布の幅を規定する任意の実数である。

図-4に示すように、 $\psi(x)$ の閾数値はコンパクトなサポートをもつ(閾数値がゼロでない区間が有限である)ので、この閾数 $\psi(x)$ を用いるウェーブレット変換によって、信号に含まれる局所的な変動特性的解析が可能となる。また、 $\hat{\psi}(k)$ は図に示すような波数区間でコンパクトサポートをもち、この区間の幅は $\psi(x)$ を波数帯域フィルターと見なしたときの波数分解能を示すものである。 $\hat{\psi}_m(k)$ と $\hat{\psi}_h(k)$ を比較すると、波数分解能はMorletウェーブレットが、空間分解能はMexican hatウェーブレットが、それぞれ一桁程度高いことがわかる。

(2) 連続ウェーブレット変換

上述のマザーウェーブレット $\psi(x)$ を用いることによって、閾数 $f(x)$ の連続ウェーブレット変換 $W[f]$ は次式により定義される⁴⁾。

$$W[f] = \tilde{f}(l, x') = \langle \psi_{k'} | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{k'}^*(x) dx \quad (5)$$

ここに、

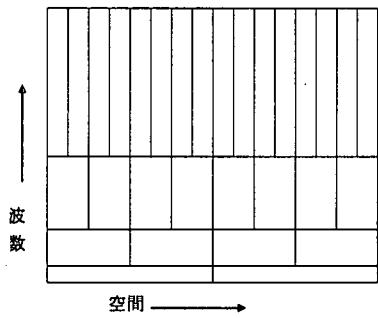


図-6 空間-波数(スケール)平面での離散ウェーブレット変換の分割の概念図

$$\psi_{lx'} = l^{-1/2} \psi\left(\frac{x-x'}{l}\right) \quad (6)$$

であり、 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は関数の内積を、" * "は複素共役を表し、 $\tilde{f}(l, x')$ は連続変換で得られるウェーブレット係数である。 l, x' はそれぞれ、ウェーブレット $\psi_{lx'}$ (式(6))における幅の拡大・縮小パラメータ、位置の移動パラメータである(図-5)。具体的には、例えば流速分布 $u(x)$ を変換する場合、パラメータ l, x' はそれぞれ $2\pi/k, x$ に対応する。なお、式(6)右辺の $l^{-1/2}$ は $\psi_{lx'}$ を規準化するための係数である。

式(5)より、 $W[f]$ は $\psi_{lx'}$ と $f(x)$ の内積となっており、 $\psi_{lx'}$ を参照関数とするパターンマッチングを行っていると解釈できる。この場合、 $\tilde{f}(l, x')$ は $\psi_{lx'}$ と $f(x)$ の相関を表す指標と考えられる。この $\tilde{f}(l, x')$ とパラメータ l, x' を用いることによって、関数 $f(x)$ の局所的な波数特性が解析できる。本研究では、この連続ウェーブレット変換を用いて大規模渦の挙動特性を解析する。

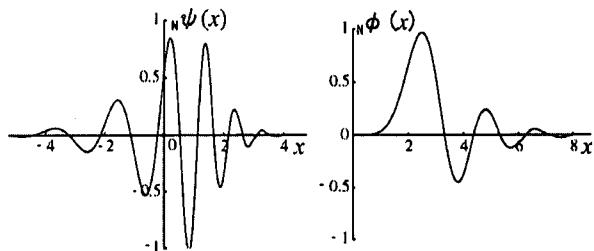
(3) 離散ウェーブレット変換と多重解像度近似

連続ウェーブレット変換がフーリエ変換に対応するのに対して、離散ウェーブレット変換はフーリエ級数に、多重解像度近似(多重解像度解析)はフーリエ展開に、それぞれ対応する。すなわち、離散ウェーブレット変換は、離散的な拡大・縮小および移動に対して正規直交化した基底関数をウェーブレットとして用いるものである。また、多重解像度近似は、その正規直交ウェーブレットとスケーリング関数(後述)を用いて、関数 $f(x)$ をそれら基底関数で構成される空間に展開するものである。

$f(x)$ の離散ウェーブレット変換は次式で定義される。

$$\tilde{f}_{ji} = \langle \psi_{ji} | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{ji} dx \quad (7)$$

ここに、



(a) マザーウェーブレット $N \psi$ (b) スケーリング関数 $N \phi$
図-7 多重解像度近似の基底関数(Daubechies, N=10)

$$\psi_{ji}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - i) \quad (8)$$

$$\langle \psi(x) | \psi(x-n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \psi(x-n) dx = \delta_{n,0} \quad (9)$$

上式において、 ψ_{ji} は正規直交ウェーブレット、 \tilde{f}_{ji} は離散変換によって得られるウェーブレット係数、 δ はクロネッカーデルタ、 i, j, n は任意の整数である。式(8), (9)より、 ψ_{ji} は移動 $2^{-j}i$ に対して直交する関数となる。図-6に、空間-波数平面における離散ウェーブレット変換の分割の概念図を示す。一つの離散ウェーブレット ψ_{ji} は、 $l=2^{-j}, x'=2^{-j}i$ で分割された図中の各セルで定義されている。同図より、変換における空間分解能と波数分解能はトレードオフの関係にあり、一方が高分解能であれば他方の分解能は低くなることがわかる(不確定性関係)。

多重解像度近似は次式で示される。

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle \phi_{mi} | f \rangle \phi_{mi}(x) + \sum_{j=m}^{-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle \psi_{ji} | f \rangle \psi_{ji}(x) \quad (10)$$

ここに、

$$\phi_{ji}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - i), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1 \quad (11)$$

$$\langle \phi(x) | \phi(x-n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi(x-n) dx = \delta_{n,0} \quad (12)$$

$$\langle \phi(x) | \psi(x-n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \psi(x-n) dx = 0 \quad (13)$$

上式の ϕ はスケーリング関数である。式(11)の ϕ_{ji} は、式(12), (13)に示すように ϕ_{ji} および ψ_{ji} の離散移動 $2^{-j}i$ に対して直交する関数である。図-7に、本研究で用いたDaubechiesの正規直交ウェーブレット $N \psi$ およびスケーリング関数 $N \phi$ ($N=10$; 後述)を示す^[2]。 ψ_{ji} , ϕ_{ji} を波数帯域分割フィルターと考えれば、前者は波数帯を二分割するハイパスフィルター、後者はローパスフィルターとなる。したがって、式(10)は、それらのフィルターを用いて $f(x)$ を各波数帯の階層構造に展開したものと考えられる。

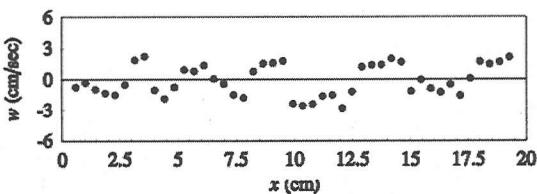


図-8 主流-凹部境界における z 方向瞬間流速 w の x -方向分布の例

本文では、この多重解像度近似を流速時系列に適用して運動エネルギー各方向成分の階層構造を調べる。

4. 連続ウェーブレット変換による大規模渦の挙動特性の抽出

凹部混合層における流速変動について、上述の連続ウェーブレット変換を用いた流れの解析を行った。以下に、その結果を示す。

(1) 瞬時流速分布の空間-波数平面への展開

解析対象とした流速変動は、主流-凹部境界($z=0$)における同時刻の流速分布 $w(x)$ である。図-8に、ある時刻の $w(x)$ を示す。 $w(x)$ の x -方向(流下方向)変化にはかなり規則的な振動が見られ、また下流側の方が上流側に比べて低波数の振動となっている。

この流速 $w(x)$ について、式(5)によりウェーブレット係数 $\tilde{w}(k,x)$ を算出した。ここで、式(5)のパラメータ l, x' はそれぞれ、 $2\pi/k, x$ に対応する。図-9は空間 x -波数 k 平面における $\tilde{w}(k,x)$ の等値コンターである。図-9(a)はマザーウェーブレットとしてMorletウェーブレット $\psi_m(x)$ を用いた場合の変換結果(実部)であり、図-9(b)はMexican hatウェーブレット $\psi_h(x)$ を用いた結果である。以下に、 $\tilde{w}(k,x)$ の示す意味および用いたウェーブレットと $\tilde{w}(k,x)$ 分布の関係について述べた上で、流速変動特性を調べる。

3.(2)で記したように、連続ウェーブレット変換は一種のパターンマッチングであり、図-9(a), (b)に示す係数 $\tilde{w}(k,x)$ の値は流速 $w(x)$ とウェーブレットの相関の程度を表す。したがって、 $w(x)$ の局所的な卓越波数は、その極値 $\tilde{w}(k,x)_{\lim}$ の座標 k_{\lim}, x_{\lim} からわかつることになる。図中において x -方向に極大値・極小値が交互に現れるのは、 $w(x)$ とウェーブレットの位相差によるものである。図-9(a)と(b)を比較すると、 $\tilde{w}(k,x)_{\lim}$ は同じ位置 x_{\lim} に分布しているが、図-9(a)の方が局所的な卓越波数を明確に示している。この差違は、マザーウェーブレット

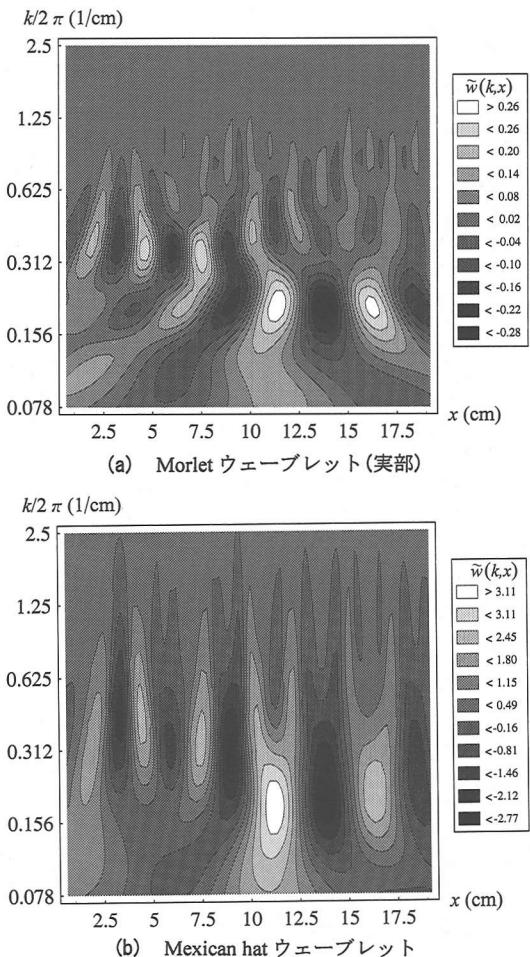


図-9 空間-波数平面における連続ウェーブレット係数 $\tilde{w}(k,x)$ の等値コンター

$\psi_g(x)$, $\psi_m(x)$ のもつ波数分解能の違いに関係している(4.(1)を参照)。

図-9(a), (b)において、ウェーブレット係数の極大値 $\tilde{w}(k,x)_{\max}$ に着目すると、その x -方向の位置 x_{\max} は凹部混合層の上流側で約2~3cmごとに現れ、その間隔 Δx_{\max} は下流にいくほど大きくなる。また、 $\tilde{w}(k,x)_{\max}$ の波数 k_{\max} (卓越波数)は下流にいくほど小さくなる($k_{\max}/2\pi = 0.156 \sim 0.625$ (1/cm))。このことは、流速 $w(x)$ のもつ流れの局所的な特長スケール $2\pi/k_{\max}$ が流下方向におおよそ1.6から6.4(cm)へと増大することを示す。さらに、これらの x_{\max} と $2\pi/k_{\max}$ は、図-3に示した凹部混合層での大規模渦の位置・スケールとよく一致している。この結果から、連続ウェーブレット変換によって $w(x)$ から大規模渦の位置・スケールが適切に抽出できることがわかつた。

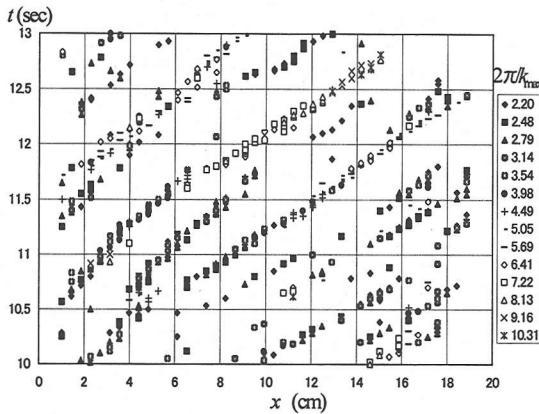


図-10 時空間平面上の $\tilde{w}(k,x)_{\max}$ の分布
(波数特性) ($t=10.0 \sim 13.0$ (sec))

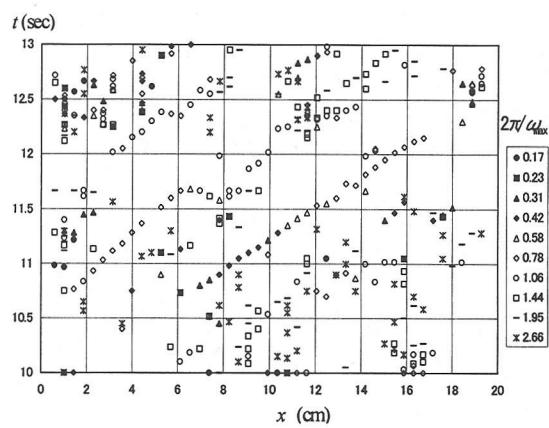


図-11 時空間平面上の $\tilde{w}(\omega,t)_{\max}$ の分布
(周波数特性) ($t=10.0 \sim 13.0$ (sec))

(2) 大規模渦の挙動特性

次に、この極大値 $\tilde{w}(k,x)_{\max}$ の位置 x_{\max} とスケール $2\pi/k_{\max}$ を各時刻 t ごとに抽出することにより、空間 x -時間 t の平面における $\tilde{w}(k,x)_{\max}$ の分布を考察した。図-10に $\tilde{w}(k,x)_{\max}$ の分布を示す。ここで、抽出に用いたマザーウェーブレットは、Mexican hat ウエーブレットである(図-4(b), 9(b)に対応)。(波数分解能の高いMorlet ウエーブレットを用いた場合、大規模渦の変動成分のみならず小スケールの変動成分も抽出される。) 図-10の $x-t$ 平面上で帯状に連なるプロットは、大規模渦の走時挙動を表すものと考えられる。一つの帯において、大規模渦のスケールを示す $2\pi/k_{\max}$ は流下に伴い増大しているのがわかる。大規模渦の移流速度は、これらの帯の勾配から $5 \sim 8$ (cm/sec)と算出される。また、このような $\tilde{w}(k,x)_{\max}$ の帯は全計測時間約33秒の間に約50個確認でき、これより渦の発生周期の平均は0.6～0.7(sec)と推測される。

次に、連続ウェーブレット変換を主流-凹部境界($z=0$)の各位置 x における流速時系列 $w(t)$ に適用し、時間 t -角周波数 ω の平面上で流れ場を解析する。図-11に示す $\tilde{w}(\omega,t)_{\max}$ の分布は、 $t-\omega$ 平面上における極大値 $\tilde{w}(\omega,t)_{\max}$ の時間 t_{\max} と卓越周期 $2\pi/\omega_{\max}$ を各位置 x で抽出することによって求めたものである。空間-波数平面上からの抽出(図-10)に比べて感度は低いが、大規模渦の走時挙動(移流)および渦の周期 $2\pi/\omega_{\max}$ が抽出されている。

以上の結果をもとに、大規模渦の空間スケールと周期の相関関係を考察する。図-12は、上記の2つの方法で抽出したウェーブレット係数極大値の座標が一致した事象のみについて空間スケール 2π

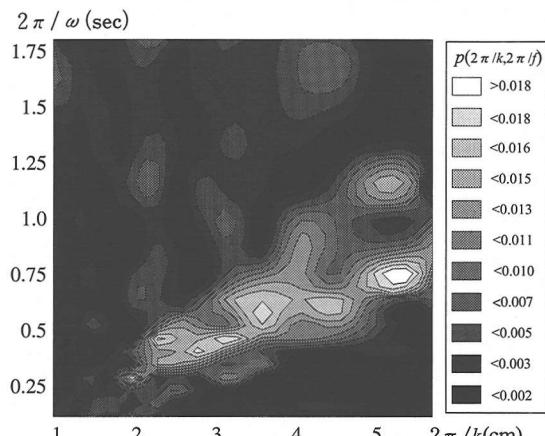


図-12 大規模組織渦のスケール～周期の関係

$/k$ (cm) と周期 $2\pi/\omega$ (sec)を対応させ、両者の結合確率分布 $p(2\pi/k, 2\pi/\omega)$ を描いたものである。両者の間には正の相関関係があることが確認できる。すなわち、時間スケールが大きい渦ほどその空間スケールも大きくなるという、大規模渦の時空間スケールの特性を定量的に示している。

5. 多重解像度近似を用いた運動エネルギー成分の階層構造解析

凹部混合層での流速時系列を対象として、多重解像度近似を用いた流れの解析を行った。以下に、その結果を示す。

(1) 流速時系列の多重解像度近似

3.(3)に記したように、多重解像度近似は、ス

表-2 各レベルの周波数帯

レベル j	近似流速成分 v_j^s	変動流速成分 v_j^w
0	30Hz 以下	
-1	15Hz 以下	15~30Hz
-2	7.5Hz 以下	7.5~15Hz
-3	3.8Hz 以下	3.8~7.5Hz
-4	1.9Hz 以下	1.9~3.8Hz
-5	0.9Hz 以下	0.9~1.9Hz
-6	0.5Hz 以下	0.5~0.9Hz
-7	0.2Hz 以下	0.2~0.5Hz
-8	0.1Hz 以下	0.1~0.2Hz

ケーリング関数 ϕ_{ji} とウェーブレット ψ_{ji} を用いることにより、元の信号を低周波数と高周波数の成分からなる階層構造に分解する。ここで対象とする時系列は、主流一凹部境界 ($z = 0$) の各位置 x における流速ベクトル $v(t) = (u(t), w(t))$ である。式(10)を用いると、 $v(t)$ は式(14)となる。なお、式(10)中の独立変数 x は式(14)では時間 t となる。

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0^s(t) \\ &= v_{-1}^s(t) + v_{-1}^w(t) \\ &= v_{-2}^s(t) + v_{-2}^w(t) + v_{-1}^w(t) \\ &= v_j^s(t) + \sum_{m=j}^{-1} v_m^w(t) \end{aligned} \quad (14)$$

ここに、

$$v_j^s(t) = \sum_i \langle \phi_{ji} | v \rangle \phi_{ji}(t) \quad (15)$$

$$v_j^w(t) = \sum_i \langle \psi_{ji} | v \rangle \psi_{ji}(t) \quad (16)$$

$$\langle \phi_{ji} | v \rangle = \int_0^T v(t) \phi_{ji} dt \quad (17)$$

$$\langle \psi_{ji} | v \rangle = \int_0^T v(t) \psi_{ji} dt \quad (18)$$

であり、 T はPIVの計測時間である。 j は分解した周波数帯を指示する負の整数であり、ここでは表-2に示す周波数帯に応じてレベル j を設定している。 $v_j^s(t) = (u_j^s(t), w_j^s(t))$ 、 $v_j^w(t) = (u_j^w(t), w_j^w(t))$ はそれぞれ、レベル j における近似流速成分(低周波数成分)、変動流速成分(高周波数成分)である。表-2での最高周波数は、PIV計測のナイキスト周波数(30Hz)であり、レベル j での $v_j^s(t)$ 、 $v_j^w(t)$ の周波数帯は、レベル $j+1$ での $v_{j+1}^s(t)$ の帯域を二分割するように設定される。

ここで用いた正規直交基底 ψ_{ji} 、 ϕ_{ji} は、図-7に示すDaubechiesのウェーブレット ψ とスケーリング

関数 ϕ ($N=10$) を式(8)、(11)に適用したものである。 ψ 、 ϕ は、自然数 N が大きいほどその分布が滑らかになり、また、周波数の帯域分割フィルターとしての遮断性能が高くなる。このことより、Daubechies³⁾によって関数分布が明示されている ψ 、 ϕ の中で、最大数 $N=10$ を基底関数として選択した。

実際の計算には、これら基底関数 ϕ 、 ψ を組み込んだ分解・再構成アルゴリズムを用いた。

図-13に、多重解像度近似の結果を示す。レベル j が小さくなるにしたがって、高周波数の変動流速成分 $u_{j+1}^w(t)$ が近似流速成分 $u_j^s(t)$ から分離され、時系列 $u(t)$ の変動が段階的に除去されていくのがわかる。また、 $u_j^w(t)$ (右側の一連の図)は、変動成分の卓越する時間帯を明示している。レベル $j = -1 \sim -3$ の高周波数帯においては、時間軸上でほぼ定常的に $u_j^w(t)$ が継続している。低周波数になるにしたがって $u_j^w(t)$ は局所的な時間帯でのみ変動するようになり、その振幅は大きくなる(図中の○で囲った部分)。このような時間-周波数解析は、時間軸情報が失われるフーリエ展開では不可能であり、コンパクトサポートの基底関数を用いた多重解像度近似によって可能となる。

(2) 流下・鉛直方向運動エネルギー成分の階層構造

各位置 x の変動流速成分 $v_j^w(t)$ を用いて、 $x-t$ の時空間平面での乱れ運動エネルギーの流下方向・鉛直方向の成分 $v_j^{w2}/2$ を算出した。図-14、15に、大規模渦の周波数帯を含むレベル $j = -3 \sim -6$ (4.2を参照)での $u_j^{w2}/2$ 、 $w_j^{w2}/2$ の分布 ($t = 10 \sim 15$ sec) をそれぞれ示す。図-14より、凹部上流端の近傍において x -方向成分 $u_j^{w2}/2$ は全周波数帯で大きい値をとる。これは、上流端近傍でせん断による流れの不安定化が起こっていることを示唆する。この位置以外の凹部中・下流部では、レベル j が小さくなる(低周波数になる)とともに $u_j^{w2}/2$ が増加する。一方、図-15に示すように、 z -方向成分 $w_j^{w2}/2$ は凹部上流端近傍では値は小さい。しかしながら、下流へいくにしたがってレベル $j = -4 \sim -6$ での $w_j^{w2}/2$ が流下方向に連なるように大きくなる。このことは $w_j^{w2}/2$ の分布でも認められ、大規模渦が乱れのエネルギーを集積させながら流下していることが推察できる。

次に、式(14)を用いて、各位置 x における運動エネルギー $v^2/2$ (時間平均)の各方向成分 $u^2/2, w^2/2$ を、次式に示す各周波数帯の成分に分解した。

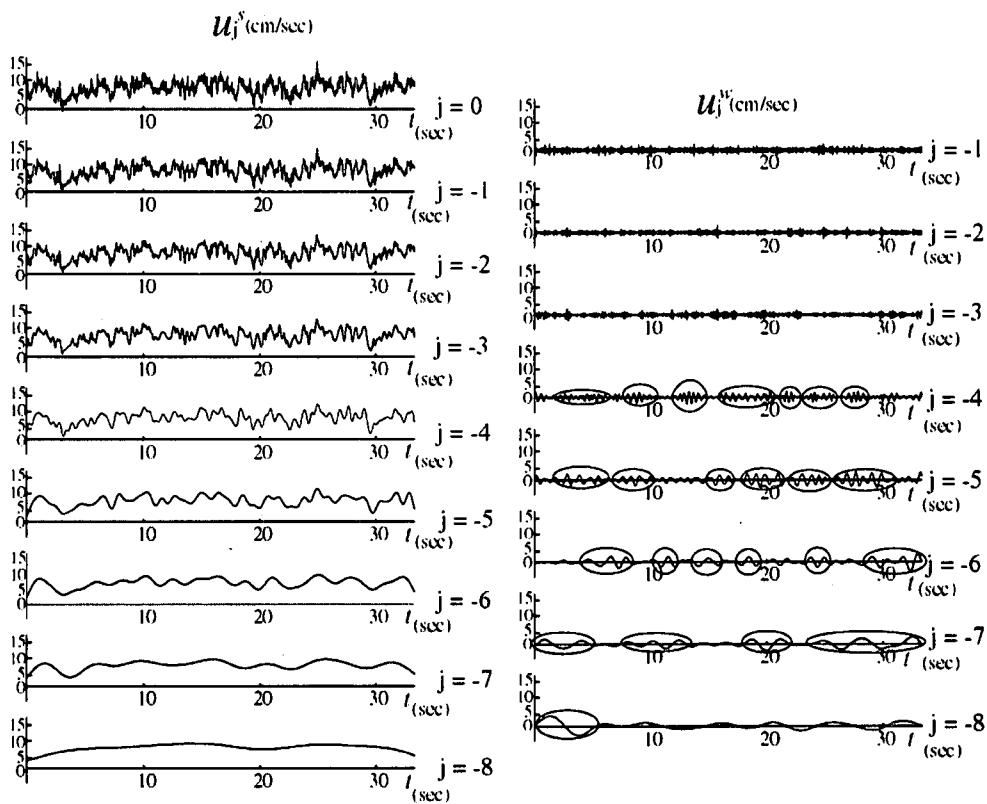


図-13 流速の多重解像度近似. (流速 u の近似流速成分 u_j^s , 変動流速成分 u_j^w への分解. $x = 8.7$ cm)

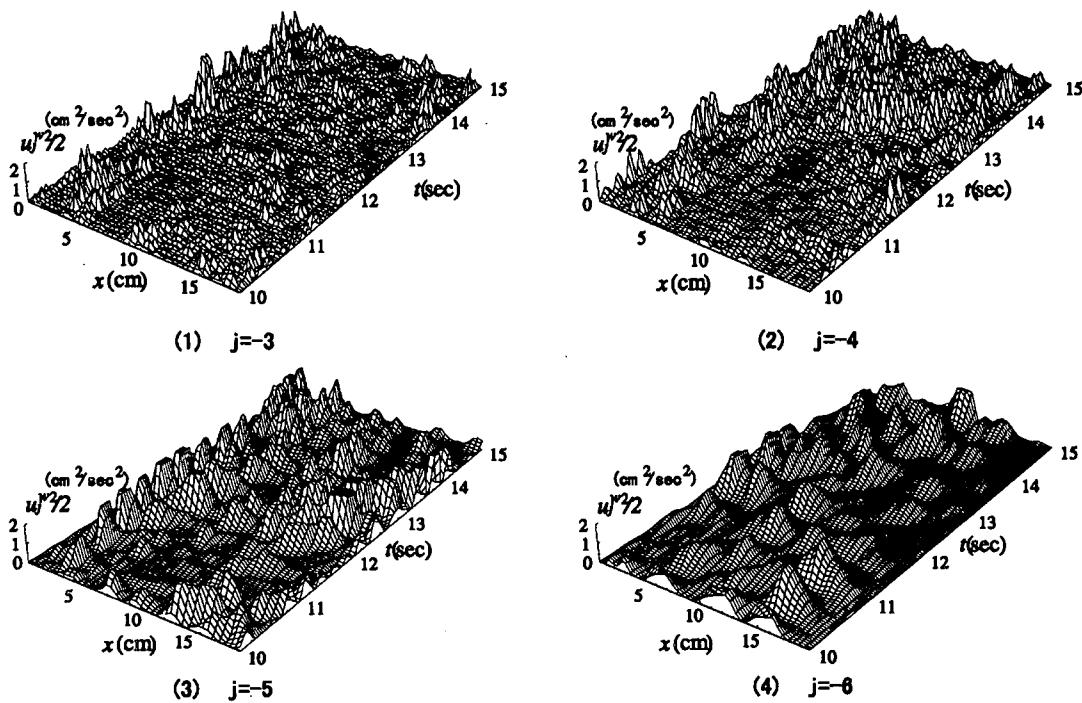


図-14 各レベルにおける乱れ運動エネルギーの x -方向成分 $u_j^{x2}/2$ の時空間分布
(レベル $j = -3 \sim -6$, $t = 10 \sim 15$ sec)

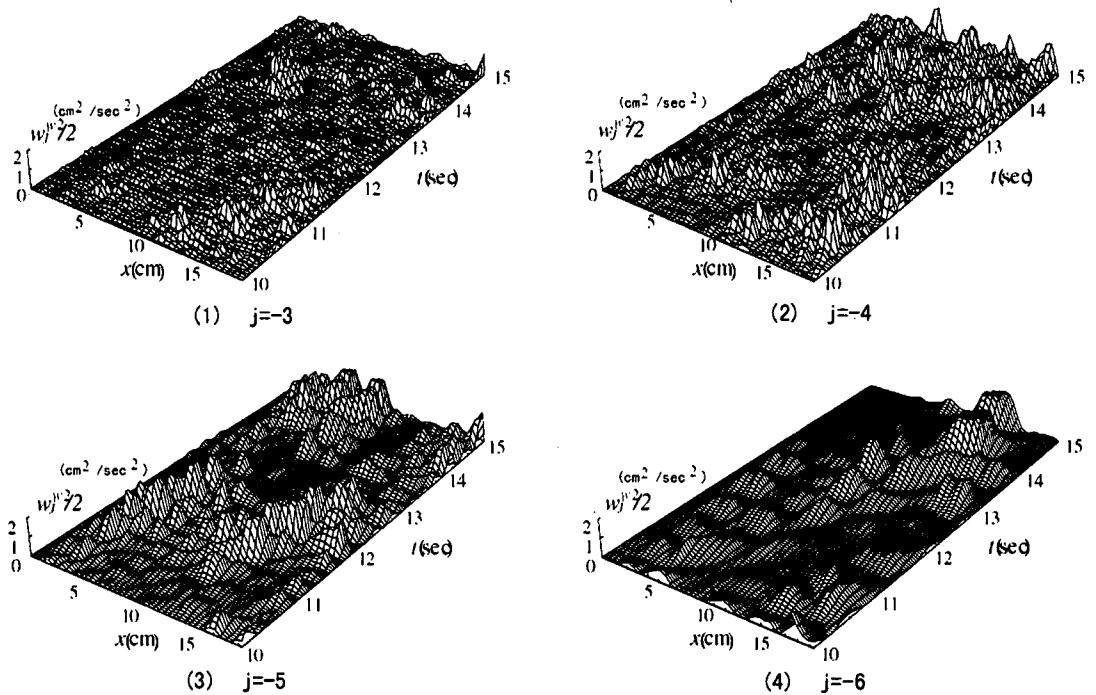


図-15 各レベルにおける乱れ運動エネルギーのz-方向成分 $w_j^{w2}/2$ の時空間分布
(レベル $j = -3 \sim -6$, $t = 10 \sim 15$ sec)

$$\begin{aligned}
 \overline{v^2}/2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (v_j^s(t) + \sum_{m=j}^{-1} v_m^w(t))^2 dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{2} v_j^{s2}(t) + \sum_{m=j}^{-1} v_m^s(t) v_m^w(t) + \sum_{m=j}^{-1} \frac{1}{2} v_m^{w2}(t) \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \overline{v_j^{s2}} + \sum_{m=j}^{-1} (\overline{v_m^s v_m^w} + \frac{1}{2} \overline{v_m^{w2}}) \\
 &= \frac{1}{2} \overline{v_j^{s2}} + \sum_{m=j}^{-1} \Delta k'_{v_m}
 \end{aligned} \quad (19)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 \Delta k'_{v_m} &= \overline{v_m^s v_m^w} + \overline{v_m^{w2}} / 2 \\
 &\quad (I) \qquad \qquad (II) \\
 &= \overline{v_{m+1}^{s2}} / 2 - \overline{v_m^{s2}} / 2
 \end{aligned} \quad (20)$$

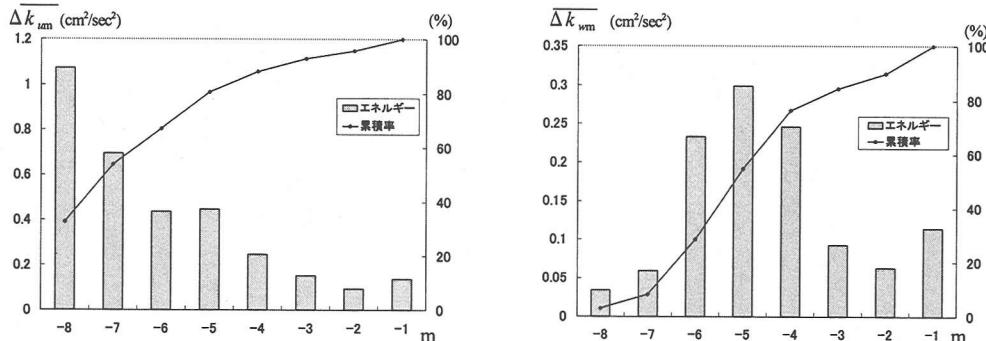
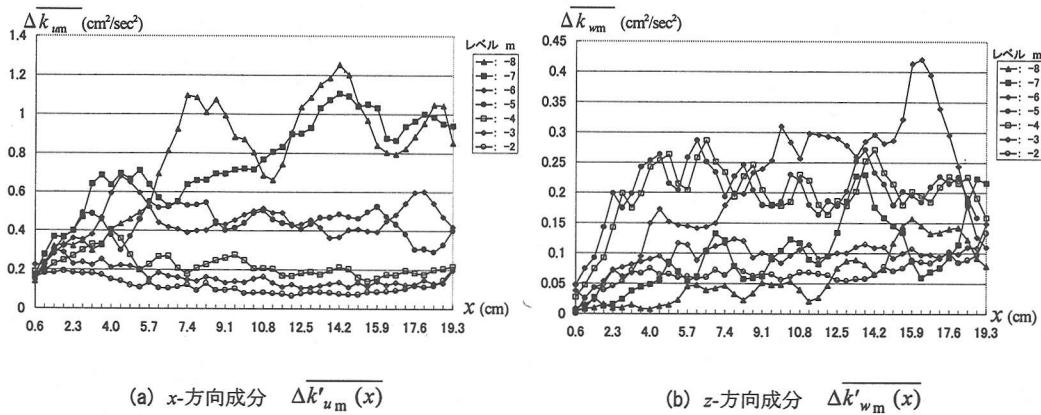
時間平均操作を施した物理量には、"ー"を冠している。 $\Delta k'_{v_m} = (\Delta k'_{u_m}, \Delta k'_{w_m})$ は、レベル m における近似流速と変動流速の相関項(式(20)の上段右辺(I)項)と乱れ運動エネルギー(同(II)項)の和であり、レベル $m+1 \sim m$ のもつ有効運動エネルギー(式(20)の下段)として解釈できる。

以下では、式(19), (20)の各項を評価することによって、凹部混合層における各方向の運動エネル

ギー成分 $\overline{v^2}/2$ の周波数特性を考察する。

図-16に、各周波数帯の有効運動エネルギー成分 $\Delta k'_{v_m}$ の一例を示す($x=8.7$ cm)。図-16(b)より、z-方向成分 $\Delta k'_{w_m}$ は大規模渦の周波数帯付近(レベル $m = -4 \sim -6$)において卓越している。図-16(a)のx-方向成分 $\Delta k'_{u_m}$ もこのエネルギー集中の傾向は見受けられるが、顕著なものではない。むしろ、 $\Delta k'_{u_m}$ は低周波数成分が卓越し、高周波数成分になるにしたがって減衰していく。なお、最も高い周波数帯(レベル $m = -1$)でのエネルギーが大きい値をとるのは、PIVの計測精度の限界による誤差が入っているためと考えられる。以下の解析においては、このレベル $m = -1$ の値は検討対象外とする。

運動エネルギーの各方向成分 $\Delta k'_{v_m}$ の流下方向分布を図-17に示す。図-17(a)より、 $\Delta k'_{u_m}$ の周波数帯は次の3つの帯域に明確に分類できる：(i) 低周波数帯(レベル $m = -7, -8$)、(ii) 大規模渦の周波数帯(レベル $m = -5, -6$)、(iii) 高周波数帯(レベル $m = -2 \sim -4$)。まず、(i)の周波数帯では、下流側にいくほど $\Delta k'_{u_m}$ が増加する。これは、凹部境界層が流下方向に発達するに伴って、主流 u の低周波数成分が卓越することを示唆している。次に、(ii)の周波数帯では、 $\Delta k'_{u_m}$ が凹部上流側($x = 4.0$ cmまで)で下流方

(a) x -方向成分 $\Delta k'_{u_m}(x)$ (b) z -方向成分 $\Delta k'_{w_m}(x)$ 図-16 各周波数帯における有効運動エネルギーの各方向成分 $\Delta k'_{v_m}$ ($x = 8.7$ cm)(a) x -方向成分 $\Delta k'_{u_m}(x)$ (b) z -方向成分 $\Delta k'_{w_m}(x)$ 図-17 有効運動エネルギーの各方向成分 $\Delta k'_{v_m}$ の流下方向分布

向に増加し、その下流側ではほぼ一定となる。これより、上流端付近を除いて、他の周波数帯から大規模渦の周波数帯へのエネルギー収支は平衡状態にあると考えられる。(iii)の周波数帯では、上記二つの帯域の場合と比べて相対的に $\Delta k'_{u_m}$ が小さい。一方、図-17(b)では、全周波数帯で流下方向に $\Delta k'_{w_m}$ が増加する傾向が見られる。 $\Delta k'_{u_m}$ の場合ほど明確な分類はできないが、レベル $m = -4, -5$ の $\Delta k'_{w_m}$ が凹部上流側で卓越する。このレベルは、 $\Delta k'_{u_m}$ の(ii)の場合に対応する大規模渦の周波数帯と考えられる。また、低周波数帯(レベル $m = -7, -8$)においては、 $\Delta k'_{u_m}$ の場合に比べて $\Delta k'_{w_m}$ が1オーダー程度小さくなる。以上より、凹部混合層における各方向の運動エネルギー成分 $v^2/2$ の周波数特性は、大規模渦が卓越する周波数帯を境に、それより低周波数および高周波数の3つの帯域に分類されると考えられる。

次に、これら3つの周波数帯を考慮しつつ、式(20)右辺の各項および乱れの非等方性度の評価を行

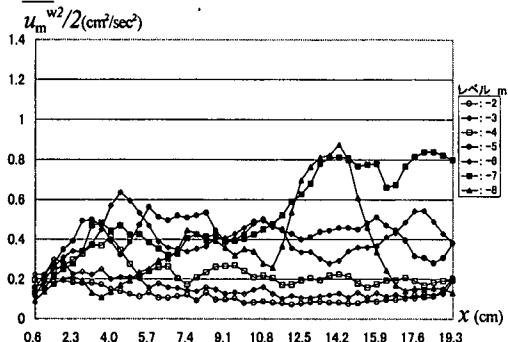
う。図-18、19に、乱れ運動エネルギー $v_m^{w^2}/2$ (式

(20)右辺(II)項)および相関項 $v_m^s v_m^w$ (同(I)項)の流下方向分布(各方向成分)をそれぞれ示す。図-18に示すように、 $v_m^{w^2}/2$ は $\Delta k'_{v_m}$ (図-17)の場合とほぼ類似の分布を呈する。ただし、低周波数帯での x -方向成分 $u_m^{w^2}/2$ は $\Delta k'_{u_m}$ の2/3倍程度となる。これは、図-19(a)に示すように、同じ低周波数帯において $u_m^s u_m^w$ が大きくなることに対応する。また、

図-19(b)より、 z -方向成分 $w_m^s w_m^w$ も低周波数帯に

おいて卓越しているが、 $u_m^s u_m^w$ に比べて小さい。

これらは、低周波数帯の x -方向流速変動成分が全周波数での乱れ(変動)エネルギーの駆動源となることを示唆する。



(a) x -方向成分 $\overline{u_m^w}^2 / 2$

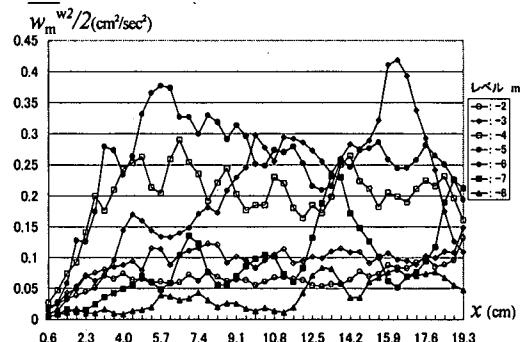
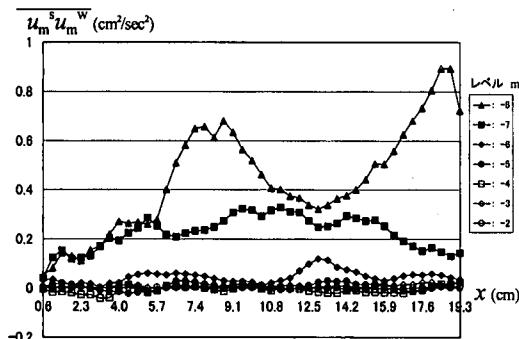


図-18 各方向における乱れ運動エネルギー成分 $\overline{v_m^w}^2 / 2$ の流下方向分布



(a) x -方向成分 $\overline{u_m^s u_m^w}$

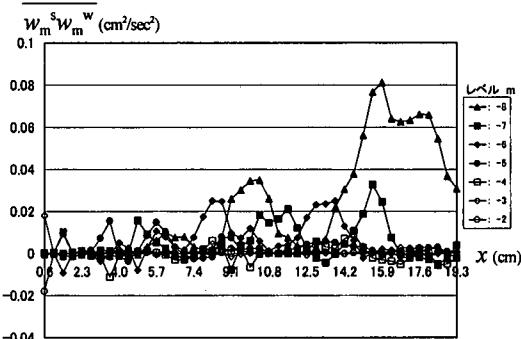


図-19 各方向における低周波・高周波成分の相関項成分 $\overline{v_m^s v_m^w}$ の流下方向分布

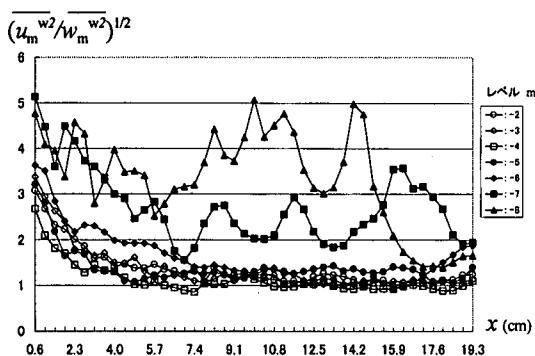


図-20 乱れの非等方性度 $(\overline{u_m^w}^2 / \overline{w_m^w}^2)^{1/2}$ の流下方向分布

乱れの非等方性度 $(\overline{u_m^w}^2 / \overline{w_m^w}^2)^{1/2}$ の流下方向分布を図-20に示す。凹部上流端近傍においては、全周波数帯で強い非等方性を呈する。これは、せん断

不安定による x -方向の流速変動が大きいためと考えられる。また、レベル $m = -7, -8$ の低周波数帶では凹部全域において非等方性度が大きいのに対して、他の周波数帯(大規模渦の周波数帯および高周波数帯)では流下方向に乱れが等方化していくのがわかる。

6. 結 論

開水路凹部における混合層流れを対象として、PIVにより計測した流速値にウェーブレット変換を適用して、乱流構造の解析を行った。本研究で得られた結果をまとめると、以下のようである。

(1) 大規模渦の特性抽出に関して：

(i) 連続ウェーブレット変換を適用することにより、凹部混合層での瞬時の流速構造を空間一波数平面におけるウェーブレット係数で表現した。その平面上でのウェーブレット係数の極値は、大

規模渦に対応すると判断できる。

(ii) ウエーブレット係数極大値の位置とその波数を抽出することにより、時空間平面上における大規模渦の移流速度、発生周期、空間スケールなど流れの特性を定量的に明らかにした。

(iii) 流速時系列にウェーブレット変換を適用して(i), (ii)と同様の解析を行うことによって、大規模渦のもつ卓越周期の時空間上における変化特性を明らかにした。

(iv) 大規模渦の空間スケールと卓越周期の結合確率分布を求めた結果、両者は正の相関関係にあることがわかった。

(2) 運動エネルギーの階層構造に関して：

(i) 多重解像度近似を適用して、凹部混合層での流速時系列を周波数別の階層構造に分解した。また、各周波数帯における流下方向・鉛直方向の変動流速の運動エネルギー成分を定量的に評価した。

(ii) 各周波数帯での特性を考察した結果、運動エネルギー各方向成分は次の3つの周波数帯に概ね分類された：①低周波数と高周波数の成分間で流速変動に相関がある低周波数帯、②大規模渦など乱流の組織構造が卓越する周波数帯、③等方性の微小な乱れからなる高周波数帯。

(3) ウェーブレット解析の適用性に関して：

上記(1), (2)より、ウェーブレット変換は凹部混合層における大規模渦など乱流の組織構造を解析する手法として有効であることが確認できた。良好な結果が得られた理由は、組織的な乱流変動の基本型とウェーブレット関数がよく合致したことによると考えられる。

以上より、ウェーブレット解析は、流れの時間的・空間的な変動特性の把握が重要となる今後の河道設計などにおいて、多様な流況特性を整理・評価する上で有用な手法であると考えられる。

参考文献

- 1) 藤田一郎, 神田 徹, 門脇正夫, 森田卓光：開水路凹部流れのPIVおよびLESによる乱流解析, 土木学会論文集, No.539/I-35, pp.79-88, 1996.
- 2) 補津家久, 山本義暢：開水路キャビティー流れの乱流構造に関する研究, 土木学会論文集, No.614/I-46, pp.51-63, 1999.
- 3) たとえば, Daubechies, I.: *Ten lectures on wavelets*, CBMS Lecture Notes Series, SIAM, 1991.
- 4) Farge, M.: Wavelet transforms and their application to turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol.24, pp.395-457, 1992.
- 5) Tennekes, H. and Lumley, J.L.: *A First Course In Turbulence*, The Massachusetts Institute of Technology Press, pp. 258-259, 1972.
- 6) Liandrat, J. and Moret-Bailly, F.: The wavelet transform - some applications to fluid dynamics and turbulence, *Eur. J. Mech., B/Fluids*, Vol. 9, No. 1, pp. 1-19, 1990.
- 7) Lewalle, J., Petagna, P. and Buresti, G.: Wavelet statistics and the near-field structure of coaxial jets, *AIAA paper*, 94-2323, 1994.
- 8) Higuchi, H., Lewalle, J. and Crane, P.: On the structure of a two-dimensional wake behind a pair of flat plates, *Phys. Fluids*, Vol. 6, No. 1, pp. 297-305, 1994.
- 9) 章 忠, 浜本嘉輔, 川畑洋昭, 富田栄二：ウェーブレット変換による非定常乱流解析, 日本機会学会論文集(B編), 第64巻, 618号, pp.295-302, 1998.
- 10) 阿部行伸, 木谷 勝, 望月 修：だ円板後流における低周波非定常性, 日本機会学会論文集(B編), 第64巻, 626号, pp.16-21, 1998.
- 11) 宮本仁志, 神田 徹, 藤田一郎, 池上 迅：PIVによる開水路凹部流れの計測および数値解析, 水工学論文集, 第41巻, pp.1049-1054, 1997.
- 12) Daubechies, I.: Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 41, pp.909-996, 1988.

(1999. 7. 5 受付)

WAVELET ANALYSIS ON TURBULENT STRUCTURE
IN MIXING LAYER OF OPEN-CHANNEL FLOW OVER CONCAVE BED

Tohru KANDA , Hitoshi MIYAMOTO and Wataru MAKINO

Turbulent structures in the mixing layer between the main-channel and the concave are analyzed using wavelet transforms. The flow is measured by a particle image velocimetry. The continuous wavelet transform of the velocities successfully detects the characteristics of the large-scale vortices along the mixing layer, such as the spatial scale, frequency, advection velocity and occurrence interval. The joint probability distribution of the scale and the frequency shows that there is a linear relationship between them. Then, the longitudinal and vertical amounts of the kinetic energy is clearly decomposed into the components according to the respective frequencies by using the multiresolutional analysis. The frequency ranges are classified into three groups that are characterized by the energy distributions of the components. These results strongly support the applicability of wavelet transforms to this flow.