

情報エントロピーを用いた システムの信頼性と冗長性の検討

星谷 勝¹・山本欣弥²

¹正会員 Ph.D. 武蔵工業大学教授 工学部土木工学科 (〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)

²正会員 工修 攻玉社工科短期大学助教授 環境建設学科 (〒141-0031 東京都品川区西五反田 5-14-2)

ライフラインネットワークやトラス構造物といった現実の工学システムは、多くの要素から構成されており、構成要素の部分的な被害がシステム全体の破壊に直結するとは限らない。本研究では、このようなシステムの有する保有耐力、いわゆる冗長性を、Shannon の情報エントロピーを用いて物理的に定義し、冗長性指数 (redundancy index) を提案している。次に、古くから扱われている並列システムを例題として、信頼性 (reliability) と冗長性 (redundancy) の持つ意味について詳しく検討している。さらに、簡単なネットワークモデルを用いてシステムの形状、リンクの破壊確率とシステムの信頼性および冗長性について検討を行った。本研究で示した冗長性指数は、De, Karamchandani and Cornell によって定義された冗長性指数と比べて、優れた特長を有していることがわかった。

Key Words: redundancy, redundancy index, reliability, structural safety, information entropy, network system

1. はじめに

1995 年の阪神大震災では、多くの建物やライフライン等の施設が大きな被害を受けた。これを機に、工学システムの信頼性に関する関心が再び高まってきた。このようなシステムは、一般的に多くの要素から構成されているため、いくつかの構成要素の部分的な被害がシステム全体の破壊に直結するとは限らない。このため、システムの安全性を理論的に評価することは容易ではない。そして、信頼性およびシステムの保有耐力、いわゆる冗長性は、まず物理的に定義する必要がある。信頼性および冗長性に関する問題は、古くは 1960 年代後半から検討されている。Freudenthal, Garrelts and Shinozuka¹⁾, Yao and Yeh²⁾, Moses and Kinsler³⁾, Cornell⁴⁾ および Hoshiya⁵⁾らは、多くの要素からなるシステムの信頼性と冗長性に関する静力学的な問題を、基本的なモデルを用いて検討している。最近では、Wen et al.⁶⁾は、動的荷重を受ける並列システムの冗長性の定量化について提案している。

本研究では、古くから扱われている並列システムに再度注目し、Shannon の情報エントロピー^{7),8),9)}を用いて、信頼性と冗長性の持つ意味についてさらに詳しく検討している。

最初に、強度が確率変数で与えられる 4 つの要素から

なり、確率変数で与えられる引張り荷重を受ける並列システムを考える。システムの要素の破壊がシステム全体の破壊を意味するのではないこと、要素の一部が破壊したときに、残りの要素へ荷重の再分配が起こることを考慮して検討する。荷重の再分配が繰り返されることにより、破壊の連鎖が発生し、最終的なシステムの破壊に到達する。多数の要素が破壊する段階はさまざまである。最初の要素が破壊してから、すべての要素が破壊して最終的にシステム全体が破壊するまでの間の保有耐力の大きさが、物理的な冗長性を表すものさしとして説明されている。この例題を基本として、破壊の段階の変化を反映させた被害事象の発生確率によるエントロピーを用いて冗長性指数を定義した。不確定性の度合いをあらゆるエントロピーが、冗長性の度合を定量的にあらゆることも可能であることが示されている。本研究で示した冗長性指数は、De, Karamchandani and Cornell¹⁰⁾によって定義された冗長性指数と比べて、優れた特長を有していることがわかった。

次に、それぞれ m 個の延性材 (ductile material) と塑性材 (brittle material) の要素からなるシステムを用いて、冗長性指数の定義の正当性を検証している。南カルフォルニア大学の Prof. Shinozuka は、第 1 著者との個人的な議論の場で、これらのシステムを興味深く「静力学的には

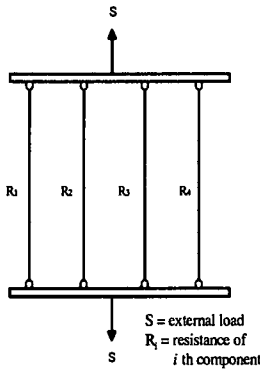


Figure 1 Redundant System

不静定であるが、確率的には静定なシステム」と呼んだ。このように、破壊の連鎖の発生するシステムが、単純に要素数の増加によっては、より大きな冗長性を期待できないという事実は、1960年代後半から1970年代前半の多くの研究者によって、すでに指摘されている。本論では、冗長性指数を用いて、システムの信頼性と冗長性について、システムの形状と部分的な被害を受けたあとの荷重の再分配、システムを構成する要素の材質、要素の強度および荷重の不確定性の関連について検討した。

さらに、簡単なネットワークモデルを用いてシステムの形状、リンクの破壊確率とシステムの信頼性および冗長性の関係について検討を行った。

本研究で提案した冗長性指数 R_E を、今後、高次の不静定構造物やライフラインのような複雑なネットワークシステムへ適用していきたい。そのための基本モデルを本論では検討した。

本研究における不確定性の尺度の比較により冗長性を評価したところは、Ziha^{11),12)}によるエントロピーを用いたシステムの不確定性に関する研究からヒントを得ている。

2. 冗長性の定義

(1) 工学システムの信頼性と冗長性

確率変数で表される強度 (R) を持つ4本の要素からなる並列システムに、確率変数で表される引張り荷重 (S) が作用している (Figure 1)。ある要素が破壊した場合、作用している荷重は残りの要素に均等に再分配される。さらに、残っている要素に破壊が発生した場合、荷重の再分配は繰り返され、最終的にはすべての要素が破壊する場合もある。あるいは荷重の再分配による要素の破壊が、全ての要素の破壊までいたらず、途中の段階で止まる場合もある。よって、要素の総数が多い場合、幾つかの要素が無事である確率を見つけるためには、非常に複雑な計算を行う必要がある。そのため、4本の要素が

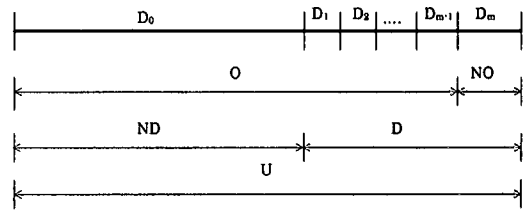


Figure 2 Sample Space of Redundant System

破壊する事象の確率を仮の数値で与えた5つの並列システムを考え、各システム間での冗長性の違いを検討する。

本論において、システムの信頼性は、任意の要素に破壊が生じた場合であってもシステムの機能が維持される確率によって定義する。そして、冗長性の大小についての検討は、信頼性の等しいシステム間で行うことを基本とする。

(2) 冗長性指数の定義

Figure 1 と同様な m 本の要素を持つ一般的なシステムを考え、システムのもつ冗長性を物理的に定義する。システム要素の破壊の事象を Figure 2 に示す。 D_0 は、1本の要素も破壊しない事象、 D_1 は、任意の1本のみ破壊する事象である。同様の意味で任意の2本のみ、あるいは $m-1$ 本のみ破壊にとどまる事象は、それぞれ D_2 および D_{m-1} である。ここで、たとえば D_2 は、荷重 S により同時に2本の要素が破壊する事象や、任意の1本が破壊して荷重の再分配が起こった結果、続いて2本目まで破壊が連鎖して生起する事象などを含め、複雑な破壊経路を網羅した事象である。この事象の集合を U とする。また、システム要素に破壊が発生する事象、つまり、少なくとも1本以上の要素が破壊する事象の部分集合を D 、システム要素に全く破壊が発生しない事象の部分集合を ND とし、それぞれ式(1)、式(2)で表す。

$$D = \{D_1, D_2, \dots, D_{m-1}, D_m\} \quad (1)$$

$$ND = \{D_0\} \quad (2)$$

同様に、システムの機能が保たれている事象の部分集合を O 、システムの機能が破壊した事象の部分集合を NO とし、それぞれ式(3)、式(4)で表す。

$$O = \{D_0, D_1, D_2, \dots, D_{m-1}\} \quad (3)$$

$$NO = \{D_m\} \quad (4)$$

ここで、事象 $D_i: i=0 \sim m$ は、互いに排反で全てを尽くしている。

a) 冗長性指数 R_E

システムの冗長性を式(5)で定義される冗長性指数 R_E によって表す。

$$R_E = H_0 / \log_2(m) \\ = - \sum_{i=1}^m P_{D_i|O} \log_2 P_{D_i|O} / \log_2(m) \quad (5)$$

ここで、 $H_{0|0}$ は、システムの少なくとも1本以上の要素が破壊する条件で、少なくとも1本以上の要素が破壊する事象の部分集合の条件付エントロピーである。 R_E は、 $H_{0|0}$ を最大値 $\log_2(m)$ で除して、0 から 1 の間の値をとるように基準化している。また、 $P_{0|0}$ は、システムの少なくとも1本以上の要素が破壊する条件での、事象 D_i の条件付確率であり、部分集合 D の生起確率を P_D としたとき、式(6)で表される。

$$P_{0|0} = \frac{P(D_i)}{P_D} \quad (6)$$

冗長性指数 R_E は、その値が0 のときシステムの冗長性が最小であることを示し、1 のときシステムの冗長性が最大であることを示す。

b) Cornell の冗長性指数 R_R

De, Karamchandani and Cornell¹⁰⁾ は、システムの冗長性を、式(7)および式(8)で定義される冗長性指数 R_R によって表すことができることを示した。また、Wen, Wang and Song⁹⁾ は、この冗長性指数 R_R を、確率的に与えられる荷重が構造物に動的に作用する動的問題に用いている。

$$R_R = \frac{P(\text{system failure})}{P(\text{any first component failure})} \quad (7)$$

$$= \frac{P(D_m)}{\{P(D_1) + P(D_2) + \dots + P(D_m)\}} \quad (8)$$

ここで、冗長性指数 R_R は、事象 D のもとでの事象 D_m が生起する条件付確率である (式(9))。

$$R_R = P_{D_m|D} \quad (9)$$

R_R は、0 と 1 の間の値をとり、大きな値を示すときシステムの冗長性が小さいことを表す。式(7)および(8)は、分子と分母が等しいとき最大値1をとる。このことは、 $P(D_1)$ から $P(D_{m-1})$ が0 のときであり、1本でも要素が破壊した場合、破壊の連鎖が最終段階である全ての要素の破壊へ確率1で決定論的に進行することを示しているので、冗長性は最小になる。逆に、式(7)および(8)が0となる場合は、分子の $P(D_m)$ が0 のときであり、たとえ、任意の要素の破壊確率が0でなく、また破壊の連鎖が発生した場合であっても、全ての要素の破壊までいらずに途中の段階、つまり破壊の途次でとどまることを示しているの、冗長性は最大となる。ただし、実際のシステムでは、 $P(D_m)$ が0となるものは存在しない。

また、 R_R は、複雑な破壊経路の途次で破壊が終了する各々の確率が、どのように分布しているかについては反映していない。

c) Ziha の冗長性指数 R_Z

Ziha^{11,12)} は、さまざまなシステムの不確定性を Shannon の情報エントロピーにより測る方法を提案している。複雑なシステムの事象の生起確率を用いた条件付エントロピーにより、システムの冗長性を定義している。さらに、最大エントロピーによって基準化することにより事象数

Table 1 Reliability and Redundancy Index

System	A	B	C	D	E
$P(D_0)$	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900
$P(D_1)$	0.090	0.050	0.020	0.025	0
$P(D_2)$	0	0.020	0.020	0.025	0
$P(D_3)$	0	0.020	0.050	0.025	0
$P(D_4)$	0.010	0.010	0.010	0.025	0.100
Reliability based on at least one component success $1-P(D_4)$	0.990	0.990	0.990	0.975	0.900
Probability of any first component failure $P_0 = \sum_{i=1}^m P(D_i)$	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
Redundancy index $R_A = \frac{P(D_0)}{P_0}$	0.1	0.1	0.1	0.25	1.0
$R = 1-R_R$	0.900	0.900	0.900	0.750	0.0
Redundancy index R_Z	0.220	0.285	0.285	0.257	0
Redundancy index R_E	0.234	0.880	0.880	1.000	0

の異なるシステム間の不確定性を相対的に比較できることを示している。基本的に、Ziha の冗長性は、条件付エントロピーであるが、本論では、0 から 1 の値に基準化した冗長性指数 R_Z として扱うこととする。冗長性指数 R_Z を式(10)に示す。

$$R_Z = H_{0|0} / \log_2(m) \\ = - \sum_{i=1}^{m-1} P_{0|0} \log_2 P_{0|0} / \log_2(m) \quad (10)$$

ここで、 $H_{0|0}$ は、システムの機能が保たれている条件で、システムの機能が保たれている事象の部分集合の条件付エントロピーである。 R_Z は、 $H_{0|0}$ を最大値 $\log_2(m)$ で除して、0 から 1 の間の値をとるように基準化している。また、 $P_{0|0}$ は、システムの機能が保たれている条件での、事象 D_i の条件付確率であり、部分集合 O の生起確率を P_O としたとき、式(11)で表される。

$$P_{0|0} = \frac{P(D_i)}{P_O} \quad (11)$$

冗長性指数 R_Z は、0 のときシステムの冗長性が最小であることを示し、1 のときシステムの冗長性が最大であることを示す。

ここで、冗長性指数 R_E および R_Z は、それぞれ部分集合 D と O の条件付エントロピーを基準化したものである。そのため、両者ともシステムの冗長性をとらえるとき同様の傾向を示す。しかし、システムの信頼性をすべての要素が無事である確率、つまり $P(D_0)$ によって定義する場合には、冗長性指数 R_Z が適している。また、要素に破壊が生じた場合であってもシステムの機能が無事であればよいという確率、つまり $1-P(D_m)$ を基準にする場合には、冗長性指数 R_E が適している。

(3) システム間の冗長性の比較

4本の要素が破壊する事象の確率を仮の数値で与えた5つの並列システムを Table 1 に示す。システムAでは、1本の要素も破壊しない確率 $P(D_0)$ は 0.9、任意の1本のみ破壊する確率 $P(D_1)$ は 0.09、同様の意味で任意の2本の

み、あるいは3本のみの破壊にとどまる確率 $P(D_2)$ および $P(D_3)$ は、それぞれ0である。また、たとえば $P(D_3)$ は、荷重 S により同時に3本の要素が破壊する事象や、任意の1本が破壊して荷重の再分配が起こった結果、続いて2本目、3本目まで破壊が連鎖して生起する事象などを含め、複雑な破壊経路を網羅した事象の確率である。さらに、4本全ての要素が破壊する確率 $P(D_4)$ は0.01である。2本および3本の要素までが破壊する確率が0であるのに、4本全ての要素が破壊する確率が0でないということは、破壊の連鎖が最終段階である全ての要素の破壊にいたる確率が存在していることを意味している。

また、冗長性指数 R_R は0のとき冗長性が最大であることを示し、1のとき冗長性が最小となることを示す。これは、 R_E および R_Z が、0のときに冗長性が最小、1のときに冗長性が最大となることと逆になっている。このため、比較が容易にできるように、 R_R を式(12)で示すように R に変換して他の冗長性指数との比較を行う。

$$R = 1 - R_R = 1 - \frac{P(D_m)}{1 - P(D_0)} \quad (12)$$

a) システムA およびシステムB

システムA およびBは、 R によると両方とも0.9で冗長性は等しい。しかしながら、それぞれの破壊事象の確率を注意深く観察すると、システムAでは、2本以上の要素が破壊すると破壊の連鎖が発生しシステム全体の破壊へつながるが、システムBでは、2本あるいは3本の要素が破壊してもシステムはまだ確率0.02で安全であるため、システムBの保有耐力がシステムAのそれより優れていることがわかる。これら2つのシステムは、要素が1本も破壊しないときの信頼性は、0.90で等しい。また、少なくとも1本の要素が無事であるという確率を用いて定義される信頼性についても、0.99と等しい。さらに、 R も0.9で等しい。これらより、システムAとシステムBの安全性は等しいと考えてよいのであろうか。答えは、否である。システムAは破壊の連鎖が発生しやすいため、システムBより安全性は低いと考えられる。実際、 R の代わりに R_E を用いてみると、システムAの R_E は0.234となり、システムBの0.880より非常に小さい値を示し、システムBがシステムAより冗長性が優れていることを表していることがわかる。 R_Z の値を見ても、システムAでは0.220、システムBでは0.285となり、システムBの冗長性が優れていることを示している。

b) システムB およびシステムC

次に、システムBとシステムCを比較する。この2つのシステム間で、 R_E と R_Z はともに等しい値をとるため、システムBとシステムCでは冗長性の度合いは同じであるといえる。これは、情報エントロピーによって定義されている冗長性指数 R_E および R_Z を用いても異なる被害の段階の確率を区別することはできないことを意味する。

しかしながら、このことはシステムの維持管理などを対象とした細かい検討においては R_E と R_Z の欠点といえるが、システムの保有耐力に関する限りは、両者は等しいとみなしてもそれほど大きな誤りとはならない。

c) システムD

3番目に、システムDは、システムA、BおよびCとは信頼性が異なり、0.975である。信頼性が異なるので、単純な比較はあまり意味がないけれども、システムDは、 $P(D_i)$, $i = 1 \sim 4$ の値がすべて同じであり、冗長性指数 R_E が最大値である1.0を示している。一方、システムDの R は0.75で、システムA、BおよびCの0.90と比べると比較的小さな値をとり、 R の値にもとづけば冗長性は小さ目と判断される。しかし、システムDは、破壊の途次を見ると、少なくとも1本の要素が無事である確率を用いて定義される信頼性が0.975であるシステムのなかでは、明らかに最大の冗長性を持っていることがわかり、 R の値は矛盾しているように見える。しかし、一方、冗長性指数 R_Z の値は、0.257でシステムBおよびCより小さい値となっている。つまり、要素が1本も破壊しない確率 $P(D_0)$ によって定義される信頼性が等しいシステムとしては、システムDの冗長性は低めであることを示している。

このことは、各冗長性指数が、基準とする信頼性が異なっているために生じた結果である。このため、各冗長性指数の比較を厳密に行うためには、要素が1本も破壊しない確率 $P(D_0)$ を用いて定義される信頼性および、少なくとも1本の要素が無事である確率 $1 - P(D_m)$ を用いて定義される信頼性が、両方とも等しいシステム間で行う必要がある。

d) システムE

4番目に、システムEは、極端なケースである。このシステムでは、直感的にわかるように冗長性指数 R_E は0である。1本から3本までの要素が破壊する確率が0であることを考えれば、最初の要素の破壊が破壊の連鎖に直結することが明らかであり、このシステムは保有耐力がなく、冗長性指数 R_E および R_Z は0となる。また、 R は、0で、冗長性指数 R_E および R_Z の値が0であるのと正しく対応している。

(4) 冗長性指数の特徴

本研究で提案している冗長性指数 R_E は、冗長性指数 R_R に比べても多くの優れた特長を持っている。

今回の検討により、次のことがわかった。

最初に、式(9)の条件付確率によって定義される冗長性指数 R_R は、システムの冗長性を測るツールとしては有効であるが、この例題で示したように次の2点について限界がある。

①システムに破壊の連鎖が発生しても、その内容を読み取るができない。

②システムAとシステムBのように破壊の段階に違いがあっても表現できない。

次に、式(5)で定義された冗長性指数 R_E は次のような特徴を持ち、より一般的なネットワークシステムやさまざまな構造物の保有耐力を表す指標となりうる。

- ①破壊の連鎖の内容を表現しており、それによる冗長性の差をあらわすことができる。
- ②構造物の破壊確率を利用してその性質をゆがめないままに、情報エントロピーを用いた冗長性を定義している。
- ③システムBとCの差を区別することはできない。

3番目に、冗長性指数 R_E 、 R_Z および R_R は、それぞれ異なる定義によってシステムの冗長性を物理的にとらえており、例題で検討したように、それぞれに優れた面と弱点を有している。そのため、どの冗長性指数が特別優れている、あるいは劣っているとは言えない。

また、今回の例題では取り上げなかった問題点を次に示す。

要素数の少ない延性材からなるシステムに注目する。たとえば、要素数 m が2本の場合で、 $P(D_1) = 0.03$ 、 $P(D_2) = 0.01$ の場合を考える。2つの被害事象を持つこのシステムの冗長性指数 R_E は0.8113である。もし、 $P(D_1) = 0.01$ 、 $P(D_2) = 0.03$ と逆になった場合も、冗長性指数 R_E は0.8113となり、同じ値を示す。明らかに、あとのケースの信頼性は0.97で、最初のケースの信頼性0.99よりも低くなっている。

以上より、さまざまな条件下でシステムの冗長性を測るとき、それぞれの冗長性指数の持つ特徴にあったものを用いる必要があると考える。

3. 延性材と脆性材からなるシステムの冗長性

(1) 荷重一定で要素数の異なるシステム

冗長性指数 R_E の適用例として、Figure 1と同様な m 本の要素を持つ、延性材 (ductile material) からなる並列システムと脆性材 (brittle material) からなる並列システムを用いて、システムの冗長性の計算を行った。各並列システムの要素が破壊する各段階の確率についてはモンテカルロシミュレーション法により解析を行った。要素に作用する荷重が要素の降伏応力を超えた状態を要素の破壊状態とする。延性材の要素からなるシステムでは、降伏応力を超えた分の荷重が他の要素へ再配分され、脆性材の要素からなるシステムでは、破壊した要素に作用していた荷重全てが、他の要素へ再配分されるように計算した。

a) 解析モデル

荷重 S は、全てのシステムに対して等しく、平均値 240、標準偏差 60 の対数正規確率分布に従い、それぞれの要素

Table 2 Failure Paths of Ductile Systems (2000 Trial)

Probability of failure of components	External Load LN(240,60)							
	Original system, m=							
	2	4	6	8	10	12	14	16
	Component resistance LN(,)*							
	(240,60)	(120,30)	(80,20)	(60,15)	(48,12)	(40,10)	(34.3,8.6)	(30,7.5)
$P(D_0)$	0.9600	0.9290	0.9125	0.8945	0.8670	0.8590	0.8375	0.8220
$P(D_1)$	0.0300	0.0490	0.0580	0.0705	0.0790	0.0805	0.0805	0.0915
$P(D_2)$	0.0100	0.0130	0.0130	0.0240	0.0255	0.0330	0.0360	0.0375
$P(D_3)$		0.0040	0.0080	0.0050	0.0125	0.0125	0.0170	0.0165
$P(D_4)$		0.0050	0.0040	0.0025	0.0060	0.0055	0.0115	0.0095
$P(D_5)$			0.0025	0.0010	0.0050	0.0045	0.0030	0.0095
$P(D_6)$			0.0020	0.0010	0.0010	0.0015	0.0030	0.0030
$P(D_7)$				0.0000	0.0010	0.0010	0.0025	0.0020
$P(D_8)$				0.0015	0.0005	0.0005	0.0025	0.0030
$P(D_9)$					0.0005	0	0	0.0010
$P(D_{10})$					0.0020	0.0005	0.0025	0.0005
$P(D_{11})$						0	0.0005	0.0010
$P(D_{12})$							0.0015	0
$P(D_{13})$								0.0010
$P(D_{14})$								0.0025
$P(D_{15})$								0
$P(D_{16})$								0.0020
$P(D_0)$	0.9600	0.9290	0.9125	0.8945	0.8670	0.8590	0.8375	0.8220
$1-P(D_m)$	0.9900	0.9950	0.9980	0.9985	0.9980	0.9985	0.9975	0.9980
P_D	0.0400	0.0710	0.0875	0.1055	0.1330	0.1410	0.1625	0.1780
Redundancy index R_E	0.2500	0.0704	0.0229	0.0142	0.0150	0.0106	0.0154	0.0112
R	0.7500	0.9296	0.9771	0.9858	0.9850	0.9894	0.9846	0.9888
Redundancy index R_Z	0.1959	0.2101	0.2119	0.2071	0.2390	0.2323	0.2582	0.2635
Redundancy index R_R	0.8113	0.6605	0.6159	0.4752	0.5603	0.5163	0.5907	0.5575

*coefficient of variation = 0.25

Table 3 Failure Paths of Brittle Systems (2000 Trial)

Probability of failure of components	External Load LN(240,60)							
	Original system, m=							
	2	4	6	8	10	12	14	16
	Component resistance LN(,)*							
	(240,60)	(120,30)	(80,20)	(60,15)	(48,12)	(40,10)	(34.3,8.6)	(30,7.5)
$P(D_0)$	0.9600	0.9290	0.9125	0.8945	0.8670	0.8590	0.8375	0.8220
$P(D_1)$	0.0030	0.0135	0.0240	0.0405	0.0490	0.0455	0.0515	0.0625
$P(D_2)$	0.0370	0.0010	0.0035	0.0055	0.0075	0.0125	0.0150	0.0165
$P(D_3)$		0	0.0005	0.0005	0.0015	0.0020	0.0015	0.0085
$P(D_4)$		0.0565	0	0	0.0005	0.0015	0.0020	0.0030
$P(D_5)$			0	0	0	0	0.0005	0.0010
$P(D_6)$			0.0595	0	0	0.0005	0	0
$P(D_7)$				0	0	0	0	0
$P(D_8)$				0.0590	0	0	0	0
$P(D_9)$					0	0	0	0
$P(D_{10})$					0.0745	0	0	0
$P(D_{11})$						0	0	0
$P(D_{12})$						0.0790	0	0
$P(D_{13})$							0	0
$P(D_{14})$							0.0920	0
$P(D_{15})$								0
$P(D_{16})$								0.0865
$P(D_0)$	0.9600	0.9290	0.9125	0.8945	0.8670	0.8590	0.8375	0.8220
$1-P(D_m)$	0.9630	0.9435	0.9405	0.9410	0.9255	0.9210	0.9080	0.9135
P_D	0.0400	0.0710	0.0875	0.1055	0.1330	0.1410	0.1625	0.1780
Redundancy index R_E	0.9230	0.7958	0.6800	0.5592	0.5602	0.5603	0.5662	0.4860
R	0.0750	0.2042	0.3200	0.4408	0.4398	0.4397	0.4338	0.5140
Redundancy index R_Z	0.0684	0.0933	0.1089	0.1255	0.1392	0.1413	0.1474	0.1681
Redundancy index R_R	0.3843	0.4021	0.4327	0.4193	0.4023	0.4157	0.3870	0.4263

*coefficient of variation = 0.25

に均一に作用するものとした。要素の強度については、互いに独立とし、Table 2 および 3 に示す要素をもった対数正規確率分布に従うものとした。例えば、要素数が $m=2$ 本のシステムでは、各要素の強度つまり、降伏応力は、平均値 240、標準偏差 60、変動係数 0.25 の対数正規確率分布に従う。あるいは、要素数が $m=12$ 本のシステムでは、各要素の強度は、平均値 40、標準偏差 10、変動係数 0.25 の対数正規確率分布に従う。

また、モンテカルロシミュレーション法による解析の詳細は、Hoshiya⁵⁾の論文に記述されている。

Table 2、Table 3 および Figure 3 に示した結果より、次のことが観察できる。また、任意の i 本の要素の破壊でと

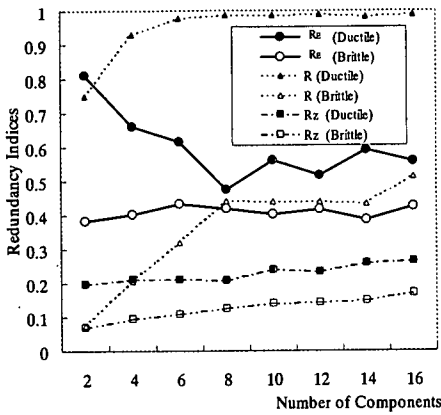


Figure 3 Redundancy Indices

どまる事象 $D_i : i=0 \sim m$ は、先の例題と同じように互いに排反で全てを尽くしている。

b) 材料特性 (延性材と脆性材)

要素数にかかわらず、延性材からなるシステムの冗長性指数 R_E は、常識ではあるが、脆性材からなるシステムの冗長性指数 R_E より常に大きい値をとる。 R_Z および R も同様の傾向をとる。このことから、当然ながら延性材は、脆性材より保有耐力が大きいことがわかる。

c) 要素数 m

要素数 m が増えると、延性材からなるシステムの冗長性指数 R_E は減少し、ほぼ一定の値へ近づく。実設計では、各要素の断面の設計が無駄なく一様になされるという前提があるが、このことは、要素数 m の増加は、システムの保有耐力を強化する助けには、必ずしもなっていないことを示すものと考えられる。一方、脆性材からなるシステムの冗長性指数 R_E は低い値をとり、そして、ほとんど要素数と関連性が見られない。それは、破壊の連鎖が脆性材からなるシステムでは頻繁に発生し、冗長性は要素の数に影響されないためである。

冗長性指数 R_Z および R は、要素数 m が多くなると、システムの冗長性が大きくなることを示している。特に、 R は、延性材のシステムにおいて、要素数 m が6本以上になると0.97以上となり非常に大きな冗長性を示している。しかし、各システムの確率 $P(D_0)$ の値は、 $m=2$ 本で0.960で最も大きく、 $m=16$ 本では0.822となり、0.14も低くなっている。このように $P(D_0)$ の値に差が大きいので、冗長性指数 R_R によってこれらのシステム間の冗長性の比較を行うことは適切ではない。

さらに、式(12)の右辺をもとに R をみれば、 R が最大値1をとるときは $P(D_m)=0$ の場合である。また、 $P(D_m)$ が0でないときは、 $P(D_0)=0$ のときに最大値に近い大きな値をとる。このことから、数学的には $P(D_0)=0$ のとき冗長性が最大値に近くなることを示すが、実際の構造物としては、何本かは問わないが要素の破壊が確定的に発生すること

を示している。 R は、要素数が増加して $P(D_0)$ の値が小さくなるようなシステム間の冗長性を比較すると、このような矛盾した結果となる。

(2) 個々の要素強度の確率分布が異なるシステム

信頼性を一定に保ち要素強度のばらつきを大きくすると、エントロピーが大きくなることを Hoshiya and Yamamoto¹³⁾ が、簡単な例題を用いて示している。ここでは、それぞれ延性材からなる並列システムと脆性材からなる並列システムにおいて、個々の要素強度の確率分布が異なる場合の冗長性について検討した。要素数 m が6本のシステムと12本のシステムを対象として解析した。

a) 解析モデル

荷重 S および要素の強度は、それぞれ対数正規確率分布に従うものとしてモンテカルロシミュレーション法により解析を行った。3. (1) 荷重一定で要素数の異なるシステム では、各要素の要素強度の確率分布の平均値および標準偏差を、同一システム内の要素では一定とした。しかし、ここでは個々の要素強度の平均値を一定値とせず、正規確率分布に従うものとした。これは、システムを構成する要素に、強度的に弱いものと逆に強いものが混在する場合を想定したからである。まず、 $m=6$ 本のシステムにおいて、要素強度の平均値 μ を確率変数として、その平均値を80とし、0から10の標準偏差を持つ正規確率分布の11ケースを検討している (Table 4)。ここで、標準偏差が0のときは、前節と同様に要素強度の確率分布が各要素で等しい場合である。モンテカルロシミュレーション法を用いて、システムの要素強度の平均値 μ を求める。次に、変動係数を0.25で一定とし、シミュレートした平均値 μ から要素強度の標準偏差 σ を求める。このような作業を6本の要素全てに対して行い、それぞれの要素で異なった平均値 μ と標準偏差 σ を求める。このようにして求めた平均値 μ と標準偏差 σ を用いて、システムの個々の要素強度を計算する。ここで、要素強度は互いに独立であるとした。

$m=12$ 本のシステムでは、要素強度の平均値 μ を確率変数として、その平均値を40とし、0から10の標準偏差を持つ正規確率分布の11ケースを検討している (Table 5)。

Table 4, Table 5 および Figure 4, Figure 5 に示した結果より、次のことがわかる。

b) 材料特性 (延性材と脆性材)

Table 4 および 5 より、脆性材からなるシステムでは、 i 本の要素の破壊でとどまる確率 $P(D_i)$ が、0となっている事象が延性材からなるシステムに比べて非常に多いことがわかる。これから見ても、脆性材からなるシステムは延性材からなるシステムより冗長性が小さいことがわかる。Table 4において、延性材からなるシステムと脆性材からなるシステムの信頼性を比較する。延性材からなる

Table 4 Failure Paths of Ductile and Brittle Systems (m=6, 2000 Trial)

External Load LN(240,60), Original system, m=6											
Component resistance LN(μ, σ), $\sigma = 0.25 \times \mu$											
where the Mean Value of Component Resistance $\mu = N(\quad)$											
(80.0) (80.1) (80.2) (80.3) (80.4) (80.5) (80.6) (80.7) (80.8) (80.9) (80.10)											
Probability of failure of components	Ductile System										
P(D ₀)	0.9125	0.9020	0.9000	0.9005	0.8980	0.8950	0.8900	0.8870	0.8750	0.8680	0.8570
P(D ₁)	0.0580	0.0640	0.0645	0.0640	0.0670	0.0670	0.0690	0.0700	0.0775	0.0810	0.0885
P(D ₂)	0.0130	0.0195	0.0205	0.0205	0.0200	0.0220	0.0240	0.0255	0.0300	0.0305	0.0345
P(D ₃)	0.0080	0.0080	0.0085	0.0085	0.0080	0.0085	0.0090	0.0090	0.0080	0.0105	0.0085
P(D ₄)	0.0040	0.0030	0.0030	0.0030	0.0035	0.0040	0.0045	0.0045	0.0045	0.0045	0.0060
P(D ₅)	0.0025	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0010	0.0020	0.0015	0.0010
P(D ₆)	0.0020	0.0030	0.0030	0.0030	0.0030	0.0030	0.0030	0.0030	0.0030	0.0040	0.0045
1-P(D _m)	0.9980	0.9970	0.9970	0.9970	0.9970	0.9970	0.9970	0.9970	0.9970	0.9960	0.9955
P _D	0.0875	0.0980	0.1000	0.0995	0.1020	0.1050	0.1100	0.1130	0.1250	0.1320	0.1430
Redundancy index R _R	0.0229	0.0306	0.0300	0.0302	0.0294	0.0286	0.0273	0.0265	0.0240	0.0303	0.0315
R	0.9771	0.9694	0.9700	0.9698	0.9706	0.9714	0.9727	0.9735	0.9760	0.9697	0.9685
Redundancy index R _R	0.2219	0.2254	0.2296	0.2288	0.2324	0.2395	0.2492	0.2557	0.2758	0.2862	0.3009
Redundancy index R _R	0.6159	0.5829	0.5883	0.5900	0.5808	0.5967	0.6045	0.6143	0.6084	0.6204	0.6052
Probability of failure of components	Brittle system										
P(D ₀)	0.9125	0.9020	0.9000	0.8950	0.9005	0.8980	0.8900	0.8870	0.8750	0.8680	0.8570
P(D ₁)	0.0240	0.0270	0.0270	0.0285	0.0260	0.0275	0.0305	0.0335	0.0380	0.0390	0.0435
P(D ₂)	0.0035	0.0010	0.0010	0.0035	0.0030	0.0025	0.0035	0.0030	0.0040	0.0050	0.0070
P(D ₃)	0.0005	0	0	0.0005	0	0	0.0005	0.0005	0.0005	0.0010	0.0010
P(D ₄)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P(D ₅)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P(D ₆)	0.0595	0.0700	0.0720	0.0725	0.0705	0.0720	0.0755	0.0760	0.0825	0.0870	0.0915
1-P(D _m)	0.9125	0.9020	0.9000	0.8950	0.9005	0.8980	0.8900	0.8870	0.8750	0.8680	0.8570
P _D	0.9405	0.9300	0.9280	0.9275	0.9295	0.9280	0.9245	0.9240	0.9175	0.9130	0.9085
Redundancy index R _R	0.0875	0.0980	0.1000	0.1050	0.0995	0.1020	0.1100	0.1130	0.1250	0.1320	0.1430
R	0.6800	0.7143	0.7200	0.6905	0.7085	0.7059	0.6864	0.6726	0.6600	0.6591	0.6399
Redundancy index R _R	0.3200	0.2857	0.2800	0.3095	0.2915	0.2941	0.3136	0.3274	0.3400	0.3409	0.3601
Redundancy index R _R	0.0825	0.0780	0.0781	0.0829	0.0833	0.0848	0.0973	0.1017	0.1144	0.1221	0.1370
Redundancy index R _R	0.4327	0.3585	0.3550	0.4178	0.3909	0.3852	0.4176	0.4172	0.4289	0.4442	0.4633

Table 5 Failure Paths of Ductile and Brittle Systems (m=12, 2000 Trial)

External Load LN(240,60), Original system, m=12												
Component resistance LN(μ, σ), $\sigma = 0.25 \times \mu$												
where the Mean Value of Component Resistance $\mu = N(\quad)$												
(40.0) (40.1) (40.2) (40.3) (40.4) (40.5) (40.6) (40.7) (40.8) (40.9) (40.10)												
Probability of failure of components	Ductile System											
P(D ₀)	0.8590	0.8585	0.8520	0.8445	0.8270	0.8050	0.7700	0.7235	0.6740	0.6160	0.5540	
P(D ₁)	0.0805	0.0785	0.0820	0.0855	0.0955	0.1075	0.1295	0.1570	0.1860	0.2090	0.2340	
P(D ₂)	0.0330	0.0340	0.0335	0.0355	0.0365	0.0420	0.0470	0.0575	0.0640	0.0840	0.1040	
P(D ₃)	0.0125	0.0100	0.0135	0.0145	0.0190	0.0200	0.0245	0.0255	0.0345	0.0380	0.0420	
P(D ₄)	0.0055	0.0065	0.0070	0.0085	0.0085	0.0115	0.0110	0.0150	0.0155	0.0210	0.0295	
P(D ₅)	0.0045	0.0035	0.0030	0.0025	0.0040	0.0045	0.0080	0.0090	0.0100	0.0135	0.0130	
P(D ₆)	0.0015	0.0015	0.0015	0.0010	0.0010	0.0005	0.0010	0.0030	0.0060	0.0055	0.0090	
P(D ₇)	0.0010	0.0010	0.0005	0.0005	0.0010	0.0015	0.0020	0.0025	0.0020	0.0045	0.0050	
P(D ₈)	0.0005	0.0015	0.0015	0.0020	0.0020	0.0020	0.0015	0.0020	0.0020	0.0030	0.0030	
P(D ₉)	0.0000	0.0010	0.0020	0.0015	0.0015	0.0010	0.0015	0.0010	0.0020	0.0010	0.0015	
P(D ₁₀)	0.0005	0.0005	0	0.0005	0.0010	0.0010	0.0010	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	
P(D ₁₁)	0	0.0010	0.0010	0.0010	0.0005	0.0010	0.0005	0.0010	0.0005	0.0010	0.0015	
P(D ₁₂)	0.0015	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0030	0.0030	0.0030	
1-P(D _m)	0.8590	0.8585	0.8520	0.8445	0.8270	0.8050	0.7700	0.7235	0.6740	0.6160	0.5540	
P _D	0.9985	0.9975	0.9975	0.9975	0.9975	0.9975	0.9975	0.9975	0.9970	0.9970	0.9970	
Redundancy index R _R	0.0106	0.0177	0.0169	0.0161	0.0145	0.0128	0.0109	0.0090	0.0092	0.0078	0.0067	
R	0.9894	0.9823	0.9831	0.9839	0.9855	0.9872	0.9891	0.9910	0.9908	0.9922	0.9933	
Redundancy index R _R	0.2323	0.2363	0.2444	0.2540	0.2761	0.3008	0.3372	0.3824	0.4255	0.4772	0.5258	
Redundancy index R _R	0.5163	0.5563	0.5547	0.5560	0.5611	0.5566	0.5495	0.5470	0.5471	0.5624	0.5736	
Probability of failure of components	Brittle System											
P(D ₀)	0.8590	0.8585	0.8520	0.8445	0.8270	0.8050	0.7700	0.7235	0.6740	0.6160	0.5540	
P(D ₁)	0.0455	0.0525	0.0545	0.0560	0.0625	0.0750	0.0870	0.1100	0.1330	0.1515	0.1715	
P(D ₂)	0.0125	0.0125	0.0135	0.0155	0.0220	0.0250	0.0320	0.0385	0.0430	0.0545	0.0650	
P(D ₃)	0.0020	0.0040	0.0020	0.0015	0.0035	0.0045	0.0065	0.0100	0.0160	0.0190	0.0290	
P(D ₄)	0.0015	0	0.0010	0	0.0005	0.0010	0.0035	0.0030	0.0045	0.0105	0.0135	
P(D ₅)	0	0	0	0	0	0	0.0010	0.0025	0.0030	0.0040	0.0045	
P(D ₆)	0.0005	0	0	0	0	0	0	0	0.0005	0.0010	0.0010	
P(D ₇)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
P(D ₈)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
P(D ₉)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
P(D ₁₀)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
P(D ₁₁)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
P(D ₁₂)	0.0790	0.0725	0.0770	0.0825	0.0845	0.0895	0.1000	0.1125	0.1260	0.1435	0.1615	
1-P(D _m)	0.8590	0.8585	0.8520	0.8445	0.8270	0.8050	0.7700	0.7235	0.6740	0.6160	0.5540	
P _D	0.9210	0.9275	0.9230	0.9175	0.9155	0.9105	0.9000	0.8875	0.8740	0.8565	0.8385	
Redundancy index R _R	0.5603	0.5124	0.5203	0.5305	0.4884	0.4590	0.4348	0.4069	0.3865	0.3737	0.3621	
R	0.4397	0.4876	0.4797	0.4695	0.5116	0.5410	0.5652	0.5931	0.6135	0.6263	0.6379	
Redundancy index R _R	0.1206	0.1270	0.1302	0.1314	0.1570	0.1799	0.2184	0.2607	0.3055	0.3582	0.4087	
Redundancy index R _R	0.4137	0.4128	0.4097	0.3939	0.4330	0.4436	0.4799	0.4905	0.5073	0.5320	0.5472	

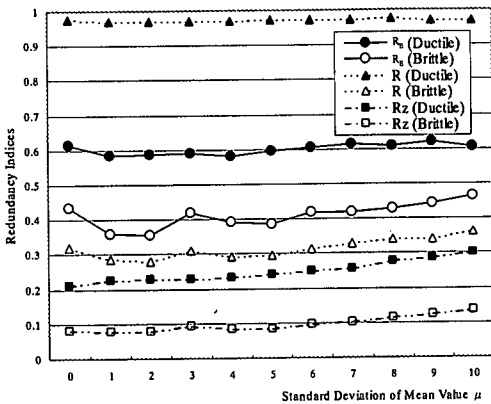


Figure 4 Redundancy Indices (m=6)

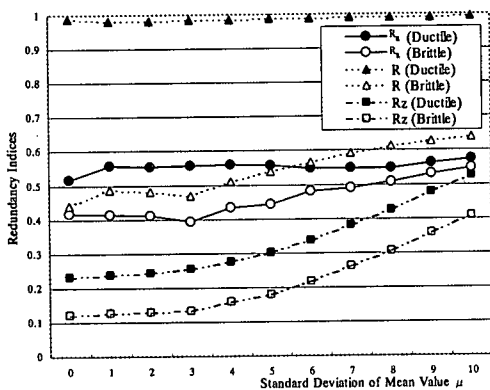


Figure 5 Redundancy Indices (m=12)

システムでは、1本の要素も破壊しない確率 $P(D_0)$ によって定義される信頼性は、要素強度の平均値 μ の標準偏差が大きくなると小さくなるが、少なくとも1本の要素が安全である確率 $1-P(D_m)$ によって定義される信頼性は、0.9955~0.9980の間にありほぼ一定である。脆性材からなるシステムでは、 $P(D_0)$ は延性材からなるシステムと同じ値をとるが、 $1-P(D_m)$ は、要素強度の平均値 μ の標準偏差が大きくなると小さくなる。Table 5 においても同様に信頼性を比較すると、Table 4 と同様の結果を得る。

Figure 4 および 5 より、システムの冗長性指数 R_E 、 R_Z および R は、当然のことながら、延性材からなるシステムのほうが脆性材からなるシステムに比べて冗長性が大きいことを示している。延性材からなるシステムでは、冗長性指数 R_E は、要素強度の平均値 μ の標準偏差が大きくなると大きな値をとるが、冗長性指数 R_E および R はともに要素強度の平均値 μ の標準偏差が大きくなってもあまり変化せず、ほぼ一定の値をとる。これは、確率 $P(D_0)$ の値が要素強度の平均値 μ の標準偏差が大きくなるにつれて小さくなる影響を受けるためである。

また、Figure 4 および 5 より、脆性材からなるシステム

では、要素強度の平均値 μ の標準偏差が大きくなると、冗長性の度合いが大きくなる傾向を示している。これは、極端に強度の小さい要素と極端に強度の大きな要素とが存在することにより、極端に強度の小さい要素が破壊して荷重が再分配されても、破壊した要素の強度はもともと小さなものでしかないので、システムの中で最初から存在しなくても残りの要素で支えることが可能となる場合が多くなる。さらに、要素数が増えれば、残りの要素一本あたりに再分配される荷重も小さくなるため、破壊の連鎖の発生が抑えられてこのような傾向が顕著に現れることになると思われる。

c) 要素数 m

Table 5 に示した要素数 $m=12$ 本のシステムにおいて、脆性材からなるシステムでは、要素強度の平均値 μ の標準偏差が大きくなると全ての要素の破壊へつながる途次の確率が 0 となる事象が少なくなる傾向が読み取れる。たとえば、 $\mu=N(40,1)$ では、4 本以上の要素が破壊した状態とどまる確率は全て 0 であるが、 $\mu=N(40,5)$ では、4 本破壊した状態とどまる確率は 0.001 となり、 $\mu=N(40,10)$ では、6 本破壊しても確率 0.001 で安全となる。延性材からなるシステムでは、このような傾向の有無を Table 5 から読み取ることが難しい。

Table 4 の脆性材からなるシステムについても Table 5 と同様の傾向が多少読み取ることができているが、 $m=12$ 本のシステムほど顕著には表れていない。Figure 4 および 5 より、 R は、 $m=6$ 本より 12 本のシステムのほうが、材料および要素強度の平均値 μ の標準偏差の大きさにかかわらず、常に冗長性の度合いが高いことを示している。冗長性指数 R_E では、延性材からなるシステムでは平均値 μ の標準偏差が 0 から 10 の範囲では全てにわたり、 $m=6$ 本のシステムが $m=12$ 本のシステムより冗長性の度合いが高いことを示している。脆性材からなるシステムでは、要素強度の平均値 μ の標準偏差が 0 と 3 の場合を除いて、逆に $m=12$ 本のシステムで冗長性の度合いが高くなっている。また、脆性材からなるシステムでは、要素強度の平均値 μ の標準偏差が大きくなると、冗長性の度合いが高くなる傾向を示している。特に、 $m=12$ 本のシステムでは、要素強度の平均値 μ の標準偏差が 3 以上になると冗長性指数 R_E が大きくなる傾向が顕著になる。これは、極端に強度の小さい要素と極端に強度の大きな要素とが存在することにより、極端に強度の小さい要素が破壊して荷重が再分配されても、破壊した要素の強度はもともと小さなものでしかないので、システムの中で最初から存在しなくても残りの要素で支えることが可能となる場合が多くなる。さらに、要素数が増えれば、残りの要素一本あたりに再分配される荷重も小さくなるため、このような傾向が顕著に現れることになると思われる。

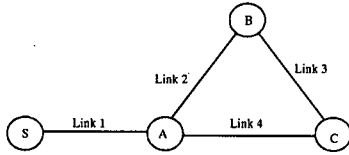


Figure 6-1 Basic Type

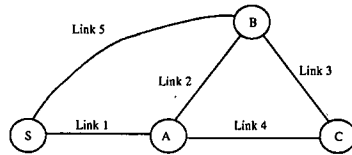


Figure 6-3 Type 2

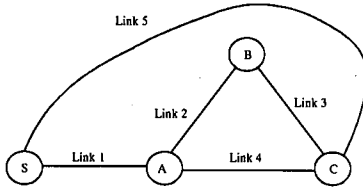


Figure 6-2 Type 1

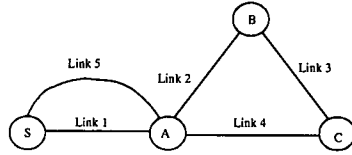


Figure 6-4 Type 3

4. ネットワークシステムの冗長性

(1) 解析用ネットワークモデル

ネットワークの並列システムと直列システムでは、2つのノード間の連結確率が等しい場合でもエントロピーが異なることを Hoshiya and Yamamoto¹³⁾ が、簡単な例題を用いて示している。ここでは、ネットワークの形状 (configuration) の違いによる冗長性の変化について簡単なモデルを用いて検討する。

Figure 6-1 に、簡単なネットワークシステム (Basic Type) を示す。

ネットワークは、リンクにのみ被害が発生するものとし、ソース (S) と3つのノード (A, B, C) がリンクにより連結される確率 (connectivity) によりシステムの信頼性を評価する。リンクの破壊確率は全て等しく、かつ互いに独立とする。ノードには重要度等の重みをつけず全て同等に扱う。

ここでは、システム全体の信頼性を、少なくとも1つ以上のノードがソースと連結する確率によって定義することとする。つまり、全てのノードがソースと連結しない事象の余事象の確率で表す。このことは、各ノードが利用者への供給源となっているようなシステムを考えたとき、少なくとも1つのノードから供給が可能であれば、システムの信頼性は保たれているものと仮定している。

Figure 6-1 に示した Basic Type では、各リンクの破壊確率を0.1とした。その結果、信頼性は、0.9となった。Basic Type と同様の設定条件を持ち、システム全体の信頼性が同じく0.9であるが、リンク数が1本多いシステムを考え、各システムの冗長性にどのような違いがあるかを考察する。これは、Basic Type ヘリンクを1本追加することによ

るシステムの補強問題を考えているのではなく、形状の異なるが信頼性が同じであるシステムについて、冗長性を用いて比較を行うことを考えているためである。

Figure 6-2~4 は、Basic Type より Link 5 が1本多いシステムである (Type 1~3)。Type 1 から Type 3 は、システム全体の信頼性を Basic Type と同じ0.9にするために、各リンクの破壊確率を調整し0.3163とした。ここで、Type 1 および Type 2 は形状的に同一であり、各ノードを同等に扱うという前提のもとでは、解析結果は等しくなるはずである。

(2) 解析結果

Table 6, Table 7 に結果を示す。

Table 6 は、各システムで i 本の任意のリンクが破壊したときに、Node A から C の各ノードがソースとそれぞれ連結している確率に着目して、個々のノードごとの冗長性指数 R_E を求めた結果を示している。

Table 7 には、各ネットワークシステムで任意のリンクが破壊したときに、3つあるノードのうち、いくつのノードがソースと連結されているかという確率に着目して、システム全体での冗長性指数 R_E を求めた結果を示している。Table 6, Table 7 に示した各確率事象間は、互いに排反で全てを尽くしている。

a) 各ノードごとの冗長性

Table 6 において、 $P(E_3)$ は、ネットワークの任意のリンクが3本破壊したときに、それぞれのノードがソースと連結している事象 E_3 の確率を表している。Basic Type では、任意の3本のリンクが破壊したとき、Node A がソースと連結されている確率 $P(E_3)$ は0.0009、Node B がソースと連結されている確率は0である。 $P(E_0)$ は、ネットワー

Table 6 Reliability and Redundancy Index R_E of Each Node

	Basic Type				Type 1			Type 2			Type 3		
	Node A	Node B	Node C		Node A	Node B	Node C	Node A	Node B	Node C	Node A	Node B	Node C
$P(E_0)$	0.656	0.656	0.656	$P(E_0)$	0.149	0.149	0.149	0.149	0.149	0.149	0.149	0.149	0.149
$P(E_1)$	0.219	0.219	0.219	$P(E_1)$	0.346	0.346	0.346	0.346	0.346	0.346	0.346	0.346	0.346
$P(E_2)$	0.024	0.008	0.008	$P(E_2)$	0.288	0.256	0.288	0.288	0.288	0.256	0.288	0.224	0.224
$P(E_3)$	0.0009	0	0	$P(E_3)$	0.074	0.030	0.074	0.074	0.074	0.030	0.104	0.030	0.030
$P(E_F)$	0.1	0.117	0.117	$P(E_4)$	0.007	0	0.007	0.007	0.007	0	0.014	0	0
				$P(E_F)$	0.136	0.220	0.136	0.136	0.136	0.2197	0.100	0.252	0.252
Redundancy index R_E	0.528	0.462	0.462	Redundancy index R_E	0.713	0.666	0.713	0.713	0.713	0.666	0.730	0.667	0.667

Table 7 Reliability and Redundancy Index R_E of System

	Basic Type	Type 1	Type 2	Type 3
Prob. of connectivity from S to 3 nodes with no damage of every link	0.6561	0.1494	0.1494	0.1494
Prob. of connectivity from S to 3 nodes with some link damages	0.2187	0.6014	0.6014	0.5374
Prob. of connectivity from S to 2 nodes with some link damages	0.0162	0.1059	0.1059	0.1231
Prob. of connectivity from S to 1 node with some link damages	0.0090	0.0433	0.0433	0.0900
Prob. of disconnectivity from S to any node with some link damages	0.1	0.1000	0.1000	0.1000
Redundancy index R_E	0.6393	0.6549	0.6549	0.7641

クに被害が発生しない事象の確率、つまりリンクの破壊が0本である事象 E_0 の確率を表している。当然ではあるが、事象 E_0 では、全てのノードがソースと連結されている。また、 $P(E_F)$ は、任意の1本以上のリンクが破壊した結果、ノードとリンクが連結されない事象、つまりシステムの機能が破壊した事象 E_F の確率である。

Table 6 において、Basic Type の Node A の R_E は 0.5280 である。これは、Basic Type の Node A の事象 E_1 から E_F の生起確率である $P(E_1)$ から $P(E_F)$ までを合計して、少なくとも1本以上のリンクに被害が発生する確率、つまりシステムの構成要素に被害が発生する事象Dの確率 P_D を求める。次に、式(6)を用いてリンクに被害が発生した場合の各事象の条件付確率 $P(E_i)/P_D$ を求める。そして、式(5)を用いて R_E を計算した結果である。Basic type の Node B の R_E は 0.4616、Node C では 0.4616 となった。Type 1 から Type 3 の各ノードの冗長性指数 R_E についても、同様の計算を行って求めた。

b) システムの冗長性

Table 7 では、全てのリンクが無被害のためにノードが3つともソースと連結している確率、任意のリンクが破壊したがノードが3つともソースと連結している確率、任意のリンクが破壊したとき任意の2つのノードがソースと連結している確率、同様に任意の1つのノードがソースと連結している確率、全てのノードがソースと連結されていない確率を示している。例えば、Table 7 で、Basic Type において全てのリンクが無被害のためノード全てがソースと連結されている確率は、0.6561 である。任意のリンクに被害が発生したが、ノード全てがソースと連結している確率は、0.2187 である。以下同様に、任意のリンクに被害が発生した場合に、ソースと任意のノードが2つ連結されている確率は 0.0162、任意の1つのノードが連結されている確率は 0.0090、全てのノードが連結されていない確率は 0.1 であることを示している。

Table 7 において、Basic Type の R_E は、0.6395 である。これは、任意のリンクに被害が発生した事象の確率、0.2187 と 0.0162 と 0.0090 と 0.1 を合計して、リンクに被害が発生する事象Dの確率 P_D を求める。次に、式(6)を用いてリンクに被害が発生した場合の各事象の条件付確率をを求める。そして、式(5)を用いて冗長性指数 R_E を計算した結果である。Type 1 から Type 3 の R_E についても同様に計算している。

c) 考察

Table 6, Table 7 より次のことがわかる。

(1) Table 6 に示した各ノードごとの冗長性より、Type 1~3 の冗長性指数 R_E は、どのノードについても Basic Type の冗長性指数 R_E に比べてそれぞれ大きな値を示している。

また、それぞれのシステムでソースとリンクで直結されたノードの冗長性が最も大きくなっている。

Type 1~3 において、Node A の冗長性指数 R_E が最も大きくなっている。特に、Type 3 では、Node A の冗長性指数 R_E は 0.730 と大きな値を示している。これは、Type 3 では Node A がソースと 2 本のノードによって直結されているためと思われる。

(2) Table 7 に示したシステム全体の冗長性より、Type 1 および Type 2 の冗長性指数 R_E は、0.6549 と等しい値をとり、Basic Type の冗長性指数 R_E の 0.6393 とほぼ同じ値をとる。Type 3 は、冗長性指数 R_E が 0.7641 と最も大きくなっている。任意の 1 つのノードがソースと連結している確率を見ると、Type 3 は 0.09 となっており、Basic Type の 0.009 の 10 倍、そして Type 1 および Type 2 の 0.0433 の約 2 倍の値をとる。これは、ソースと Node A とが 2 本のリンクで並列に連結されることにより、Node A がソースと連結される確率が大きくなったために、任意の 1 つのノードがソースと連結している確率と、任意の 2 つのノードがソースと連結している確率が上昇したためである。その結果として、冗長性が大きくなっている。

Type 1 と Type 2 は、先に述べたように、ノードの重要性を同等としているため、Link 5 によりソースと連結されるノードが B か C かの違いだけで、図形的に対称なのでシステム的には同じものである。そのため、個々のノードに対する冗長性ではなく、システム全体を考えた場合は、まったく同じ結果を得た。

(3) 以上より、ネットワークシステムの形状 (configuration) を変化させることにより、冗長性が変化することを確認した。実際の上水道、電力、都市ガスあるいは道路等のライフラインネットワークは、供給能力や輸送能力に容量を持っており、また、ノードが受け持つ供給範囲がある。そのため、ネットワークの一部が破壊した場合、単純に連結性だけでシステムの能力を測ることはできない。ライフライン等のネットワークシステムに限らず、実際の複雑な構造を有するシステムについて冗長性や信頼性を検討する場合には、個々のシステムの持つ特徴を考慮し、さらに、形状、構成要素の強度の持つ不確実性および荷重等の外力の持つ不確実性を十分考慮する必要がある。

5. まとめ

(1) 多くの要素からなるシステムの信頼性 (reliability) と冗長性 (redundancy) を評価し、破壊の連鎖 (chain failure) によるシステムの保有耐力 (reserve capacity of system) の大きさをはかるために、冗長性指数 R_E (Redundancy Index R_E) を提案した。冗長性指数 R_E は、破壊の連鎖の段階の

確率に基づく、条件付エントロピーによって定義され、式(5)に示される。

(2) 冗長性指数 R_E を、De, Karamchandani and Cornell⁹⁾が、提案した冗長性指数 R_R および Ziha^{11,12)}の提案した冗長性指数 R_Z と例題を用いて比較検討した。その結果、それぞれの冗長性指数には、各々優れた特長があり、どれが最も優れているとは結論付けられないが、冗長性指数 R_E は、任意の要素が破壊した場合でもシステムの機能が無事である確率によって定義された信頼性が同じシステム間の冗長性を議論するには優れていることがわかった。

(3) 単純な並列システムやネットワークシステムを用いて解析した結果、冗長性指数 R_E によって、システムの冗長性をとらえることが出来る事がわかった。

6. 今後の展望

(1) ライフラインシステムの冗長性の解析を行う場合には、システムの特徴を捉え、構成要素の破壊がシステムへ及ぼす影響を考慮する必要がある。さらに、面的に広域に広がる構造物であるため、地域ごとの重要性、特徴を考慮した重み等を加えて解析を行うことが重要である。

(2) 冗長性指数 R_E は、以下の事項で重要な役割を演じることが可能であると考えられる。

- (a) 地震被害軽減のためのライフラインネットワークの最適な改善の評価
- (b) 構造物の耐震設計コードの要求される安全性基準の評価
- (c) 損傷した構造物の修繕方法の評価

最後に、本研究は、第 1, 第 2 著者が共同でエントロピーを用いた冗長性に関する検討を行い、第 2 著者が例題の計算を行った。

参考文献

- 1) Freudenthal, A.M., Garrelts, J.M. and Shinozuka, M.: The Analysis of Structural Safety, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.92, No.ST1, pp.267-326, 1966.
- 2) Yao, J.T.P. and Yeh, H.Y.: Formulation of Structural Reliability, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.95, No.ST12, pp.2611-2620, 1969.
- 3) Moses, F. and Kinser, D. E.: Analysis of Structural Reliability, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.93, No.ST5, pp.147-164, 1967.
- 4) Cornell, C.A.: Bounds on the Reliability of Structural Systems, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol.93, No.ST1, pp.171-200, 1967.
- 5) Hoshiya, M.: Reliability of Redundant Cable System, *Journal of the*

- Structural Division*, ASCE, Vol.97, No.ST11, pp.2773-2776, 1971.
- 6)Wen, Y.K., Wang, C.-H. and Song, S.H.: Structural Redundancy Under Stochastic Loads, *Stochastic Structural Dynamics*, pp.213-220,1999.
- 7)Shannon, C.E. and Weaver, W. : The Mathematical Theory of Communication, *Univ. of Illinois Press*, 1949
- 8)Khinchin, A.I.: Mathematical Foundations of Information Theory, *Dover Publications*, New York,1957.
- 9)Kullback, S.: Information Theory and Statistics, *Dover Publications*, New York,1959.
- 10)De, R.S., Karamchandani, A. and Cornell, C.A.: Study of Redundancy in Near-Ideal Parallel Structural Systems, *5th International Conference on Structural Safety and Reliability*, pp.975-982,1989.
- 11)Ziha, K.: Entropy of a Subsystem of Events, *20th International Conference Information Technology Interfaces ITI'98*, pp.451-454, 1998.
- 12)Ziha, K.: Usage of Relative Uncertainty Measures, *21st International Conference Information Technology Interfaces ITI'99*, pp.269-274, 1999.
- 13)Hoshiya, M. and Yamamoto, K.: Role of Entropy in Safety Evaluation of Structural Systems, *First USA-China-Japan Workshop on Civil Infrastructure Systems*, Shanghai, China, Nov., 1998.

(1999. 10. 19 受付)

REDUNDANCY OF ENGINEERING SYSTEM WITH INFORMATION ENTROPY

Masaru HOSHIYA and Kinya YAMAMOTO

Potential usefulness of information entropy is investigated for evaluating engineering systems' safety in terms of reliability, uncertainty and redundancy. The Shannon's information entropy (Khinchin(1957) and Kullback(1959)) can explain of not only a degree of uncertainties involved in systems, but also it can indicate a degree of inherent redundancy of systems. The entropy can gain comprehensively the insight into more than reliability. The system reliability and the redundancy are discussed related with the system configuration, load redistribution after partial damages, material properties and uncertainty in the resistance and loading.

It is clear that the example models are simple prototypes of such systems as highly indeterminate structures and complicated networks of lifelines.