

コンクリートのひび割れを表現する 離散モデルとその基本的特性

松尾真紀¹・日比野憲太²・高木宣章³・児島孝之³

¹正会員 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

²学生会員 工修 立命館大学大学院博士後期課程 理工学研究科総合理工学専攻
(〒525-8577 滋賀県草津市野路東 1-1-1)

³正会員 工博 立命館大学教授 理工学部土木工学科 (〒525-8577 滋賀県草津市野路東 1-1-1)

コンクリートに発生するひび割れを表現することのできる新たな離散ひび割れモデルを提案し、その基本的特性について検討を行った。ひび割れは、コンクリート要素界面に接触するアイソパラメトリック線要素として表現した。ある荷重作用下において、コンクリート中の最大主引張応力が引張強度に達したとき、その方向に対して直角にひび割れが発生するものとし、最大主引張応力発生点にひび割れ要素を逐次挿入する方法で、無筋コンクリートはりの曲げ試験について、ひび割れ進展解析を行った。ひび割れ要素には、引張軟化曲線で表される、ひび割れを介して伝達される引張応力とひび割れ幅の関係を破壊エネルギーを特性値として導入した。

Key Words : discrete crack model, crack propagation, tension softening curve, fracture energy, finite element analysis

1. はじめに

コンクリートは骨材、セメント、水などの異なった材料から成る複合構造材料であり、極めて非均質である。そのため、その破壊進展機構には不明瞭な点が多いものの、コンクリートに発生するひび割れは粗骨材界面がモルタル部から剥離し、その剥離面からの微細ひび割れの発生に起因していることが知られている¹⁾。また、ひび割れ先端近傍には損傷を受けてはいるが、さらに応力を伝達することのできる破壊進行領域が形成される。コンクリートが非線形な力学的挙動を示すのは、この破壊進行領域の形成によるものと言われている。

コンクリート内に形成される破壊進行領域の力学的特性の中でも、モード I と呼ばれる引張破壊に対する力学特性は比較的明らかにされている²⁾。これは引張軟化曲線に代表されるものであり、1/3 モデル³⁾、1/4 モデル⁴⁾、-3 乗モデル⁵⁾などがコンクリート構造の破壊解析で良く用いられている。このような引張破壊は、いくつかの骨材界面の剥離とそれぞれの剥離面の干渉によりひび割れが発生し、さらにひび割れと剥離面の連結、最終的にはひび割れ

による骨材の破断が連鎖的に生じ、破壊面が形成されることによって生じるという報告がある⁶⁾。このように、引張破壊はコンクリート全域ではなく、ある領域に局所的に発生する現象であると言える。

コンクリート構造の有限要素解析において、コンクリートに発生するひび割れを表現する方法は、分布ひび割れモデル(*smearred crack model*)⁷⁾と離散ひび割れモデル(*discrete crack model*)⁸⁾の二種類の考え方に大別できる。分布ひび割れモデルはコンクリート要素全体の特性を変化させてひび割れを表現しようとするもので、要素内に一様にひび割れが分布しているものとして取り扱うモデルである。ひび割れ発生後もコンクリートは連続体であると仮定するため、要素を再分割する必要がなく、ひび割れ進展の追跡が容易となる。しかし、解析結果の要素依存性が問題となるため、要素体積に応じてコンクリートの構成則を制御する必要がある。この点に対処するため、最近ではコンクリート要素内にひずみの局所化領域を含んだ要素も提案され、要素依存性を軽減できたと報告されている^{7,8)}。

一方、離散ひび割れモデルは隣り合う要素の節点を分離することによってひび割れを表現するモデ

ルであるため、非常に直接的な方法であると言える。しかし、ひび割れの発生に応じて要素の再分割が必要となり、プログラムが非常に煩雑になるため、ひび割れ進展経路が既知のものに対して主に適用されている。これに対しては過去に、仮想ひび割れモデル⁹⁾やリンク要素¹⁰⁾などが提案されている。

コンクリート構造の解析に対する破壊力学の適用は、1970年代後半から80年代にかけて活発化してきた。現在、比較的明らかにされているのは、前に述べたようにモードIに関するものであり、具体的には引張軟化曲線と破壊エネルギー G_F で表されるものである。引張軟化曲線とはひび割れを介して伝達される引張応力とひび割れ幅の関係であり、この曲線で囲まれる面積が破壊エネルギー G_F として定義されている。このような破壊力学的なパラメータを解析上考慮することにより、コンクリート構造体強度の寸法効果（コンクリート構造体の寸法が増大するのにもとない、単位面積当たりの構造体強度が低下する現象）を説明することが可能となる。

本研究では、有限要素法による新たな離散ひび割れモデルを提案し、コンクリートに発生するひび割れをコンクリート要素界面に接触するアイソパラメトリック線要素として表現した。そして、高精度の解析結果を得るために、要素には全て、高次のアイソパラメトリック要素を用い、ガウス積分点を $5 \times 5 = 25$ 点とした。また、コンクリート内の最大主引張応力が引張強度に達した際に、最大主引張応力発生点でひび割れが発生するものとし、要素を再分割し、ひび割れ要素を逐次挿入する方法で解析を進めた。ここでは、ひび割れ進展経路をあらかじめ仮定せずにひび割れ要素を挿入していくために、前に開発した自動要素再分割プログラム^{11), 12), 13)}を用いた。このプログラムでは、ひび割れ要素を1つ挿入することにステップを進めていくため、載荷荷重の増減を簡単に表現することができ、ひび割れの進展がコンクリート構造全体に与える影響を明らかにすることができる。そこで、本研究では、コンクリート要素は線形弾性体であると仮定し、ひび割れ要素には引張軟化特性を導入することによって、コンクリート構造全体の非線形挙動をひび割れ要素のみで表現することを試みた。ひび割れ要素の定式化、解析手法について詳述し、無筋コンクリートはりの曲げ載荷試験について、有限要素法を用いたひび割れ進展解析を行った。そして、引張軟化特性を種々に変化させることにより、ひび割れ要素の基本的特性を明らかにした。また、解析モデル寸法を変化させ、コンクリート曲げ強度の寸法効果についても破壊力学的な検討を行った。

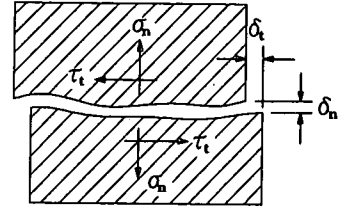


図-1 ひび割れ面での応力伝達

2. ひび割れ要素のモデル化

(1) ひび割れ要素の定義

コンクリートに引張応力が作用する場合、ひずみがある領域に局所化し、ひび割れが発生する。コンクリートを2次元問題として解析する場合、ひび割れを「線」として考えることができると仮定する。この場合、ひび割れ面では、ひび割れの形成にともなう変位によって図-1に示すような応力の伝達がなされる。ひび割れの形成にともなう変位を、ひび割れ面に対して垂直方向に δ_n 、接線方向に δ_t で表すことにする。また、ひび割れを介して伝達される応力を、ひび割れ面に対して垂直方向に σ_n 、接線方向に τ_t で表すことにする。このとき、ひび割れを介して伝達される応力と変位を関連づけるマトリクス $[C]$ を用いて、次のような関係式が得られる。

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \tau_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{nn} & C_{nt} \\ C_{tn} & C_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_t \end{Bmatrix} = [C]\{\delta\} \quad (1)$$

本解析では、コンクリートに発生するひび割れを離散的にとらえ、新たな離散ひび割れ要素を定式化する。図-2にひび割れ要素の概念図を示す。ひび割れは、コンクリート要素界面に接触する、6節点からなる2次のアイソパラメトリック線要素として表現する。ひび割れ要素の節点は、コンクリート要素の節点とそれぞれ節点を共有している。また、ひび割れ要素はひび割れ面の両側に①-③-②と④-⑥-⑤の2つの曲面からなっており、ひび割れが発生するまでは節点①と④、②と⑤、③と⑥は空間上同じ位置を占めている。

図-2(b)にひび割れ要素の詳細図を示す。ここで示すように、ひび割れに沿う1次元の座標を s 座標系、この座標系に対して垂直方向を n 、接線方向を t とする座標系をとる。ひび割れ要素は、ひび割れが発生するまでもともとと同じ節点を共有しており、

その後、s 軸の両側に変位したものであるから、ひび割れ要素の任意点での変位 $\{\delta\}$ と節点変位 $\{\delta_e\}$ は次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \{\delta\} &= \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \{\delta_e\} \\ &= [B] \{\delta_e\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\{\delta_e\} = \{\delta_{n1} \ \delta_{t1} \ \delta_{n2} \ \delta_{t2} \ \delta_{n3} \ \delta_{t3}\}^T \quad (3)$$

ここで、 N_i は形状関数であり、図-2(c)で示される正規化された局部座標系で定義されるものである。式(4)に形状関数 N_i を示す。

$$N_1 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi), N_2 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi), N_3 = 1-\xi^2 \quad (4)$$

節点に仮想変位 $d\{\delta_e\}$ を与えた場合、外力による仕事と、要素の全領域にわたる積分として与えられる内力による仕事は次式のように示される。

$$\text{外力による仕事} = d\{\delta_e\}^T \cdot \{f_e\} \quad (5)$$

$$\text{内力による仕事} = \int_A d\{\delta\}^T \cdot \{\sigma\} d(\text{Area}) \quad (6)$$

ここで、 $\{f_e\}$ は節点力である。仮想仕事の原理から、外力による仕事と内力による仕事は等しくなければならない。

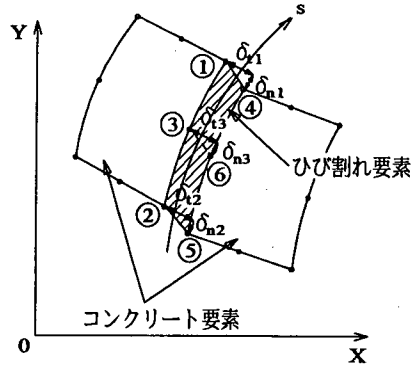
$$\begin{aligned} d\{\delta_e\}^T \cdot \{f_e\} &= \int_A d\{\delta\}^T \cdot \{\sigma\} d(\text{Area}) \\ &= d\{\delta_e\}^T \int_A [B]^T [C] [B] \{\delta_e\} d(\text{Area}) \\ &= d\{\delta_e\}^T \int_s [B]^T [C] [B] \cdot t \cdot ds \cdot \{\delta_e\} \end{aligned}$$

これが任意の仮想変位 $d\{\delta_e\}$ に対して成立するためには、

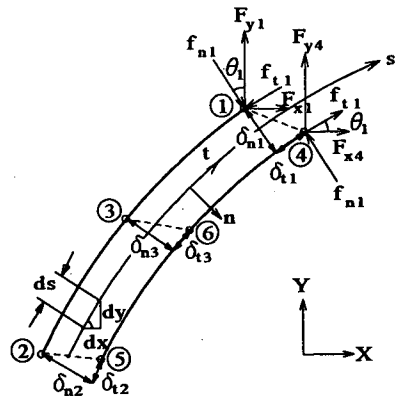
$$\{f_e\} = \int_s [B]^T [C] [B] \cdot t \cdot ds \cdot \{\delta_e\} = [K_c] \{\delta_e\} \quad (7)$$

ここで、 t はコンクリート厚さである。これより、ひび割れ要素の剛性マトリクス $[K_c]$ は次式のように求めることができる。

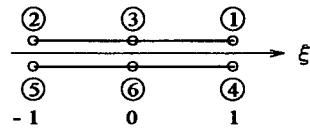
$$\begin{aligned} [K_c] &= \int_s [B]^T [C] [B] \cdot t \cdot ds \\ &= \int_{-1}^1 [B]^T [C] [B] \cdot t \cdot \sqrt{(dx/d\xi)^2 + (dy/d\xi)^2} \cdot d\xi \quad (8) \end{aligned}$$



(a) 全体座標系



(b) 詳細図



(c) 正規化された局部座標系

図-2 ひび割れ要素

式(8)で示される剛性マトリクスは、ひび割れに沿う s 座標系で定義されるマトリクスであるため、2次元 $x-y$ 座標系に変換する必要がある。節点①と④、②と⑤、③と⑥における s 軸と x 軸とのなす角度をそれぞれ θ_1 、 θ_2 、 θ_3 とすると、 $x-y$ 座標系における節点力 $\{F_e\}$ の変換は次式で表される。

$$\{F_c\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \\ F_{x5} \\ F_{y5} \\ F_{x6} \\ F_{y6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & s_3 \\ s_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & -s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_3 & -s_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{n1} \\ f_{d1} \\ f_{n2} \\ f_{d2} \\ f_{n3} \\ f_{d3} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$= [\lambda] \{f_c\}$$

ただし、 $\sin \theta_i = s_i$ 、 $\cos \theta_i = c_i$ と表示している。また、 $x-y$ 座標系における節点変位 $\{u_c\}$ の変換についても同様に、座標変換マトリクス $[\lambda]$ を用いて、次式のように示すことができる。

$$\{u_c\} = [\lambda] \{\delta_c\} \quad (10)$$

なお、単位行列マトリクスを $[I]$ とすると、この場合の座標変換マトリクス $[\lambda]$ には次のような関係がある。

$$[\lambda][\lambda]^T = [I], [\lambda]^T[\lambda] = 2[I]$$

式(9)、(10)を変形し、それらを式(7)に代入すると、 $x-y$ 座標系における剛性マトリクス $[K]$ は以下のように表すことができる。

$$[\lambda]^T \{F_c\} = [K_c] \cdot [\lambda]^T \{u_c\}$$

$$\{F_c\} = [\lambda][K_c][\lambda]^T \{u_c\}$$

$$[K] = [\lambda][K_c][\lambda]^T \quad (11)$$

(2) ひび割れ要素特性

本解析では、コンクリートは圧縮応力下、引張応力下ともに弾性係数 E_c を有する弾性体であると仮定している。そして、ひび割れ要素に塑性的な挙動と引張軟化特性を導入することによって、ひび割れ要素のみでコンクリート全体の非線形挙動を表現することを試みている。

コンクリート内の最大主引張応力が引張強度に達したとき、要素の再分割を行い、主応力方向に対して直角方向となるようにひび割れ要素を挿入する。ここで、ひび割れ要素の任意点での引張応力と変位

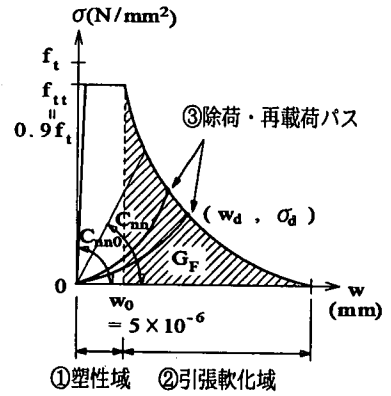


図-3 解析に用いた引張軟化曲線

の関係は式(1)に示すように定義した。式(1)に示すマトリクス $[C]$ は 2×2 マトリクスであり、その中の係数 C_m にはコンクリートの引張軟化特性を導入する。また、ひび割れに沿った変位とせん断応力を関連づける係数 C_s は定数、その他の係数 C_n 、 C_n は 0 とし取り扱うことにする。

解析で用いた引張軟化曲線を図-3 に示す。本研究では、ひび割れを介して伝達される引張応力とひび割れ幅の関係を、以下に示す 3 段階に分けて定義した。図-3 には解析で主として用いた数値も示している。

- ①塑性域
- ②引張軟化域
- ③除荷・再載荷パス

a) 塑性域

コンクリート内の応力が引張強度に到達後、破壊進行領域が形成されるが、一定の応力が保持される段階。

ひび割れ先端に発生する破壊進行領域を 1 本のひび割れとして表現するために、コンクリートの引張強度 f_t を低減した応力を伝達することのできる領域を設けた。また、ひび割れ要素を挿入する場合、多少のひずみエネルギーが解放されることも考慮し、設定した領域である。本解析では、引張強度低減係数 arr を定義し、塑性域で一定に保持される引張応力を次式のように表した。

$$f_u = arr \times f_t \quad (12)$$

ここで、今後、 f_u 値を修正引張強度と呼ぶことにする。また、塑性域の限界ひび割れ幅 w_0 についても定義した。

式(1)に示した[C]マトリクスの係数 C_m は、図-3に示すように引張軟化曲線の勾配 σ/w を表している。塑性域の初期勾配は、ひび割れ要素を挿入する際に設定した C_m 値の初期値 (C_{m0}) であり、その後、 C_m 値は引張軟化曲線をたどって変化する。

b) 引張軟化域

微細ひび割れが次第に局所化し、ひび割れを介してコンクリートに伝達される引張応力が徐々に軟化する段階。

コンクリートの引張軟化曲線として、一般的に一直線モデル・二直線モデル・指数モデルなどが提案されている。本解析では、比較的適合性が良いと言われている指数モデルである-3乗モデルを適用した。式(13)に本解析で用いた引張軟化曲線の関係式を示す。

$$\sigma = f_u \cdot (1 + 0.5(w - w_0) \cdot f_u / G_F)^{-3} \quad (13)$$

また、図-3の斜線部分で示すように、破壊エネルギー G_F は引張軟化域の面積、つまり塑性域以後の引張軟化曲線で囲まれた面積として定義した。

c) 除荷・再載荷パス

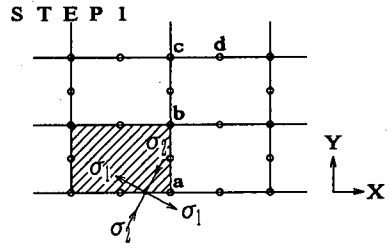
引張軟化域に到達後、ひび割れ部分が除荷あるいは再載荷される場合、前に定義した引張軟化曲線とは異なった経路をたどる。例えば、ひび割れ幅が w_d に達した後、除荷によってひび割れ幅 w が $w < w_d$ となった場合、図-3に示すような除荷パスをたどる。また、再載荷によってひび割れ幅 w が $w > w_d$ となった場合には初めに定義した軟化曲線をたどる。そこで、ひび割れ発生後の除荷・再載荷パスは、ひび割れ幅 w_d に対応する引張応力 σ_d を最大値とし、これと原点を結ぶ凹型の二次曲線で表現することにした。本解析で用いた除荷・再載荷パスの関係式を示す。

$$\sigma = \sigma_d \left(\frac{w}{w_d} \right)^2 \quad (14)$$

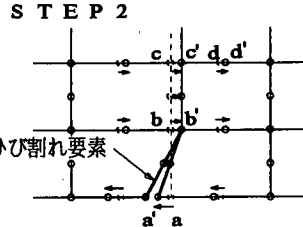
(3) ひび割れの進展

図-4(a)にひび割れ要素の挿入手順を示す。ひび割れ要素は、コンクリート要素内の最大主引張応力発生点に、その方向に対して直角に挿入する。また、主応力を判定する点は、図-4(b)に示すように、1つのコンクリート要素を 4×4 等分した25点とした。以下に、ひび割れ要素の挿入手順について説明する。

- ① 全ての応力算出点の中から、最大となる主引張応力発生点を選択する。(STEP1)
- ② ①で選択した点に最も近い節点を探す。
- ③ ②で選択した節点を X 軸方向に平行移動させ (a → a' へ移動)、また最大主引張応力 σ_1 の方向を考

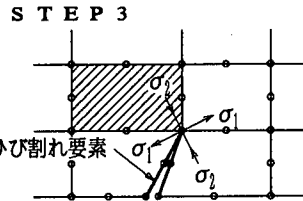


斜線部要素の下縁に最大主引張応力が発生。



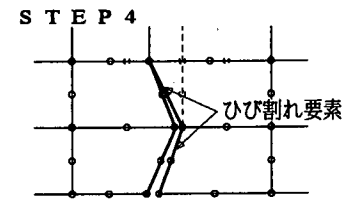
ひび割れ要素

最大主引張応力に対して直角にひび割れ要素を挿入。要素の変形と節点の移動。



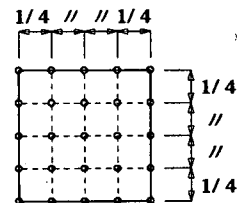
ひび割れ要素

最大主応力点の選択。



新たなひび割れ要素の挿入。ひび割れの延長。

(a) ひび割れ要素の挿入



(b) 主応力の判定点

図-4 ひび割れの進展

慮してコンクリート要素を変形し、コンクリート要素間にひび割れ要素を1つ挿入する。この時、要素間に段差が生じないように、変形したコンクリート要素に合わせて、図の矢印方向に他の節点の移動も行う ($b \rightarrow b'$, $c \rightarrow c'$, $d \rightarrow d'$ へ移動)。ただし、節点はX軸方向のみに移動させるものとし、Y軸方向の移動は行わない。(STEP2)

④ひび割れがさらに進展する場合には、①～③を繰り返し、ひび割れを延長する。ただし、既に発生しているひび割れについては、その後、方向修正を行わない。(STEP3, STEP4)

離散ひび割れモデルを用いた有限要素解析で、ひび割れ進展経路を仮定せずに、自動的に要素再分割を行う手法は野口¹⁴⁾、Wawrzyniec¹⁵⁾らによっても提案されている。野口¹⁴⁾はコンクリートに6節点線形歪三角形要素を用い、ひび割れ先端が応力の特異点になることから、中間節点でひび割れを判定し、その角度を考慮して要素を変形する手法を取っている。また、Wawrzyniec¹⁵⁾らはひび割れ先端を放射線状に再分割することによって、斜めに進展するひび割れにも対応する方法を提案している。

本解析では、コンクリートの引張強度によってひび割れ発生を判定を行い、最大主引張応力の方向を考慮してコンクリート要素を変形し、ひび割れ要素を1つ挿入することに解析ステップを進めた。そして、コンクリート要素を変形させることについては、高次のアイソパラメトリック要素(コンクリート: 8節点四辺形要素、ひび割れ: 6節点線要素)を用い、ガウス積分点を $5 \times 5 = 25$ 点とすることによって、つまり、要素分割数を少なくとも高精度の結果が得られる要素を用いることにより対応した。さらに、本解析では、引張応力を受けるコンクリートの非線形挙動をコンクリート要素間に挿入するひび割れ要素のみで表現していることから、ひび割れ進展がコンクリート構造全体に与える影響について、コンクリート要素とひび割れ要素、個々の情報から得ることができるという点も特長として上げられる。

3. 解析手法

本解析プログラムのフローチャートを図-5に示す。以下に、図-5について簡単に説明する。

- ①コンクリートは線形弾性体であると仮定し、載荷点に任意の強制荷重を与えて弾性計算を行う。
- ②コンクリート中の最大主引張応力発生点を選択する。
- ③最大主引張応力が、与えたコンクリートの引張

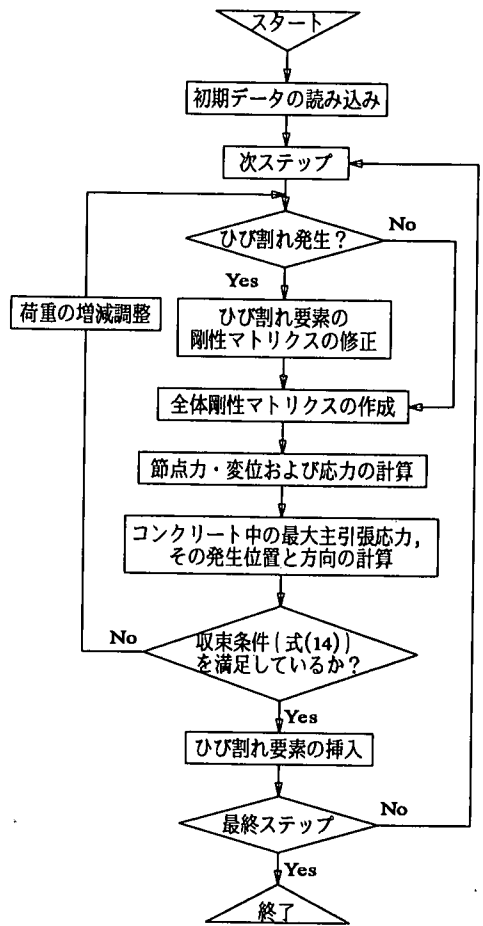


図-5 解析フロー

強度 f_t に等しくなるように、載荷荷重を増減させて調整する。

- ④調整した強制荷重作用時について弾性計算を行い、最大主引張応力発生点に主応力方向に対して直角となるように、ひび割れ要素を1つ挿入する。
- ⑤ひび割れ要素の剛性マトリクスを修正し、要素の再分割を行う。
- ⑥ひび割れ要素の引張応力とひび割れ幅の関係が図-3に示した引張軟化曲線に一致するように、直接繰り返し法による収束計算を行う。
- ⑦最大主引張応力が、コンクリートの引張強度 f_t に一致するように載荷荷重を調整し、載荷荷重が式(15)の条件を満たすまで、⑥の収束計算を繰り返す。
- ⑧式(15)の条件を満たすれば、新たにひび割れ要素

表-1 コンクリートの材料特性

f_c (N/mm ²)	f_t (N/mm ²)	E_c (N/mm ²)	ν
30	3	3.0×10^4	0.1667

表-2 [C]マトリクスの係数

C_g (N/mm ³)	C_n (N/mm ³)	C_m (N/mm ³)
1.5×10^3	0	0

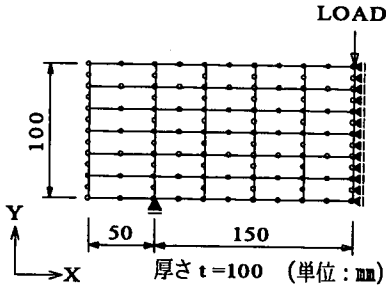


図-6 要素分割図

を1つ挿入し、②～⑦までの一連のステップを繰り返す。

$$(P_n - P_{n-1}) / P_n \leq 5.0 \times 10^{-5} \quad (15)$$

ここで、 P_n は載荷荷重、 n は収束計算回数である。

4. 無筋コンクリートはりの有限要素解析

(1) 解析概要

本研究では、矩形断面を有する無筋コンクリートはり（100×100×400(mm)）の曲げ試験について、2次元有限要素解析を行った。対称性を考慮し、無筋コンクリートはりの1/2について解析を行った。コンクリートはりの要素分割図を図-6に示す。載荷点下のはり中央部はX方向に固定、支点部はY方向に固定した。コンクリートは、8節点からなる2次のアイソパラメトリック四辺形要素で表現した。コンクリートの材料特性を表-1に示す。また、本研究で提案したひび割れ要素の伝達応力とひび割れ形成にともなう変位の関係で表される、[C]マトリクスの係数を表-2に示す。ここで、ひび割れ幅とひび割れを介する伝達応力とを関連づける係数 C_m

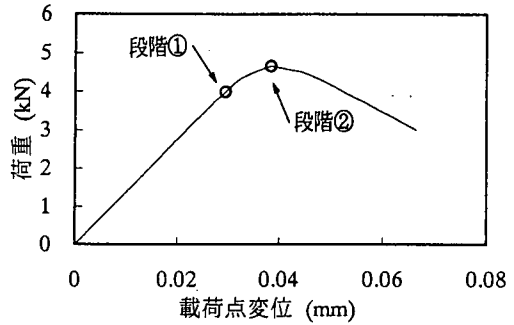
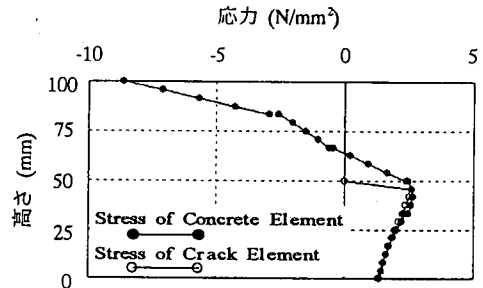
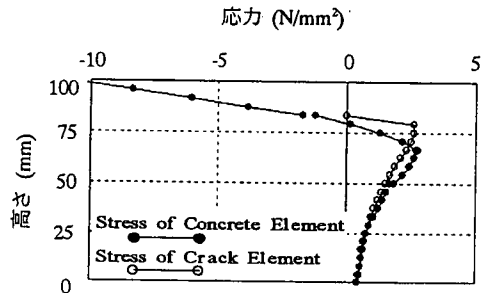


図-7 荷重-変位関係



(a) 段階①



(b) 段階②

図-8 応力分布図

には、図-4で示した引張軟化特性を導入した。また、ひび割れに沿った変位と応力を関連づける係数 C_g は定数、その他の係数 C_n と C_m は0として取り扱った。

(2) 解析結果および考察

本研究で提案したひび割れ要素の基本的特性を把

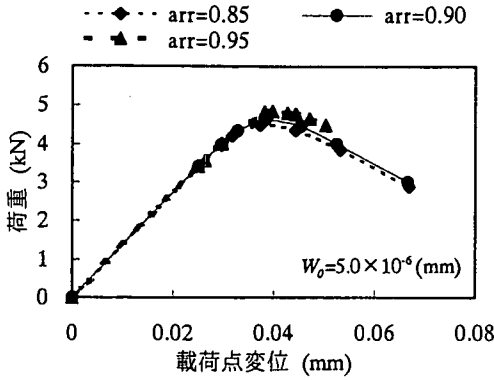


図-9 荷重-変位関係

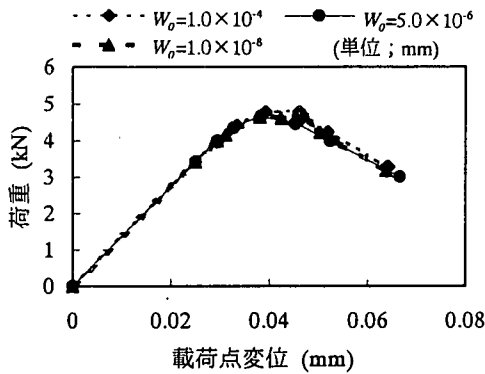


図-10 荷重-変位関係

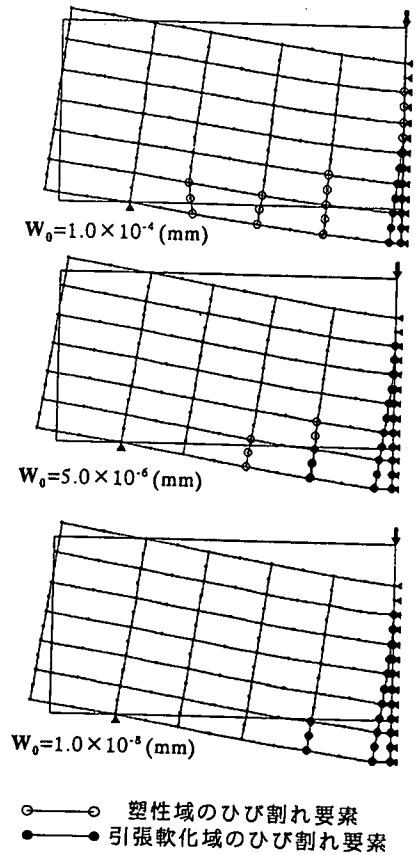


図-11 ひび割れ進展状況

握し、2.(2)で定義した引張軟化曲線の形状が解析結果に与える影響について検討を行う。また、解析対象物の大きさを変化させ、コンクリート曲げ強度の寸法効果についても検討する。

a) ひび割れ要素の基本的特性

図-7 に荷重と載荷点変位の関係、図-8 には図-7 に示す各段階におけるスパン中央断面のコンクリート要素とひび割れ要素の応力分布を示す。●印はコンクリート要素、○印はひび割れ要素に伝達される応力をそれぞれ表している。

ひび割れが発生することによって、●印で示されるひび割れ以外のコンクリート部分に伝達される引張応力が除荷される状態を表現することができた。さらに、ひび割れが進展し、変形が増大するにしたがい、ひび割れを介してコンクリートに伝達される引張応力が低下する様子を表現することができた。また、コンクリート要素に伝達される引張応力とひび割れ要素の受け持つ応力の分布がほぼ一致した結

果となった。しかしながら、ひび割れ先端付近の応力分布には、多少のズレが生じた。これは、2.(2)に示した引張軟化曲線の定義上、ひび割れ要素のひび割れ先端部分の応力が0になるためであると考えられる。

本解析では、コンクリートは線形弾性体として取り扱い、局所的な挙動を表現するために、コンクリート要素の界面にひび割れ要素を挿入した。このような接触要素を用いた有限要素解析は、局所的な現象とそれが構造全体に及ぼす影響を個別にとらえることができるという利点があると考えられる。

b) 塑性域による影響

コンクリート内に形成される破壊進行領域による影響と、ひび割れ要素の挿入によるひずみエネルギーの解放を考慮するために定義した引張強度低減係数 arr (式(12)) が、解析結果に与える影響について検討を行った。図-9 に arr 値を変化させた場合の荷重と載荷点変位の関係を示す。

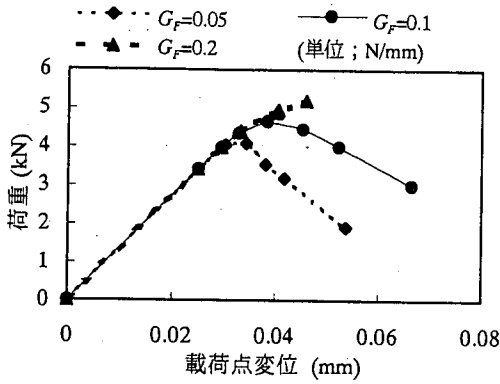


図-12 荷重-変位関係
(100×100×400(mm))

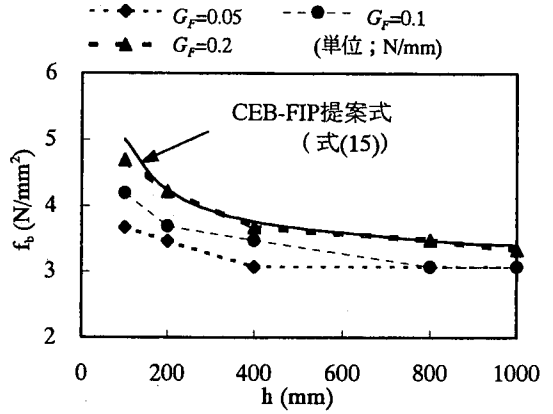


図-14 曲げ強度と部材寸法の関係

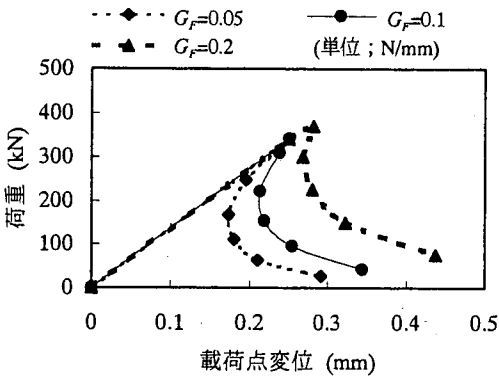


図-13 荷重-変位関係
(1000×1000×4000(mm))

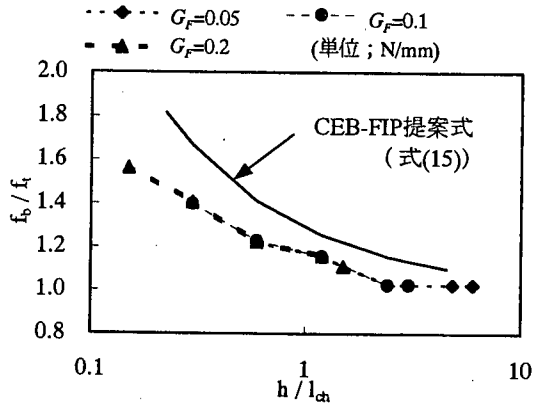


図-15 曲げ強度と部材寸法の関係

引張強度低減係数 arr を増加させると、次第に最大荷重が大きくなった。しかし、 arr 値が 1.0 に近づくにつれて、すなわち塑性域での伝達応力がコンクリートの引張強度に近づくにつれて、式(15)に示す収束条件を満足することが困難になった。そのため、 $arr=0.95$ とした場合、他の arr 値の場合に比べて変形が小さい段階で解析が終了した。その一方、 arr 値が 0.9 と 0.85 の場合には、荷重-載荷点変位の関係に大きな違いは見られなかった。

次に、コンクリートが塑性域にある限界ひび割れ幅 w_0 (図-3) が、解析結果に及ぼす影響について検討を行った。 w_0 値を変化させた場合の荷重と載荷点変位の関係を図-10、ひび割れ進展状況を図-11 にそれぞれ示す。

w_0 値を変化させても、荷重-載荷点変位関係に大きな違いは見られなかった。しかし、図-11 に示すように w_0 値の相違はひび割れ発生・進展状況に

影響を与えた。 w_0 値が小さい場合には、スパン中央に発生したひび割れのみが上に向かって進展していく様子が見られた。しかし、 w_0 値が大きい場合には、塑性域にあるひび割れがスパン中央から支点方向に向かって広範囲に形成された。

本研究で定義した引張軟化曲線の塑性域は、コンクリートが引張強度に達する分岐点直後の不安定な状態を示している。今回、検討した範囲程度であれば、塑性域の引張強度低減係数 arr や限界ひび割れ幅 w_0 がコンクリートはりの全体の挙動に与える影響はそれほど大きくないものと考えられる。今後、 $arr=0.9$ 、 $w_0=5.0 \times 10^{-6}$ (mm)として解析を進めることとした。

c)引張軟化域による影響

破壊エネルギー G_F の変化が、コンクリートはりの力学的挙動に与える影響について検討する。まず、無筋コンクリートはりの寸法を 100×100×400(mm)

と $1000 \times 1000 \times 4000(\text{mm})$ の 2 種類, G_F 値を 0.05, 0.1, 0.2(N/mm) の 3 種類に変化させて解析を行った。図-12, 図-13 にそれぞれの部材寸法について, 破壊エネルギー G_F を変化させたときの荷重と載荷点変位の関係を示す。

部材寸法の相違に拘わらず, 破壊エネルギー G_F が大きくなるにつれて最大荷重が増加した。部材寸法が小さい場合 ($100 \times 100 \times 400(\text{mm})$), ひび割れ発生後も徐々に荷重が増加し, 最大荷重到達後, 変位の増加とともになだらかに荷重が減少した。しかし, $G_F=0.2(\text{N/mm})$ のときについては, 他の G_F 値のときとは異なり, 収束計算段階で式(15)で示した条件を満足することができず, 最大荷重以後の軟化現象を表現することが困難であった。一方, 部材寸法が大きい場合 ($1000 \times 1000 \times 4000(\text{mm})$), G_F 値の変化によらず, 最大荷重以後急激に荷重が低下し, 変位が一時的に減少する, いわゆるスナップバック現象が見られた。実験では, 部材寸法が大きくなると破壊形態が脆性的になり, スナップバック現象が観察されることがある。本解析においても, 部材全体の挙動に及ぼす部材寸法の影響を的確に表現できたものと考えられる。

部材寸法と破壊エネルギー G_F がコンクリートの曲げ強度に与える影響について検討を行った。図-14, 図-15 に解析結果を示す。ここで, 図-15 の横軸に用いている特性長さ l_{ch} は $l_{ch}=E_c G_F f_t^2$ (E_c : 弾性係数, f_t : 引張強度) で表される材料特性パラメータである。部材寸法は $100 \times 100 \times 400$, $200 \times 200 \times 800$, $400 \times 400 \times 1600$, $800 \times 800 \times 3200$, $1000 \times 1000 \times 4000(\text{mm})$ の 5 種類, 破壊エネルギー G_F は 0.05, 0.1, 0.2(N/mm) の 3 種類とした。また, 図-15 には式(16)に示す, CEB-FIP¹⁹⁾で提案されている曲げ強度の寸法効果式による結果もあわせて表示している。

$$\frac{f_b}{f_t} = \frac{1+1.5(h/h_0)^{0.7}}{1.5(h/h_0)^{0.7}}$$

$$h_0=100(\text{mm}), h \leq 1000(\text{mm}) \quad (16)$$

ここで, h ははり高さ, f_b は曲げ強度である。ただし, 式(16)は特性長さ l_{ch} の項が含まれていないため, 通常用いられるコンクリートを想定して, 特性長さは $l_{ch}=333(\text{mm})$ ($f_t=3.0(\text{N/mm}^2)$, $E_c=3.0 \times 10^4(\text{N/mm}^2)$, $G_F=0.1(\text{N/mm})$) とした。

図-14 から, G_F 値が大きくなるほどコンクリートの曲げ強度が増加していることが観察された。また, いずれの G_F 値においても部材寸法が増加するにつれて, 曲げ強度が低下し, 徐々に引張強度 ($f_t=3.0(\text{N/mm}^2)$) に漸近する傾向が見られた。その

ような傾向は CEB-FIP による提案式(16)の結果からも見られた。

Gustafsson¹⁷⁾は切り欠きのない無筋コンクリートはりの 3 点曲げ試験に関して, 仮想ひび割れモデルを用いた有限要素解析を行っている。解析から, コンクリートの曲げ強度は部材寸法の増加にともなって低下し, 寸法効果があること, そして引張強度に漸近することを示している。また, 特性長さ l_{ch} を用いることによって, 解析結果をうまく表現できることを示している。図-15 から, 部材寸法の増加にともない曲げ強度が低下する, 寸法効果の影響が見られ, 引張強度に漸近する同様の傾向が観察された。解析結果を特性長さ l_{ch} で表現することによって, 図-14 とは異なり, 破壊エネルギー G_F の変化に依存しない, 寸法効果の影響が見られた。また, コンクリートの引張強度に対する曲げ強度の比は, 式(15)から得られた結果よりも本解析結果の方が小さくなる傾向が見られた。

5. 結論

本研究から得られた結論を以下に示す。

- (1) コンクリートに発生するひび割れを表現するための新たな離散ひび割れモデルを提案し, その定式化を行った。ひび割れ要素は, コンクリート要素界面に接触するアイソパラメトリック線要素として表現した。
- (2) ひび割れをコンクリート界面の接触要素として表現することにより, 局所的挙動とそれが構造全体に与える影響を個々に把握することができた。このような接触要素は, ひび割れだけでなく, 鉄筋とコンクリート間の付着など, 多くの界面を有するコンクリート構造解析の有効な手段であると考えられる。
- (3) 本解析は, コンクリートの弾性解析から, ひび割れ発生位置とその方向を決定し, その点にひび割れ要素を 1 つずつ挿入して進行させた。このような, ひび割れ進展経路をあらかじめ仮定せず, 逐次ひび割れ要素を挿入する手法により, ひび割れ発生後の挙動を的確に表現することができた。
- (4) 本研究で提案した手法により, コンクリート曲げ強度の寸法効果を表すことができた。また, 特性長さ l_{ch} を用いて解析結果を整理することにより, 破壊エネルギー G_F に依存しないコンクリート曲げ強度の寸法効果を表現することができた。

(5)コンクリートはりの部材寸法が増加するにつれて、荷重-変位曲線で表されるはりの全体挙動が脆性的になる様子、またスナップバック現象も表現することができた。

謝辞：本論文の作成にあたり、東京工業大学工学部教授二羽淳一郎先生に貴重なご助言、ご指導を賜りました。ここに厚く御礼申し上げます。

参考文献

- 1) Slate, F. O. and Hover, K. C. : Microcracking in Concrete, in Fracture Mechanics of Concrete Material Characterization and Testing, Edited by Carpinteri, A. and Ingrassia, A. R., pp.137-159, 1984.
- 2) 例えば, Rokugo, K., Iwasa, M., Suzuki, T. and Koyanagi, W. : Testing Methods to Determine Tensile Strain Softening Curve and Fracture Energy of Concrete, Fracture Toughness and Fracture Energy, Balkema, pp.153-163, 1989.
- 3) 例えば, Hillerborg, A. : Numerical Methods to Simulate Softening and Fracture of Concrete, Fracture Mechanics of Concrete (G. C. Sih, A. DiTommaso Ed.), Martinus Nijhoff Publishers, pp.141-170, 1985.
- 4) 内田裕市, 六郷恵哲, 小柳 治 : 曲げ試験に基づく引張軟化曲線の推定と計測, 土木学会論文集, No.426/V-14, pp.203-212, 1991.
- 5) 上田 稔, 長谷川宣男, 佐藤正俊, 奥田宏明 : コンクリートの引張破壊メカニズムと引張強度の破壊力学的研究, 土木学会論文集, No.466/V-19, pp.69-78, 1993.
- 6) Bazant, Z. P. and Oh, B. H. : Crack Band Theory for Fracture of Concrete, Materials and Structures, Vol.16, No.13, pp.155-177, 1983.
- 7) Ortiz, M., Leroy, Y. and Needleman, A. : A Finite Element Method for Localized Failure Analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, No.61, pp.189-214, 1987.
- 8) Belytschko, T., Fish, J. and Engelman, B. E. : A Finite

Element with Embedded Localization Zones, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, No.70, pp.59-89, 1988.

- 9) Hillerborg, A., Modeer, M. and Petersson, P. E. : Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements, Cement and Concrete Research, Vol.6, pp.773-782, 1976.
- 10) 例えば, Ngo, D. and Scordelis, A. C. : Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, ACI Journal, No.64-14, pp.152-163, 1967.
- 11) 松尾真紀, 児島孝之, 高木宣章 : 有限要素法による鉄筋コンクリートはりのひび割れ解析, 土木学会第52回年次学術講演会講演概要集, V-254, pp.508-509, 1997.
- 12) 横山文彦, 児島孝之, 高木宣章, 松尾真紀 : ひび割れ要素を用いたコンクリートの曲げひび割れ特性に関する FEM 解析, 土木学会第 53 回年次学術講演会講演概要集, V-508, pp.1016-1017, 1998.
- 13) 日比野憲太, 児島孝之, 高木宣章, 松尾真紀 : ひび割れ要素を用いたコンクリートの曲げひび割れの進展に関する有限要素法解析, コンクリート工学年次論文報告集, V-21, No.3, pp.61-66, 1999.
- 14) 野口博 : 有限要素法による鉄筋コンクリートの非線形解析 (第 4 報 : コンクリートのひび割れ発生と進展), 日本建築学会論文報告集, V-262, pp.43-52, 1977.
- 15) Wawrzynek, P. A. and Ingrassia, A. R. : Interactive Finite Element Analysis of Fracture Processes: An Integrated Approach, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, V-8, pp.137-150, 1987.
- 16) CEB-FIP : CEB-FIP Model Code 1990, pp.36.
- 17) Gustafsson, P. J. : Fracture Mechanics Studies of Non-Yielding Materials Like Concrete - Modeling of Tensile Fracture and Applied Strength Analyses -, Report TVBM-1007, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Sweden, 1985.

(1999.3.29 受付)

DISCRETE MODEL FOR CRACKING IN CONCRETE AND ITS FUNDAMENTAL CHARACTERISTICS

Maki MATSUO, Kenta HIBINO, Nobuaki TAKAGI and Takayuki KOJIMA

In this study, discrete crack formulation for cracking in concrete was proposed and its fundamental characteristics was investigated. Crack was expressed as the isoparametric quadratic linear element and it was modeled by the contact element between concrete elements. A crack element was inserted at the point, where the maximum principal tensile stress occurred, and to the direction perpendicular to it. The proposed crack element was distinguished by the tension softening curve and the fracture energy, which were based on the non-linear relationship between transferring stress and crack opening. The analytical study on a plain concrete beam was carried out. The crack propagation analysis of a plain concrete beam was carried out by the use of the finite element method.