

連続蛇行水路の高速流に関する非線形解析

細田 尚

正会員 工博 京都大学助教授 工学研究科土木工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

本研究は、連続蛇行水路に通水し水路勾配を変化させたときの水面形特性について、平面2次元流れの基礎式の線形解に存在する蛇行と水面の共鳴関係近傍の応答特性に着目して考察したものである。線形解と実験結果を比較した従来の研究に基づいて、見かけの抵抗の増加を考慮した非線形解析を行い、無次元水理パラメータと水面形特性の関係を検討した。その結果、蛇行の程度を表す無次元パラメータが大きくなると見かけの抵抗が大きくなり、流れのフルード数が共鳴関係を越えにくくなること、その場合の水面変動振幅とフルード数の関係が共鳴関係のフルード数より小さい領域の線形解に適合することを示した。

Key Words: open channel hydraulics, high velocity flows, non-linear analysis, meandering channel

1. はじめに

本研究は、開水路流れの一般的かつ基本的特性を解明することを目的として、側壁が波状境界である連続蛇行水路の高速流をとりあげ、水路蛇行と水面変動の応答について実験的、解析的に考察したものである。連続蛇行水路の流れに関しては、従来、河床変動を予測するための基礎として多くの研究が行われてきた。

解析的研究としては、水深積分された通常の平面2次元流れの基礎式を用いて、流速および水深分布の線形解または摂動解が導かれ^{1),2),3),4),5)}、実験結果との比較から、フルード数が小さい領域ではその妥当性が検証されている。この際、長谷川³⁾、Blondeaux・Seminara⁴⁾は、横断方向の運動方程式の慣性項と摩擦項を保った線形化方程式の解を求めている。また、池内・玉井²⁾はEngelund¹⁾の解を拡張し、横断方向の運動方程式の慣性項を2次の摂動方程式（1次が線形化方程式に対応）で考慮し、横断座標のべき乗展開を用いて摂動解を導いている。これらの解は、フルード数が小さい領域ではほとんど同一であるが、フルード数が大きくなり高速流の領域になると特性が大きく異なるようになる。

横断方向の運動方程式の慣性項と摩擦項を保った線形化方程式を、横断座標の1乗と3乗を考慮したべき乗展開で水理量を表すことで導いた線形解と、高速流の領域の実験結果を比較した研究も行われ、

線形解には蛇行と水面変動の応答に共鳴関係が存在すること、共鳴点近傍では線形解は実験結果に適合しないことが指摘されている⁵⁾。横断座標の1乗のみを考慮したべき乗解は長谷川の解に対応していること、3乗まで考慮するとフルード数が共鳴関係を越えたとき振幅が0になる関係が存在するがこの特性は実験結果に見られないことも指摘されている⁵⁾。

そこで本研究では、蛇行と水面変動の応答特性をより詳細に考察するため、見かけの抵抗の増加を考慮した非線形解析を試みる。その際、摂動の次数を順次増やす方法ではなく、ダフィン方程式の解析に用いられているように⁶⁾、水理量の振幅が流れ方向に緩やかに変化すると仮定し、横断方向には水理量分布形に横断座標の1乗の項のみを考慮して基礎式に代入し、導かれる非線形連立方程式を解く方法を用いている。

2. 対象とする現象

著者による3通りの連続蛇行水路（図-1参照、水路床は横断座標に対して平坦（後述の $\eta=0$ ））を用いて行われた実験結果を用いて、対象としている現象の特性について具体的に説明する⁵⁾。実験の水理諸量を表-1に示した。

表中には現象に関係のある幾何学的無次元パラメータ

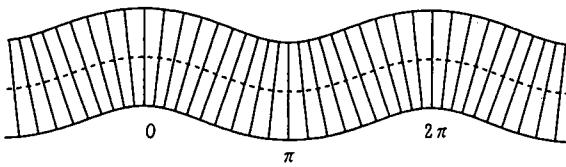
表-1 実験の水理諸量

	平均水深 (cm)	平均流速 (cm/s)	蛇行波長 (注a) (cm)	最小曲率半径 (cm)	水路幅 (cm)	水路勾配(注b) 1/L	フルード数	幾何学的無次元パラメータ λ ε ν
RunB1-1	2.29	20.02	24.7	11.26	8	1/150	0.42	0.58 1.75 0.203
RunB2-2	1.42	32.23	24.7	11.26	8	1/64	0.86	0.36 2.82 0.126
RunB3-1	1.73	45.05	24.7	11.26	8	1/26	1.33	0.44 2.31 0.154
RunB3-2	0.61	38.58	24.7	11.26	8	1/26	1.58	0.16 6.56 0.054
RunB4-1	1.12	53.71	24.7	11.26	8	1/20	1.62	0.29 3.57 0.099
RunC1-1	1.48	46.83	24.2	22.07	8	1/64	1.23	0.38 2.70 0.067
RunC2-1	1.09	61.82	24.2	22.07	8	1/26	1.89	0.28 3.67 0.049
RunC2-2	0.59	53.51	24.2	22.07	8	1/26	2.22	0.15 6.78 0.027
RunC3-1	0.49	68.04	24.2	22.07	8	1/20	3.12	0.13 8.16 0.022
RunD1-1	1.09	42.54	24.0	43.77	8	1/64	1.30	0.29 3.67 0.025
RunD1-2	0.68	29.31	24.0	43.77	8	1/64	1.13	0.18 5.88 0.016
RunD2-1	0.59	63.69	24.0	43.77	8	1/26	2.64	0.15 6.78 0.013
RunD2-2	1.01	73.44	24.0	43.77	8	1/26	2.33	0.26 3.96 0.023
RunD3-1	0.61	77.50	24.0	43.77	8	1/20	3.16	0.16 6.56 0.014
RunD3-2	0.81	80.42	24.0	43.77	8	1/20	2.86	0.21 4.94 0.019

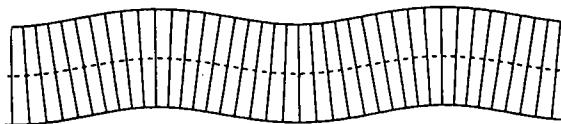
a) 水路中心軸に沿って測られた波長

b) 水路が置かれた平面の平均的流れ方向の勾配

水路B(波長 24.7cm, 幅 8cm, 最大交差角 20°)



水路C(波長 24.2cm, 幅 8cm, 最大交差角 10°)



水路D(波長 24.0cm, 幅 8cm, 最大交差角 5°)

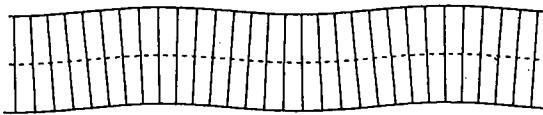


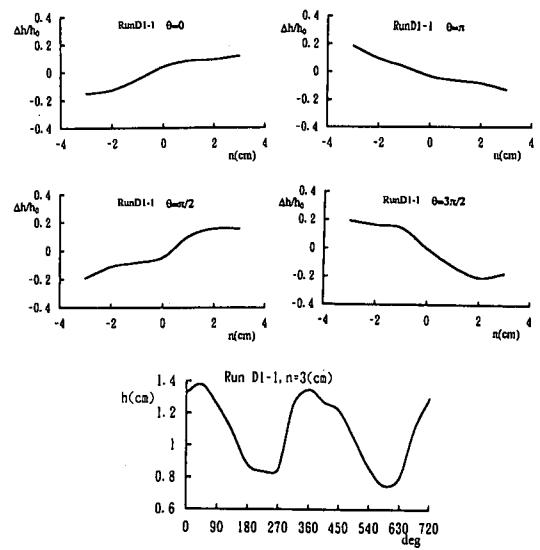
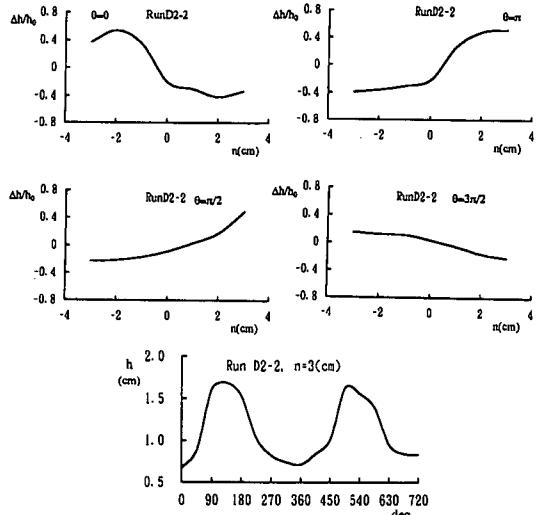
図-1 水路の平面形状

$$\nu = \frac{h_0}{R}, \quad \lambda = \frac{2\pi h_0}{L}, \quad \varepsilon = \frac{B}{2h_0}$$

 R : 曲頂部の最小曲率半径, h_0 : 平均水深, B : 水路幅, L : 水路中心軸に沿って測られた蛇行波長

のうち ν と ε を示した。 L/B を 3 と固定して実験が行われており、 λ は ν と ε を用いて計算できる。

まず、水路の最小曲率半径の大きな (ν が小さい) Run-D の水深の横断分布と縦断分布を、図-2、図-3 に示した。図-8 に示した座標系を参照して、 s は水路中心軸の縦断座標、 n は水路の横断座標、 h は水深、 Δh は断面平均水深からの偏差を表す。フルード数の小さい RunD1-1($Fr=1.3$)の結果を示した図-2 をみると、側壁に沿った水深の縦断変化は水路の位相とほぼ同位相になっていることが分かる。横断分布もほぼ直線的な分布形を示している。一方、フルード

図-2 水深の横断分布と縦断分布(RunD1-1($Fr=1.3$)))図-3 水深の横断分布と縦断分布(RunD2-2($Fr=2.33$)))

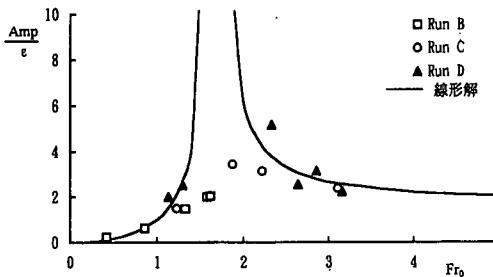


図-4 振幅とフルード数に関する実験と線形解の比較

ド数の大きなRunD2-2($Fr=2.33$)を示した図-3をみると、水深の縦断分布は水路の位相とほぼ逆位相になっている。この位相の反転は、水路の最小曲率半径が大きい(νが小さい)場合には、線形理論から導かれる水面が水路蛇行に共鳴するフルード数を境に生じることが示されている⁵⁾。

側壁に沿った水深の縦断分布を用いて求められた水面変動の振幅とフルード数の関係を図-4に、位相差とフルード数の関係を図-5に示した。どちらも共鳴関係近傍を除いて線形解⁵⁾にほぼ適合する。ただし、図-4中の振幅 Amp' と位相差 Φ は、図-8の記号の説明を参照して、水路側壁位置の水面変動 $\xi_1(n=B/2)$ を用いることで次のように定義されている。

$$\frac{h}{h_0} = 1 + \nu \xi_1, \quad \xi_1(n=B/2) = Amp' \cos(\lambda s + \Phi) \quad (1)$$

ここに、 h :水深、 h_0 :平均水深、 ξ_1 :平均水面からの水位、 n :水路の横断座標、 B :水路幅を表す。

一方、水路の最小曲率半径の小さな(νが大きい)Run-Bの特性として、以下のことが挙げられる。

Run-Bと同一の水路勾配をもつRun-Dの実験結果と比較すると、表-1からわかるようにRun-Bのフルード数がかなり小さくなり、見かけの抵抗が増加していることがわかる。この抵抗の増加機構として、蛇行波長が同一の条件のもとで、図-6に示すような平均流速からのずれの2乗の項による付加抵抗、水深平均流速で表した流線が水路の湾曲からずれることによる遠心力の効果、および流線湾曲による断面内2次流の効果が考えられる。すなわち、平均流速からのずれの2乗の項による付加抵抗を説明すれば以下のようなになる。図-6(b)に示したように、底面せん断応力が流速の2乗に比例するとし、水路断面の流速分布に線形を仮定すれば、せん断応力の分布は

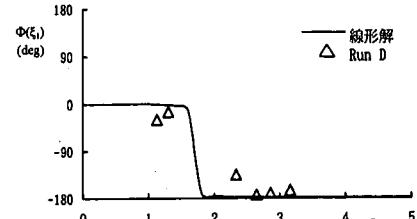
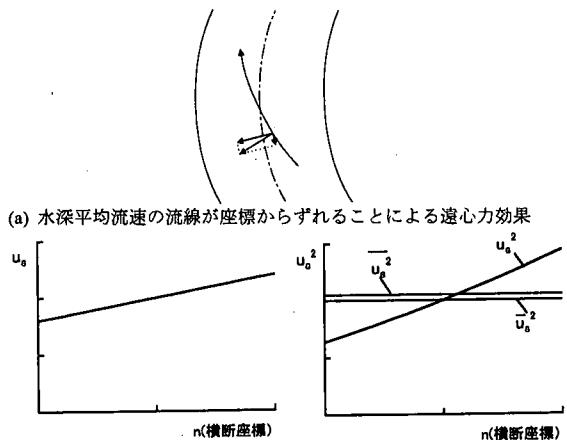


図-5 位相差とフルード数に関する実験と線形解の比較



(b) 平均流速からのずれの2乗の項による効果
図-6 抵抗の増加機構

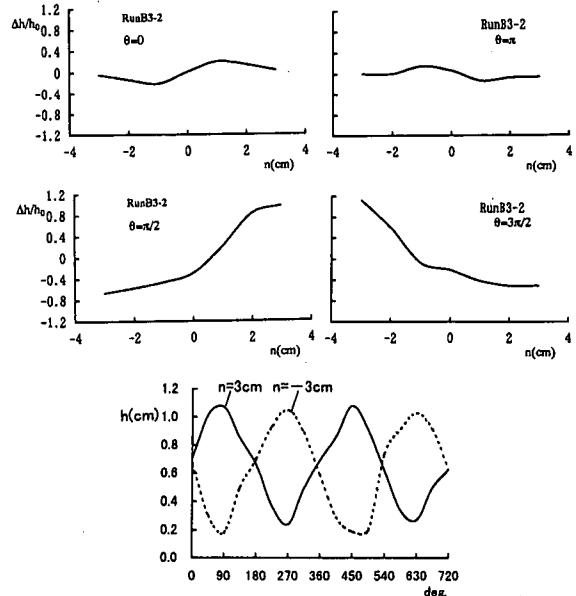


図-7 水深の横断分布と縦断分布 RunB3-2($Fr=1.58$)

図中の u_s^2 ようになる。図中にはこの横断分布の水路幅方向の平均値 $\overline{u_s^2} = \overline{u_s'}^2 + \overline{u_s}^2$ と $\overline{u_s}^2$ も示してある。ここに、 $\overline{u_s}$ は u_s の水路幅方向の平均を表し、 u_s' は偏差 $u_s - \overline{u_s}$ を表す。線形理論では抵抗則として $\overline{u_s}^2$ のみ考慮されているが、実際には $\overline{u_s'}^2$ の項が付加抵抗として作用している。

また遠心力の効果とは、水深平均流速で表した流線が図-6(a)のように水路座標線よりずれると、流れに対して座標の方向に遠心力による力が作用する。この力を流れ全体で積分すると抵抗を増大させる可能性がある。(後述の式(3)左辺第3項(遠心力の s -方向成分)が及ぼす抵抗則への影響を意味している。)湾曲による断面内2次流の存在が及ぼす抵抗則への影響についても上記と同様に説明される。

さらに前述の図-4をみると、線形理論の共鳴点近傍でも極端に大きな振幅をとらない実験値が存在すること、図-5の位相差は線形理論からずれていることなど、Run-Dとの違いを指摘することができる。図-7にRunB3-2の側壁に沿った水深の縦断分布を示したが、この場合水深分布と水路湾曲の位相差は $\pi/2$ となっている。

本研究では、線形解が水深・曲率半径比 ν の小さいRun-Dの実験結果をほぼ再現していることから、線形解を導いた慣用の平面2次元流れの基礎式の非線形解析を行い、 ν の大きな領域の特性をどの程度再現可能かについて考察する。慣用の平面2次元流れの基礎式中に、上述のみかけの抵抗増加機構内の断面内2次流の効果を考慮して非線形解析を行うことは困難であるため、この点に関しては別途数値解析的検討を行うこととし、本研究では特に、図-6中の水深平均流速場に作用する遠心力効果について考察する。

3. 基礎式とその無次元化

(1) 基礎式

基礎式は慣用の直交曲線座標系の下での平面2次元流れの基礎式であり、図-8の記号を用いて示せば式(2)-(4)のようになる。原点Oでの s 軸の方向に ϕ 傾いた平面上に $s-n$ 座標系を置いている。一般に、水路床は座標系が置かれている平面と同一ではない。

[連続式]

$$\frac{r_0}{r_0+n} \frac{\partial h u_s}{\partial s} + \frac{\partial h u_n}{\partial n} + \frac{h u_n'}{r_0+n} = 0 \quad (2)$$

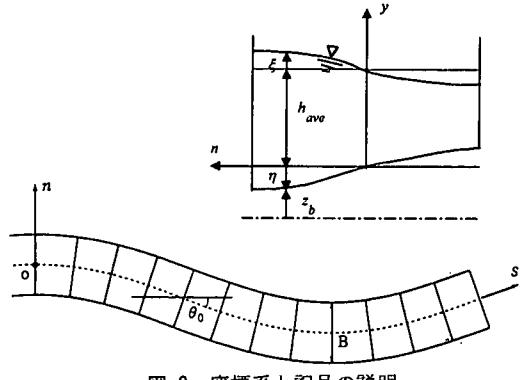


図-8 座標系と記号の説明

[運動方程式]

$$\frac{r_0}{r_0+n} u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} + u_n \frac{\partial u_s}{\partial n} + \frac{u_s u_n}{r_0+n} = -\frac{r_0}{r_0+n} g \frac{\partial(h+z_b)}{\partial s} - \frac{\tau_s}{\rho h} \quad (3)$$

$$\frac{r_0}{r_0+n} u_s \frac{\partial u_n}{\partial s} + u_n \frac{\partial u_n}{\partial n} - \frac{u_s^2}{r_0+n} = -g \frac{\partial(h+z_b)}{\partial n} - \frac{\tau_n}{\rho h} \quad (4)$$

$$h = h_{ave} + \eta + \xi$$

ここに、 (u_s, u_n) : 水深平均流速ベクトルの成分、 h : 水深、 h_{ave} : 対象としている領域の平均水深、 ξ : 断面内平均水位からの水位偏差、 z_b : 基準水平面からの路床高さ、 η : n 軸からの路床の偏差、 (τ_s, τ_n) : 底面せん断応力ベクトルの成分、 (s, n) : 空間座標、 y : $s-n$ 平面に直交する座標、 r_0 : 水路中心線の曲率半径。本研究では $\sin \phi$ の最大値が $1/20$ であり、 $\cos \phi \approx 1$ と近似している。

sine-generated curve の場合、水路中心線の曲率半径および交差角 θ は次式で表される。

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{R} \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right) = \frac{1}{R} \cos ks = \frac{1}{R} \cos(\lambda s') \quad (5-a)$$

$$\theta = \frac{L}{2\pi R} \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) = \frac{\nu}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \quad (5-b)$$

ここに、 R : 曲頂部の最小曲率半径。

このとき、 $\partial z_b / \partial s, \partial z_b / \partial n$ は $\theta_0 = L/(2\pi R)$ 、 $s' = s/h_0$ とおいて次のように表される。

$$\frac{\partial z_b}{\partial s} = -\sin \phi \cos \theta, \frac{\partial z_b}{\partial n} = -\sin \phi \sin \theta$$

$$\cos \theta = J_0(\theta_0) + 2J_2(\theta_0) \cos(2\lambda s') + 2J_4(\theta_0) \cos(4\lambda s') + \dots$$

$$\sin \theta = 2J_1(\theta_0) \sin(\lambda s') + 2J_3(\theta_0) \sin(3\lambda s') + \dots$$

上式中 J_n は n 次のベッセル関数であり、 $J_0(\theta_0), J_1(\theta_0)$ を級数展開として表せば次のようになる。

$$J_0(\theta_0) = 1 - \left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\theta_0}{2}\right)^4 + \dots$$

$$J_1(\theta_0) = \frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_0}{2}\right)^3 + \dots$$

また、底面せん断応力は摩擦係数を用いて次式で評価する。

$$\frac{\tau_s}{\rho} = c_f \sqrt{u_s^2 + u_n^2} u_s, \quad \frac{\tau_n}{\rho} = c_f \sqrt{u_s^2 + u_n^2} u_n \quad (6)$$

(2) 基礎式の無次元化

$s-n$ 平面の傾斜角 ϕ 、流量を水路幅で除した単位幅流量 q を用いて次式で定義される流速 U 、水深 h_0 を導入する。

$$g \sin \phi = c_f \frac{U^2}{h_0}, \quad h_0 = \frac{q}{U} \quad (7)$$

次式で定義される無次元量を導入して基礎式を無次元化すると式(8)-(10)となる。

$$u_s' = \frac{u_s}{U}, \quad u_n' = \frac{u_n}{U}, \quad h' = \frac{h}{h_0}, \quad \xi' = \frac{\xi}{h_0}, \quad \eta' = \frac{\eta}{h_0},$$

$$s' = \frac{s}{h_0}, \quad n' = \frac{n}{h_0}$$

$$\frac{\partial u_s'}{\partial s'} + (1 + \nu n' \cos \lambda s') \frac{\partial u_n'}{\partial n'} + \nu h' u_n' \cos \lambda s' = 0 \quad (8)$$

$$u_s' \frac{\partial u_s'}{\partial s'} + (1 + \nu n' \cos \lambda s') u_n' \frac{\partial u_s'}{\partial n'} + \nu u_s' u_n' \cos \lambda s' = - \frac{1}{Fr_0^2} \frac{\partial \xi'}{\partial s'} + \frac{\sin \phi \cos \theta}{Fr_0^2} \\ - (1 + \nu n' \cos \lambda s') \frac{c_f}{h'} \sqrt{u_s'^2 + u_n'^2} u_s' \quad (9)$$

$$u_s' \frac{\partial u_n'}{\partial s'} + (1 + \nu n' \cos \lambda s') u_n' \frac{\partial u_n'}{\partial n'} - \nu u_s'^2 \cos \lambda s' = - \frac{(1 + \nu n' \cos \lambda s')}{Fr_0^2} \left(\frac{\partial \xi'}{\partial n'} + \sin \phi \cos \theta \right) \quad (10)$$

$$- (1 + \nu n' \cos \lambda s') \frac{c_f}{h'} \sqrt{u_s'^2 + u_n'^2} u_n'$$

以後簡単のため無次元量を表す'を省略する。

4. 非線形解析

本研究では用いないが、通常の摂動法では式(8)-(10)の線形解と高次の摂動解は次の手順で導かれる。まず ν を摂動のパラメータとして u_s, u_n, h を次式のように表示する。

$$u_s = 1 + \nu u_1 + \nu^2 u_2 + \dots \\ u_n = \nu v_1 + \nu^2 v_2 + \dots \quad (11) \\ h = 1 + \nu (\xi_1 + \eta_1) + \nu^2 (\xi_2 + \eta_2) + \dots$$

式(11)を基礎式に代入し、 ν の同じ次数でまとめると摂動方程式が得られ、低次から順次解していくことによって線形解と高次の摂動解が導かれる。しかし、線形解が共鳴点近傍の水面の挙動を再現していないことから、高次の摂動解を考慮しても、現象を再現できない。そこで、変動の振幅が空間的にゆっくりと変化すると仮定した解析法⁶⁾を用いて蛇行と水面の応答に関する非線形解析を試みる。

横断方向および縦断方向に最低次の項のみ考慮する。このとき水理量は次式で表される。

$$u_s = 1 + u_{s_0} + n u_{s_1} \cos(\lambda s + \phi_{s_1}) \\ u_n = (1 - \frac{n^2}{\varepsilon^2}) u_{n_1} \cos(\lambda s + \phi_{n_1}) \\ h = 1 + H_0 + \xi_1 + \eta_1 \quad (12) \\ \xi_1 = \nu Fr_0^2 n \cos \lambda s + n \xi_{11} \cos(\lambda s + \phi_{\xi_{11}}) \\ \eta_1 = n \eta_{11} \cos(\lambda s + \phi_{\eta_{11}})$$

上式中、 u_{s_0} と H_0 は見かけの抵抗の増加による平均流速の減少と水深の増加を考慮するために導入されている。ただし、 u_s の横断方向分布に n の 1 乗のみ考慮し運動方程式で n の 1 乗のオーダーまでの解析を行うので、図-6 に示したみかけの抵抗の増加機構のうち、流速偏差の 2 乗の項による付加抵抗は本解析では考慮できない。

式(12)を基礎式に代入し、 n のべき乗（ここでは 0 次か 1 次）と \sin, \cos の組み合わせで分類して非線形解析の基礎式を導けば以下のようになる。

簡単のため未知数を次のようにおく。

$$\hat{a} = u_{s_0}, \quad \hat{b} = u_{s_1} \cos \phi_{s_1}, \quad \hat{c} = u_{s_1} \sin \phi_{s_1}, \\ \hat{d} = u_{n_1} \cos \phi_{n_1}, \quad \hat{e} = u_{n_1} \sin \phi_{n_1}, \quad (13) \\ \hat{f} = H_0, \quad \hat{g} = \xi_{11} \cos \phi_{\xi_{11}}, \quad \hat{h} = \xi_{11} \sin \phi_{\xi_{11}}, \\ \hat{i} = \eta_{11} \cos \phi_{\eta_{11}}, \quad \hat{j} = \eta_{11} \sin \phi_{\eta_{11}}$$

[連続式]

n^0, \sin, \cos の 0 次

$$\frac{\nu}{2} Fr_0^2 \hat{d} + \frac{1}{2} (\hat{d}\hat{g} + \hat{e}\hat{h} + \hat{i}\hat{d} + \hat{j}\hat{e}) + \frac{\nu}{2} (1 + \hat{f}) \hat{d} = 0 \quad (14)$$

n^1, \sin の 1 次

$$-\lambda(1 + \hat{a})(\nu Fr_0^2 + \hat{g} + \hat{i}) - (1 + \hat{f})(\lambda \hat{b} - \frac{2}{\varepsilon^2} \hat{e}) \\ - \frac{\nu^2}{2} Fr_0^2 \hat{e} - \frac{\nu}{2} (\hat{h}\hat{d} + \hat{g}\hat{e} + \hat{j}\hat{d} + \hat{i}\hat{e}) = 0 \quad (15)$$

n^1, \cos の 1 次

$$-\lambda(1 + \hat{a})(\hat{h} + \hat{j}) - (1 + \hat{f})(\lambda \hat{c} + \frac{2}{\varepsilon^2} \hat{d}) \\ + \frac{3\nu^2}{2} Fr_0^2 \hat{d} + \frac{\nu}{2} (3\hat{g}\hat{d} + \hat{h}\hat{e} + 3\hat{i}\hat{d} + \hat{j}\hat{e}) = 0 \quad (16)$$

[s-方向の運動方程式]

n⁰, sin, cos の 0 次

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\hat{d}\hat{b} + \hat{e}\hat{c}) + \frac{1}{2}\nu(1+\hat{a})\hat{d} &= -\frac{1}{2}c_f \left\{ 2\hat{a} + \hat{a}^2 + \frac{1}{2}(\hat{d}^2 + \hat{e}^2) \right\} \\ -c_f(\hat{a} - \hat{f} - \hat{a}\hat{f} + \hat{f}^2 + \hat{a}\hat{f}^2) &\left\{ 1 + \hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^2 + \frac{1}{4}(\hat{d}^2 + \hat{e}^2) \right\} \\ -c_f \left(\frac{\nu}{2\lambda} \right)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

n¹, sin の 1 次

$$\begin{aligned} -\lambda(1+\hat{a})\hat{b} - \frac{\nu}{2}(\hat{c}\hat{d} + \hat{b}\hat{e}) &= \lambda\nu + \frac{\lambda}{Fr_0^2}\hat{g} \\ -c_f \left[-(1+\hat{a})^2(1-\hat{f} + \hat{f}^2)\hat{c} + \frac{\nu}{4}(1+\hat{a})(1-\hat{f} + \hat{f}^2)\hat{d}\hat{e} \right. \\ - (1-\hat{f} + \hat{f}^2) \left(1 + \hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^2 \right) \hat{c} \\ + \frac{1}{2}(1-\hat{f} + \hat{f}^2)(-\frac{1}{2}\hat{b}\hat{d}\hat{e} - \frac{1}{4}\hat{c}\hat{d}^2 - \frac{3}{4}\hat{c}\hat{e}^2) \\ - (1+\hat{a}) \left(1 + \hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^2 \right) (2\hat{f} - 1)(\hat{h} + \hat{j}) \\ - \frac{1}{4}(1+\hat{a})(2\hat{f} - 1)\hat{d}\hat{e}(\nu Fr_0^2 + \hat{g} + \hat{i}) \\ \left. - \frac{1}{2}(1+\hat{a})(2\hat{f} - 1)(\frac{1}{4}\hat{d}^2 + \frac{3}{4}\hat{e}^2)(\hat{h} + \hat{j}) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

n¹, cos の 1 次

$$\begin{aligned} -\lambda(1+\hat{a})\hat{c} + 2\nu(\frac{3}{4}\hat{b}\hat{d} + \frac{1}{4}\hat{c}\hat{e}) &= \frac{\lambda}{Fr_0^2}\hat{h} \\ -c_f \left[\left\{ (1+\hat{a})^2 + (1+\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^2) \right\} (1-\hat{f} + \hat{f}^2)\hat{b} \right. \\ + \nu(1+\hat{a})(1-\hat{f} + \hat{f}^2) \left(1 + \hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^2 \right) \\ + \frac{\nu}{8}(1+\hat{a})(1-\hat{f} + \hat{f}^2)(3\hat{d}^2 + \hat{e}^2) \\ + \frac{1}{2}(1-\hat{f} + \hat{f}^2)(\frac{3}{4}\hat{b}\hat{d}^2 + \frac{1}{4}\hat{b}\hat{e}^2 + \frac{1}{2}\hat{c}\hat{d}\hat{e}) \\ + (1+\hat{a}) \left(1 + \hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^2 \right) (2\hat{f} - 1)(\nu Fr_0^2 + \hat{g} + \hat{i}) \\ + \frac{1}{8}(1+\hat{a})(2\hat{f} - 1)(\nu Fr_0^2 + \hat{g} + \hat{i})(3\hat{d}^2 + \hat{e}^2) \\ \left. + \frac{1}{4}(1+\hat{a})(2\hat{f} - 1)\hat{d}\hat{e}(\hat{h} + \hat{j}) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

[n-方向の運動方程式]

n⁰, sin の 1 次

$$-\lambda(1+\hat{a})\hat{d} = \frac{\hat{h}}{Fr_0^2} + c_f(1-\hat{f} + \hat{f}^2)(1+\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^2)\hat{e}$$

$$+ \frac{3}{8}c_f(1-\hat{f} + \hat{f}^2)\hat{e}(\hat{d}^2 + \hat{e}^2) + c_f \left\{ \frac{\nu}{\lambda} - \left(\frac{\nu}{2\lambda} \right)^3 \right\} \quad (20)$$

n⁰, cos の 1 次

$$\begin{aligned} -\lambda(1+\hat{a})\hat{e} - \nu(1+\hat{a})^2 &= -\nu - \frac{\hat{g}}{Fr_0^2} \\ -c_f(1-\hat{f} + \hat{f}^2)(1+\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^2)\hat{d} \\ - \frac{3}{8}c_f(1-\hat{f} + \hat{f}^2)(\hat{d}^2 + \hat{e}^2)\hat{d} \end{aligned} \quad (21)$$

平坦な路床を考えているので $\hat{i} = \hat{j} = 0$ とし、式(14)から式(21)の非線形連立方程式の近似解を求めた。すなわち、 $\hat{a} - \hat{f}$ の値を変化させて基礎式に代入し、各式の誤差の 2乗和が極小になる値を求めた。

ただし、式(17)および(20)の右辺最終項は、水路床が n 方向に水平でないために現れた項であるが、他の項よりオーダーが小さいので無視している。また連続式の 0 次項である式(14)の代わりに、連続式を直接に満たすように次式を用いた。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi^2\varepsilon} \int_0^{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_s h dnd(\lambda s) &= 1 \\ &= (1+\hat{a})(1+\hat{f}) + \frac{\varepsilon^2}{6} \left\{ \hat{b}(\nu Fr_0^2 + \hat{g}) + \hat{c}\hat{h} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

式(22)を用いた理由は次のように説明される。抵抗の見かけの増加を考慮したときの連続式の主要項は、式(12)の記号を用いて次式になるはずである。

$$(1+u_{s_0})(1+H_0) = \text{一定}$$

ところが式(14)にはこの主要項が含まれていない。これは、連続式(2)左辺第 1 項の s に関する微分により消去されているためである。そこで連続式は、式(2)を横断方向と流れ方向に一波長積分した式(22)を第一に満たすべき 0 次近似と考えた。式(14)はたとえば

$$\begin{aligned} \cos(\lambda s + \phi_{n_1}) \cos(\lambda s + \phi_{s_1}) &= \\ \frac{1}{2}(\cos \phi_{n_1} \cos \phi_{s_1} - \sin \phi_{n_1} \sin \phi_{s_1}) \cos 2\lambda s \\ - \frac{1}{2}(\sin \phi_{n_1} \cos \phi_{s_1} + \cos \phi_{n_1} \sin \phi_{s_1}) \sin 2\lambda s \\ + \frac{1}{2}(\cos \phi_{n_1} \cos \phi_{s_1} + \sin \phi_{n_1} \sin \phi_{s_1}) \end{aligned}$$

と展開したときの右辺第 3 項に対応する式であり、通常の摂動法では高次項に相当するが、式(15), (16)は線形化方程式に対応するので式(14)に優先して用いられる。これらの理由により、連続式から導かれる関係式として式(22), (15)および(16)を用いた。

5. 誤差解析と結果の考察

$Fr_0 = 10, 3.0, \varepsilon = 4, \nu = 0.01, 0.1$ と固定し, \hat{a} のある値に対して $\hat{b} - \hat{f}$ を変化させたときの各基礎式の誤差の 2 乗和の最小値を示したのが図-9, 図-10 である。非線形性のパラメータである ν の値が小さい場合は、見かけの抵抗増加の指標である \hat{a} の値の 0 近傍の極小値が解と考えられる。しかし、 ν が大きくなると \hat{a} の大きな領域でも明確な極小値が現れ、それが解であるか、また複数の解が存在するのか判断できない。

そこで、明確な極小値を与える複数の $\hat{a} - \hat{f}$ の組を用いて、側壁に沿った水深縦断分布の振幅を計算し振幅とフルード数の関係を図-11 に示した。見かけの抵抗の増加がない場合、振幅 Amp は等流水深 h_0 で無次元化された振幅であり、式(23)で定義される。(式(1)の Amp' とは $Amp = \nu \cdot Amp'$ の関係にある。)

$$Amp = \sqrt{(\nu Fr_0^2 + \hat{g})^2 + \hat{h}^2} \quad (23)$$

しかし、実際には抵抗の増加（平均水深の増加）を考慮する必要があり、その場合の振幅とフルード数は式(24)で定義される。 $Fra, Ampa$ は実験で得られるフルード数と水面変動の振幅に対応している。

$$Ampa = Amp / (1 + \hat{f}), \quad (24)$$

$$Fra = Fr_0 \cdot (1 + \hat{a}) / \sqrt{1 + \hat{f}}$$

図-11 は ν を固定し Fr_0 を変化させて得られた一組の $\hat{a} - \hat{f}$ の値から求めた $Ampa$ と Fra の関係を示している。 $\nu = 0.01$ の場合は、線形解と同様の関係を示しているが、 $\nu = 0.1$ の場合は共鳴関係より小さいフルード数の領域で単調な増加を示している。

このことを考察するために、フルード数 Fr_0 と見かけのフルード数 Fra の両方で示したのが図-12 である。 $\nu = 0.1$ の場合、 Fr_0 の増加とともに平均水深が増加するとともに相対的に Fra が減少し、線形共鳴関係の極大値よりフルード数の小さい側の分布に適合するように移動している。すなわち、 $\nu = 0.1$ の場合には、水路勾配を大きくしても本解析の Fr_0 の範囲では共鳴点を越えてフルード数が大きくならず、RunB の実験結果と定性的に一致している。一方 $\nu = 0.02$ の場合には、 $Ampa$ の大きい場合のみ Fra が Fr_0 より小さくなっているが、概ね線形共鳴関係に適合している。

実験結果を $\nu < 0.05$ と $0.05 < \nu < 0.1$ に分けて、 $Ampa$ と Fra の関係として図-13 に示した。 $\nu < 0.05$ の場合は線形共鳴関係にほぼ適合している。一方 $0.05 < \nu < 0.1$ の場合は、見かけの抵抗の増加によ

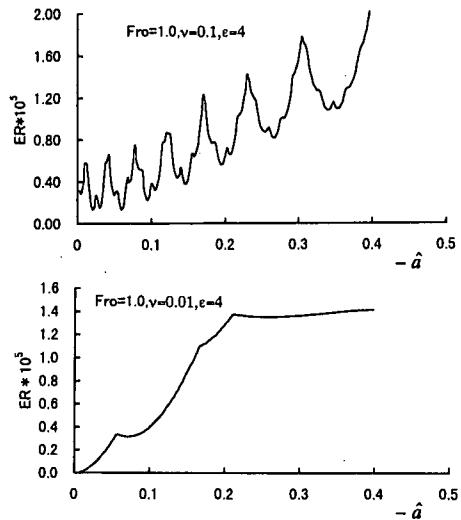


図-9 \hat{a} をパラメータとした誤差解析の結果
($Fr_0 = 1, \varepsilon = 4$)

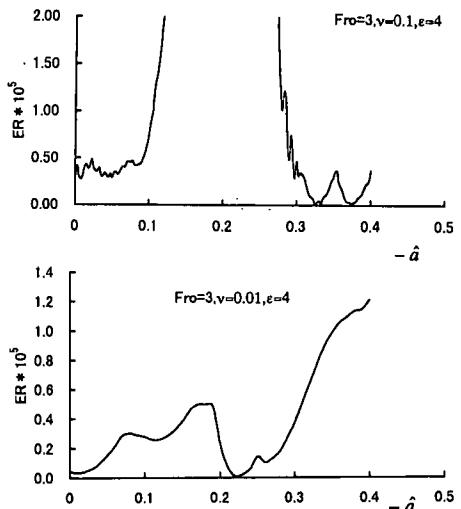


図-10 \hat{a} をパラメータとした誤差解析の結果
($Fr_0 = 3, \varepsilon = 4$)

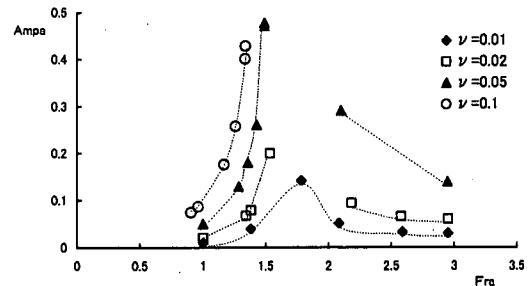


図-11 振幅とフルード数に関する非線形解析結果

り共鳴点より小さいフルード数の領域に存在し、また $Ampa$ の大きくない実験値は、ほぼ $\nu = 0.05$ と 0.1 の線形共鳴関係の極大値よりフルード数の小さい分布の間にあり、非線形解析結果と適合している。ただし、 $Ampa$ の大きい実験値が非線形解析結果や線形共鳴関係よりかなり小さく、水深分布に横断座標の 3 乗を考慮するなどより高次の解析の必要性も指摘される。

図-14 には、非線形解析より得られた水深縦断分布の位相差とフルード数の関係を $\nu = 0.01$ と 0.1 について示したが、どちらも線形理論に適合している。しかし前述のように、図-5 に示した RunB の水深縦断分布の位相差とフルード数の関係は線形理論からかなりずれており、 $\nu = 0.1$ の非線形解析結果と適合しない。この理由として、振幅の場合と同様に水深の横断分布形状を直線分布としていること、流下方向に 2 次のモードを考慮していないことなど、高次の項を考慮していないことが挙げられる。

6. おわりに

本研究は、連続蛇行水路の高速流の基本的特性を考察するため、線形解と実験結果を比較した従来の研究に基づいて、見かけの抵抗の増加を考慮した非線形解析を行い、無次元水理パラメータと水面形特性の関係を検討した。得られた結果を要約すると以下のようになる。

(1) ダフィン方程式の解析に用いられているように、水理量の振幅が流れ方向に緩やかに変化すると仮定し、横断方向には水理量分布形に 1 乗の項のみを考慮して平面流れの基礎式に代入し、導かれた非線形連立方程式を誤差解析を用いて近似的に解いた。

(2) 非線形解析結果の考察から、蛇行の程度を表す無次元パラメータが大きくなると実験結果と同様に見かけの抵抗が大きくなるとともに、水路床勾配を大きくしても流れのフルード数が共鳴関係を越えにくくなる。その領域（共鳴関係より小さいフルード数の領域）の水面変動振幅とフルード数の関係は共鳴関係より小さい領域の線形解に適合していることを示した。さらに勾配を大きくすると、共鳴関係より大きいフルード数の領域で線形解に適合する解が現れる（図-12 参照）。

(3) より詳細には、振幅が大きくなると振幅と位相差に関する解析結果と実験結果が適合せず、高次の項を考慮した解析をする必要がある（図-5 と図-14 参照）。

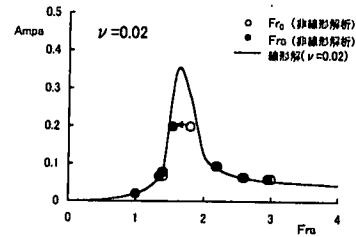
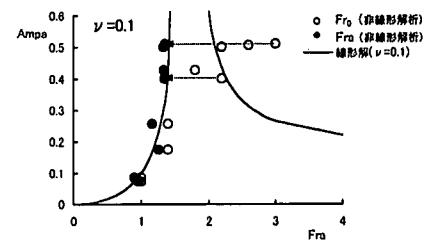


図-12 抵抗の増加と見かけのフルード数の減少

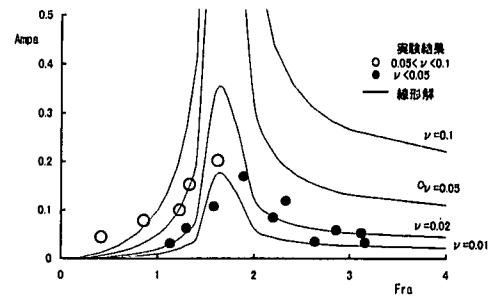


図-13 振幅とフルード数の関係

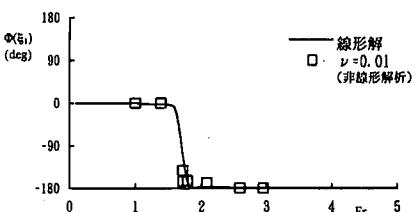
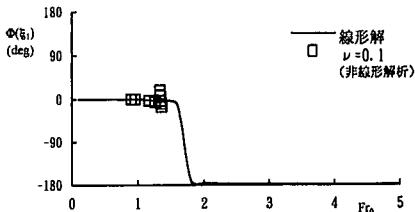


図-14 非線形解析結果の位相差とフルード数の関係

今後、理論解析だけでなく数値解析も同時にを行い、現象の特性を明らかにしていきたい。

参考文献

- 1) Engelund, F. : Flow and bed topography in channel bends, Proc. ASCE, J. Hyd. Div., Vol.100, HY11, pp.1631-1647, 1974.
- 2) 池内幸司, 玉井信行 : 蛇行水路における水深平均流れ場の遷移特性, 土木学会論文報告集, 第334号, pp.89-101, 1983.
- 3) 長谷川和義 : The effect of plane and bed forms of channels upon the meander development, Proc. of JSCE, No.296, pp.143-152, 1980.
- 4) Blondeaux, P. and Seminara, G.: A unified bar-bend theory of river meanders, J. Fluid Mech., 112, pp.363-377, 1985.
- 5) 細田 尚 : 連続蛇行水路の高速流の基本的特性, 水工学論文集, 第43巻, pp.311-316, 1999.
- 6) 戸田盛和, 渡辺慎介 : 非線形力学 (共立物理学講座6), 共立出版, 1983.

(1999.4.26受付)

NON-LINEAR ANALYSIS OF HIGH VELOCITY FLOWS IN A SINUOUS CHANNEL

Takashi HOSODA

Fundamental properties of high velocity flows in a continuously meandering channel are investigated with comparisons of the results of previous experimental and analytical studies. Substituting a simple functional form assumed for hydraulic variables into the 2-D depth-averaged flow equations, the non-linear algebraic equations concerning amplitudes and phase lags for the depth and velocity distributions are derived. The mechanism to increase resistance coefficients of mean flows are included in the analysis. The results of non-linear analysis, which were obtained through the error analysis of algebraic equations, indicate that in the case of a meandering channel with small curvature radius, the Froude number can not exceed the value at the resonance relation due to the increase of flow resistance, and the relation between the amplitude of depth variations and the Froude number can be approximated by the linear theory in the range of the smaller Froude number than the resonance one.