

3次元塑性不安定解析による 引張鋼材の局部くびれ挙動

岡澤重信¹・宇佐美勉²・野口裕久³・藤井文夫⁴

¹正会員 博(工) 東北大学助手 大学院工学研究科土木工学専攻
(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)

²フェロー D.Sc. 工博 名古屋大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻
(〒464-8603 名古屋市千種区不老町)

³工博 慶應義塾大学助教授 理工学部システムデザイン工学科 (〒223-8522 横浜市港北区日吉3-14-1)

⁴Dr.-Ing. 岐阜大学助教授 工学部土木工学科 (〒501-1112 岐阜市柳戸1-1)

引張力が作用する鋼材において、塑性不安定現象により発生する破断直前の局部くびれ挙動を弾塑性分岐解析を用いてシミュレートする。従来の平面ひずみ状態の解析では、構成方程式として金属材料で一般によく採用される硬化型の J_2 流れ則のみを用いた場合、塑性不安定現象の初期段階である拡散くびれしかシミュレートできないことが広く知られている。本研究では、硬化型の J_2 流れ則を用いた場合でも3次元解析により、鋼材の拡散くびれ以降の破断直前のさまざまな局所化変形までを忠実に再現できることを示すと共に、鋼材の引張試験との比較を行い、本解析結果の正当性を確認する。

Key Words: *localized necking, plastic instability, elasto-plastic bifurcation, three-dimensional analysis*

1. 序論

引張力が作用して塑性化した鋼材は、さらに荷重を増加させることによって荷重極大点が発生する。そしてその直後に断面の一部のみが急激な減少を示すいわゆるくびれが始まり、鋼材の極めて狭い領域にひずみが集中することによってやがて破断に至る。鋼材に限らず、一般的な金属材料のこのような挙動は塑性不安定現象として知られている¹⁾。

実際の塑性不安定現象においては、まず幅方向のくびれが鋼材全体になだらかに発生する。このようにくびれは拡散くびれと呼ばれ^{2),3)}、塑性不安定現象の初期の段階において共通して見られる挙動である。しかし、この拡散くびれだけでは鋼材は破断に至らず、拡散くびれの後に狭い領域が局所的に変形する局部くびれが発生する²⁾。この局部くびれは拡散くびれの次の段階に発生する挙動で、鋼材の終局的な破断形態を決定づけるものである。局部くびれ領域に塑性変形が集中する局所化現象により、最終的にはせん断的分離で鋼材は破断する。

このような塑性不安定現象は、ひずみの局所化などの材料不安定挙動、ひいては構造不安定挙動を引き起こす根本的な原因となる。よってこの塑性不安定現象を詳細に解明することは、鋼材をはじめとす

る金属材料の終局的挙動の把握や、構造物の変形性能の検討または合理的な耐震設計等においても必要不可欠である。

従来の塑性不安定解析の大半は、平面ひずみ状態を仮定した2次元解析^{4)~10)}が行われてきた。そして精力的な2次元塑性不安定解析に関する研究によって、平面ひずみ状態においては、金属材料として一般的な構成方程式である硬化型の J_2 流れ則を用いた場合には、くびれの初期の段階である拡散くびれのみ発生し、その後の局部くびれおよびせん断的分離による破断を示すようなせん断帯は再現できないことが明らかにされている¹¹⁾。一方、平面応力状態では、硬化型の J_2 流れ則を用いた場合でも拡散くびれに続く×状の局部くびれが発生する^{12),13)}。この場合の局部くびれ領域においては、せん断変形が卓越しているため、この局部くびれの発生がそのまま破断条件と見なすことができる¹⁴⁾。しかしながら、平面応力状態という特性上その適用は極めて薄い部材のみに限定される。そのため、通常の流れ理論とは異なる変形理論^{15),16)}やマイクロボイドの発生を考慮した^{17),18)}構成方程式などが塑性不安定解析において用いられてきた。これらの構成方程式では、縦弾性係数よりもせん断弾性係数の低下率が大きくなり¹⁹⁾、変形理論もしくはマイクロボイドを考慮した構成方程

式による材料不安定性を導入することによって、先に述べた平面ひずみ状態においても材料の最終的な破断分離を示すせん断帯を発生させることができる^{4), 19)}。

筆者らは、拡散くびれ後の終局的な塑性不安定現象においてさえも幾何学的不安定性が大きく関与していると考えている。このような幾何学的な要因を反映させるためには、鋼材の形状変化を忠実に再現しなくてはならない。しかしながら、これまでに多くなされてきた平面ひずみや平面応力状態を仮定した2次元解析では、幾何学的な形状変化を把握するには不十分であり、3次元解析が不可欠である。2次元状態における塑性不安定解析に比べて、3次元解析の研究例^{17), 20), 21), 22)}は少ない。鋼材などの固体は基本的には3次元体であり、その形状が塑性不安定現象に及ぼす影響はかなり大きいものと考えられる²³⁾。さらに材料不安定性を導入せずに硬化型の J_2 流れ則によって、拡散くびれ以降の塑性不安定挙動をシミュレートできるか否かを3次元解析で検証した例は、筆者らの知る限りではTvergaard²²⁾によるものだけであるが、ここでの解析対象は薄い部材のみで、厚い部材は扱っていない。

本研究では、材料不安定性は一切導入せずに、幾何学的不安定性の枠組みだけで3次元塑性不安定解析を行い、その結果を実際の鋼材の引張試験結果と比較する。最終的な目的は、これまで材料不安定の導入に頼りがちであった塑性不安定現象に対して、幾何学的及び材料不安定性の違いを明確にすることである。

2. 分岐挙動としての塑性不安定現象

塑性不安定現象に関して、引張力状態において荷重極大点が発生することについて力学的な解釈を始めて与えたのがSwift²⁵⁾であろう。Swiftは金属材料における1軸状態での応力とひずみを仮定することにより、引張力が作用する金属材料の変形が均一状態で、なおかつ応力-ひずみ関係が硬化型であるとしても荷重極大点が発生し得ることを理論的に示した。しかしながらこのSwiftの塑性不安定理論では、引張力が作用する金属材料において荷重極大点が発生する理由であるとしても、くびれが発生する根拠を明確に説明しているとは言い難い³⁾。

そこでこのくびれを荷重極大点後の分岐挙動として捉えた上で、その不安定現象を解明する研究が行われるようになった^{6), 26), 27), 28)}。その概念図を示したのが図-1である。つまり主経路においては、荷重極大点を越えた後の分岐点以降も鋼材は均一変形の

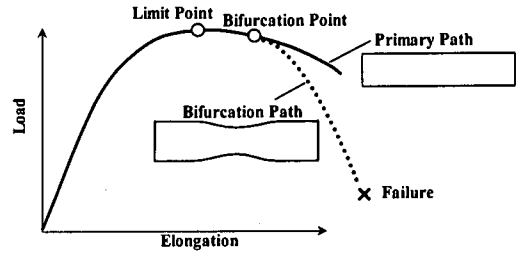


図-1 分岐挙動としての塑性不安定現象

まま伸び続ける。一方、分岐経路に乗り移ることによって拡散くびれが始まり、さらにその分岐経路を追跡することによって、次の段階の局所化現象をシミュレートできると解釈するものである。なお、主経路上には図-1に示した拡散くびれ後も、さらに高次の拡散くびれモードを示す分岐点が無数存在する。

これまでの塑性不安定解析の多くは、初期不整等の攪乱を導入した擬似的な分岐解析が行われてきたが、本研究では一貫して完全系からの分岐挙動としての塑性不安定解析を扱うものとする。なぜなら完全系の分岐構造を解明してはじめて不完全系の挙動についての議論が可能となり、本質的な塑性不安定現象を把握するためには主経路上で密着な分岐点を特定した上で、分岐経路上の平衡点を求めなければならないからである²⁹⁾。

3. 有限要素法定式化

塑性不安定解析を行うためには、大変位・大ひずみを考慮した有限変形弾塑性解析が必要不可欠である。この場合、構成方程式の観点から一般に updated Lagrangian 法が採用されるが、以下にその概略について述べる。

時刻 t までの物体配置を既知とし、時刻 $t' = t + \Delta t$ における配置を求める場合、体積 v の物体の updated Lagrangian 法における接線剛性方程式は、第2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル S 、Green-Lagrange ひずみテンソル E 、Cauchy 応力テンソル T を用いて以下のようになる^{30), 31)}。

$$\int_{v'} \delta' S : \delta' E d'v + \int_{v'} T : (\delta' E)' d'v = \delta R - \int_{v'} T : \delta' E d'v \quad (1)$$

ここで δ は仮想仕事に起因する変分、 δR は外力のなす仮想仕事である。また上付きの \cdot は物質時間導関数を示す。それぞれのテンソル量の左肩記号は現

時刻, 左下記号は参照時刻を表すものとする. また左肩に時刻のない諸量は時刻 t から t' までの増分を示すものとし, 左下記号がない場合には, 現時刻と参照時刻が同じであることを意味する.

大ひずみ問題の弾塑性構成方程式としては, 金属材料に対して一般によく用いられる J_2 流れ則を採用することにする. 客観応力速度は, 対称な接線剛性マトリクスを得るために, 相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\dot{T}^{(j)}$ を用いる. この場合の J_2 流れ則はストレッチングテンソル D , Prandtl-Reuss の式から得られる 4 階の構成式テンソル C^{ep} を用いて以下のように示される.

$$\dot{T}^{(j)} = C^{\text{ep}} : D \quad (2)$$

Cauchy 応力ではなく相対 Kirchhoff 応力を用いることによる差異は, 塑性変形の非圧縮性および微小弾性ひずみの仮定から無視できるものと考えられる³¹⁾. 式(1)の updated Lagrangian 法での接線剛性方程式では Truesdell 応力速度 \dot{S} が用いられているので, 構成方程式で用いられている相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\dot{T}^{(j)}$ からの変換を行わなくてはならない. これら 2 つの関係は以下のようになる³¹⁾.

$$\dot{S} = \dot{T}^{(j)} - D^T T - T \cdot D \quad (3)$$

式(2), (3)を式(1)に代入することにより, 最終的な接線剛性方程式が求められる.

$$\int_V (C^{\text{ep}} : D - D^T T - T \cdot D) : \delta E dV + \int_V T : (\delta E)^* dV = \delta R - \int_V T : \delta E dV \quad (4)$$

式(4)の左辺を一般的な形状関数を用いて離散化することによって, 以下のような接線剛性マトリクス \mathbf{K} を得ることができる.

$$\text{式(4)の左辺} = \delta U^T \mathbf{K} \dot{U} \quad (5)$$

ここで U は節点変位増分ベクトルである. この接線剛性マトリクス \mathbf{K} はひずみの線形部分だけが関与する線形剛性マトリクス \mathbf{K}_L と, 非線形部分が関与する幾何剛性マトリクス \mathbf{K}_{NL} の和によって示される.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL} \quad (6)$$

相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度を用いた J_2 流れ則を用いることによって, 線形剛性マトリクス \mathbf{K}_L , 幾何剛性マトリクス \mathbf{K}_{NL} とも対称マトリクスとなり, 結果的に増分計算に用いる接線剛性マトリクス \mathbf{K} も対称となる.

4. 弾塑性分岐解析手法

(1) 弾塑性分岐条件

Hill の分岐条件³²⁾ は弾塑性分岐条件としてすでに確立されており, 塑性不安定解析⁴⁾ や構造物の塑性座屈³³⁾ などに応用されている. この Hill の分岐条件は, 変位速度ベクトル \dot{u} を用いて以下のように示される^{27), 34)}.

$$I = \int_V \left[\dot{S}^* : \dot{E}^* + S : (\text{grad}^T \dot{u}^* \cdot \text{grad} \dot{u}^*) \right] dV = 0 \quad (7)$$

ここで, 右肩の * は分岐経路方向と主経路方向の解の差を示す. updated Lagrangian 法において得られる接線剛性マトリクスから除荷の可能性を排除してそれが特異となる条件と, Hill の分岐条件とが等価であることが以下のように示される^{24), 35)}.

Hill の分岐条件では線形比較体を仮定する³²⁾. この材料は現時刻において降伏している場合には, その後の挙動に関わらず常に降伏が続行すると仮定した材料である. 今, この線形比較体という材料を仮定して, 式(7)を有限要素法と同様な手法で離散化すると, 次のように書き換えられる³⁵⁾.

$$I = \dot{U}^T (\mathbf{K}_L^c + \mathbf{K}_{NL}) \dot{U} = 0 \quad (8)$$

式(8)において, 以下のような線形比較体を用いた架空の接線剛性マトリクス \mathbf{K}^c を定義する.

$$\mathbf{K}^c = \mathbf{K}_L^c + \mathbf{K}_{NL} \quad (9)$$

この場合, 式(8)は \mathbf{K}^c が特異マトリクスであるという条件と一致する.

$$\det \mathbf{K}^c = 0 \quad (10)$$

式(10)は, 接線剛性マトリクスの行列式がゼロになるという弾性問題における分岐条件式と同じ形態である^{27), 36)}. \mathbf{K}^c と \mathbf{K} の差異は, それぞれの線形剛性マトリクス \mathbf{K}_L^c と \mathbf{K}_L 中の 4 階の弾塑性構成式テンソルの部分だけであり, 降伏状態からの除荷の可能性を考慮するか否かの違いだけである. よって連続体力学に忠実な有限要素法の定式化を行い, それから得られる真の接線剛性マトリクス \mathbf{K} から除荷の可能性をすべて排除することで, Hill の線形比較体を用いた場合と全く同様の弾塑性分岐点の評価が可能である^{24), 35)}.

(2) 分岐経路へのアクセス

分岐点から分岐経路上の平衡点を求めるための分岐方向の変位予測子 dU_{II} は, 主経路方向の変位予測子 dU_I と接線剛性マトリクスのゼロ固有値に対応するクリティカルな固有ベクトル θ_i の線形結合で求められる^{24), 36)}.

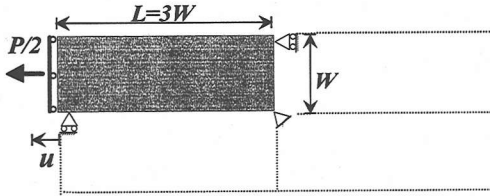


図-2 2次元塑性不安定解析の鋼材モデル
(解析は1/4モデルについて行う)

$$dU_{II} = C \theta_s + dU_I \quad (11)$$

ここでCは θ_s のスケールングファクターである。

上記の弾塑性分岐条件にしても、除荷の可能性を考えない線形比較体という架空の材料を用いた Hill の分岐条件³²⁾にしても、分岐点を評価する際にその点からの除荷の可能性を排除しているため、分岐の瞬間に除荷が発生してしまつては理論と整合しない^{37), 38)}。ここで、最初に除荷が始まると考えられる積分点の中立負荷となるようにCの値を決定する³³⁾ことで、除荷が発生しない範囲で最も大きなCを選択することができる^{37), 38)}。

また、式(11)の θ_s は、分岐点上での接線剛性マトリクスの固有値解析を行うことによって求められるが、極めて細かな要素分割が要求される塑性不安定解析では膨大な計算コストを必要とする。さらに本研究で扱うような3次元塑性不安定解析では固有値解析は実際には不可能なものとなる。よつて本研究では、固有値解析を行わずにこのクリティカルな固有ベクトルを効率よく求める方法^{39), 40)}を用いた。

5. 解析結果

(1) 2次元塑性不安定解析

ここではまず2次元状態(平面ひずみ及び平面応力状態)における塑性不安定解析を行う。本研究では、幾何学的な不安定性のみに着目するため、弾塑性構成方程式としては変形理論等は用いずに、 J_2 流れ則のみを用いることにする。そして、塑性域においては次のような相当応力 $\bar{\sigma}$ と相当塑性ひずみ \bar{e}^p の関係を仮定した。

$$\bar{\sigma} = \sigma_y \left(1 + \frac{\bar{e}^p}{e_y} \right)^n \quad (12)$$

$$e_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{500} \quad (13)$$

ここで右下付き文字のyは降伏値を意味するものである。ヤング係数 $E=200$ (GPa)、ポアソン比 $\nu=0.333$,

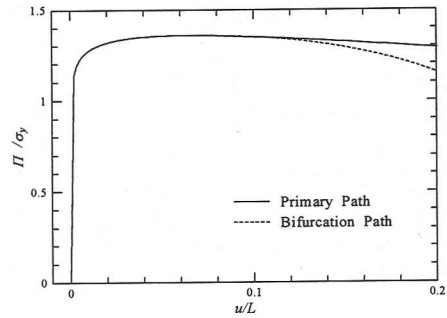


図-3 平面ひずみ状態のつり合い経路

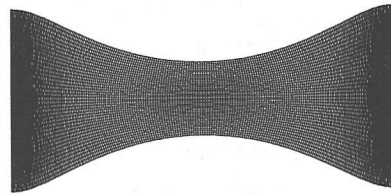


図-4 平面ひずみ状態における分岐モード

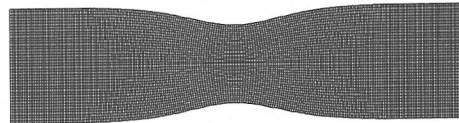


図-5 平面ひずみ状態の分岐経路上での変形図
($w/L=0.2$)



図-6 平面ひずみ状態の分岐経路上での負荷・除荷領域
(負荷：黒色、除荷：灰色) ($w/L=0.2$)

そして式(12)において $n=0.0625$ と設定して、硬化型の応力-ひずみ関係を仮定する。ここで設定したヤング係数や初期降伏応力等は、実際の鋼材の引張試験より概算したものであるが、べき乗硬化係数 n については文献(13)に沿ったものである。このべき乗硬化係数 n は荷重極大点及びその後の分岐の発生位置に大きく影響するが、分岐モードには一切影響しない。図-2 が 2次元解析におけるモデルであるが、対称性により 1/4 部分のみで解析を行った。2次元要素は4節点のアイソパラメトリック要素を用いた。そして荷重は端部の水平変位が一樣となるように作用させた。

平面ひずみ状態における数値積分では、volumetric ロッキングを避けるために選択型低減積分法を用いた。図-3 は平面ひずみ状態のつり合い経路である。ここで Π は公称応力であり、荷重変数を初期断面積 ($1.0 \times 2W$) で除することによって得られる。主経路に沿っては鋼材全体に渡って変形も応力状態も均一である。そして硬化型の構成方程式を用いているにもかかわらず、荷重極大点が発生する。これは断面積の減少が内力の低下をもたらすためである²⁵⁾。荷重極大点を越えた後に分岐点が発生するが、分岐点を越えた後も主経路に沿っては変形は均一のままで、全領域が負荷状態である。図-4 が分岐モードであり、拡散くびれモードを示していることが分かる。分岐経路上での変形図が図-5 である。そして、図-6 は分岐経路上における負荷・除荷領域である。分岐することによって鋼材の端部から除荷が始まり、その除荷領域は中央部へと広がる。そして除荷領域での変形の進行はほとんど停止し、残った塑性部分のみに変形が局所化していく。結果として拡散くびれがシミュレートされるものの、その後の局部くびれ等は発生しない。

平面応力状態においては volumetric ロッキングは発生しないため、数値積分法として完全積分を用いた。図-7 が平面応力状態におけるつり合い経路である。平面ひずみ状態と同じように荷重極大点を越えた後に分岐点が発生した。ここでも図-8 で示されるような分岐モードを用いて特に問題なく分岐経路への切り換えに成功した。そして、図-9 が分岐経路上での変形図であるが、ここでは×状の局部くびれが発生している。図-10 が分岐経路上での負荷・除荷領域である。平面応力状態の場合では分岐によって除荷が鋼材の端部から始まり、その後中央部から再び除荷が始まる。そして除荷域に挟まれた×状の細い塑性域が残されると共に、その×状の部分に変形が集中することによって局部くびれを形成する。

平面応力状態においては、図-9 のように×状の局

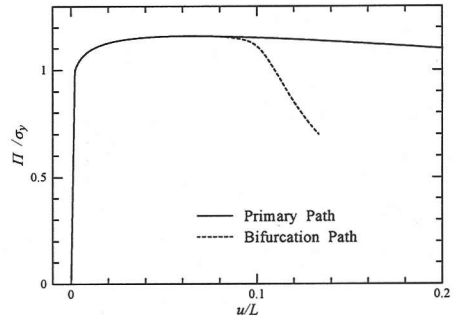


図-7 平面応力状態のつり合い経路

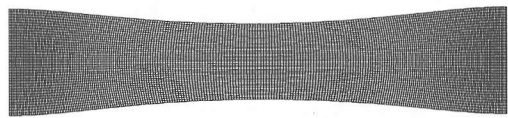


図-8 平面応力状態における分岐モード

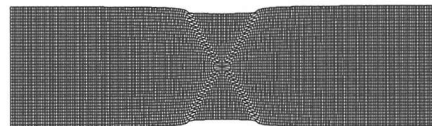


図-9 平面応力状態の分岐経路上での変形図 ($u/L=0.133$)

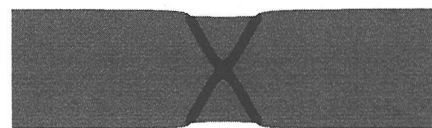


図-10 平面応力状態の分岐経路上での負荷・除荷領域 (負荷: 黒色, 除荷: 灰色) ($u/L=0.133$)

部くびれが発生しているにもかかわらず、図-8 で示される分岐モードは拡散くびれモードである。よって分岐直後は拡散くびれが発生して、その後次の段階の局部くびれへと変形が進行したことが分かる。

1度分岐経路に切り換えた後は、ただ単にその分岐経路を追跡するだけで拡散くびれから局部くびれへと変形が移行している。また分岐経路追跡の際に、特異点通過の指針となる接線剛性マトリクスの負の固有値の個数^{29), 41)}に変化は見られなかった。よって均一変形から拡散くびれ、そして局部くびれへと移行する塑性不安定現象は2回の分岐が発生しているのではない。分岐は1回のみでその分岐挙動として拡散くびれが発生する。局部くびれは1回目の分岐によって引き起こされた除荷域に挟まれる塑性部分に、変形が局所化しているにすぎない。このことは本研究における J_2 流れ則を用いた範囲内においては、構成式レベルにおける、守時、奥山^{42) ~ 45)}による一連の議論とも一致している。

平面ひずみ状態でも平面応力状態においても、塑性不安定現象における分岐は拡散くびれへの分岐1回のみである。そして、すべて負荷域である鋼材に1回の分岐によって除荷が始まり、それが拡散くびれを発生させると同時に次の段階の局所化現象をもたらす。また分岐経路における不均一変形状態においてはもはや分岐は発生しない。つまり、拡散くびれの次の段階に発生する局所化現象は除荷の進展具合に依存するわけであるから、それは同時に鋼材の形状に依存していると予測される。ゆえに塑性不安定現象を本質的に捉えるためには2次元解析では不十分で、鋼材の幾何学的な形状を再現した3次元解析によって拡散くびれ後の除荷域の3次元的な広がりやを考慮しなければならない。

(2) 3次元塑性不安定解析

ここでは3次元状態での塑性不安定解析を行う。弾塑性構成方程式としては2次元解析と同様に J_2 流れ則を用いるものとし、材料定数等のパラメーターも2次元解析で用いたものとすべて同一とする。図-11に解析モデルを示すが、対称性から1/8部分のみを考慮した。3次元要素には8節点のアイソパラメトリックソリッド要素を用い、volumetric ロッキングを回避するために選択型低減積分を実施している。引張力を与えても均一変形となるような境界条件^{20), 21)}を用いて、端部の軸方向変位が一様となるように拘束し、図-11の斜線部分のZ軸方向に荷重を作用させた。この境界条件は(X, Y, Z)方向の変位を(U, V, W)、表面力を(T_1, T_2, T_3)とすると、式(14)のようである。

$$\begin{aligned} U=0, \quad t_2=t_3=0 \quad \text{at} \quad X=0 \\ V=0, \quad t_3=t_1=0 \quad \text{at} \quad Y=0 \\ W=0, \quad t_1=t_2=0 \quad \text{at} \quad Z=0 \end{aligned} \quad (14)$$

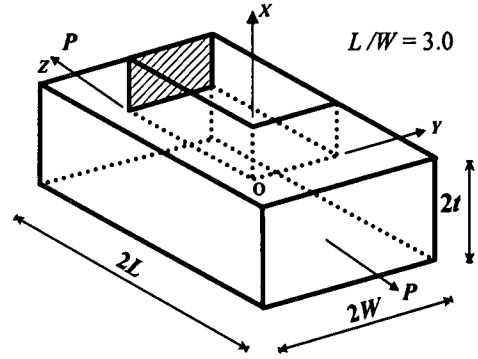


図-11 3次元塑性不安定解析の鋼材モデル
(解析は1/8モデルについて行う)

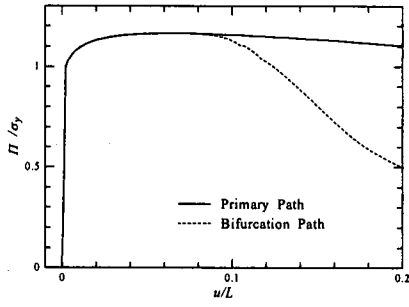
表-1 3次元塑性不安定解析の幅厚比

モデル	幅厚比(W/t)
T-20	20/1 = 20
T-10	20/2 = 10
T-6.7	20/3 = 6.666...
T-5	20/4 = 5
T-4	20/5 = 4
T-3	15/5 = 3
T-1.5	15/10 = 1.5
T-1	10/10 = 1

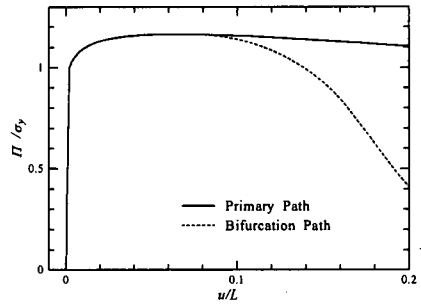
3次元解析では、表-1に示すような幅厚比(W/t)の異なる8種類の鋼材の計算を行った。なお、モデルのTの後の数値は幅厚比の値を示す。

図-12がそれぞれのモデルのつり合い経路である。2次元解析と同様に3次元解析でもすべてのモデルにおいて荷重極大点の発生直後に分岐が発生した。またそれぞれの分岐モードは拡散くびれモードを示していた。そして分岐によって拡散くびれが発生した後は、その分岐経路上において新たな分岐点の存在は確認されなかった。拡散くびれ後の挙動においては塑性変形の局所化が著しくなるが、その局所化現象はモデルの幅厚比により大きく異なる。また拡散くびれを示す分岐点後も、さらに主経路を追跡することによって多数の分岐点が発生するが、これらはすべてが高次の拡散くびれモードであった。

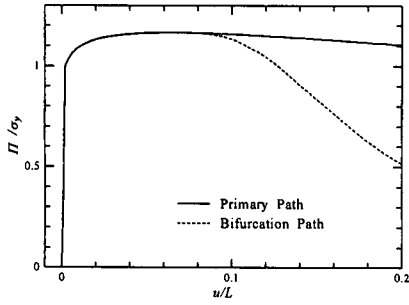
図-13がそれぞれのモデルの分岐経路上での変形図である。モデルT-20は幅厚比が20で、応力状態がほぼ平面応力状態である。そのため、図-9に示されるような平面応力状態のもと極めて似通った×状の局部くびれが発生している。モデルT-10の場合では、モデルT-20とほとんど大差のない×状の局部



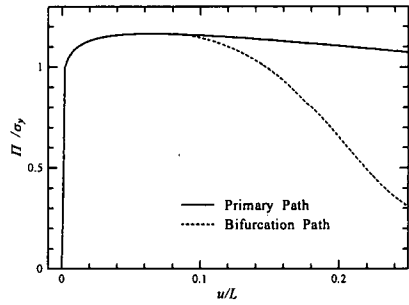
モデル T-20



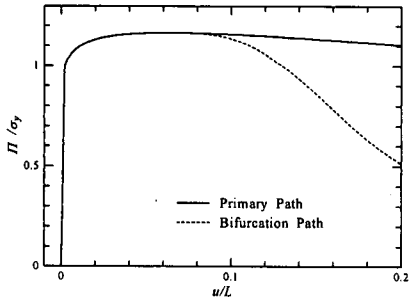
モデル T-4



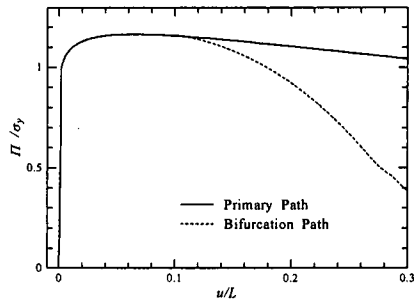
モデル T-10



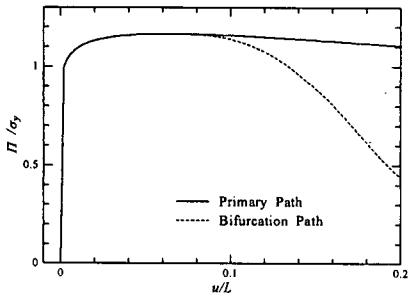
モデル T-3



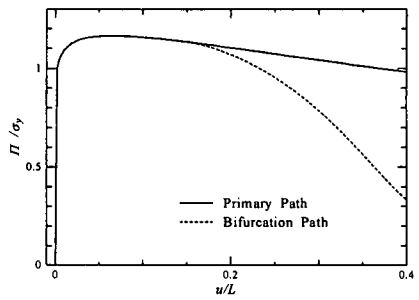
モデル T-6.7



モデル T-1.5

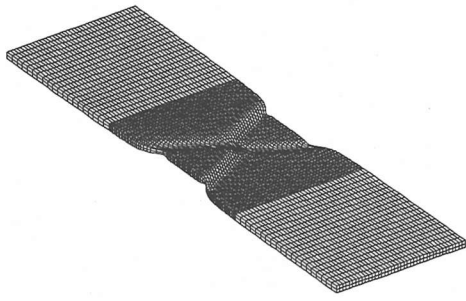


モデル T-5

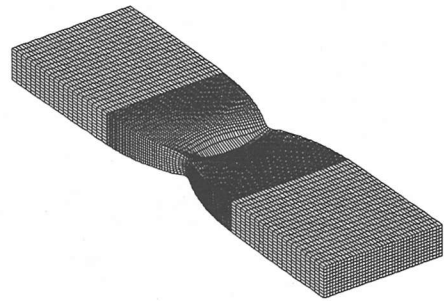


モデル T-1

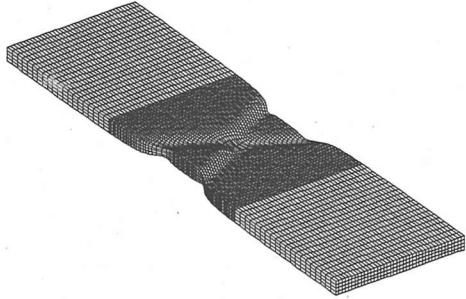
図-12 3次元塑性不安定解析のつり合い経路



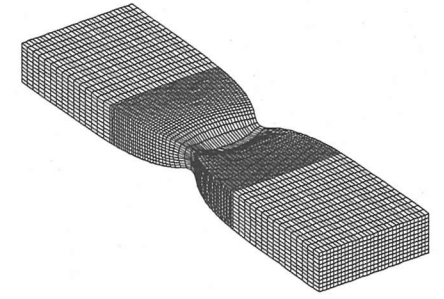
モデル T-20 ($u/L=0.167$)



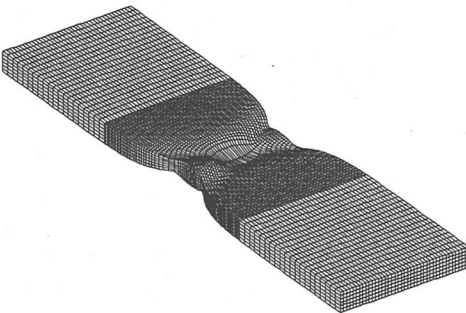
モデル T-4 ($u/L=0.2$)



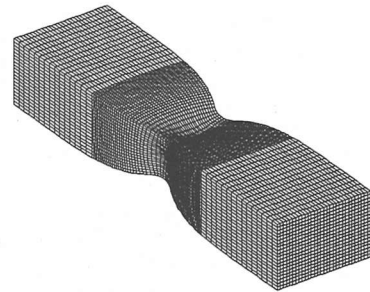
モデル T-10 ($u/L=0.167$)



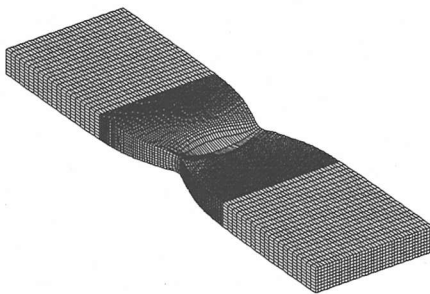
モデル T-3 ($u/L=0.233$)



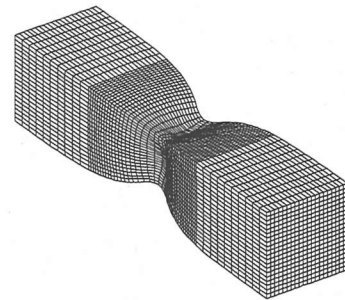
モデル T-6.7 ($u/L=0.2$)



モデル T-1.5 ($u/L=0.267$)



モデル T-5 ($u/L=0.2$)



モデル T-1 ($u/L=0.367$)

図-13 3次元塑性不安定解析の分岐経路上での変形図

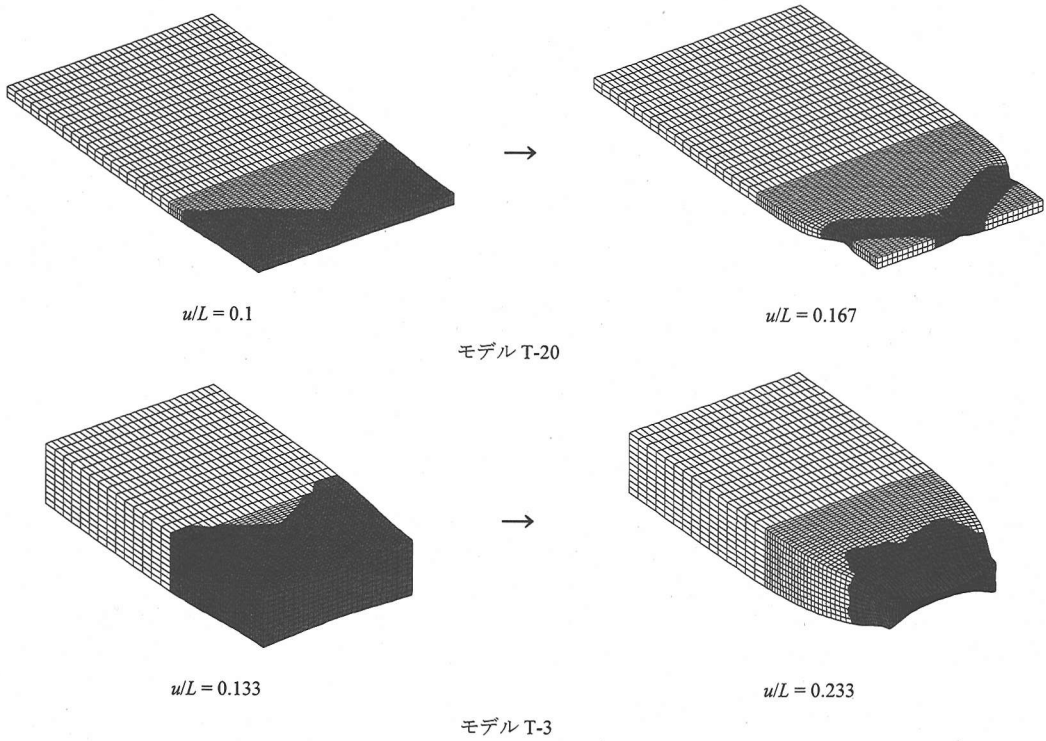


図-14 3次元塑性不安定解析の分岐経路上での負荷・除荷領域（黒：負荷領域，白：除荷領域）

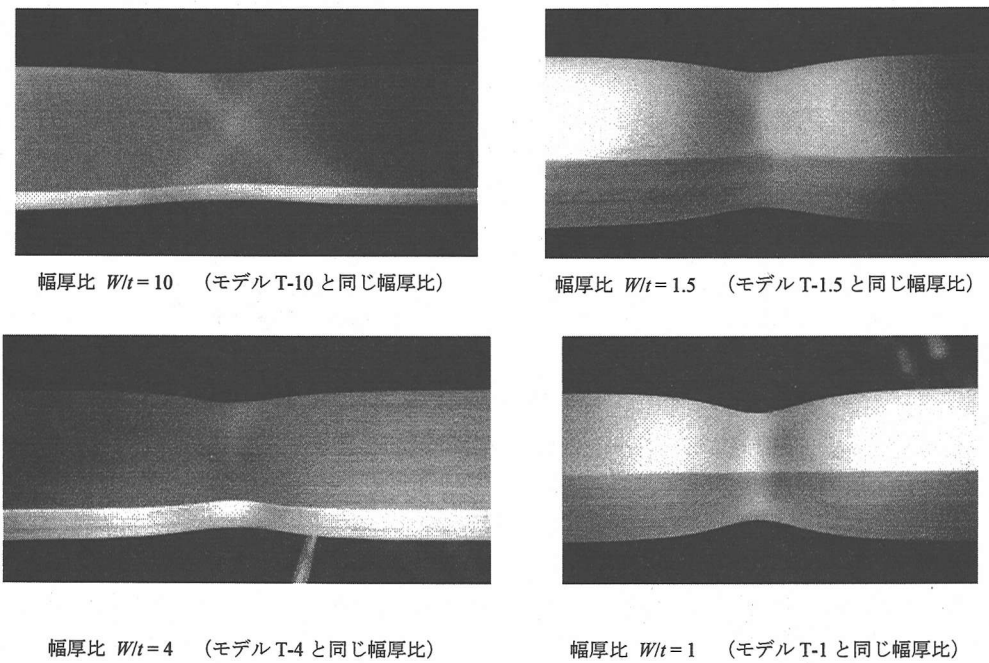


図-15 鋼材の引張試験による破断直前の状態

くびれが発生するが、ここでの局部くびれの幅はモデル T-20 の場合に比べて大きい。つまり幅厚比の大きな薄い鋼材においては鋼材サイズが同じである場合、塑性不安定現象により発生する×状の局部くびれの幅はその厚さに比例する。そして、この×状の局部くびれ領域ではせん断変形が卓越しており、この局部くびれの発生がそのまません断的分離の破断と見なすことができる。

モデル T-6.7 での計算結果になると、鋼材中心部で局所的に板厚方向に陥没するモードが目立つようになってくる。そしてモデル T-5 での計算結果からは、もはやせん断変形の卓越した×状の局部くびれを観察することはできなくなる。その代わりに鋼材の長手方向とは垂直に板厚方向の狭い領域がくびれる、いわゆる集中型の局部くびれが発生する。この集中型の局部くびれが発生するという終局的な挙動は、モデル T-4, T-3 においてもほぼ同じである。

モデル T-1.5 ぐらいの幅厚比の鋼材になると、側面にも局部くびれが発生するようになる。そして幅厚比が 1 のモデル T-1 においては、正方形断面において 2 軸対称な局部くびれを観察することができる。

このように引張力を受ける鋼材は、拡散くびれが発生した後に、薄い部材は×状の局部くびれ、そして厚い部材の場合は集中型の局部くびれへと変形が移行する。このように拡散くびれの後の局部くびれの形態が異なる理由は、分岐経路上での除荷域の進展具合にある。そこで、×状の局部くびれが発生するモデル T-20 と集中型の局部くびれが発生するモデル T-3 の 2 つのモデルを取り上げ、分岐経路上での除荷領域の進展具合を図-14 に示し、拡散くびれ後の局部くびれ挙動が異なる原因を考察する。なお、図-14 に関しては、それぞれのモデルの中心において、長手方向と垂直な断面で切断した図を載せてある。

モデル T-20, T-3 とも分岐によって端部から除荷が発生する点に関しては共通の挙動である。しかし、次の段階の除荷領域の進展具合が大きく異なる。モデル T-20 では除荷が端部から始まって中心部に進展した後に、今度は中心部から再び除荷が発生して塑性部分が挟みこまれる。この除荷の進展具合も平面応力状態の 2 次元解析と同様である。そして残された×状の塑性部分のみに変形が集中して×状の局部くびれが形成される。

それに対してモデル T-3 では、鋼材の端部から除荷が進展した後に、モデル T-20 の場合のように鋼材中心部から除荷が始まるのではなく、端部からの除荷領域がさらに広がり材料中央の塑性域を楕円状に包み込む。そして、残された塑性域に変形が集中することによって集中型の局部くびれが発生する。こ

の程度の幅厚比の鋼材は JIS の引張試験でも推奨され、このような集中型局部くびれは実際の引張試験においても観察されており、3 次元解析が不可欠な塑性不安定現象である。

以上のように、拡散くびれの次の段階の挙動において、×状の局部くびれが発生するか集中型の局部くびれが発生するか否かは、拡散くびれによって引き起こされる除荷域に挟まれた最終的な塑性域の形状に依存する。そして最終的に残された塑性域のみに塑性変形が集中することによって、×状のもしくは集中型の局部くびれが発生することになる。この除荷域の進展具合は計算対象とする鋼材の 3 次元の形態に関与してくる。

6. 引張試験結果との比較

本研究での 3 次元塑性不安定解析の結果の正当性を確認するために、実際に鋼材 SM490 の引張試験を行い、破断直前の変形モードとの定性的な比較を行った⁴⁶⁾。用いた鋼材の幅厚比は 10, 4, 1.5, 1 であり、これらはそれぞれ前章のモデル T-10, T-4, T-1.5, T-1 に対応する。

図-15 が引張試験において塑性不安定現象により発生した破断直前の終局的変形モードである。これらの状態のすぐ後に鋼材はせん断的分離により破断した。まず図-15 の幅厚比が 10 の引張試験においては×状の局部くびれが発生しており、図-13 のモデル T-10 の計算結果とよく一致している。そして図-15 の幅厚比が 4 の鋼材の引張試験においては図-13 のモデル T-4 とほぼ同様の集中型局部くびれが観察できる。さらに図-15 の幅厚比が 1.5, 1 の試験結果においても、図-13 の同じ幅厚比のモデル T-1.5, T-1 の計算結果と局所の変形状態がよく一致していることが分かる。

このように幅厚比が 10 の薄い鋼材から幅厚比が 1 の極めて厚い鋼材の引張試験において、塑性不安定現象での破断直前の状態と、本研究における 3 次元塑性不安定解析の結果とが極めてよく一致していることが確認できる。

7. 結論

本論では、引張鋼材における塑性不安定現象を幾何学的側面に着目して説明することを試みた。これまで、拡散くびれ以降の局所化現象のシミュレートは材料不安定性の導入に頼っていたが、本研究では、実現象と整合するさまざまな終局的な局所化変形状

態を幾何学的な不安定性のみで再現できることを明らかにした。変形パターンに関しては、均一変形から拡散くびれを得て破断直前の終局的な局所化変形までは一連の幾何学的な不安定挙動である。それに対して、材料不安定挙動とは鋼材の破断そのものの議論である。もし破断までをシミュレートするときは、材料不安定性を導入するための多くの構成モデルが用意されている。以上のような結論は本研究で扱った3次元解析の重要性を強調するもので、上記で述べたように幾何学的不安定性と材料不安定性は全く別の議論であるため、たとえ材料不安定性を導入するための構成モデルを用いたとしても3次元解析は不可欠である。

なお、本研究の内容は第1著者が名古屋大学に提出した博士学位論文²⁴⁾の一部である。

謝辞：本研究における鋼材の引張試験は名古屋大学大学院・佐竹洋一氏に負う所が大きい。また本研究は1996年4月から1999年3月まで日本学術振興会の特別研究員であった第1著者の文部省科学研究費補助金(特別研究員奨励費)の援助を受けた。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Tvergaard, V. : Studies of Elastic-Plastic Instability, *J. Appl. Mech.*, Vol.66, pp.3-9, 1999.
- 2) 北川 浩 : くびれ進展の数値解析, 塑性と加工, Vol.22, pp.638-644, 1981.
- 3) 林 豊 : 塑性不安定を考へてみる, 塑性と加工, Vol.22, pp.425-432, 1981.
- 4) Tvergaard, V., Needleman, A. and Lo, K.K. : Flow Localization in the Plane Strain Tensile Test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.29, pp.115-142, 1981.
- 5) 北川 浩, 田辺淳二, 宿利清己, 浜田 実 : くびれの数値解析(平面ひずみの場合), 日本機械学会論文集(A編), 46巻405号, pp.486-496, 1980.
- 6) Petryk, H. and Thermann, K. : On Discretized Plasticity Problem with Bifurcation, *Int. J. Solids Structures*, Vol.29, pp.745-765, 1992.
- 7) McMeeking, R.M. and Rice, J.R. : Finite Element Formulations for Problems of Large Elastic-Plastic Deformation, *Int. J. Solids Structures*, Vol.11, pp.601-616, 1975.
- 8) Norris, D.M., Moran, B. Jr., Scudder, J.K. and Quinones, D.F. : A Computer Simulation of the Tension Test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.26, pp.1-19, 1978.
- 9) Burke, M.A. and Nix, W.D. : A Numerical Study of Necking in the Plane Tension Test, *Int. J. Solids Structures*, Vol.15, pp.379-393, 1979.
- 10) Mikkelsen, L.P. : Post-Necking Behavior Modeled by a Gradient Dependent Plasticity Theory, *Int. J. Solids Structures*, Vol.34, pp.4531-4546, 1997.
- 11) 北川 浩 : 塑性ひずみ局所化現象の解析 -最近の動向と問題点-, 日本機械学会論文集(A編), 48巻427号, pp.250-258, 1982.

- 12) Hill, R. : On Discontinuous Plastic States, With Special Reference to Localized Necking in Thin Sheets, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.1, pp.19-30, 1952.
- 13) 川井謙一 : 平面応力引張りに関するベンチマークテスト, 塑性と加工, Vol.32, pp.560-564, 1991.
- 14) 後藤 学 : 塑性学, コロナ社, pp.1-230, 1982.
- 15) Budiansky, B. : A Reassessment of Deformation Theories of Plasticity, *J. Appl. Mech.*, Vol.26, pp.259-264, 1959.
- 16) Christoffersen, J. and Hutchinson, J.W. : A Class of Phenomenological Corner Theories of Plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.25, pp.465-487, 1979.
- 17) Mathur, K.K., Needleman, A. and Tvergaard, V. : Ductile Failure Analyses on Massively Parallel Computers, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 119, pp.283-309, 1994.
- 18) Tvergaard, V. and Needleman, A. : Analysis of the Cup-Cone Fracture in a Round Tensile Bar, *Acta Metallurgica*, 32, pp.157-169, 1984.
- 19) 石崎 仁 : 非共軸項を付加したひずみ硬化弾塑性構成式による2次元局所化変形解析, 土木学会論文集, No.603/III-44, pp.113-127, 1998.
- 20) Zbib, H.M. and Jubran, J.S. : Dynamic Shear Banding : A Three-Dimensional Analysis, *Int. J. Plasticity*, Vol.8, pp.619-641, 1992.
- 21) 田中宏幸, 渡部 修 : 塑性硬化則とひずみ速度の影響を考慮したせん断帯の3次元有限要素解析, 日本機械学会論文集(A編), 63巻611号, pp.192-200, 1997.
- 22) Tvergaard, V. : Necking in Tensile Bars with Rectangular Cross-Section, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 103, pp.273-290, 1993.
- 23) Ikeda, K., Murota, K., Yamakawa, Y. and Yanagisawa, E. : Mode Switching and Recursive Bifurcation in Granular Materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.45, pp.1929-1953, 1997.
- 24) 岡澤重信 : 弾塑性分岐解析による固体のくびれ・せん断帯挙動に関する研究, 名古屋大学博士学位論文, 1999.
- 25) Swift, H.W. : Plastic Instability Under Plane Stress, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.1, pp.1-18, 1952.
- 26) 伊藤耿一 : 塑性不安定と分岐の理論, 塑性と加工, Vol.22, pp.1009-1015, 1981.
- 27) Wriggers, P. : Continuum Mechanics, Nonlinear Finite Element Techniques and Computational Stability, *Progress in Computational Analysis of Inelastic Structure*, edited by Stein, E., pp.245-287, 1993.
- 28) Hill, R. and Hutchinson, J.W. : Bifurcation Phenomena in the Plane Tension Test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.239-264, 1975.
- 29) 岡澤重信, 藤井文夫, 宇佐美勉 : 幾何学的非線形構造系の数値分岐解析法, 土木学会論文集, No.556/I-38, pp.95-106, 1997.
- 30) Bathe, K.J. : *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 1996.
- 31) 久田俊明, 野口裕久 : 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, pp.1-428, 1995.
- 32) Hill, R. : A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.6, pp.236-249, 1958.
- 33) 後藤芳顯, 張崇厚 : 比較的厚肉の円筒殻における提灯座屈からダイヤモンド座屈への塑性分岐過程の解析, 土木学会論文集, No.605/I-45, pp.105-115, 1998.
- 34) Tomita, Y. : Simulation of Plastic Instabilities in Solid Mechanics, *Appl. Mech. Rev.*, ASME, Vol.47, No.6, pp.171-205, 1994.
- 35) Noguchi, H., Okazawa, S. and Fujii, F. : Scaled Corrector and Branch-Switching in Necking Problems,

Computational Mechanics, to appear.

- 36) 富田佳宏 : 数値弾塑性力学, 養賢堂, pp.1-227, 1994.
- 37) Hutchinson, J.W. : Post Bifurcation Behavior in the Plastic Range, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.21, pp.163-190, 1973.
- 38) Hutchinson, J.W. : Plastic Buckling, *Advan. Appl. Mech.*, Vol.14, pp.67-144, 1974.
- 39) 野口裕久, 久田俊明 : Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析法の開発, 日本機械学会論文集 (A 編), 58 巻 555 号, pp.2191-2198, 1992.
- 40) 藤井文夫, 岡澤重信 : 剛性行列の固有ベアの数値と特異剛性行列を係数行列に持つ連立方程式の解法, 構造工学論文集, Vol.43A, pp.299-310, 1997.
- 41) Fujii, F. and Okazawa, S. : Pinpointing Bifurcation Points and Branch-Switching, *J. Engrg. Mech.*, Vol.123, No.3, pp.179-189, 1997.
- 42) 守時 一, 奥山栄樹 : 塑性不安定の本質的基準, 日本機械学会論文集 (A 編), 62 巻 601 号, pp.195-202, 1996.
- 43) 守時 一, 奥山栄樹 : せん断帯解析に見られる解析構造の矛盾点, 日本機械学会論文集 (A 編), 63 巻 613 号, pp.133-140, 1997.
- 44) 守時 一, 奥山栄樹 : 多価条件と塑性不安定の関連, 日本機械学会論文集 (A 編), 64 巻 617 号, pp.193-199, 1998.
- 45) 守時 一, 奥山栄樹 : 多価性に準拠した成形性の予測, 日本機械学会論文集 (A 編), 64 巻 622 号, pp.183-190, 1998.
- 46) 佐竹洋一, 岡澤重信, 宇佐美勉, 葛 漢彬 : 幅厚比の異なる金属材料の引張試験およびその考察, 平成 10 年度土木学会中部支部研究発表会講演概要集, pp.53-54, 1999.

(1999. 6. 28 受付)

LOCALIZED NECKING BEHAVIOR OF STEEL UNDER TENSION STATE USING A THREE-DIMENSIONAL PLASTIC INSTABILITY ANALYSIS

Shigenobu OKAZAWA, Tsutomu USAMI, Hirohisa NOGUCHI and Fumio FUJII

Localized necking is simulated by using three-dimensional elasto-plastic bifurcation analyses. In this study, localized deformations just before the shear fracture of specimens with various width-thickness ratios are analyzed using the J_2 -flow hardening theory only. After detecting a bifurcation point precisely and conducting a branch-switching procedure, excellent correlation is demonstrated between the numerical and the experimental results.